



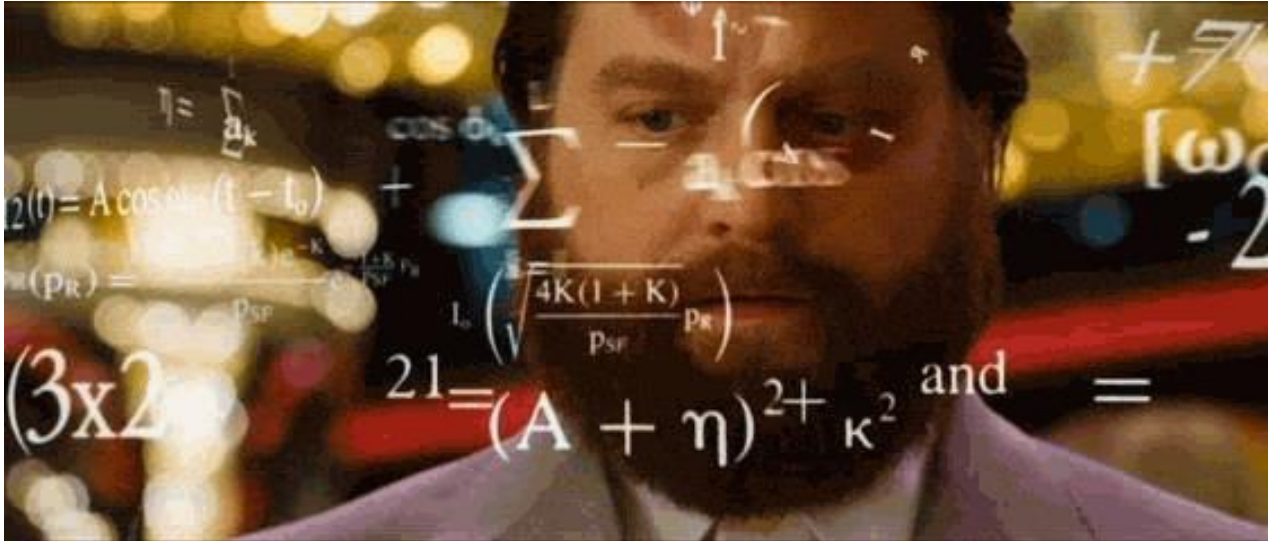
**Nicht nur reine Kopfsache**

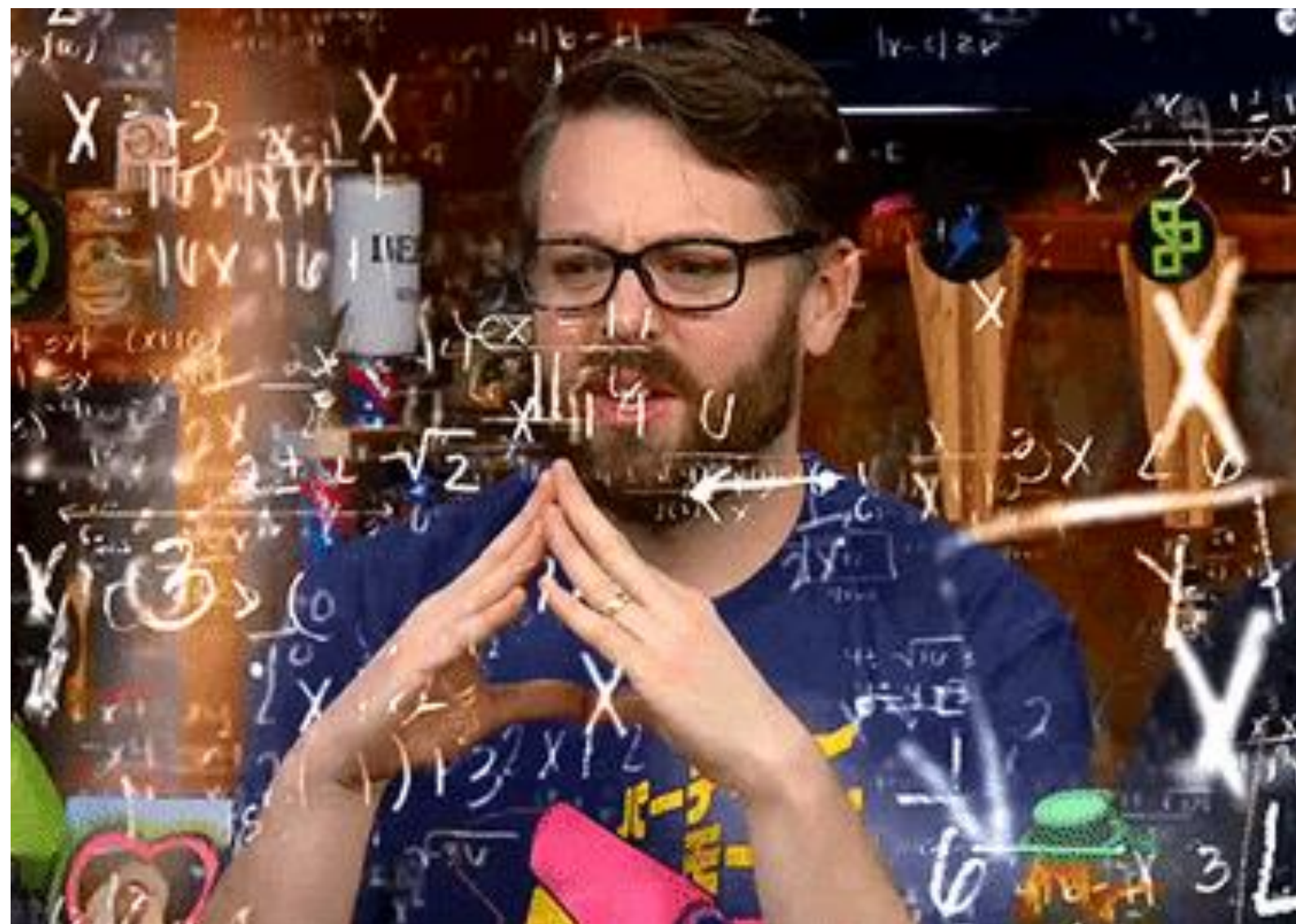
—

**Mathematik lernen mit dem ganzen Körper**

Ass.-prof.in  
Dr. Christina Krause

9. Februar 2023







**Strecke**

**Gerade**

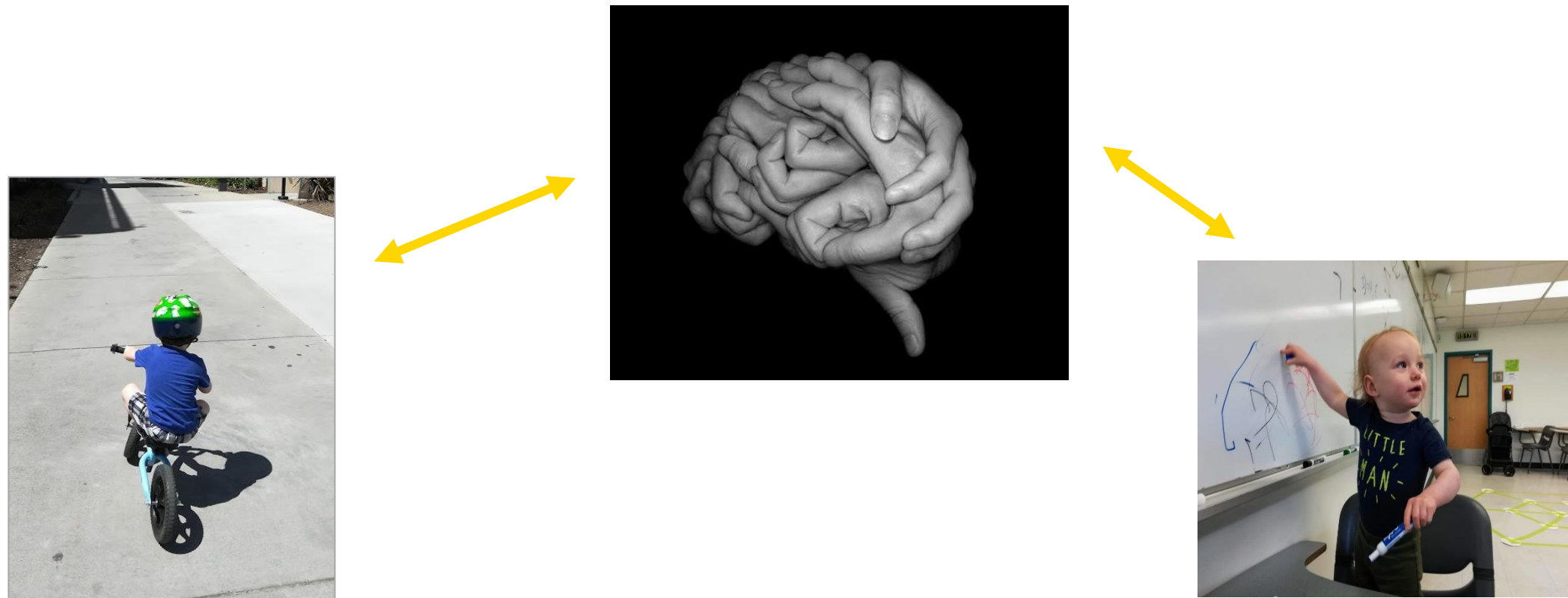
**Halbgerade**

# **Embodied Cognition und Embodiment**

# Die Rolle des Körpers für das Denken



Kognitive Prozesse sind tief verwurzelt in den körperlichen Interaktionen in und mit der physischen Welt, in Handlung und Wahrnehmung (Shapiro 2014, Varela, Thompson, & Rosch 1991, Wilson 2002, Nemirovsky 2003 konkret für Mathematik)



Wie und was wir denken (können) ist beeinflusst durch unser körperliches Sein in der physischen Welt

