



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Negative Zahlen in der 6. Schulstufe – eine aktive Erarbeitung neuer Grundvorstellungen

HS-Prof. Mag. Andrea Karner, BEd PhD



Inhalt

1. Lehrplanbezug
2. Die Entstehung negativer Zahlen nach Malle (2007)
3. Grundvorstellungen und Kontextualisierungen
4. Der Zauberkessel, ein Temperatur-Modell
 - Ordnung: Aufbau einer Zahlengeraden
 - Addition und Subtraktion (Fokus 6. Schulstufe)
5. Fehlvorstellungen entgegenwirken



1. Lehrplanbezug: Negative Zahlen

Lehrplan neu (bmbwf, 2023)

Begründung für die Einführung negativer Zahlen in der 6. Schulstufe

- Alltagsvorstellungen meist vorhanden
- Aufbau tragfähiger mentaler Modelle (Padberg & Wartha, 2017)
- Grundlage zur Objektivierung negativer Zahlen (Malle, 2007)
- Stabile Basis für die 7. Schulstufe
- Vermeidung von Überlagerungen bei Rechenregeln



1. Lehrplanbezug: Negative Zahlen

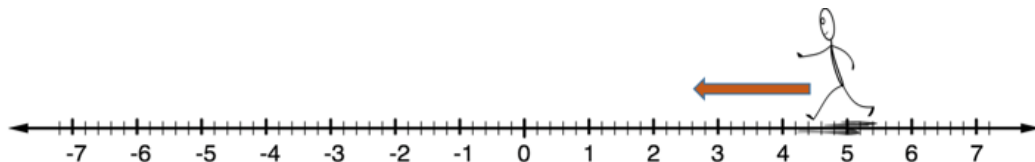
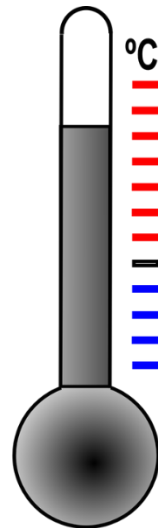
Lehrplan neu (bmbwf, 2024)

2. Klasse

- Einführung negativer ganzer Zahlen: interpretieren, darstellen, vergleichen

Vorbereitung des Rechnens mit negativen Zahlen

- Summen und Differenzen der Form ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl als Bewegung auf der Zahlengerade deuten und berechnen
- Anwendung z.B. beim rechnerischen Verschieben von Figuren im Koordinatensystem





1088

DI

Ein Thermometer zeigt -3°C , danach ändert sich die Temperatur.

a) Es wird um 5°C wärmer. b) Es wird um 2°C kälter. Wie viel Grad hat es nach der Änderung? Zeichne die Veränderung in einem Thermometer ein und schreibe eine passende Rechnung auf.

Ausführung:

a) Die Temperatur steigt um 5°C nach oben.

Vorher:



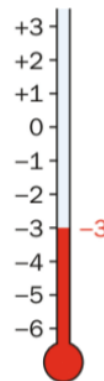
Nachher:



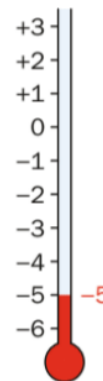
Rechnung: $-3 + 5 = 2$
Zum Schluss hat es $+2^{\circ}\text{C}$.

b) Die Temperatur sinkt um 2°C nach unten.

Vorher:



Nachher:

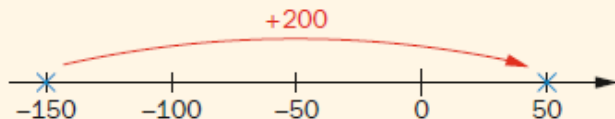


Rechnung: $-3 - 2 = -5$
Zum Schluss hat es -5°C .



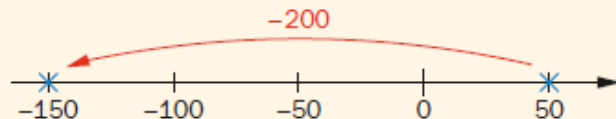
Veranschaulichung auf der Zahlengeraden

„Addiere eine natürliche Zahl!“ bedeutet:
„Gehe auf der Zahlengeraden nach rechts!“



$$-150 + 200 = 50$$

„Subtrahiere eine natürliche Zahl!“ bedeutet:
„Gehe auf der Zahlengeraden nach links!“



