

We work for
tomorrow

UNI
GRAZ

Wahrscheinlich spielen

eine Stochastik-Spielesammlung für alle von 6 bis 99

Mag. Evita Lerchenberger PhD & Christoph Oberbacher MEd BEd BSc

Grundlegender Aufbau



- Spiele (dem Low-floor-high-ceiling-Prinzip folgend)
 - Anleitung
 - Fachliche Idee / Lehrplaninhalte wie Häufigkeit, Kombinatorik, Verteilung, Erwartungswert / Varianz
 - Fehl- und Grundvorstellungen und sonstige „Sidefacts“
 - „auf lange Sicht“ (Achtung bei starker Streuung)
 - Ist Glücksspiel Zufall? Was ist überhaupt Zufall (nicht)?
 - Intuition oder Fehlschluss

Einiges wahrscheinlich bekannt, manches hoffentlich neu. 😊

Eine zufällige Zahlenfolge?

Gruppe ____

Deine Aufgabe bis ...

 Zahl

Erfinde eine Zahlenfolge mit den Zahlen 0 und 1, die den zufälligen 100-fachen Wurf einer Münze simulieren sollen. Kopf ist 0 und Zahl ist dabei 1.

Trage deine Zahlenfolge in das Google Sheets Dokument ein.

Achte darauf, dass du sie bei der richtigen Gruppe einträgst :)

Gruppe ____

Deine Aufgabe bis ...

 Zahl

Wirf eine Münze 100 Mal und trage die einzelnen Ergebnisse (0 für Kopf und 1 für Zahl) in diesem Google Sheets Dokument ein.

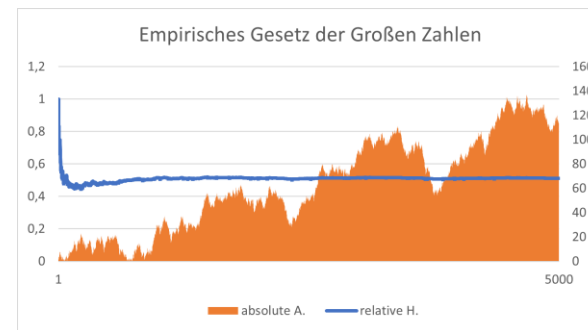
Achte darauf, dass du sie bei der richtigen Gruppe einträgst :)

 Ich wette 100 €, dass ich die ausgedachten Zahlenfolgen erkenne!

 Kopf

○ Fachlicher Hintergrund

- Zufall: etwas weist keinerlei Regelmäßigkeiten (Döhrmann, 2004)
- Spielerfehlschluss
- Idee des Bezweifeln (Riemer, 2018)
- Empirisches Gesetz der großen Zahlen



(Jesche & Schlögl, 2025, Lehrveranstaltung Didaktik der Stochastik WS 25/26)

Run – eine Abfolge gleichartiger Ergebnisse

- KI: „Erstelle eine zufällige Folge von 0 und 1 der Länge 100“

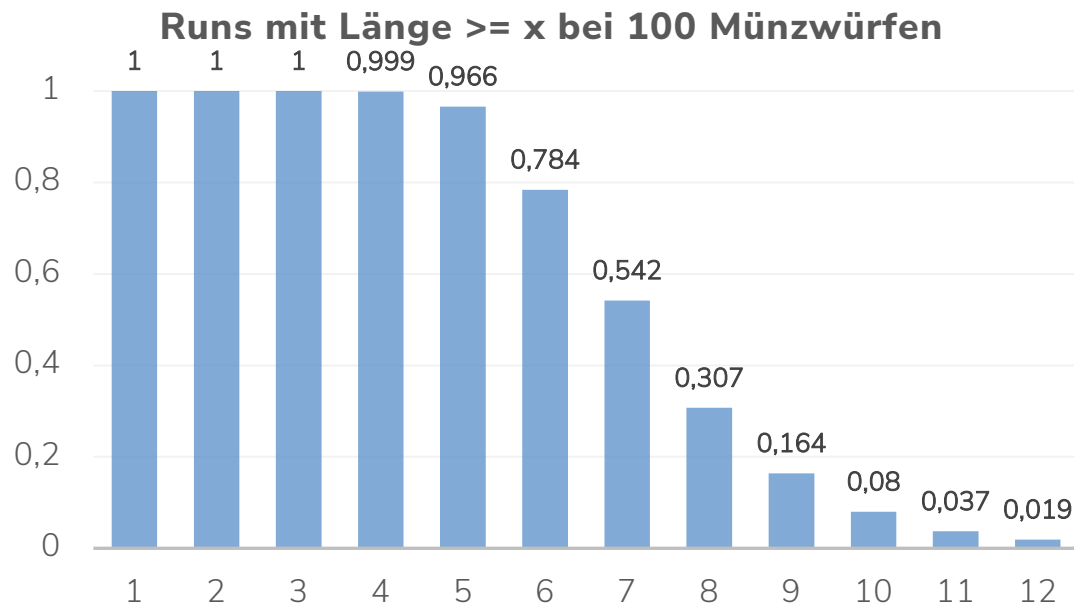
```
00110101011001010110
10010110101010011010
10011001010101101010
01011010100110101010
10100101010011010010
```

```
11001010101100101001
01101011001010110100
10101101001101010011
01010100110101001011
01010101010100100110
```

```
11001010101100101001
01101011001010110100
10101101001101010011
01010100110101001011
01010101010100100110
```

```
10101001100110101110
00100110101011100010
11011100110010101001
01101001110101001011
00110010101010100110
```