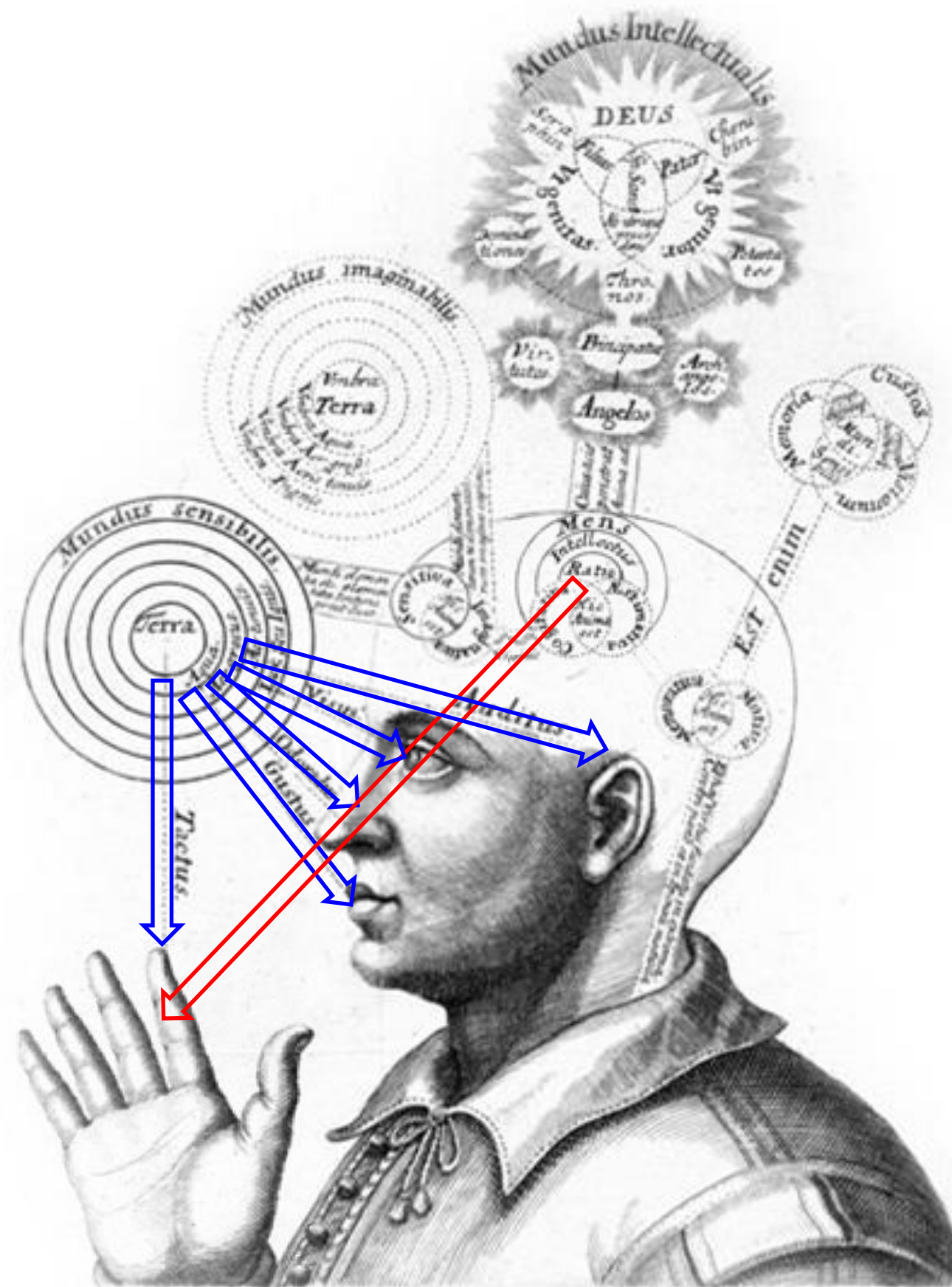
Kognitive Prozesse manifestieren sich in unserem (körperlichen) Ausdruck (z.B. Edwards 2009, Goldin-Meadow 2002)

# Embodied Cognition – Enaktivismus

Situative Wahrnehmungs-  
Handlungs-Schleife

bezieht Körper und  
Hirn ein

geformt auf Basis  
vorhandener kognitiver  
Schemata



(Original-Illustration:  
Robert Fludd, 1619)

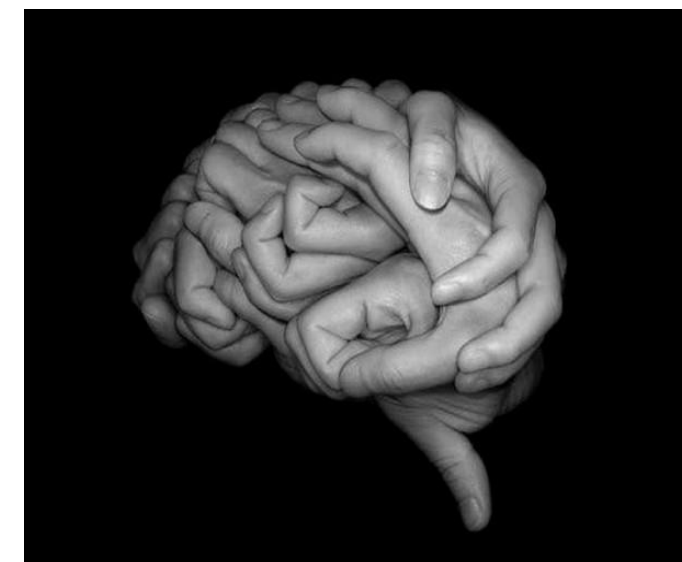
# → Ausbildung mathematischer Konzepte



Kognitive Prozesse sind tief verwurzelt in den körperlichen Interaktionen in und mit der physischen Welt, in Handlung und Wahrnehmung (Shapiro 2014, Varela, Thompson, & Rosch 1991, Wilson 2002, Nemirovsky 2003 konkret für Mathematik)

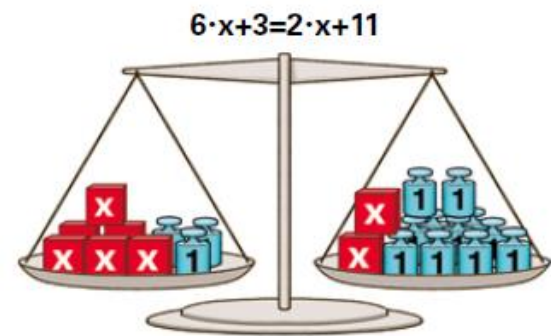
„While modulated by shifts of attention, awareness, and emotional states, understanding and thinking are perceptuo-motor activities;

quasi Grundvorstellungen – aus einer sensorimotorischen Perspektive





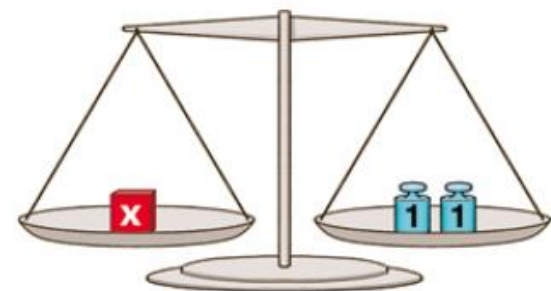
# Beispiel körperlicher Erfahrung als Grundlage für Mathematikverständnis: Das Waage-Modell



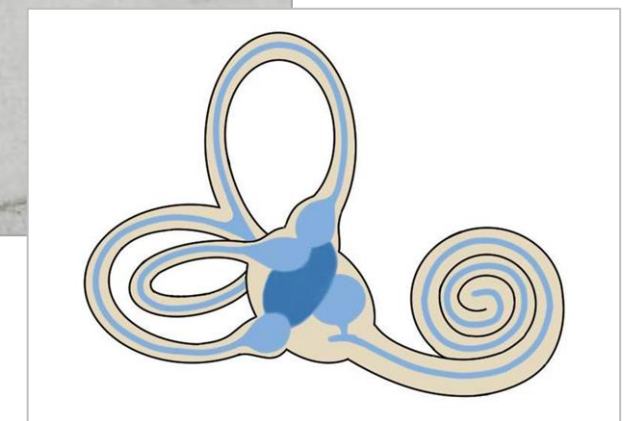
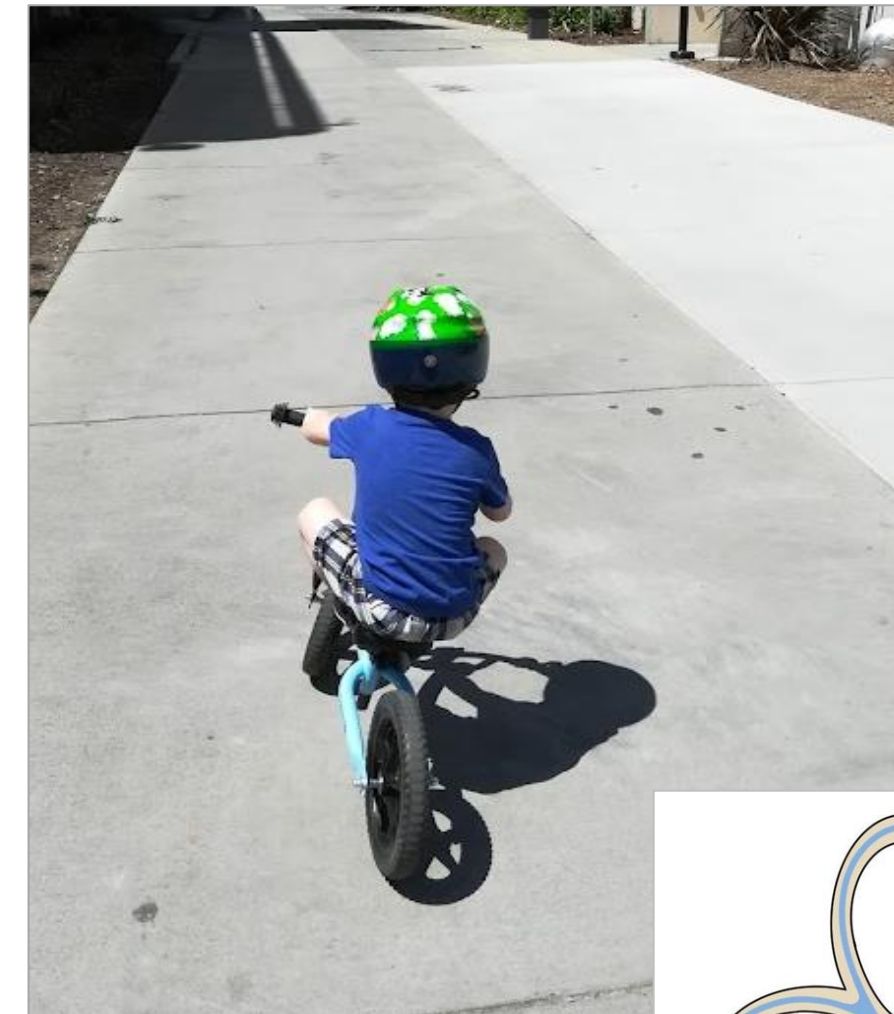
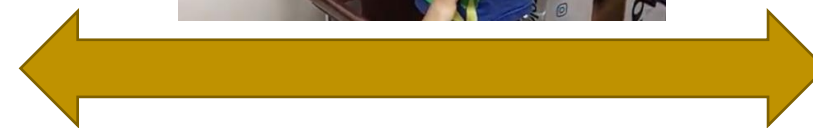
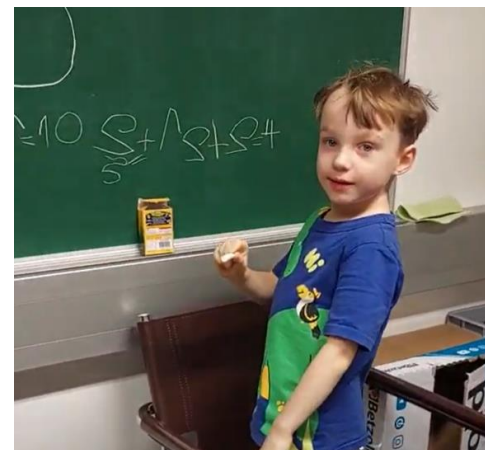
»Du nimmst auf jeder Seite zwei x und drei Wägestücke weg.«  
 $\rightarrow 4 \cdot x = 8$



»Behalte ein Viertel des Gewichts auf beiden Seiten.«  
 $\rightarrow x = 2$



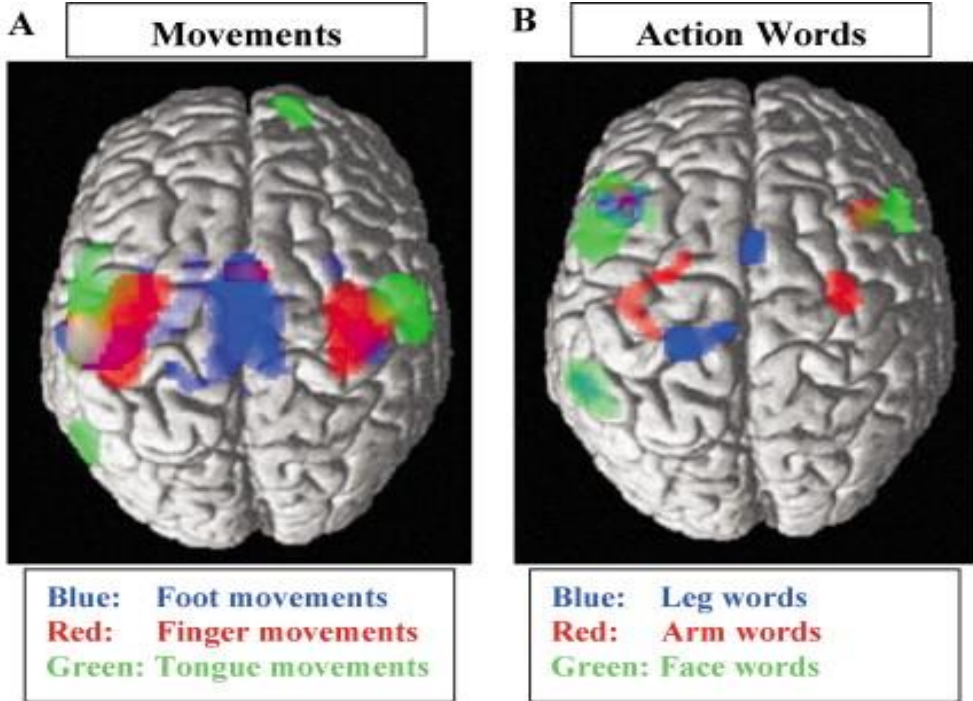
YOUSUN KOH



# Neuronale Hinweise auf ‚embodied cognition‘



kick pick lick



(Hauk, Johnsrude, & Pulvermüller, 2004)