$$50 - 200 = -150$$

1080 Stelle die Rechnung auf einer Zahlengeraden dar. Ermittle so das Ergebnis.

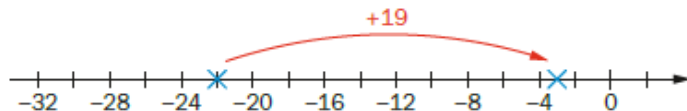
##

a) $-22 + 19$

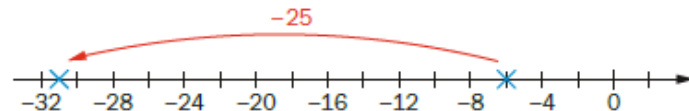
b) $-6 - 25$

Ausführung: Addiere, wenn etwas dazukommt! Subtrahiere, wenn etwas wegkommt!

a) Starte bei -22 , gehe 19 Einheiten nach rechts. b) Starte bei -6 , gehe 25 Einheiten nach links.



Du landest bei -3 , daher: $-22 + 19 = -3$



Du landest bei -34 , daher: $-6 - 25 = -34$



2. Die Entstehung negativer Zahlen

Vier Stadien nach Malle (2007):

1. Vorkenntnisse & Alltagsverständnis negativer Zahlen
2. Erster Anstoß zur Objektivierung der negativen Zahlen (Ordnung)
3. Addition und Subtraktion negativer Zahlen
4. Der endgültige Anstoß zur Objektivierung (Multiplikation)





Vorkenntnisse & Alltagsverständnis negativer Zahlen

- Geld
- Guthaben – Schulden (kardinal betrachtet)
- „im Minus“ oder „im Plus“ sein
- Grenzen:
 - „Mehr Schulden!“ - Weniger Geld? Gar kein Geld?
 - Warum muss ich 200 mit einem Vorzeichen versehen, wenn ich „200 Euro Schulden“ habe?





Vorkenntnisse & Alltagsverständnis negativer Zahlen

- Temperatur
- Wärme (Hitze) – Kälte

- „Mehr Kälte?!“

→ Ansichtssache:

Weniger Wärme? Gar keine Wärme?

→ Übergang zur Abstraktion: absoluter Nullpunkt



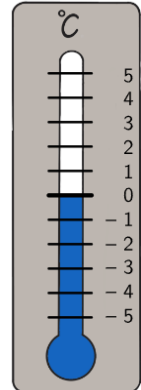


Erster Anstoß zur Objektivierung der negativen Zahlen (Ordnung)

Mathematische Definition im Kontext

Darstellungen, die auf der Zahlengerade abgebildet werden können

- Kontostand: niedriger und hoher Kontostand
- Temperatur: niedrige und hohe Temperaturen



Herausforderungen (Malle, 2007)

- Ausgangs- und Endtemperatur auf eigenen Thermometern, Veränderung teilweise auf einem dritten Thermometer
- Probleme bei Darstellungen auf der Zahlengerade



- „Dazugehörige Darstellungen auf der Zahlengeraden ergeben sich nicht aus [Alltagserfahrungen], sondern müssen erst mühsam (im Unterricht) erlernt werden.“

→ **Aufbau von Grundvorstellungen**



Wenn Grundvorstellungen fehlen...