Relative Häufigkeiten zumindest einen Run mit Länge $\geq x$ zu haben.



Tabellenkalkulation
1000 Simulationen

Bei 100 Münzwürfen

○ Zumindest ein Run der Länge ≥ 4 : ~99,9 %

• ...0**1111**0...

• ...1**0000**1...

○ Zumindest ein Run der Länge ≥ 5 : ~97 %

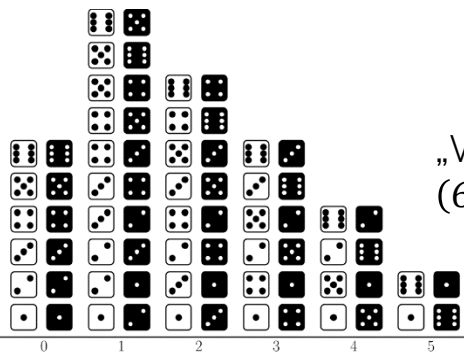
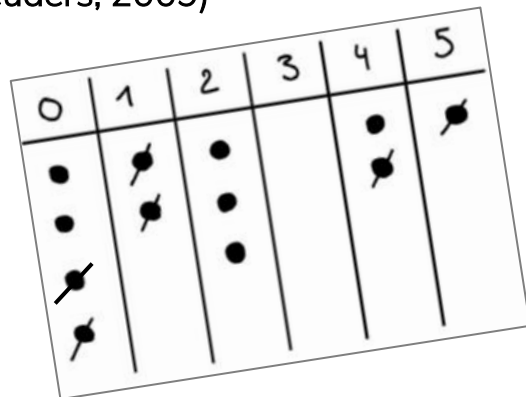
• ...0**11111**0...

• ...1**00000**1...

```
10101001100110101110
00100110101011100010
11011100110010101001
01101001110101001011
00110010101010100110
```

Verteilungen

○ Gefangene befreien (Leuders, 2009)



„Warum ist $(1, 6) \neq (6, 1)$, aber $(6, 6)$ wird nur einmal gezählt?“

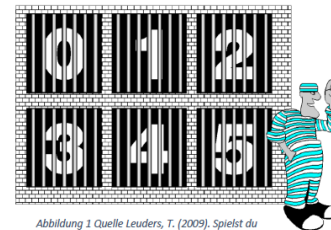
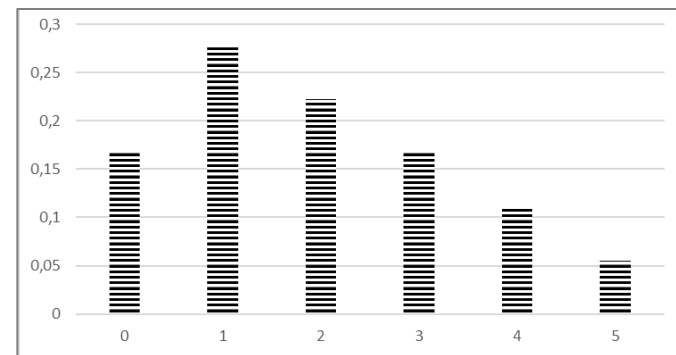