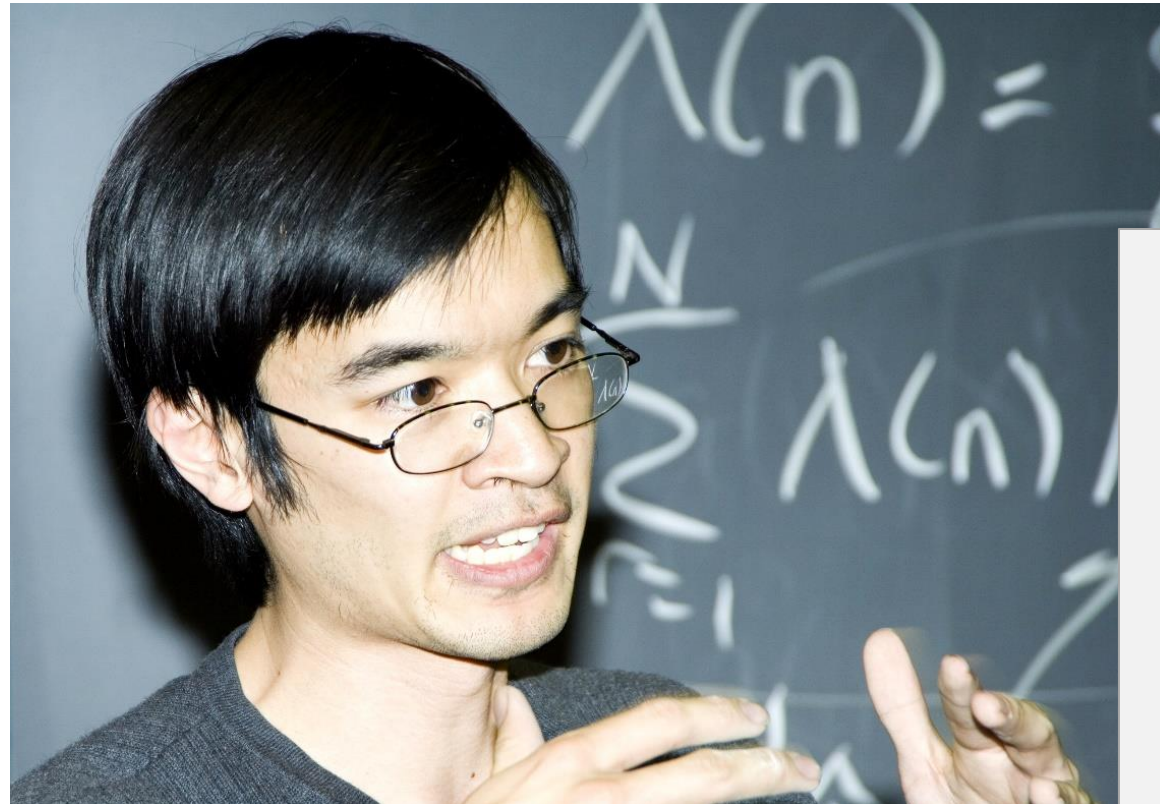


(Andres, Michaux, & Pesenti, 2012)

$$2x + 8 = 4x$$

$$2 - 5x = 3$$

(Landy & Goldstone, 2007)

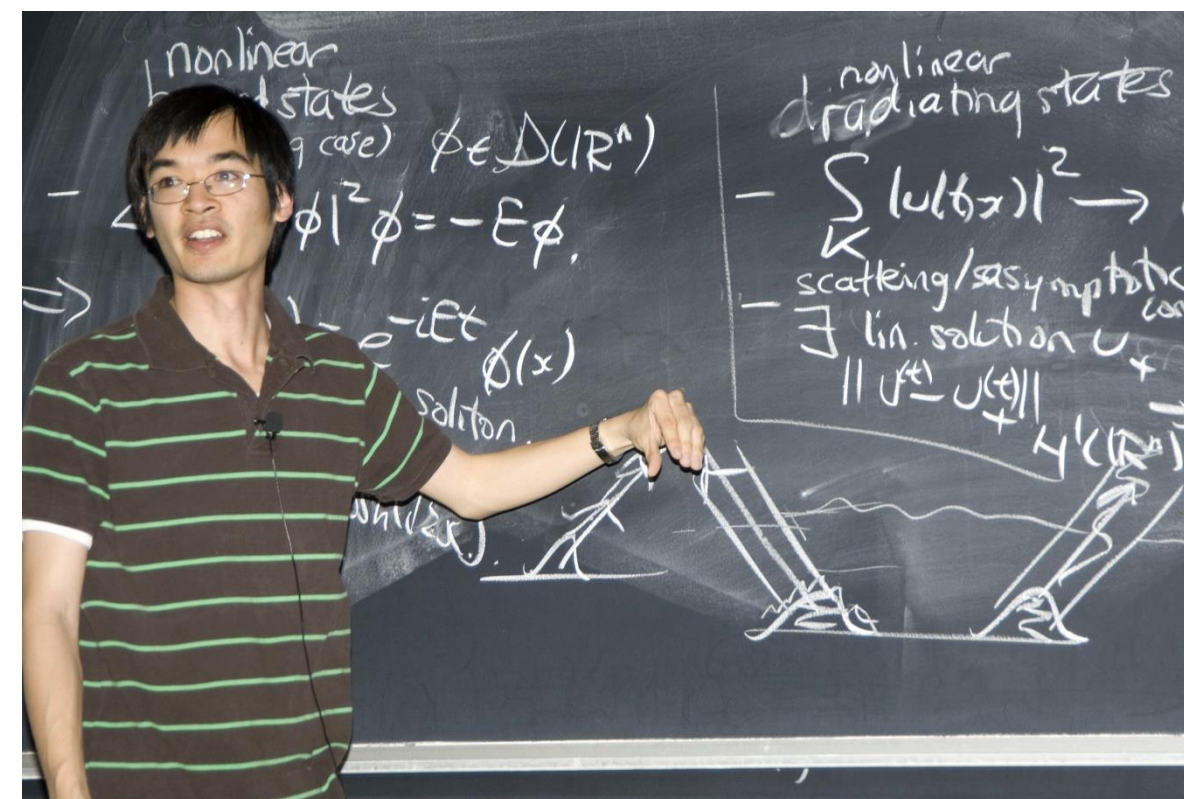
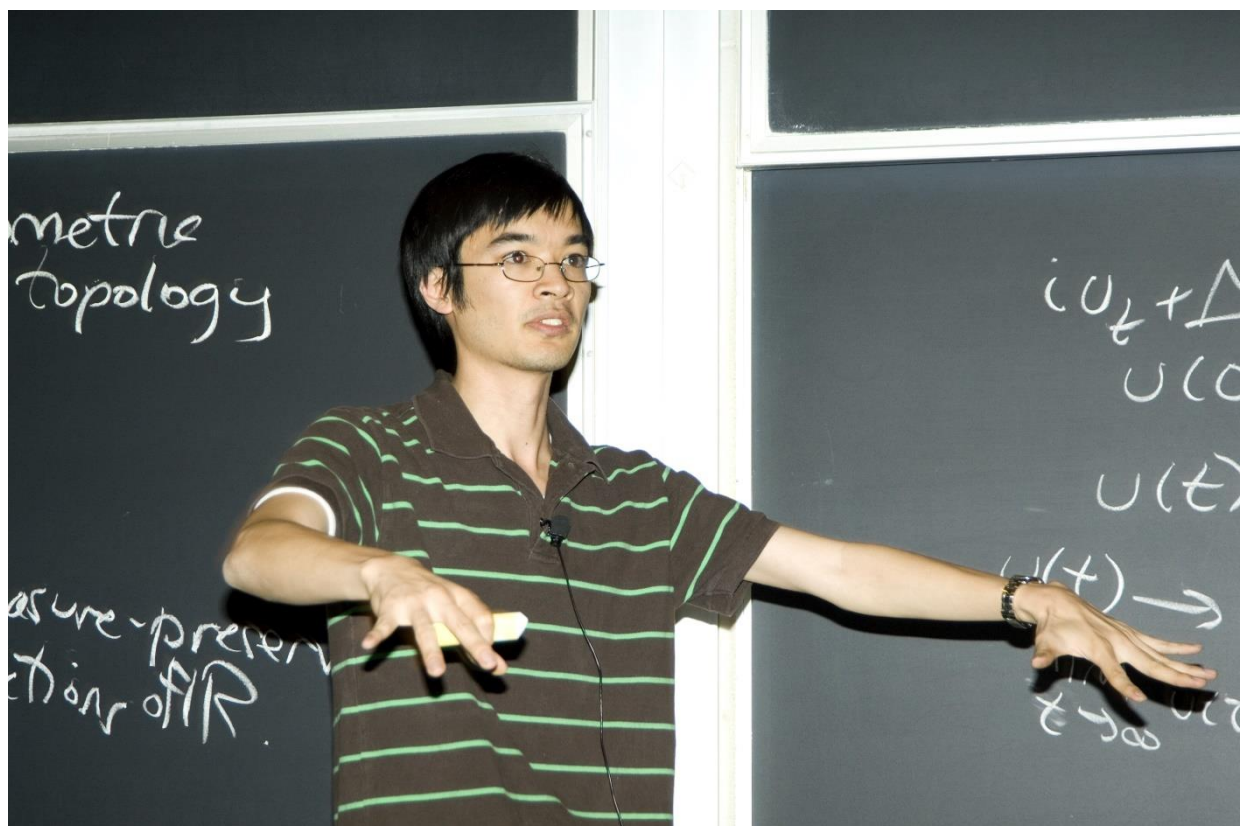


“For evolutionary PDE in particular, I find there is a rich zoo of colourful physical analogies that one can use to get a grip on a problem.