$$(-5) + (-3) = +8$$

$$(-5) + (-3) = \underline{\underline{+8}}$$

$$(-5) + (-3) =$$

$$+5 - 3 = \underline{\underline{+2}}$$

$$(-5) + (-3) =$$

$$+5 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

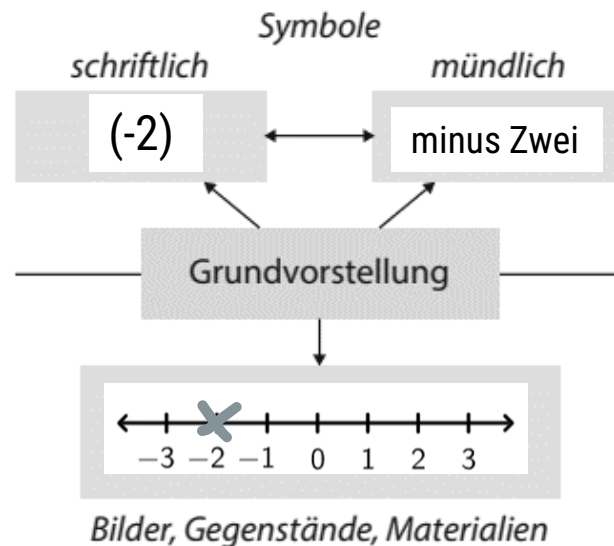
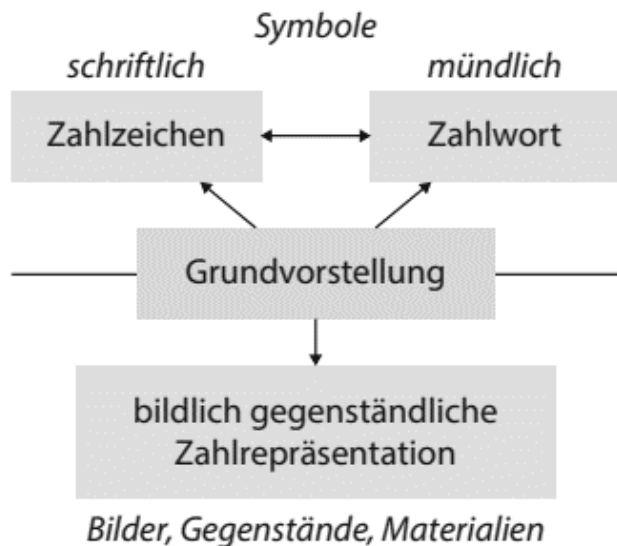


3. Grundvorstellungen (Padberg & Wartha, 2023)

*„Grundvorstellungen sind
tragfähige flexible mentale Modelle
zu mathematischen Inhalten.“*



Mentale Modelle - Darstellungswechsel



(Padberg & Wartha, 2023)

