

Anwendung von Smoothed Particle Hydrodynamics in der Siedlungswasserwirtschaft

Michael Meister¹⁾, Nikolaus Fleischhacker²⁾, Wolfgang Rauch³⁾

¹⁾ Arbeitsbereich für Umwelttechnik, Institut für Infrastruktur, Universität Innsbruck, Technikerstrasse 13, 6020 Innsbruck, Österreich, Michael.Meister@uibk.ac.at

²⁾ Arbeitsbereich für Umwelttechnik, Institut für Infrastruktur, Universität Innsbruck, Technikerstrasse 13, 6020 Innsbruck, Österreich, Nikolaus.Fleischhacker@uibk.ac.at

³⁾ Arbeitsbereich für Umwelttechnik, Institut für Infrastruktur, Universität Innsbruck, Technikerstrasse 13, 6020 Innsbruck, Österreich, Wolfgang.Rauch@uibk.ac.at

Kurzfassung

Zahlreiche Strömungsprobleme in der Siedlungswasserwirtschaft können mittels vereinfachter Methoden berechnet werden. Zum Beispiel werden Reaktoren meist als voll durchmischt angenommen und Gerinneströmungen durch ein eindimensionales Modell approximiert. Beeinflusst aber die Strömung die Funktion der Infrastruktur ist es notwendig komplexere numerische Berechnungen mit Computational Fluid Dynamics (CFD) Methoden durchzuführen. Beispiele dafür sind die Modellierung von Nachklärbecken, Faulbehältern und komplexen Mischwasserbehandlungsanlagen. In diesem Artikel präsentieren wir exemplarisch die Anwendungsmöglichkeiten in der Siedlungswasserwirtschaft der Lagrange'schen partikelbasierten Computational Fluid Dynamics (CFD) Methode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

1. Einleitung und Beschreibung der Methodik

Das Grundprinzip von SPH beruht darauf eine Flüssigkeit durch Diskretisierung in Partikel konstanter Masse zu modellieren. Jedem SPH Partikel werden physikalische Parameter wie Dichte, Druck und Geschwindigkeit zugeordnet, deren Zeitentwicklung durch ein geschlossenes Gleichungssystem von Kontinuitäts-, Impuls- und Zustandsgleichung beschrieben und durch Gewichtung der Nachbarschaft gelöst wird (vgl. Abbildung 1). Das heißt die Änderung der Dichte bzw. der Geschwindigkeit eines Referenzpartikels wird anhand der Parameter der Nachbarpartikel berechnet, sodass anstelle einer partiellen Differentialgleichung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen numerisch gelöst wird.

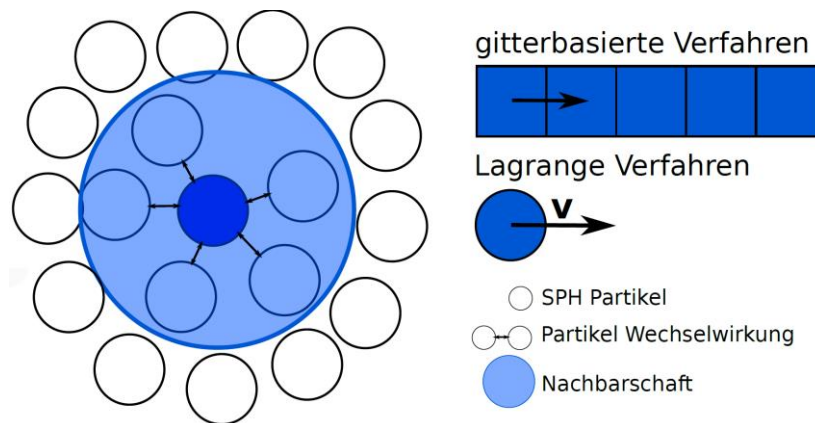


Abbildung 1: Advektion eines SPH Partikels durch Gewichtung des Einflusses von 5 Nachbarn (abgeänderte Grafik aus Sitzenfrey et al., 2014b)