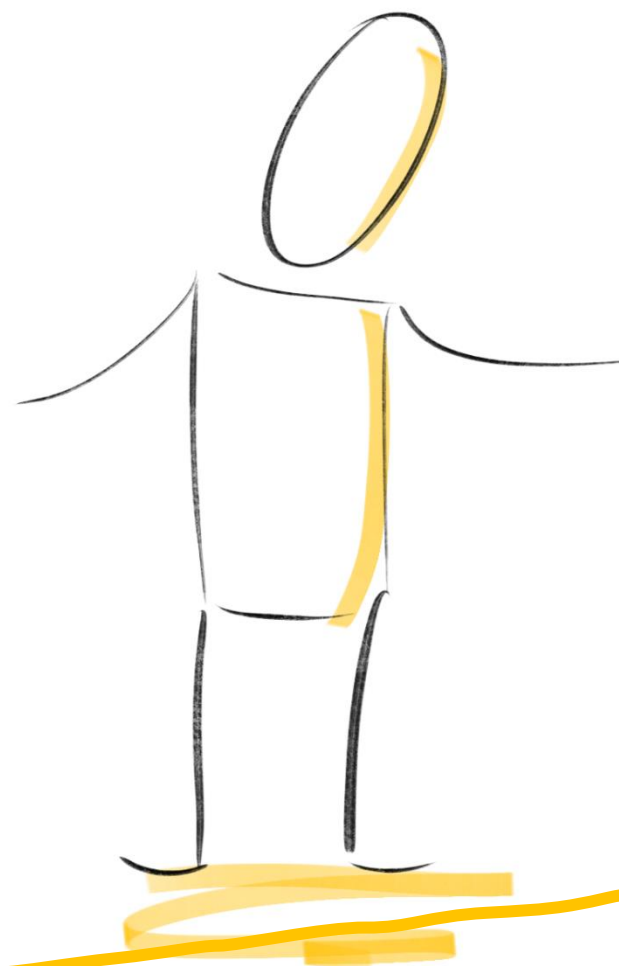
I’ve used the metaphor of an egg yolk frying in a pool of oil, or a jetski riding ocean waves, to understand the behaviour of a fine-scaled or high-frequency component of a wave when under the influence of a lower frequency field, and how it exchanges mass, energy, or momentum with its environment. In one extreme case, I ended up rolling around on the floor with my eyes closed in order to understand the effect of a gauge transformation that was based on this type of interaction between different frequencies.”

Terence Tao, 2010, mathoverflow.net





Unser Konzeptverständnis manifestiert sich verbal und nonverbal in unserem Körper



Unsere körperlichen Erfahrungen prägen unser Verständnis mathematischer Konzepte durch Wahrnehmung und Handlung

**Embodiment**

In Kommunikation und Interaktion senden und verarbeiten wir verbale und non-verbale Information

# **Embodiment – im Mathematikunterricht?**

# Ein Fokus: Gesten



## Definition

- Bewegung der Hände und Arme, die mit Sprechen und Denken koordiniert sind
- Ohne praktischen Nutzen

McNeill (1992), Kendon (2004)

## Enge Beziehung zwischen Gesten und (Laut)Sprache in zeitlicher Abstimmung und semantischer Bedeutung

- Gesten und Sprache sind koexpressiv: “verschiedene Seiten eines einzigen mentalen Prozesses” (McNeill 1992, p. 1)
- Gesten können implizites Konzeptverständnis und Denkprozesse widerspiegeln (e.g., Goldin-Meadow, 2003; Edwards, 2009 in math contexts; McNeill, 1992,...)

## **Gesten als simulierte Handlungen** (Hostetter & Alibali, 2008, 2018)

“Gesten reflektieren die motorische Aktivität, die automatisch auftritt, wenn Menschen an mentale Simulationen von motorischen Handlungen oder Wahrnehmungszustände denken oder über sie sprechen.”  
(S. 721)

# Forschung zu Gesten beim Mathematiklernen



- **Lehrer beim Unterrichten** (e.g. Alibali & Nathan 2007; Alibali, et al. 2019, Arzarello & Paola 2007, Maffia & Sabena 2016)
- **Kollaborative Problemlöseprozesse** (e.g. Arzarello & Sabena 2014, Huth 2011; Reynolds & Reeve 2002, Krause 2016, Radford 2003)
- **Interaktion im Mathematikunterricht** (e.g. Arzarello et al, 2009, Rasmussen et al. 2004, Sabena 2007, Sabena, Krause & Maffia 2016)
- **Gesten als Ausdruck ‚unausgesprochenen‘ Wissens /Verständnisses** (Goldin-Meadow 2003, Edwards 2009; Krause & Salle 2019)

Übersicht in:

Robutti, O., Sabena, C., Krause, C., Soldano, C., & Arzarello, F. (2022). Gestures in mathematics thinking and learning. In M. Danesi (Hrsg.), *Handbook of cognitive mathematics*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7\\_8-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_8-1)

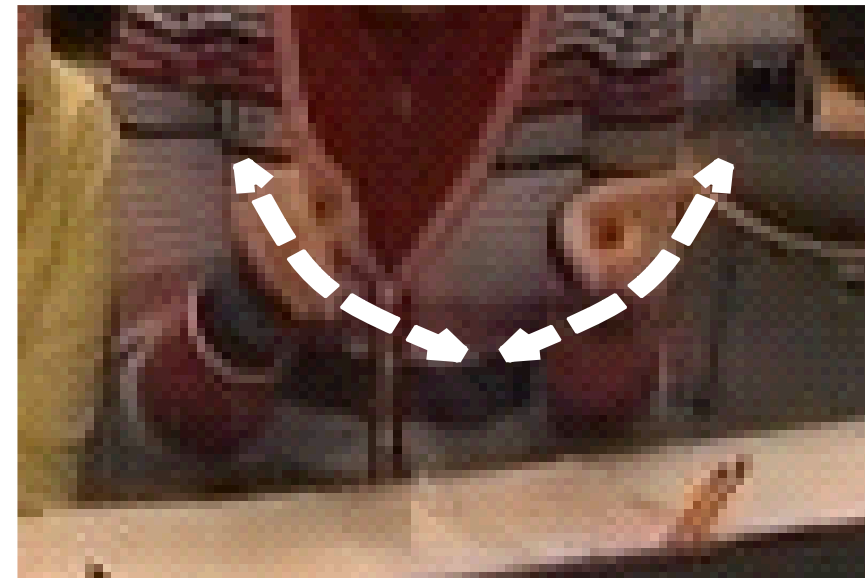
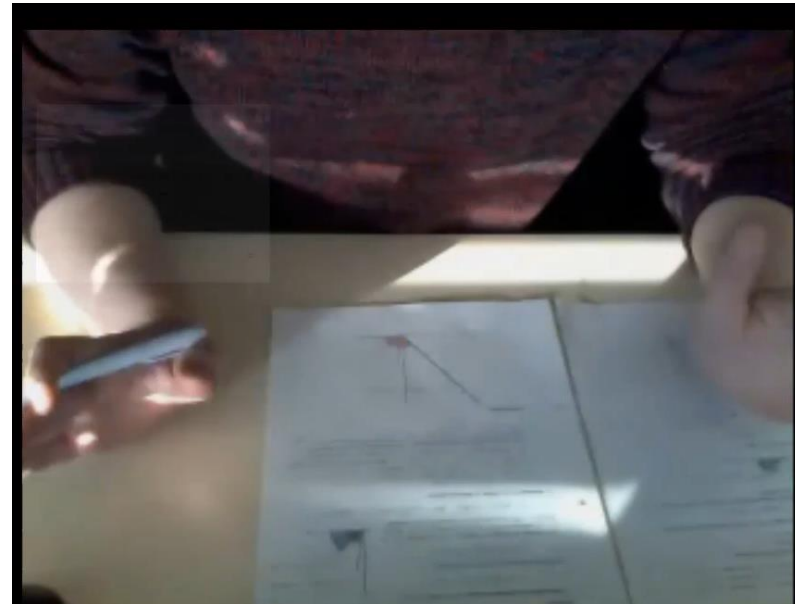


# Gesten und Mathematik



## Reflexion aktivierter körperlicher Prozesse – Diagnostisches Potential

- geben 'vollständigeres Bild' der zugrundeliegenden kognitiven Prozesse  
(Krause, 2016)

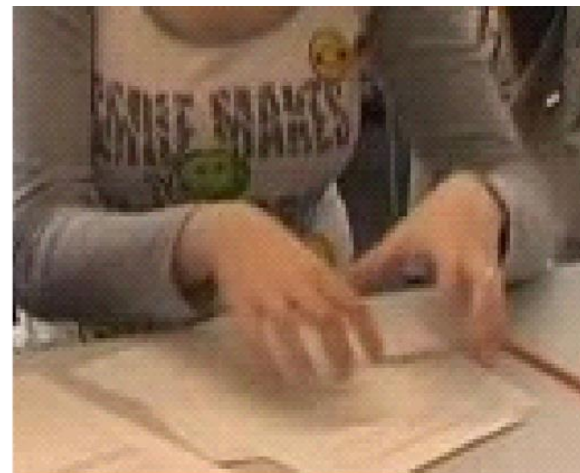


# Gesten und Mathematik



## Reflexion aktivierter körperlicher Prozesse – Diagnostisches Potential

- geben 'vollständigeres Bild' der zugrundeliegenden kognitiven Prozesse (Krause, 2016)
- Reflektieren konzeptuelles und *momentan aktiviertes Verständnis* (Edwards 2009, 2019)



(Krause, 2016)

# Idee: Mathe-Activity/Scharade



Tun Sie sich zu zweit zusammen. Einer von Ihnen schließt nun die Augen, während ein Begriff eingeblendet wird. Danach muss der andere Partner diesen Begriff gestisch / mit vollem Körpereinsatz vormachen, so dass der Begriff erraten werden kann.

(danach andersrum mit dem zweiten Begriff (natürlich beim ersten Mal noch nicht eingeblendet))

# Idee: Mathe-Activity/Scharade



1. Achsensymmetrie

2. Punktsymmetrie

# Gesten und Mathematik



## Reflexion aktivierter körperlicher Prozesse – Diagnostisches Potential

- geben 'vollständigeres Bild' der zugrundeliegenden kognitiven Prozesse (Krause, 2016)
- Reflektieren konzeptuelles und *momentan aktiviertes Verständnis* (Edwards 2009, 2019)
- Gesture-Sprache '*mismatches*' verraten, wer bereit ist zu lernen (z.B. Goldin-Meadow 2003)

# Gesten der Lehrperson



Alibali & Nathan (2007) und  
Lehrerinnengesten im Algebraunterricht  
(6. Schulstufe)

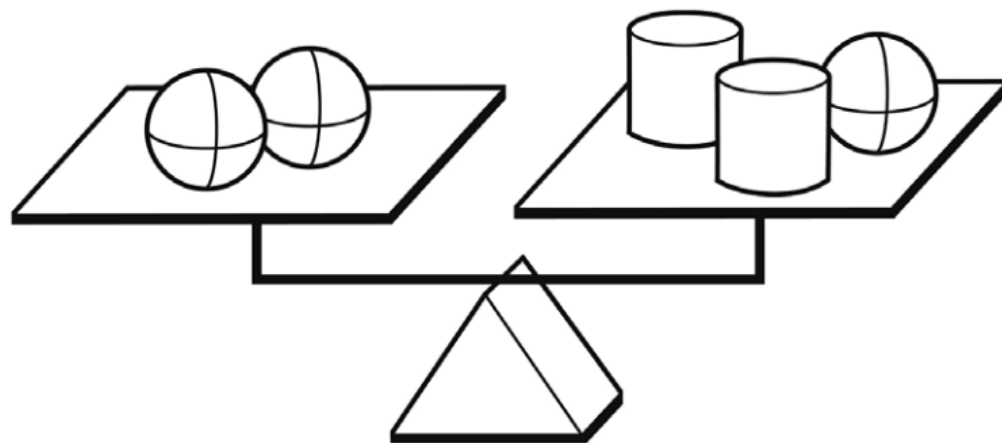


Figure 22.1. Pan balance problem 1 ( $2S = 2C + S$ ).