→ Kontexte

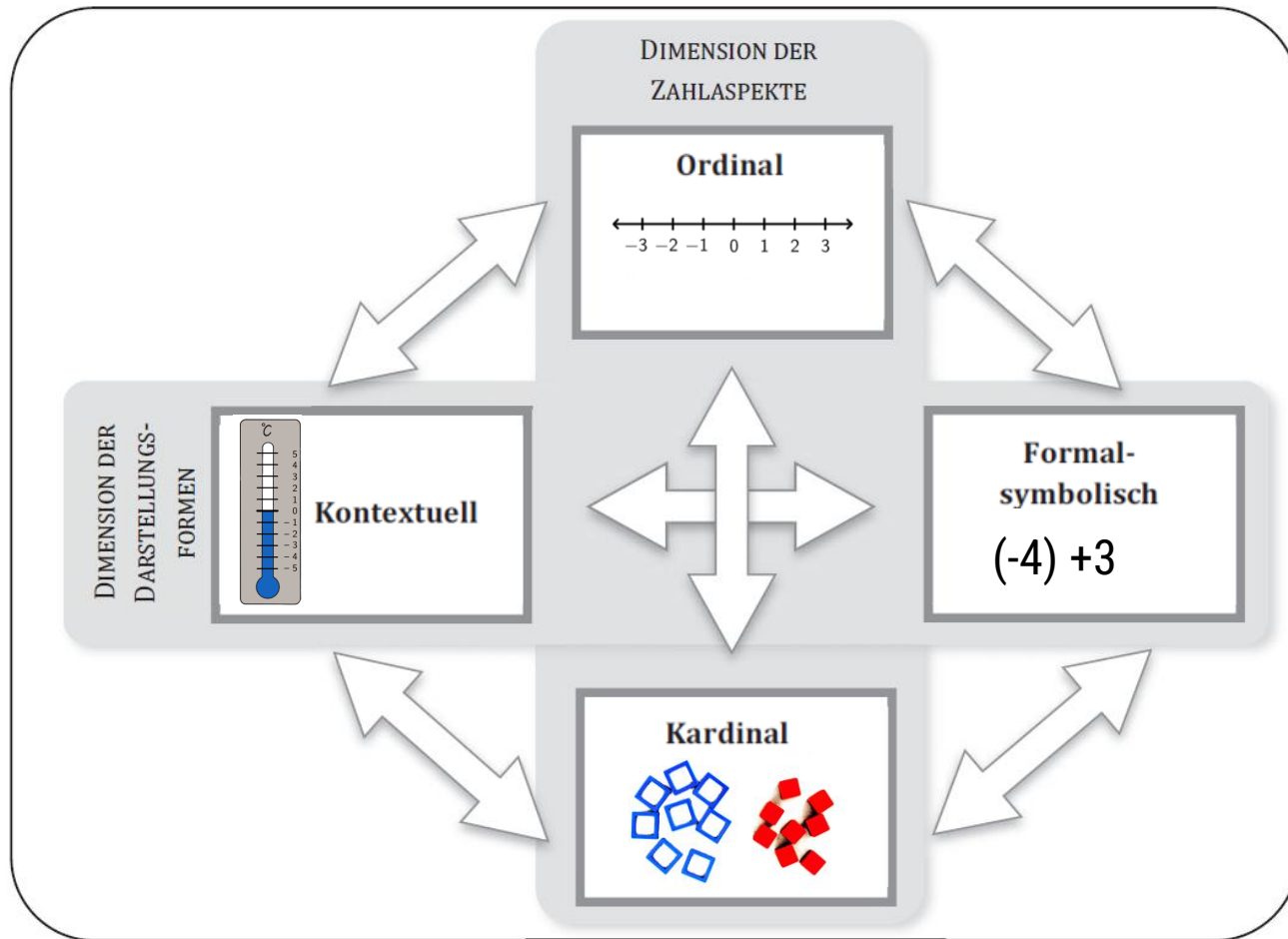


Ganze Zahlen im Kontext Temperatur

- Temperatur „im Minus“ bedeutet unter dem Gefrierpunkt (z. B. unter 0°C) und wird als negative Zahl betrachtet.
- Temperatur „im Plus“ bedeutet über dem Gefrierpunkt und wird als positive Zahl betrachtet.
- Für dieses Modell eignet sich der **Zahlbereich -100 bis +100**, denn der absolute Nullpunkt liegt bei $-273,15^{\circ}\text{C}$.



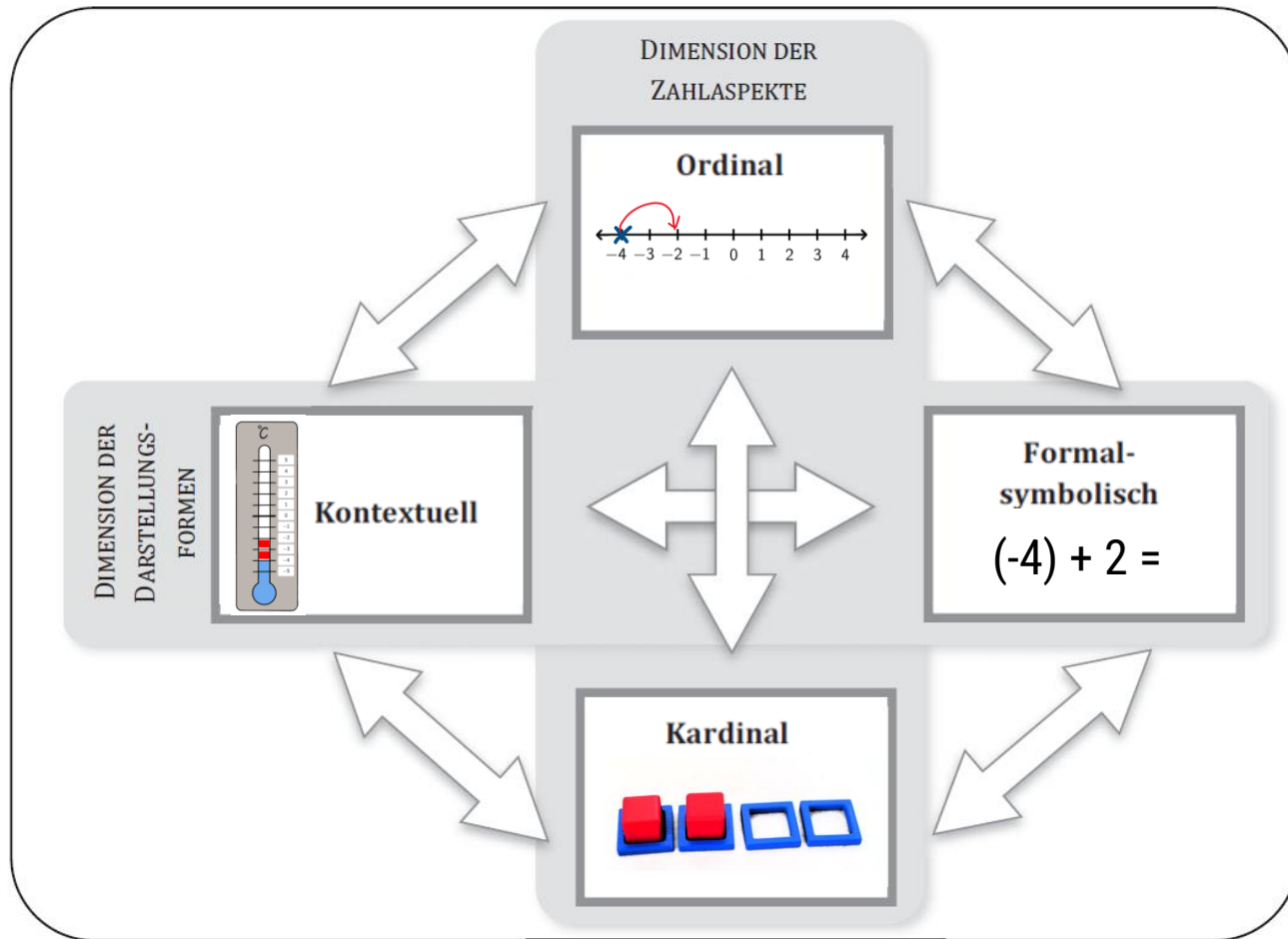
Fokussierungsebenen am Beispiel Temperatur