Die Verwendung von SPH in der Siedlungswasserwirtschaft führt zu mehreren Vorteilen im Vergleich zu konventionellen gitterbasierten CFD Methoden. Da jedes Partikel eine konstante Masse trägt und die Anzahl konstant bleibt, ist die Massenbilanz implizit erfüllt. Zudem führt die Berechnung des Druckes durch Gewichtung der Nachbarpartikel zu einer Nulldruckbedingung an Wasseroberflächen, sodass die Simulation freier Oberflächen direkt unterstützt wird. Weiters ermöglicht die Standardformulierung von SPH Mehrphasensimulationen, wobei bei hohen Dichteunterschieden wie bei Luft-Wasser numerische Korrekturen notwendig sind (Colagrossi and Landrini, 2003; Monaghan, 2013). Aufgrund der exakten Beschreibung der Advektion ist SPH besonders zur Simulation von Transportvorgängen in Gerinnen geeignet. Durch Markierung einzelner Partikel kann deren Bahnlinie verfolgt werden. Abschließend ist die Geometrie eines Problems sofort adaptierbar, da nur die initiale Partikelverteilung verändert werden muss. Insbesondere werden feste Ränder durch stationäre Partikel beschrieben, wobei ein Kräftegleichgewicht zwischen Flüssigkeits- und stationären Wandpartikeln angesetzt wird (Adami et al., 2012).

2. Anwendungsbeispiele

Ziel dieser Arbeit ist es die Stärken und Schwächen der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Methode für Anwendungen in der Siedlungswasserwirtschaft vorzustellen. Anstelle einer komplexen vollständigen Beschreibung der Methodik und der detaillierten Abhandlung eines Einzelbeispiels wird der Schwerpunkt auf einen Gesamtüberblick gesetzt. Wir führen bewusst eine Vielzahl einfacher Anwendungsbeispiele zur Simulation von Gerinneströmungen, Sedimentations- und Transportvorgängen bzw. Belüftungsprozessen in der Abwasserreinigung an und verdeutlichen jeweils die Vor- und Nachteile von SPH. In einem abschließenden Kapitel werden die Anwendbarkeit auf reale Probleme und der damit verbundene Rechenaufwand diskutiert. Ein erweitertes Manuskript dieser Arbeit wird voraussichtlich in der ÖWAV-Schriftenreihe 1-2/2015 erscheinen.

2.1. Gerinneströmungen

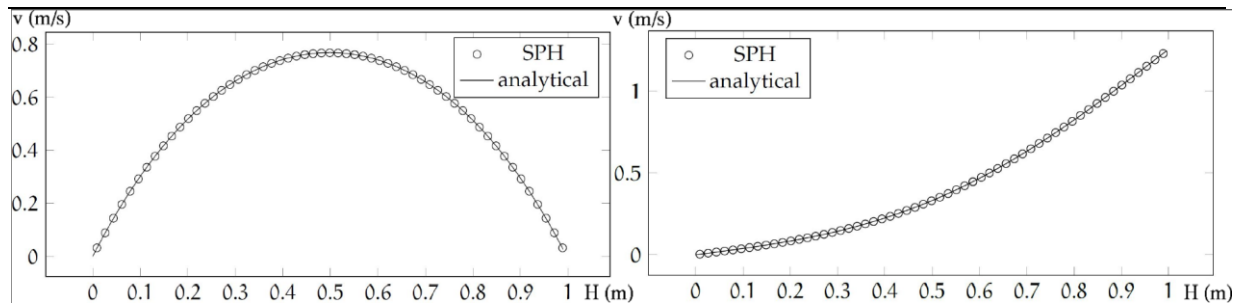


Abbildung 2: Vergleich des SPH Geschwindigkeitsprofils für den Poiseuille und Couette Fluss mit der analytischen Lösung

Die Modellierung von Gerinneströmungen mit SPH hat den Vorteil, dass sowohl ein Rückstau, Zuflüsse z.B. durch Niederschlagswasser als auch Transportvorgänge beschrieben werden können. Aufgrund der Notwendigkeit einer detailgetreuen Auflösung wird jedoch schon bei niedrigen Reynoldszahlen ein Turbulenzmodell zur Erreichung korrekter Geschwindigkeitsprofile und zur Sicherstellung einer Langzeitstabilität benötigt (Meister *et al.*, 2014). Im Spezialfall der Annahme eines laminaren Poiseuille bzw. Couette Flusses für geschlossene Gerinne liefert die Standardformulierung von SPH auch bei geringer Auflösung akkurate Ergebnisse (vgl. Abbildung 2).