Bildquelle: S. 352

„Grounding meaning“: Gesten helfen, die Fachsprache in  
der physischen Welt wiederzufinden

# Gesten der Lehrperson

Krause & Farsani (2021) und Gesten der Lehrpersonen im bilingualen Unterricht (Englisch – Farsi)

- Konkret: Bezogen auf beide Unterrichtssprachen
- Kulturelle ‚Ergänzungs‘schule in Großbritannien
- Untersuchung von Unterrichtsstunden mit Fokus auf gleichschenklige Dreiecke

## Gestennutzung unterscheidet sich nach Sprachgebrauch

### - Nachfahrende Gesten

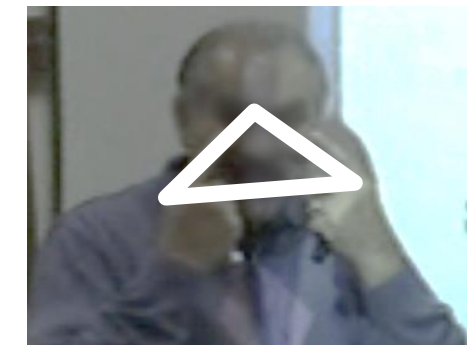
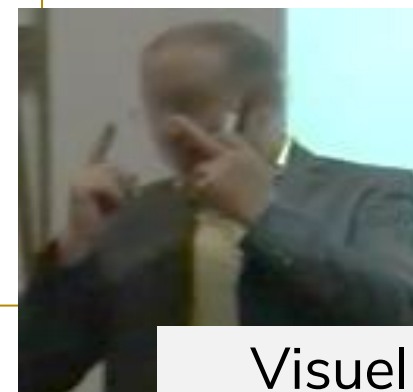
**Farsi** → ‚Grounding‘ für mathematische Erklärungen

### - Zeigegesten:

**Englisch** → Klärung der Referenz zu mathematischer Terminologie



‚Isosceles triangles‘



Visuell-sprachliche Eselsbrücke

# Kurzes Zwischenfazit zu Gesten



- Gesten haben vielfältige Funktionen im Mathematikunterricht – sowohl für Lehrpersonen wie auch für Lernende
  - Gesten der Lehrperson können mathematische Lernprozesse vielfältig unterstützen, zum Beispiel indem Sie
    - Visuelle Stützen bieten, um Inhalt und Fachsprache sprachsensibel miteinander zu koordinieren (Stichwort: Content and Language Integrated Learning – CLIL)
- Gesten bieten eine zusätzliche linguistische Ressource!

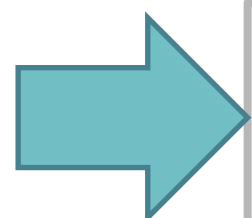


# **Mathematikunterricht und Gebärdensprache**

### **Ikonizität:**

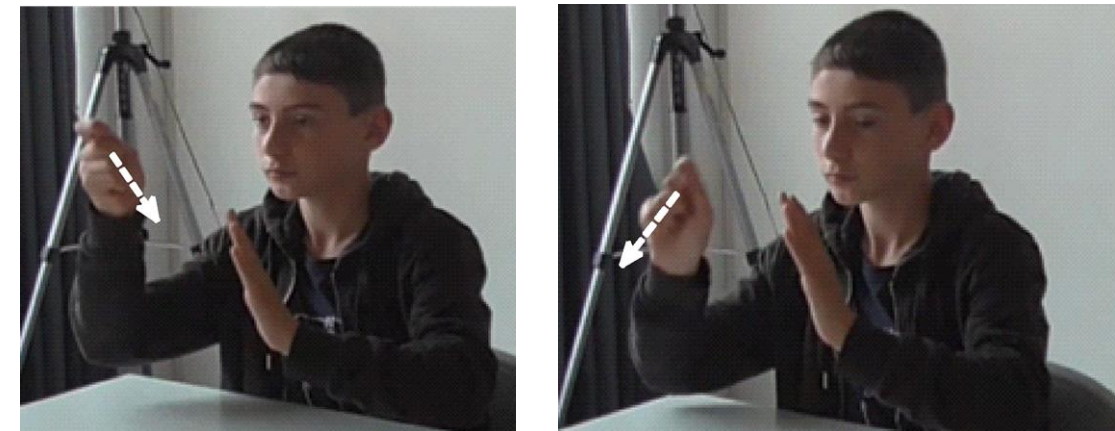
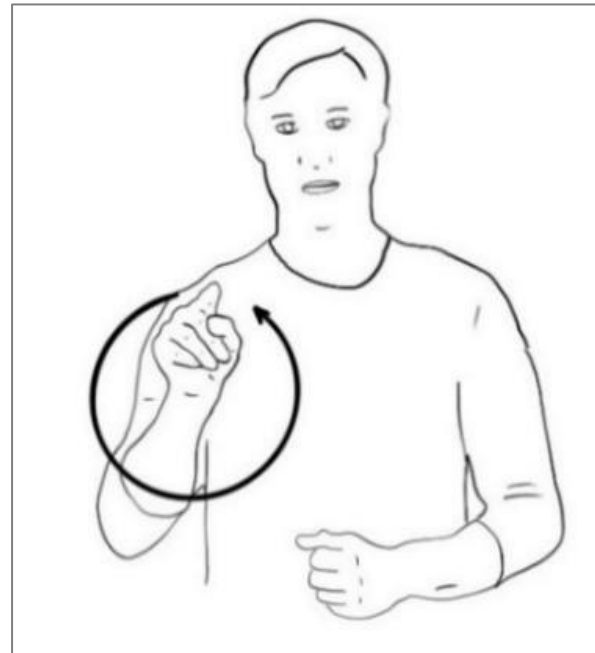
Gebärden können in einer ikonischen Beziehung zu ihrem Referenzobjekt in gewisser Weise äußere Ähnlichkeiten aufweisen

- Ikonizität von Sprachzeichen beeinflussen Verständnis des Konzeptes (Grote, 2010)
- Eigenschaften, die im ikonischen Moment der Gebärde reflektiert werden bekommen eine besondere Relevanz für das semantische Konzept (Grote, 2010)



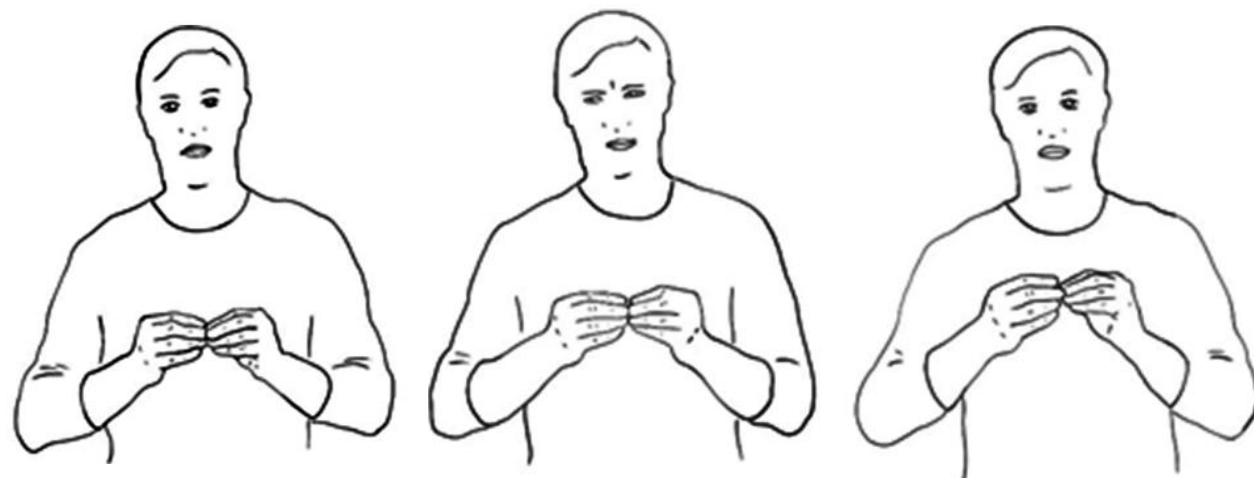
Die Gebärde, die genutzt wird um auf eine mathematische Idee zu verweisen, kann das konzeptuelle Verständnis dieser Idee beeinflussen (siehe auch Krause 2017, 2019, Krause & Wille, 2021)

# Ikonische mathematische Gebärden



Ikonisch-physisch

Ikonisch-symbolisch



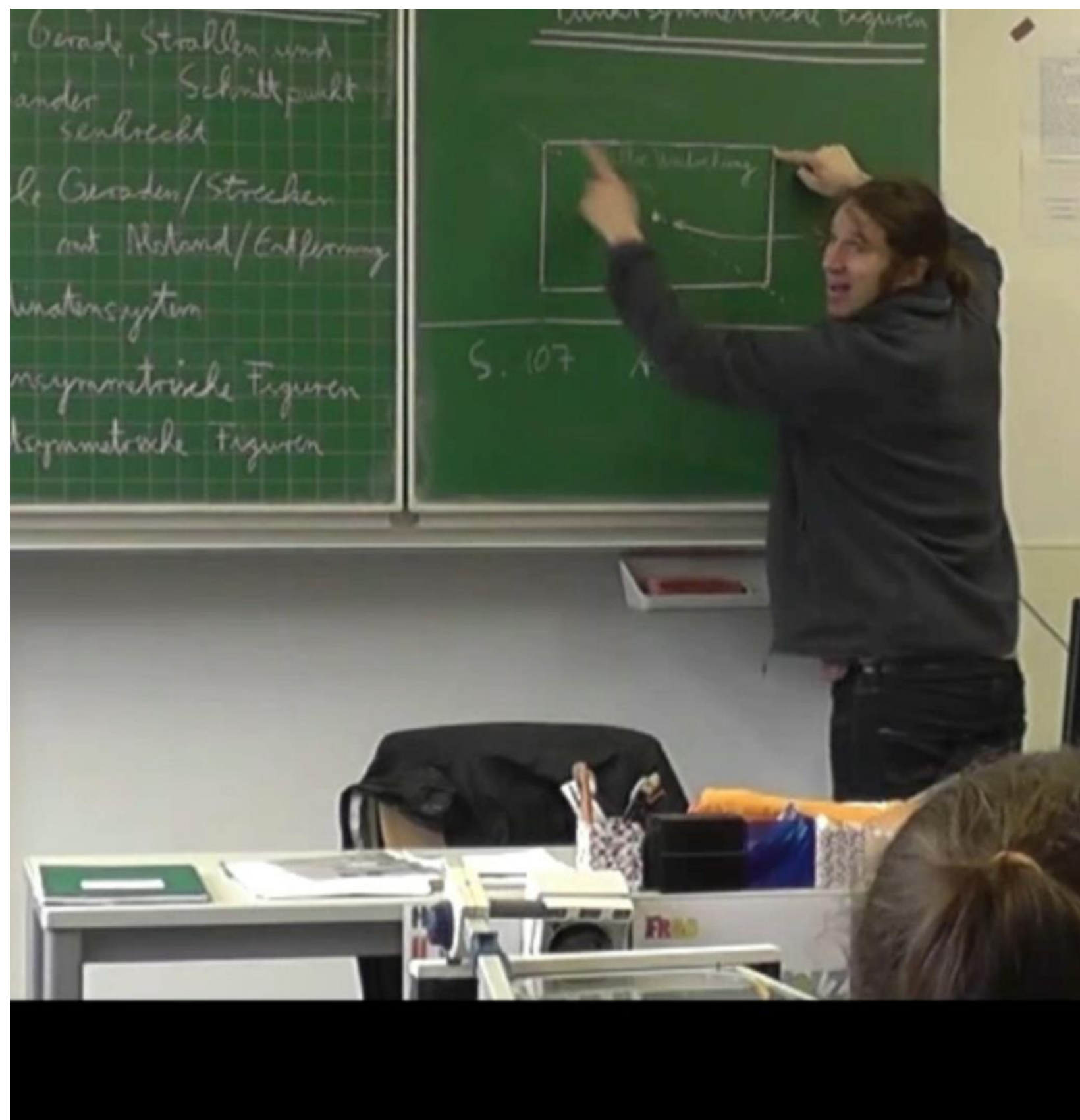
Innersprachlich ikonisch / phonologisch ähnlich (Krause, 2017)