Abbildung 1 Quelle Leuders, T. (2009). Spielst du noch-oder denkst du schon. PM-Praxis der Mathematik in der Schule, 51(25), 1-9

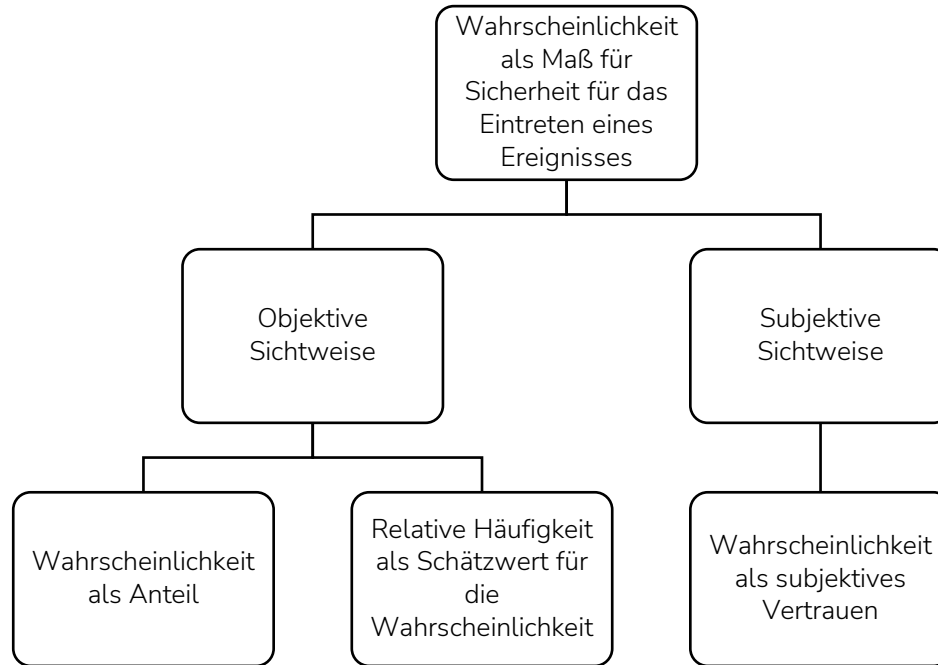


Inhalte:

- Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeit als Anteil
- Wahrscheinlichkeitsverteilung abseits von der „üblichen“ (Summe bei 2 Würfeln u.ä.)



Grundvorstellungen und Sichtweisen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff



Quelle: Laakmann & Schacht (2019)

Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

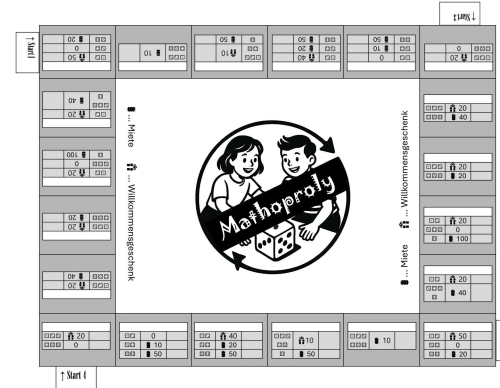


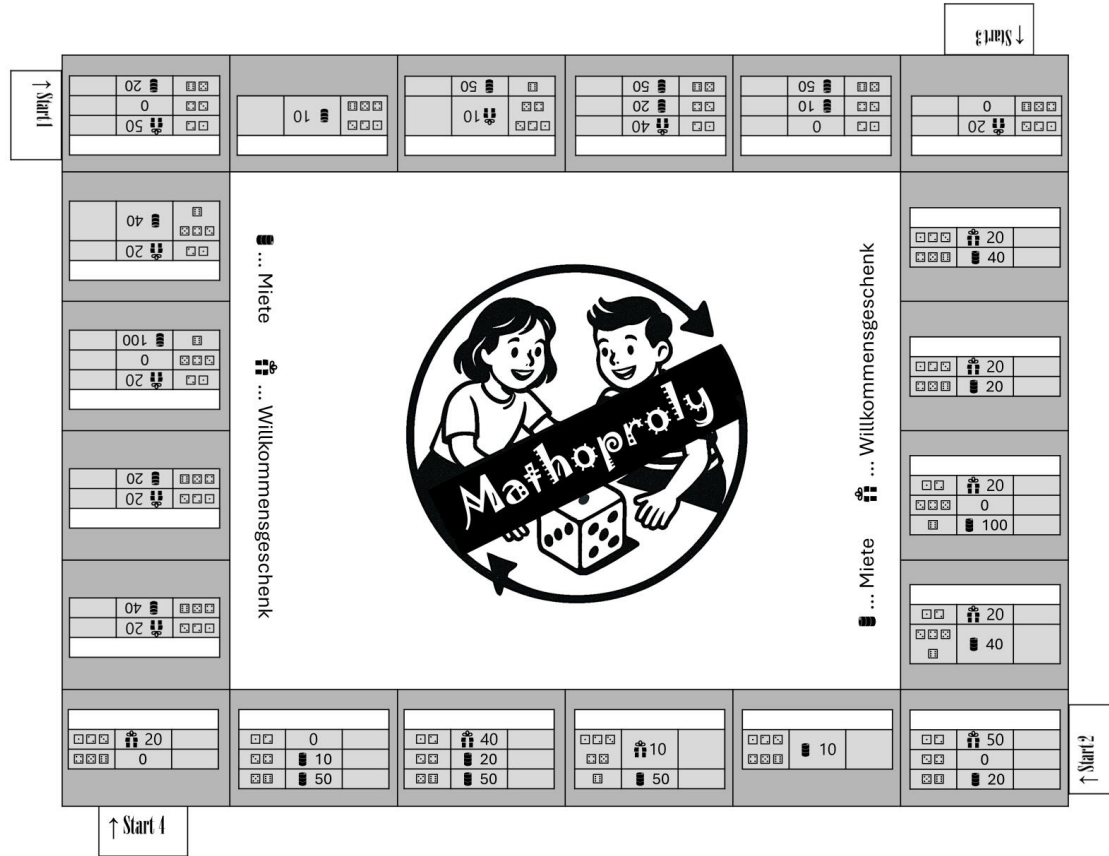
Grundvorstellung	Wahrscheinlichkeit als ...		
	Anteil	Schätzwert der relativen Häufigkeit	Subjektives Vertrauen
Beispiel für Verständnisanker	Gleich große Flächen auf einem Würfel	Darstellung der Stabilisierung der relativen Häufigkeit bei wiederholten Reißzweckwürfen	Erfahrung und Intuition bei der Abschätzung von Geschwinncancen bei einem Fußballspiel

Erwartungswert und Varianz



- Mathoprolly (Lerchenberger & Oberbucher, in Druck)
 - 300 M Startgeld.
 - Kosten für jedes Feld: 40 M





↑ Start 1

↑ Start 3

↑ Start 4

↑ Start 2

Chenke

Willkommens

Miete

Mathopoly

Christoph

20	0	50
20	0	50
20	0	50

10	50	10
10	50	10
10	50	10

50	20	40
50	20	40
50	20	40

0	20	0
0	20	0
0	20	0

20	0	100
20	0	100
20	0	100

40	20	40
40	20	40
40	20	40

20	0	40
20	0	40
20	0	40

0	10	50
0	10	50
0	10	50

40	20	50
40	20	50
40	20	50

10	10	50
10	10	50
10	10	50

10	10	50
10	10	50
10	10	50

50	0	20
50	0	20
50	0	20

Erwartungswert

$$\mu = -20 \text{ M} \cdot \frac{2}{6} + 0 \text{ M} \cdot \frac{3}{6} + 100 \text{ M} \cdot \frac{1}{6} = 10 \text{ M}$$

(Investition nicht miteingerechnet!)