Bei Abweichungen von diesen einfachen laminaren Strömungsprofilen, wie zum Beispiel beim Einstau durch ein Wehr, ist eine detailliertere Auflösung durch Erhöhung der Partikelanzahl notwendig. Exemplarisch zeigt Abbildung 3 die SPH Simulation eines Poleni-Überfalls bzw. eines Torricelli Ausflusses. Um die Energiebilanz zu

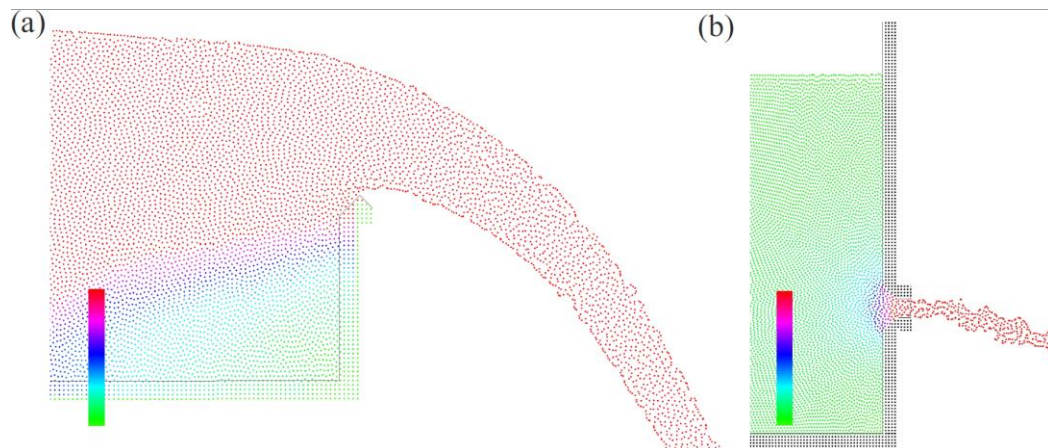


Abbildung 3: Simulation eines Poleni-Überfalls bzw. eines Torricelli-Ausflusses mit SPH

überprüfen, haben wir für ersteres Beispiel den simulierten Durchfluss mit dem nach der Poleni-Überfallformel berechneten Wert verglichen:

$$Q_{\text{SPH}} = 1.675 \pm 0.045 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \approx 1.661 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = Q_{\text{Poleni}} \quad (1)$$

Eine durchgeführte Konvergenzstudie zeigt eine Konvergenzrate von 1.38 (Meister *et al.*, 2014).

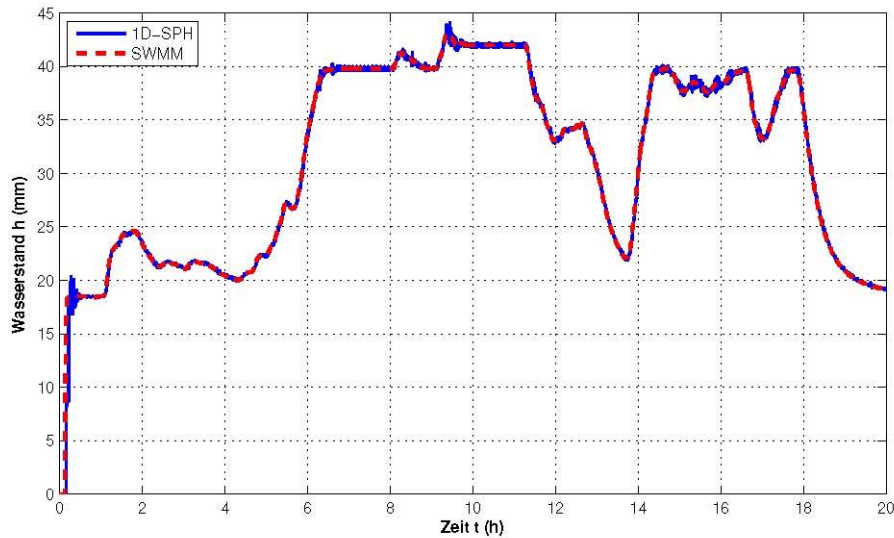


Abbildung 4: Vergleich von SWMM mit einem neuen Algorithmus zur Simulation der kinematischen Welle mit SPH ($x = 200$ m)

Eindimensionale Näherung

Um vollständige Kanalnetze simulieren zu können, werden Gerinne in der Urbanhydrologie meist durch eindimensionale Näherungen beschrieben. Falls der Einfluss der lokalen Beschleunigung und Höhenänderung vernachlässigt wird, können die Flachwassergleichungen durch den kinematischen Wellenansatz beschrieben werden (Ponce, 1991). In der Siedlungswasserwirtschaft hat sich zur Simulation von Kanalnetzen das Softwarepaket SWMM (Storm Water Management Model) etabliert, welches auf dem eulerbasierten finite Differenzen Verfahren zur örtlichen und zeitlichen Diskretisierung basiert.