# Herstellung ikonischer Bedeutung

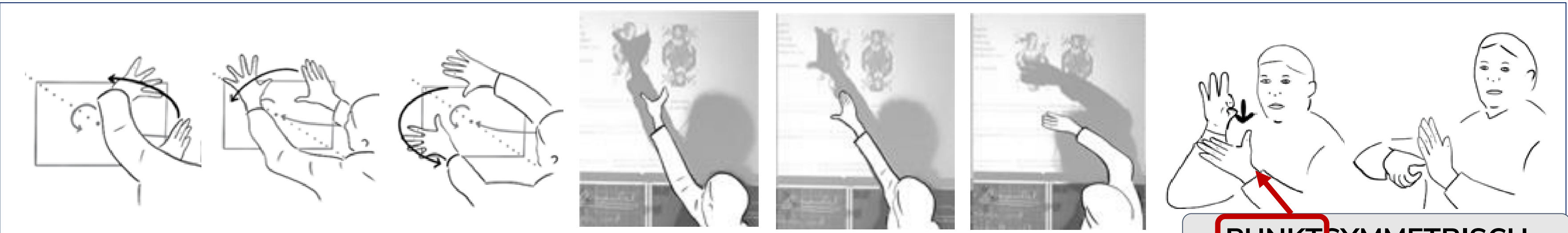


Achsensymmetrie



**PUNKTSYMMETRISCH**

# Bedeutungsbildung der Gebärde



**PUNKTSYMMETRISCH**

**HANDLUNG**

**GESTE**

**GEBÄRDE**

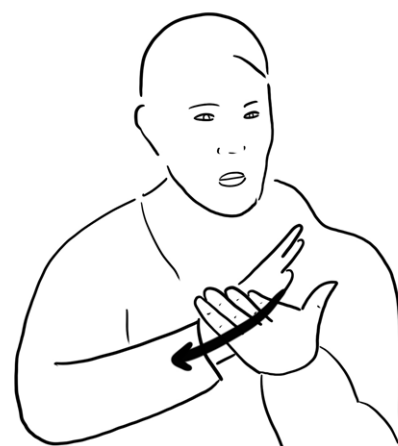
**„Modale Kontinuität“**

definierende  
Komponente

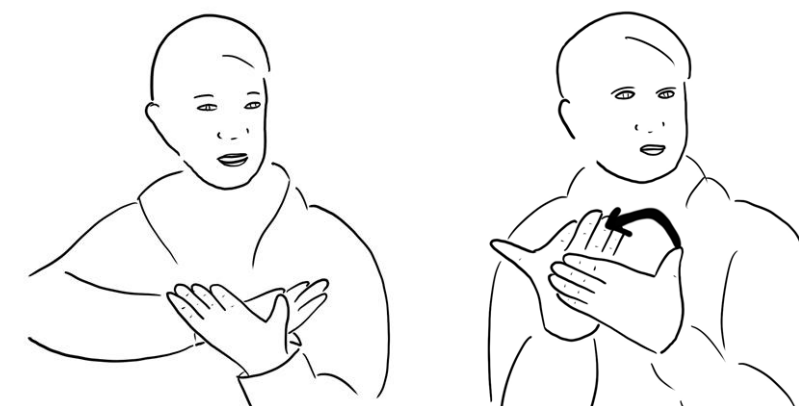


überführende  
Handlung

**ACHSENSYMMETRISCH**

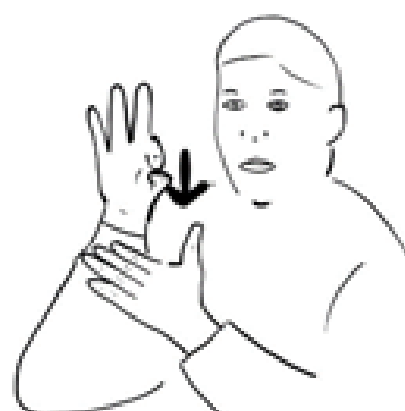


**ACHSE**



**falten**

**PUNKTSYMMETRISCH**



**PUNKT**



**rotieren**

# Kurzes Fazit



- Bedeutungsentwicklung im Klassenraum rekonstruierbar (Lehrerrolle)
  - Symmetrie-Beispiele (Krause, 2018; 2019)
- Mathematische Idee – mathematische Gebärde – mathematische Terminologie
  - Koordination in und durch visuell-gestische Modalität der Gebärdensprache (Krause, 2019)

Außerdem:

- Unterschiede in den Gebärden und lautsprachlichen Begriffen gehörloser und hörender Lehrer
  - dynamisch vs. statisch
  - Offenlegung verschiedener Perspektiven – unterschiedliche Präferenzen - durch Sprache geprägter Vorstellungsschwerpunkte?



# **Lernumgebungen entwickeln – und Inklusion neu entdecken**

# Project SpEED – Special Education Embodied Design

Berkeley  
UNIVERSITY OF CALIFORNIA

edrl



Dr. Christina Krause

Mathematisches Denken,  
Lehr-Lernprozesse in  
Mathematik

**Im Fokus:**  
Taube Lernende



Sophia Tancredi

sensorische Verarbeitung

**Im Fokus:**  
Lernende mit ADHS und  
auf dem Autismus-  
Spektrum



Dr. Rachel Chen

körperliche  
Interaktion

**Im Fokus:**  
nonverbale Lernende  
auf dem Autismus-  
Spektrum

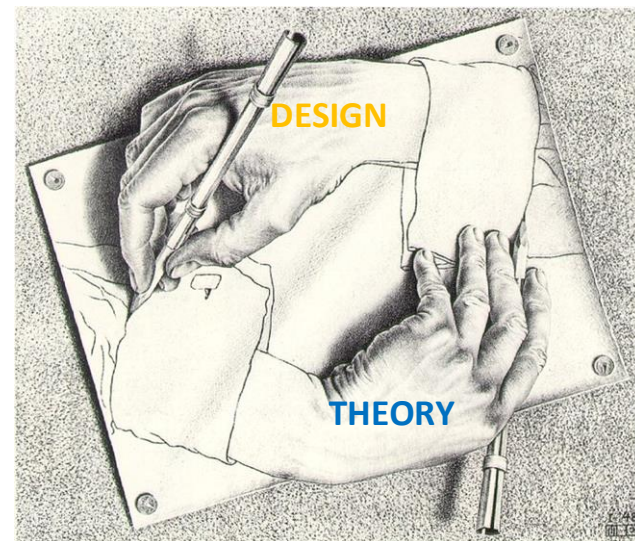
Wie können die Ressourcen und Praktiken nicht-typischer Lernendenpopulationen gewinnbringend für das Erlernen mathematischer Konzepte eingebracht werden?

# Projekt SpEED – Special Education Embodied Design



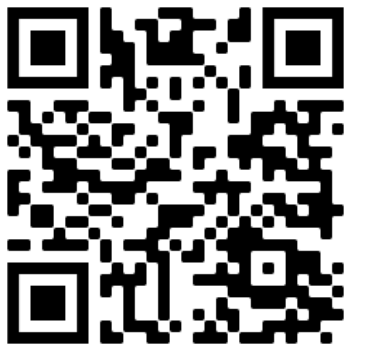
## Forschungsansatz: Design based research

Vermutungs-  
getriebene iterative  
empirische Studien, in  
denen Theorie and  
Design kollaborieren



**Proaktiver, adaptiver Ansatz zu Barrierefreiheit,  
basierend auf den embodied Ressourcen und  
Praktiken der Lernenden**

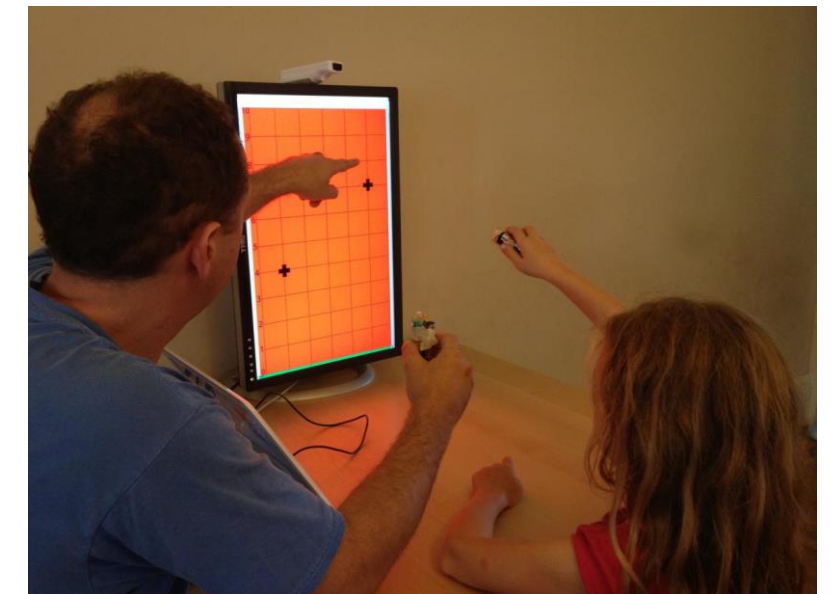
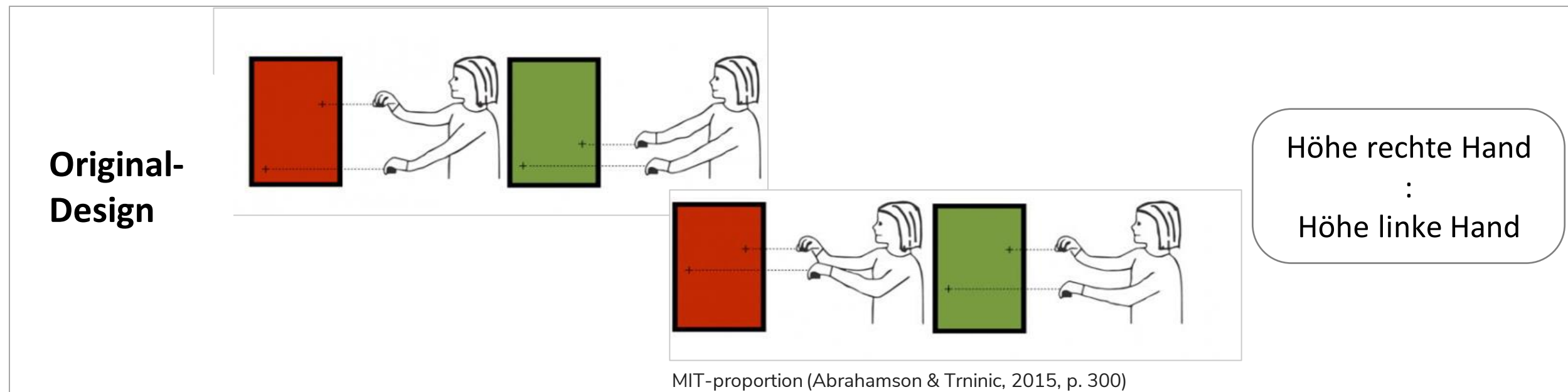
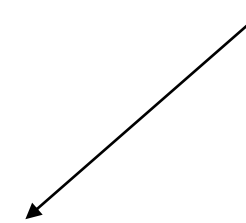
- 1. Lernen geschieht in der körperlichen sensorimotorischen Auseinandersetzung mit der Welt.**
- 2. Lernen setzt an die vorhandenen körperlichen Ressourcen der Lernenden an.**
- 3. Unterrichtliche Handlung muss flexibel an die sensorimotorische Vielfalt der Lernenden anpassbar sein.**