$$\mu = -10$$

A1 $\sigma^2 = 100$		
	 20	
	0	

A2 $\sigma^2 \approx 867$		
	 50	
	0	
	 20	

$$\mu = 0$$

B1 $\sigma^2 = 400$		
	 20	
	20	

B2 $\sigma^2 = 500$		
	 10	
		
	 50	

$$\mu = 10$$

C1 $\sigma^2 = 0$		
	 10	
		

C2 $\sigma^2 = 900$		
	 20	
	 40	

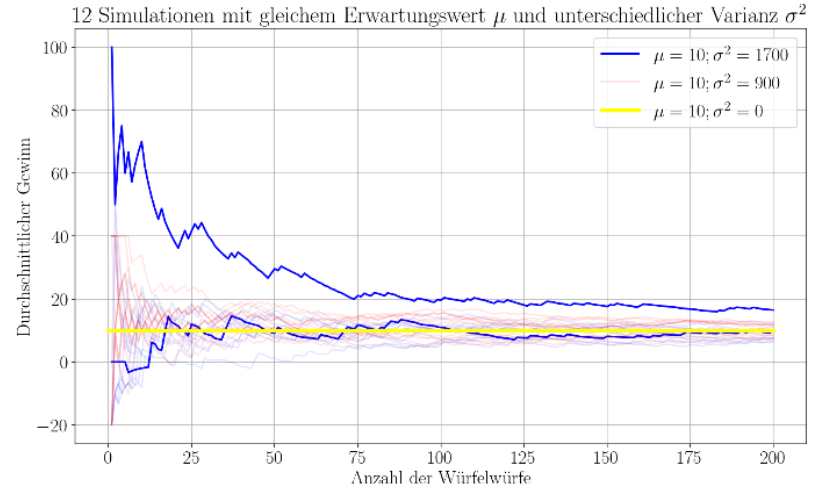
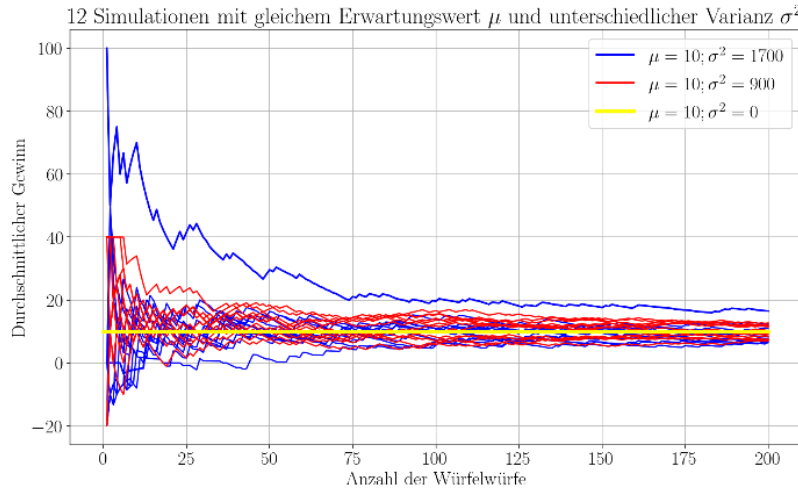
C3 $\sigma^2 = 1400$		
	 40	
	 20	
	 50	