Unter der Annahme des kinematischen Wellenansatzes haben wir einen neuen Flachwassergleichungs-SPH-Löser entwickelt (Fleischhacker *et al.*, 2014). Im Vergleich zum in SWMM angewandten finite Differenzen Verfahrens gewährleistet der SPH-Löser die Massenbilanz und kann zur Beschreibung von Transportprozessen erweitert werden. Bei der neuen 1D-SPH-Formulierung wird die Partikelbewegung in Abhängigkeit der Fluidhöhe h ermittelt, wobei über den Manning-Strickler-Reibungsansatz auf die Partikelgeschwindigkeit v geschlossen wird.

Aufbauend auf die in (Fleischhacker *et al.*, 2014) präsentierten Ergebnisse, zeigen wir die Leistungsfähigkeit dieses Solvers am Beispiel der Berechnung einer Abflussganglinie im Netz von Neu-Götzens (Sitzenfrei *et al.*, 2014a). Die Abflussganglinie wird in beiden Implementierungen in ein Rechtecksgerinne mit einer Breite von $B = 1$ m, einer Länge von $l = 1000$ m und einer Gerinneneigung von 1% mit einem Strickler-Beiwert von $k_{st} = 40$ $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ eingeleitet. Die zeitliche Diskretisierung wird in beiden Simulationen mit $\Delta t = 1$ s festgesetzt, wobei sich die örtliche Diskretisierung wie folgt unterscheidet: In SWMM wird der Kanal über die Länge in 50 Abschnitte geteilt. Da in der SPH-Implementierung die örtliche Auflösung adaptiv von der Partikelanzahl abhängt, ist die örtliche Auflösung bei hohen Wasserständen genauer als bei der SWMM Simulation. Der resultierende höhere Rechenaufwand kann durch die Einführung variabler Partikelvolumen in zukünftigen Implementierungen vermieden werden. Abbildung 4 zeigt eine gute Übereinstimmung der mit SWMM bzw. SPH simulierten Abflussganglinien. Die Genauigkeit der Simulationsergebnisse ist vergleichbar, der Rechenaufwand mit SPH ist aufgrund der teilweise genaueren Auflösung geringfügig höher.

2.2. Sedimentations- und Transportvorgänge

Im Unterschied zu den bisherigen Beispielen betrachten wir nachfolgend Mehrphasenprobleme, wobei bei der Wahl einer niedrigen Auflösung ein Feststoffpartikel durch ein einzelnes SPH Partikel beschrieben wird. Obwohl diese Näherung zu Interpolationsfehlern führt, sind diese bei geringen Dichteunterschieden wie im Fall Sediment-Wasser klein genug damit die Simulationsmethode stabil ist und das Absetzverhalten korrekt beschrieben wird. Exemplarisch zeigt Abbildung 5(a) die Sedimentation von Feststoffen mit der doppelten Dichte von Wasser und das dadurch induzierte Geschwindigkeitsvektorfeld in einem abgeschlossenen Becken. In Abbildung 5(b) ist ein Kanalausschnitt 1m unterwasserseitig eines konstanten Zuflusses mit einem

Wasserstand von 0.5 m und einer Geschwindigkeit von 2 m/s dargestellt. Im Zufluss werden gleichverteilt Feststoffpartikel mit der doppelten Dichte von Wasser eingetragen, welche sich unterwasserseitig zunehmend absetzen. Da mit dieser Methodik jedes Feststoffpartikel aufgelöst wird, ist der Rechenaufwand zu hoch um längere Kanalsegmente (vgl. Abbildung 4) bzw. komplexe Netze zu berechnen. Daher arbeiten wir daran Transportvorgänge im Kanal auch mit dem eindimensionalen Flachwassergleichungs-SPH-Löser zu beschreiben bzw. eine Kopplung zwischen ein- und zweidimensionalen Modellen zu ermöglichen. Dadurch könnte die detaillierte Auflösung auf notwendige Bereiche reduziert werden.