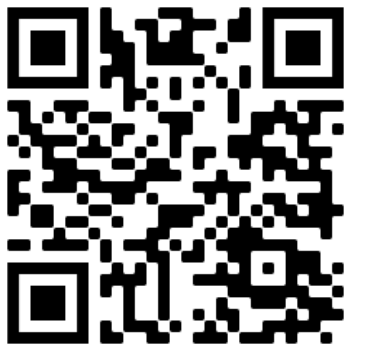


Vortrag zum Design der  
Lerngelegenheit SignEd|Math  
auf der Konferenz PME-NA

# Übersetzung in Lernumgebung (Projekt SignEd|Math)

- Einbeziehung von Gebärdensprache als Ressource der Lernenden
- Aufbauend auf Theorien der Embodied Cognition
- Modifikation eines etablierten 'embodied design' – des 'Mathematics Imagery Trainer for proportion (MIT-p)' (Abrahamson & Trninic, 2015, p. 300)

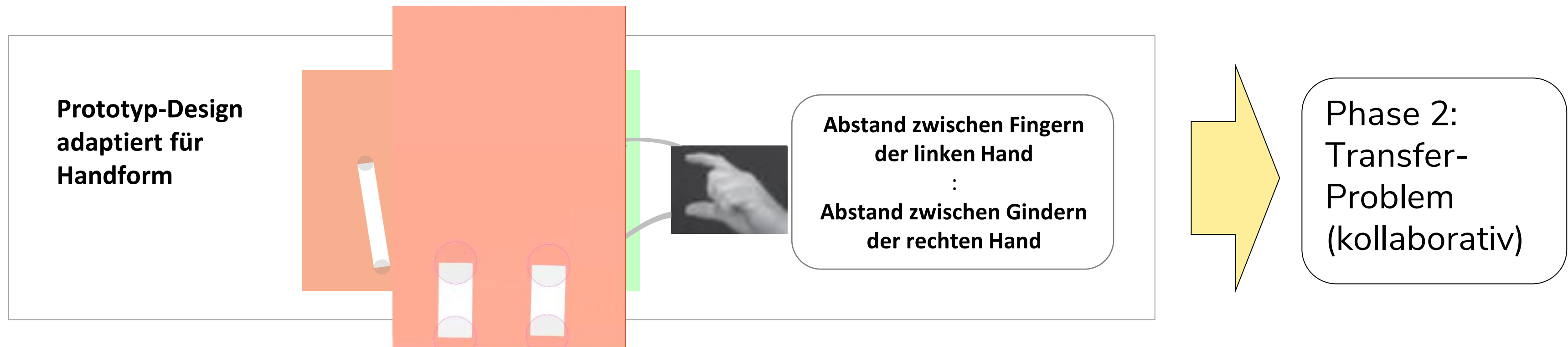




Vortrag zum Design der  
Lerngelegenheit SignEd|Math  
auf der Konferenz PME-NA

# Übersetzung in Lernumgebung (Projekt *SignEd|Math*)

- Einbeziehung von Gebärdensprache als Ressource der Lernenden
- Aufbauend auf Theorien der Embodied Cognition
- Modifikation des 'Mathematics Imagery Trainer for proportion (MIT-p)' (Abrahamson & Trninic, 2015, p. 300)



# Sophia Tancredi: Balance Board Math Project



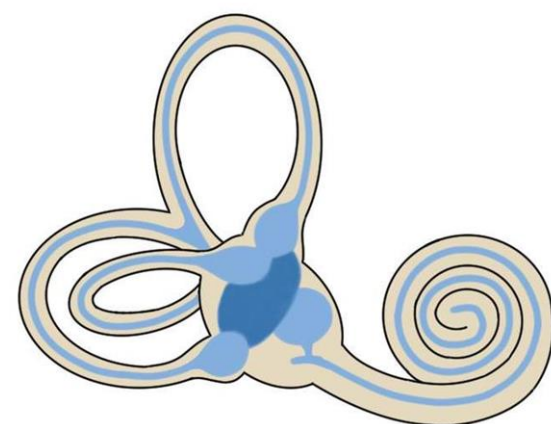
strangerdarkerbetter.tumblr.com



Hilfsmittel zur sensorischen Regulation

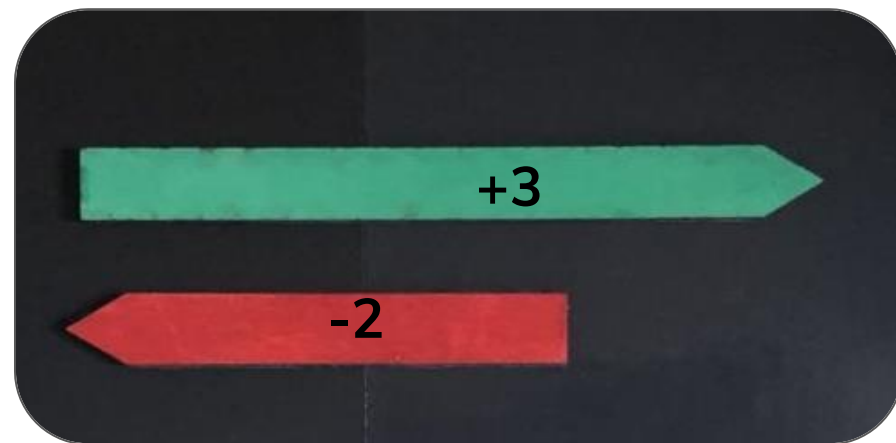
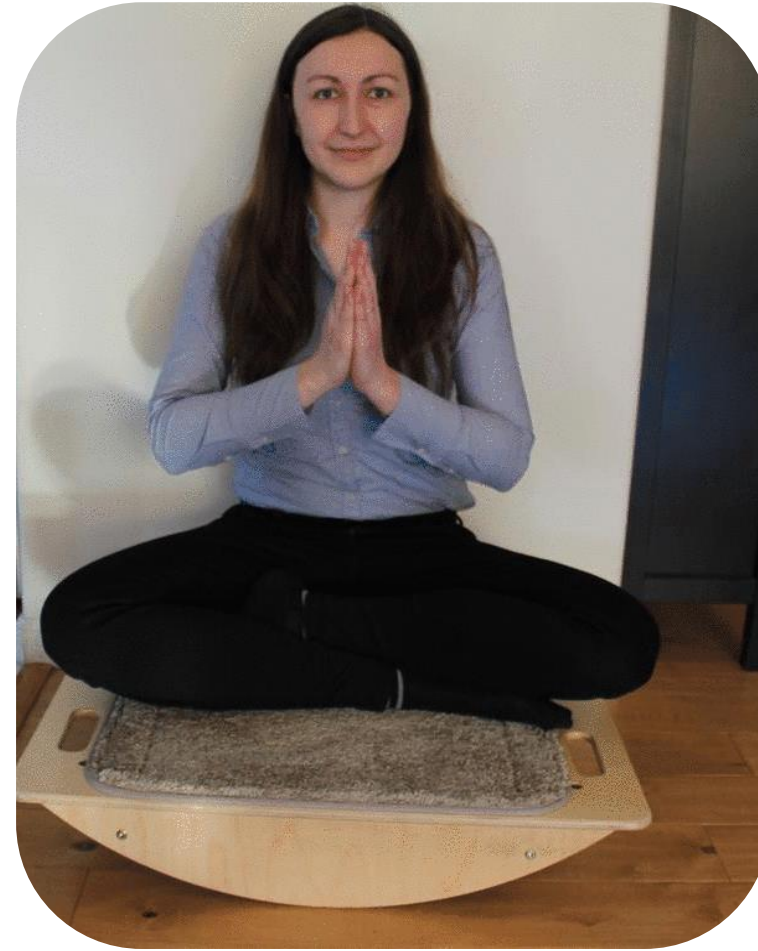
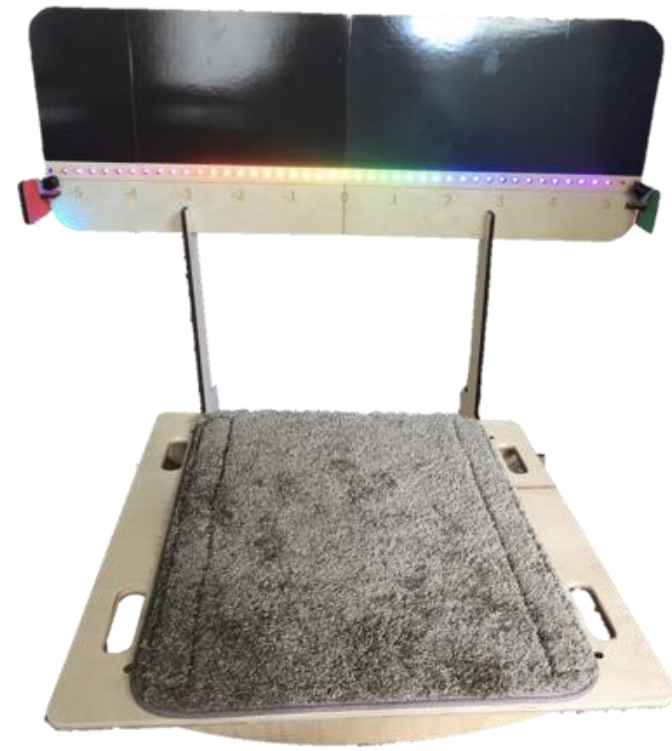


Perzeptu-motorische Hilfsmittel aus dem Mathematikunterricht



Das Gleichgewichtsorgan steht im Zusammenhang mit kognitiver Entwicklung und abstraktem konzeptuellen Denkens.

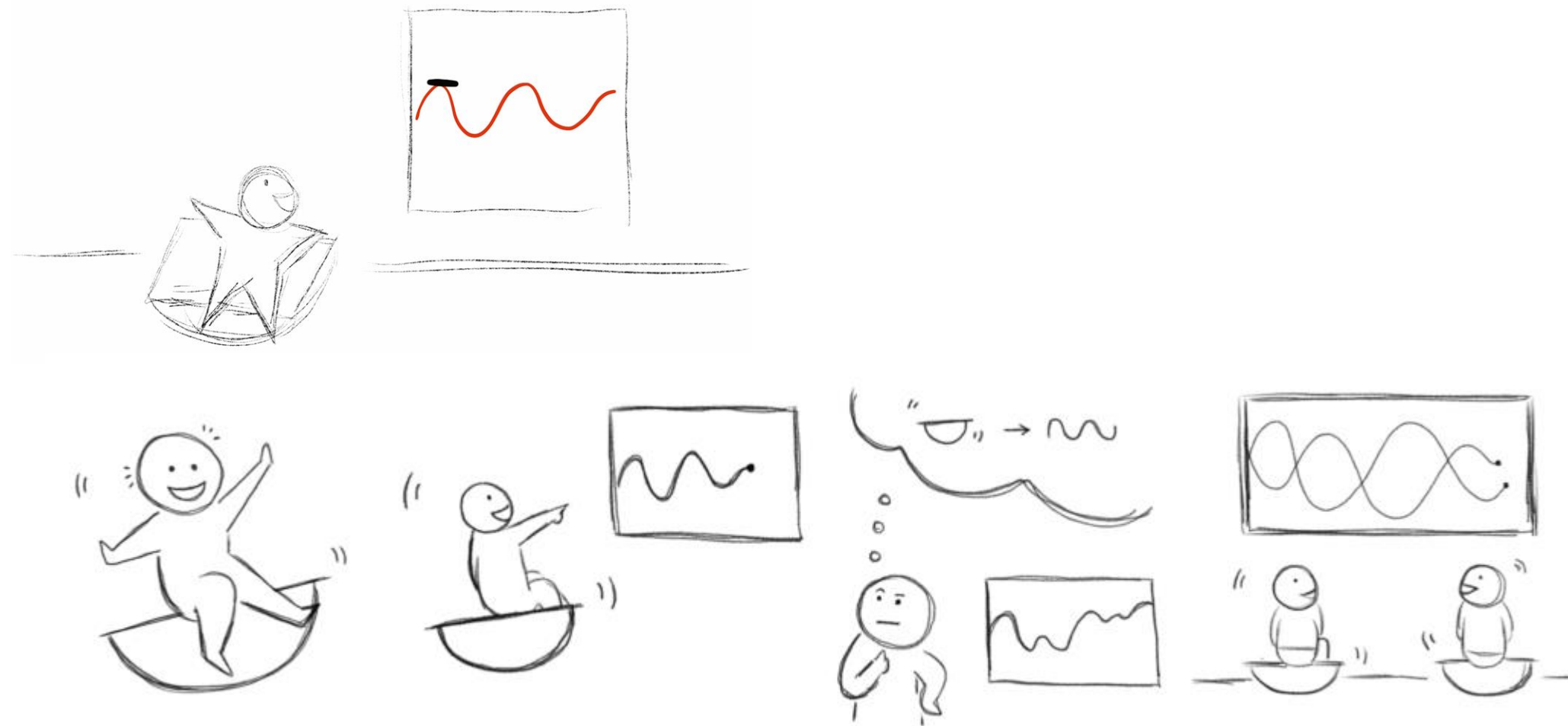
(Antle et al. 2013; Hitier et al., 2014; Wiener-Vacher et al. 2013)