C4 $\sigma^2 = 1700$		
	 20	
	0	
	 100	

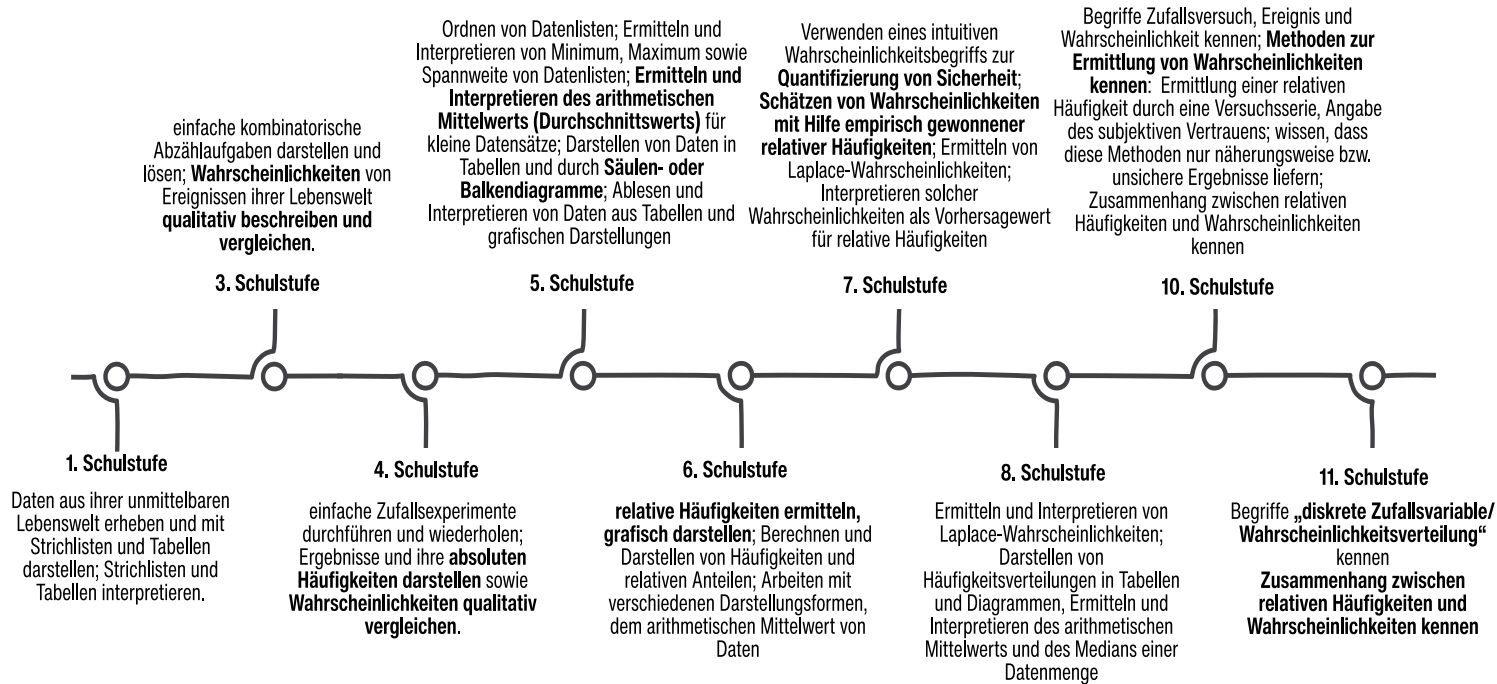
$$\mu = 20$$

D1 $\sigma^2 = 467$		
	0	
	 10	
	 50	

D2 $\sigma^2 = 800$		
	 20	
	 40	
		



Lerchenberger, E. & Oberbacher, C. (in Druck). Mathoprolly – ein Spiel für den Stochastikunterricht in (fast) allen Schulstufen. Erziehung und Unterricht



Erwartungswert und Varianz



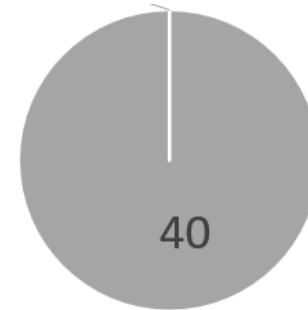
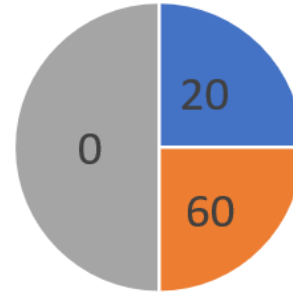
○ Glücksrad

Jede:r beschriftet das eigene Glücksrad mit Geldbeträgen (+ oder -). Einsatz pro Drehen: 10 GE.
→ Auszahlen muss man selbst!



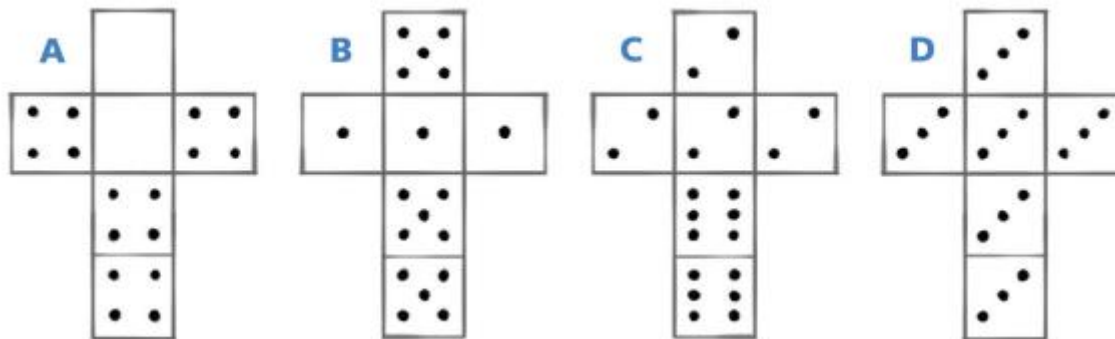
Jede:r darf nun ein anderes Glücksrad wählen und drehen.

Pro Person, die dein Glücksrad wählt, erhältst du 100 GE von der Bank.