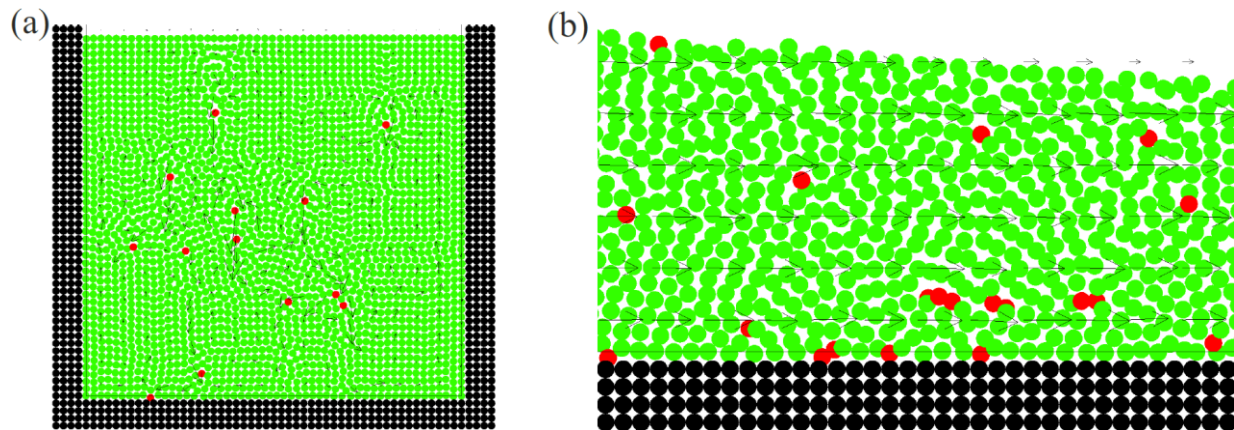


Abbildung 5: Sedimentation und Geschwindigkeitsvektorfeld von Feststoffen mit der doppelten Dichte von Wasser in einem abgeschlossenen Becken (a) bzw. im Kanal (b)

Zum Beispiel ist es möglich Transportvorgänge schwebender Feststoffe durch vereinfachte eindimensionale Modelle zu modellieren. Allerdings sind zur Beschreibung des Herausschwemmens der Feststoffe in einer

Spülklappe (vgl. Abbildung 6) komplexere Modelle notwendig. Aufgrund der Simulation einer sich rasch deformierenden freien Oberfläche, welche sehr dynamisch mit abgesetzten Feststoffen interagiert, ist SPH besonders für dieses Anwendungsbeispiel geeignet. Insbesondere sind hierfür bereits detaillierte Modelle entwickelt worden: Sedimente werden dabei als schwach kompressible pseudo-Newtonsche Flüssigkeit beschrieben und als Schwemm-Modell sind sowohl das Mohr-Coulomb als auch das Drucker-Prager Ablösemodell implementiert (Fourtakas *et al.*, 2013).

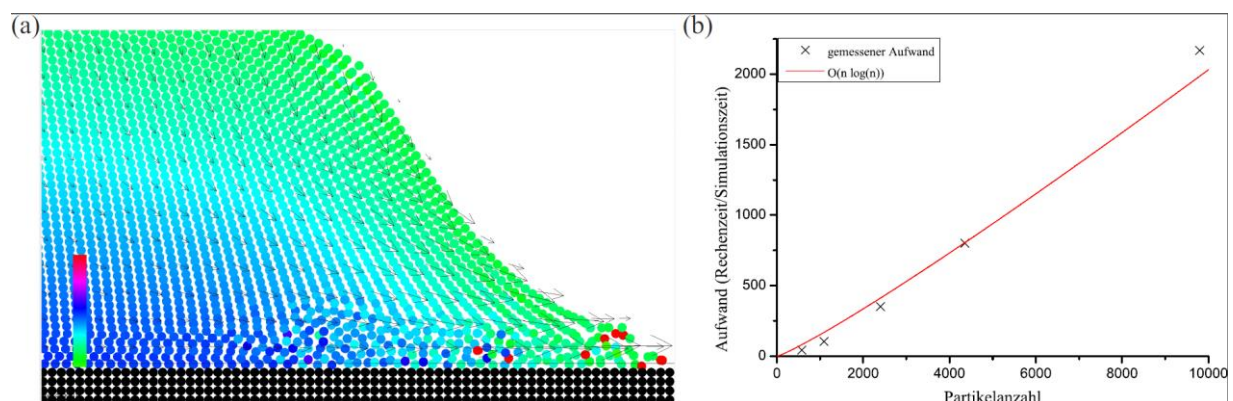


Abbildung 6: Feststoffe mit der doppelten Dichte von Wasser werden in einer Spülklappe weggeschwemmt (a). In (b) ist der Rechenaufwand in Abhängigkeit der Partikelanzahl (Auflösung) dargestellt.