# Balance Board Math Projekt



Balance Sinusoids (gemeinsam mit Helen Li, Julia Wang, Dr. Kimiko Ryokai)



<https://edrl.berkeley.edu/projects/balance-board-math/> (inklusive Anleitung zum Nachbauen und Ausprobieren)

Tancredi, S., Wang, J. X., Li, H. L., Yao, C. J., Macfarlan, G. L., & Ryokai, K. (2022). Balance Board Math: “Being the graph” through the sense of balance for embodied self-regulation and learning. In M. Horn, M. Giannakos, & T. Pontual (Eds.), *Proceedings of IDC '22: Interaction Design and Children* (Vol. “Full papers”, pp. 137–149). <https://doi.org/10.1145/3501712.3529743>



# Weitere Informationen zu SpEED



[Special Education Embodied Design \(SpEED\) • EDRL \(berkeley.edu\)](#)

Präsentation am IZfB an der Universität Duisburg-Essen (online, 2021):

*Time for SpEED: Ansätze für inklusiv-gleichberechtigte Lerngelegenheiten durch **Special Education Embodied Design***

Online in fünf Teilen (\* in deutscher Sprache, alle deutsch Untertitelt)

Teil 1 - Einleitung und Framework\*: [https://youtu.be/MdqHZ-e-\\_uw](https://youtu.be/MdqHZ-e-_uw)

Teil 2 - Projekt ‚SignEd|Math‘\*: <https://youtu.be/kq4p2DGiz1M>

Teil 3 – Projekt ‚Balance Number Line‘ (Sofia Tancredi): <https://youtu.be/VtqIfL2EkIY>

Teil 4 – Projekt ‚Magical Musical Mat‘ (Rachel Chen): <https://youtu.be/721S2EiuwPQ>

Teil 5 – Zusammenfassung und Folgerungen\*: <https://youtu.be/Ch7H2hgRdV0>



# SpEED



## 1. Generation – Theoretische Basis



Dor Abrahamson



Christina Krause



Sofia Tancredi



Rachel Chen

## 2. Generation – weitere Projekte: Empirische und theoretische Weiterentwicklung



Brittney Cooper



Erin Foley



Jacqueline Anton



John Kim

# **Kurze Conclusio**

Unser Konzeptverständnis manifestiert sich verbal und nonverbal in unserem Körper

Diversität und Inklusion neu verstehen

SchülerInnenvorstellungen und Denkprozesse besser verstehen

Unsere körperlichen Erfahrungen prägen unser Verständnis mathematischer Konzepte durch Wahrnehmung und Handlung



Embodiment

In Kommunikation und Interaktion senden und verarbeiten wir verbale und non-verbale Information

Unterricht gestalten und Lernumgebungen entwickeln

# Lernerfahrungen mit dem ganzen Körper fördern



Sensibilisierung

- Welche Sinne können wir noch nutzen für mathematische (prägende) Erfahrungen?
- Wie können wir mehr (sinnhafte) Bewegung in den Mathematikunterricht bringen?
- Wie können wir mit den körperlichen Ressourcen der Lernenden starten?

→ Workshop hierzu und zu Gesten in Arbeit

# Dankeschön!



Kontakt und Rückfragen  
[christina.krause@uni-graz.at](mailto:christina.krause@uni-graz.at)



# Literatur

**Geben Sie mir gern Bescheid, wenn Ich Ihnen einen bestimmten Artikel zukommen lassen soll!**



- Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2007). Teachers' gestures as a means of scaffolding students' understanding: Evidence from an early algebra lesson. In R. Goldman, R. Pea, B. Barron, & S. J. Derry (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 349–365). Routledge.
- Alibali, M.W., Nathan, M. J., Boncoddio, R., & Pier, E. (2019). Managing common ground in the classroom: teachers use gestures to support students' contributions to classroom discourse. *ZDM Mathematics Education*, 51(2), 347–360.
- Arzarello, F., & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31st conference of the international group for psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 17–24). PME.
- Arzarello, F., & Sabena, C. (2014). Analytic-structural functions of gestures in mathematical argumentation processes. In L. D. Edwards, F. Ferrara, & D. Moore-Russo (Eds.), *Emerging perspectives on gesture and embodiment* (pp. 75–103). Information Age Publishing.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 97–109.
- Andres, M., Michaux, N., & Pesenti, M. (2012). Common substrate for mental arithmetic and finger representation in the parietal cortex. *NeuroImage*, 62, 1520-1528.
- Edwards, L. D. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 127–141.
- Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think*. Belknap Press
- Grote, K. (2010). Denken Gehörlose anders? Auswirkungen der gestisch-visuellen Gebärdensprache auf die Begriffsbildung [Do Deaf people think differently? Influence of the gestural-visual sign language on conceptualization]. *Das Zeichen: Zeitschrift für Sprache und Kultur Gehörloser*, 85, 310–319.
- Hauk, O., Johnsrude, I.S., & Pulvermüller, F. (2004). Somatotopic Representation of Action Words in Human Motor and Premotor Cortex. *Neuron*, 41, 301-307.
- Hitier, M., Besnard, S., & Smith, P. F. (2014). Vestibular pathways involved in cognition. *Frontiers in Integrative Neuroscience*, 8, 59.
- Hostetter, A. B., & Alibali, M. W. (2008). Visual embodiment: Gesture as simulated action. *Psychonomic Bulletin & Review*, 15, 495–514.
- Hostetter, A. B., & Alibali, M. W. (2018). Gesture as simulated action: Revisiting the framework. *Psychonomic Bulletin & Review*, 26, 721–752.

- Huth, M. (2010). Gestik als Ausdruck mathematischer Ideen in Gesprächen von Grundschüler/innen. In K.-H. Arnold, K. Hauenschild, B. Schmidt & B. Ziegenmeyer (Hrsg.), *Zwischen Fachdidaktik und Stufendidaktik* (S. 155–158). Wiesbaden: Springer VS
- Kendon, A. (2004). *Gesture: visible action as utterance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Krause, C. M. (2016). *The mathematics in our hands: How gestures contribute to constructing mathematical knowledge*. Wiesbaden, Germany: Springer Spektrum.
- Krause, C. M. (2017). Iconicity in signed fraction talk of hearing-impaired sixth graders. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st conference of PME* (Vol. 3, pp. 89–96). National Institute of Education, Nanyang Technological University (Singapore).  
[https://www.researchgate.net/publication/318853043\\_Iconicity\\_in\\_signed\\_fraction\\_talk\\_of\\_hearing-impaired\\_sixth\\_graders](https://www.researchgate.net/publication/318853043_Iconicity_in_signed_fraction_talk_of_hearing-impaired_sixth_graders)
- Krause, C.M. (2018). Embodied Geometry: Signs and gestures used in the deaf mathematics classroom – the case of symmetry. In R. Hunter, M. Civil, B. Herbel-Eisenmann, N. Planas & D. Wagner (Hrsg.), *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners* (S. 171–193). Sense Publisher.
- Krause, C. M. (2019). What you see is what you get? – Sign language in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(1), 84–97.
- Krause, C. M. (2021). Mathematik in Gesten. *Gehirn & Geist, Spektrum der Wissenschaft – Gehirn & Geist* 03/2021, 34–41.
- Krause, C. M., & Abrahamson, D. (2020). Modal continuity in deaf students' signed mathematical discourse. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Proceedings of the 42nd meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1448–1449). Cinvestav/AMIUTEM/PME-NA.
- Krause, C.M., & Farsani, D. (2021). Gestures and code-switching in mathematics instruction – an exploratory case study. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Band 3* (S. 144-153). PME.
- Krause, C. M., & Salle, A. (2019). Towards cognitive functions of gestures – A case of Mathematics. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien, & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology in mathematics education* (Vol. 2, pp. 496–503). PME
- Krause, C.M. & Wille, A. M. (2021). Sign language in light of mathematics education: an exploration within semiotic and embodiment theories of learning mathematics. Sonderausgabe 'Critical Topics in Mathematics Education: Research to Practice with Deaf/Hard-of-Hearing Students', *American Annals of the Deaf*, 166(3), 358-383.
- Landy, D., & Goldstone, R. L. (2007). How abstract is symbolic thought?. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 33(4), 720.
- Maffia, A., & Sabena, C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 235-242). PME.







- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Reynolds, F. J., & Reeve, R. A. (2002). Gesture in collaborative mathematical problemsolving. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 447-440.
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago Press.
- Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4 (pp. 113-120). PME.
- Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(3), 301-323.
- Robutti, O., Sabena, C., Krause, C., Soldano, C., & Arzarello, F. (2022). Gestures in mathematics thinking and learning. In M. Danesi (Hrsg.), *Handbook of cognitive mathematics*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7\\_8-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_8-1)
- Sabena, C. (2007). *Body and signs: a multimodal semiotic approach to teaching– learning processes in early Calculus*. PhD-Dissertation. Turin: Turin University.
- Sabena, C., Krause, C. M., & Maffia, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie [Semiotische Analysen aus multimodaler Perspektive: von der Konstruktion eines theoretischen Rahmens zum Networking von Theorien]. Eingeladener Beitrag zur italienischen Konferenz "XXXIII Seminario di Ricerca in Didattica della Matematica", January 2016 in Rimini, Italien. Online: [http://www.airdm.org/doc/SemNaz2016\\_RELAZIONE.pdf](http://www.airdm.org/doc/SemNaz2016_RELAZIONE.pdf)
- Salle, A., & Krause, C. (2021). Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten [Cognitive functions of gestures when working mathematically]. *Journal für MathematikDidaktik*, 42(1), 123–158
- Shapiro, L. (2014). *Routledge handbook of embodied cognition*. Routledge.
- Tancredi, S., Chen, R. S. Y., Krause, C., & Siu, Y. T. (in press). The need for SpEED: Reimagining accessibility through Special Education Embodied Design. In S. L. Macrine & J. M. Fugate (Eds.), *Movement matters: How embodied cognition informs teaching and learning*. MIT Press.
- Tancredi, S., Wang, J. X., Li, H. L., Yao, C. J., Macfarlan, G. L., & Ryokai, K. (2022). Balance Board Math: "Being the graph" through the sense of balance for embodied self-regulation and learning. In M. Horn, M. Giannakos, & T. Pontual (Eds.), *Proceedings of IDC '22: Interaction Design and Children* (Vol. "Full papers", pp. 137–149). <https://doi.org/10.1145/3501712.3529743>
- Varela, F. J., Thompson, E. T., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.
- Wiener-Vacher, S. R., Hamilton, D. A., & Wiener, S. I. (2013). Vestibular activity and cognitive development in children: perspectives. *Frontiers in Integrative Neuroscience*, 7, 92.
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9, 625-636.