„Spiel mit imperfekter Information“ /
„Spiel ohne perfekte Information“

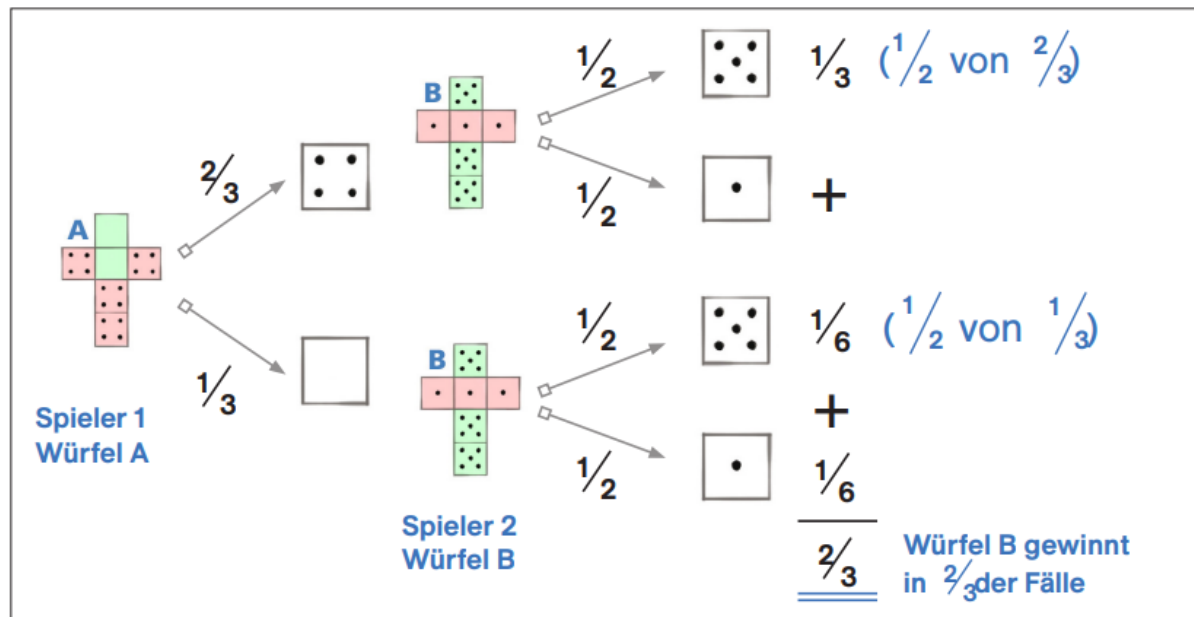
Nicht-transitive Würfel („Efronsche Würfel“)



Quelle: https://explorer.technorama.ch/media/dokumente/10098_Efronsche_Wu%CC%88rfe_DEFIL.pdf

Spannend: für jeden der vier Würfel gibt es einen anderen, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen ihn gewinnt!
→ nicht transitiv (wie Schere-Stein-Papier)

Nicht-transitive Würfel („Efronsche Würfel“)



Quelle: https://explorer.technorama.ch/media/dokumente/10098_Efronsche_Wu%CC%88rfel_DEFIL.pdf

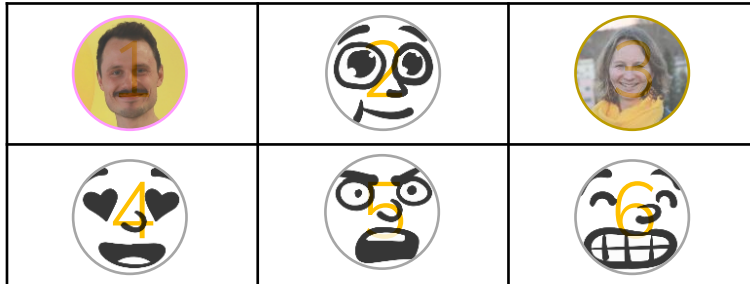
„Mark's Game“:

Ist das Spiel auf lange Sicht vorteilhaft für die Bank?



Jede:r setzt eine Münze auf eine Zahl.