in Anlehnung an Schindler (2014)



Fokussierungsebenen am Beispiel Temperatur



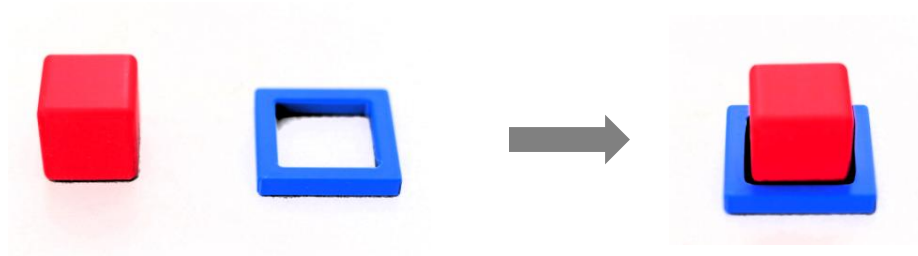
in Anlehnung an Schindler (2014)



Exkurs: Addition und Subtraktion

Kardinale Ebene (in Anlehnung an Wittmann, 2024)

- Ein roter Würfel, der +1 darstellt und ein blauer Rahmen, der -1 darstellt, „neutralisieren“ sich.
- Die beiden ergeben zusammen 0, entsprechend $1 + (-1) = 0$.



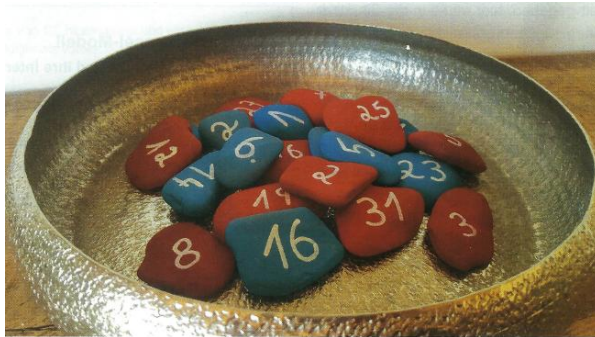


4. Der Zauberkessel (Bicker & Schütte-Seitz, 2020)

Was hast du dir vorgestellt?

Mit einer mathematischen Vorstellungsübung zu den negativen Zahlen

Ursula Bicker, Diana Schütte-Seitz



- Weiterentwicklung
- Anpassung an die Lehrplanvorgaben der 6. Schulstufe



Der Zauberkessel

kalte Steine



blau

kalt – negativ

niedrigere Temperatur

warme (heiße) Steine



rot

warm – positiv

höhere Temperatur



Einführung Vorzeichen

*„Plus ist warm, Minus kalt, im Kessel wirkt Magie schon bald.
Hokus, Fokus, Vorzeichenzeit, jetzt sind die Zahlen gleich bereit!“*

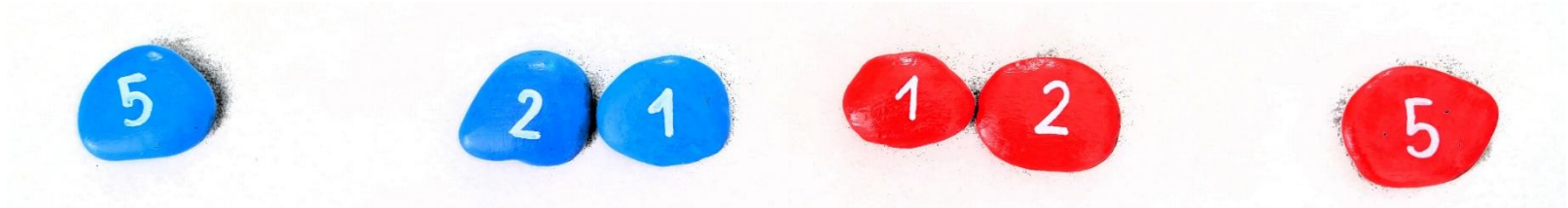




Darstellung auf einer Zahlengerade

Die Schüler*innen ordnen ihre erhaltenen Steine in Form einer Zahlengerade

Im ersten Durchgang werden nur rote und in einem zweiten Durchgang nur blaue Steine geordnet.