2.3. Belüftungsprozesse in der Abwasserreinigung

In Ergänzung zur Beschreibung von Sedimentationsprozessen kann mit SPH in der Abwasserreinigung auch die Durchmischung im Belebungsbecken durch die eingeblasene Luft und der Sauerstofftransfer zwischen den verschiedenen Phasen durch advective Diffusion (Aristodemo *et al.*, 2010) simuliert werden. Allerdings ist die Standardformulation von SPH bei den vorherrschenden Dichteunterschieden von 1:1000 instabil. Entsprechende Korrekturen stabilisieren die Methode - zum Beispiel durch geringfügige Erhöhung des Druckes an der Phasengrenze Luft-Wasser (Monaghan, 2013) -, erhöhen aber den Rechenaufwand deutlich sodass die Anwendung derzeit auf die Simulation von Einzelblasen limitiert ist (z.B. Meister and Rauch, 2014). Nach

detaillierter Auseinandersetzung mit der Anwendung von SPH in der Abwasserreinigung sehen wir die Stärke dieser Methode neben der Beschreibung eines dreiphasigen Modells (Luft-Wasser-Sediment) insbesondere in der Kopplung mit biokinetischen Modellen wie dem etablierten Activated Sludge Modell (ASM).

3. Anwendbarkeit und Rechenaufwand

Obwohl die dargestellten Anwendungsbeispiele nur Ausschnitte realer Problemstellungen darstellen, kann SPH direkt auf komplexere Systeme bzw. auf dreidimensionale Probleme angewendet werden. Wie bei allen partikelbasierten CFD Methoden ist der Rechenaufwand sehr hoch und für Anwendungen in der Siedlungswasserwirtschaft meist der limitierende Faktor. Abbildung 6(b) verdeutlicht den Aufwand zur Spülklappen-Simulation unter Verwendung eines 4-Kern Bürocomputers und 28 Nachbarpartikeln. Bei der niedrigsten Auflösung von $n = 576$ Flüssigkeitspartikeln wird 1 s physikalische Zeit in 42 s berechnet. Dieser Wert steigt auf 2170 s, falls eine detailliertere Auflösung von $n = 9800$ Partikel gewählt wird. Insbesondere skaliert der Rechenaufwand mit $O(n \log(n))$, welches der (optimalen) Komplexität der Nachbarschaftssuche entspricht. Dieser Aufwand erlaubt zwar die detaillierte Berechnung kleinskaliger, abgeschlossener Systeme. Die detaillierte Auflösung einer Kläranlagen bzw. von Kanalnetzen - mit Ausnahme des eindimensionalen Flachwassergleichungs-Lösers - ist aber mit den derzeitigen verfügbaren Computerressourcen nicht möglich. Nichtsdestotrotz ist die Formulierung von SPH hochgradig parallel und die Berechnung wird zunehmend auf Grafikkarten ausgelagert, sodass mittlerweile mit bis zu 100 Millionen Partikeln gerechnet werden kann (Herault *et al.*, 2010).

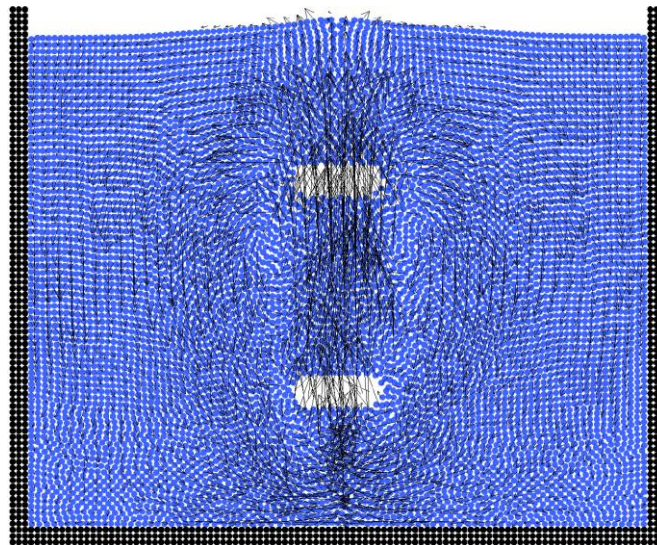


Abbildung 7: Mehrskaliges SPH Modell einer Luftsäule mit homogener Luftblasenverteilung. Eine Einzelblase wird durch 66 SPH Partikel mit einer experimentell vorgegebenen Aufstiegs geschwindigkeit charakterisiert, sodass 5min. physikalischer Zeit in 5h simuliert werden können.