- Zeigt genau ein Würfel deine Zahl: Einsatz zurück +1
- Zeigen genau zwei (drei) Würfel deine Zahl: Einsatz zurück +2 (+3)
- Zeigt kein Würfel deine Zahl: Einsatz geht an die Bank



Würfelergebnis	Gewinn für die Bank
alle verschieden	0
2 gleich	1
alle 3 gleich	2

LUPI – lowest unique positive integer

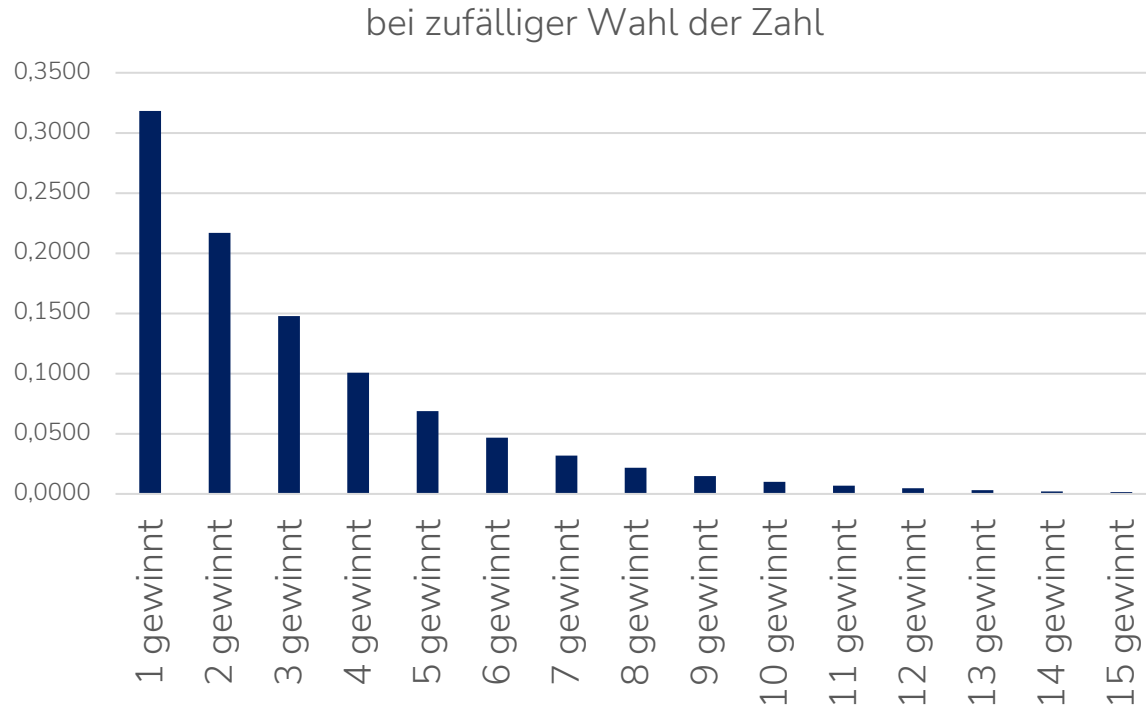


○ <https://umfrage.uni-leipzig.de/index.php/185482?lang=de>
<https://kurzlinks.de/p5ik>

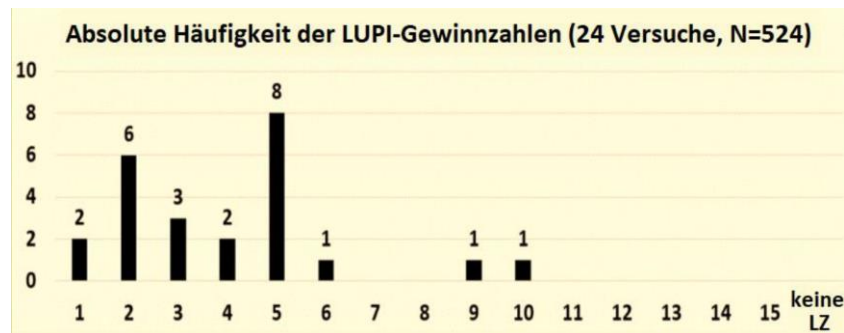
- Alle Teilnehmenden wählen jeweils geheim eine natürliche Zahl von **1 bis 15**.
- Es gewinnt die Person, deren Zahl **nur 1x** gewählt wurde und die **möglichst klein** ist.
 - Gibt es keine kleinste alleinige Zahl, gewinnt niemand.



Theoretischer a-priori Wahrscheinlichkeitszugang oder subjektiv-spieltheoretischer Ansatz?



Theoretischer a-priori Wahrscheinlichkeitszugang oder subjektiv-spieltheoretischer Ansatz?



viele spieltheoretische Überlegungen, aber auch Persönliches („Lieblingzahl“), Ästhetik, Mathematik etc.

Quelle: Schumacher & Krohn (2024), Folien 12+13