4. Zusammenfassung

Zusammenfassend müssen für spezielle Problemstellungen in der Siedlungswasserwirtschaft komplexe Strömungsberechnungen durchgeführt werden, wobei dafür meist gitterbasierte CFD Methoden verwendet werden. Im Vergleich dazu führt der hier präsentierte innovative SPH Ansatz zu zahlreichen Vorteilen. Wir haben die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten in der Siedlungswasserwirtschaft zur Simulation von Gerinneströmungen, Sedimentations- und Transportvorgängen bzw. Belüftungsprozessen in der Abwasserreinigung anhand einfacher Beispiele aufgezeigt, sind uns aber bewusst, dass für die Etablierung von SPH in der Siedlungswasserwirtschaft noch einiges an Entwicklungsarbeit zu leisten ist. Die jeweiligen Modelle sind auf reale dreidimensionale Probleme direkt anwendbar. Allerdings ist die detaillierte Modellierung komplexer Kanalnetze bzw. kompletter Kläranlagen aufgrund des hohen Rechenaufwands mit den derzeitigen Computer-Ressourcen nicht möglich. Mögliche Lösungen hierfür sehen wir einerseits in einer variablen Auflösung durch Kopplung zwischen ein- und zweidimensionalen Modellen. Andererseits ist die SPH-Methode sehr gut für die Parallelisierung und Berechnung auf Grafikkarten geeignet, sodass Simulationen mit bis zu 100 Millionen Partikeln möglich sind.

Danksagung

Die Forschungsergebnisse dieser Arbeit sind Teil des folgenden Projekts, welches vom österreichischen Wissenschaftsfonds (FWF) gefördert wird: [P26768-N28]

Literatur

Adami, S., Hu, X., Adams, N., 2012. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 231, 7057–7075. Aristodemo, F., Federico, I., Veltri, P., Panizzo, A., 2010. Two-phase SPH modelling of advective diffusion processes. *Environ. Fluid Mech.* 10, 451–470. 6

Colagrossi, A., Landrini, M., 2003. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.* 191, 448–475.

Fleischhacker, N., Burger, G., Meister, M., Rauch, W., 2014. Simulating kinematic waves with smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydroinform.*, under review in 2014.

Fourtakas, G., Rogers, B. D., Laurence, D., 2013. Modelling sediment resuspension in industrial tanks using SPH on GPUs. *Proc. Int. Conf. SPHERIC SPH workshop Trondheim*, 310–316.

Herault, A., Bilotta, G., Dalrymple, R. A., 2010. SPH on GPU with CUDA. *J. Hydraul. Res.* 48, 74–79.

Meister, M., Burger, G., Rauch, W., 2014. On the Reynolds number sensitivity of smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydraul. Res.* 52, 1–12.

Meister, M., Rauch, W., 2014. Simulating rising bubble problems with smoothed particle hydrodynamics. *Proc. Conf. IMA Mathematical Modelling of Fluid Systems Bristol*, 1–10.

Monaghan, J., 2013. A simple SPH algorithm for multi-fluid flow with high density ratios. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 71, 537–561.

Ponce, V., 1991. The kinematic wave controversy. *J. Hydraul. Eng.* 117, 511–525.

Sitzenfrei, R., Kleidorfer, M., Arming, G., Möderl, M., Rauch, W., 2014a. Auswirkungen von alpinen urbanen Einzugsgebieten auf den Hochwasserschutz. *Proc. Conf. Aqua Urbanica Innsbruck*.

Sitzenfrei, R., Kleidorfer, M., Meister, M., Burger, G., Urich, C., Mair, M., Rauch, W., 2014b. Scientific computing in urban water management. In: Hofstetter, G. (Ed.), *Computational Engineering*. Springer International Publishing, pp. 173–193.