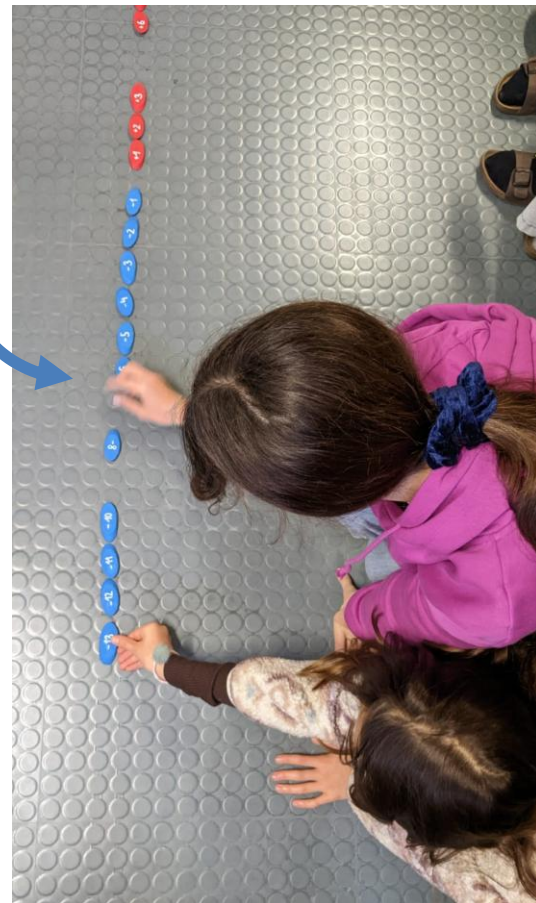
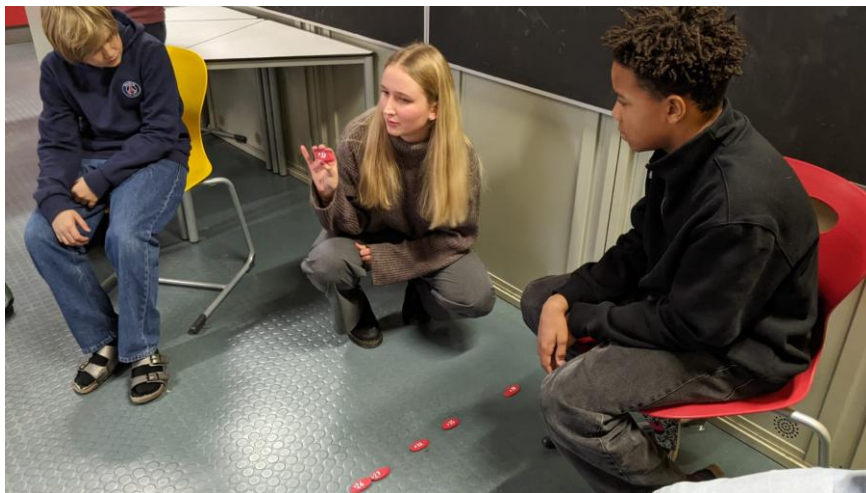
2. Durchgang

1. Durchgang



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Impulsfrage: *Welche Steine sind angenehm kühl, welche sind eiskalt?*



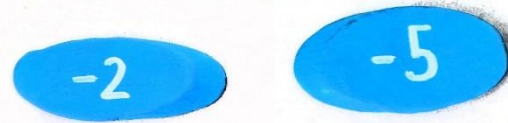


Vergleich der Zahlen

Die Schüler*innen vergleichen und beschreiben rote und blaue Steine hinsichtlich der Eigenschaften „wärmer“ oder „kälter“.

Zunächst werden nur rote oder blaue Steine verglichen, im Anschluss rote und blaue Steine.

- Mögliche Fragestellung: Welcher Stein ist wärmer/kälter?
-2 oder -5?

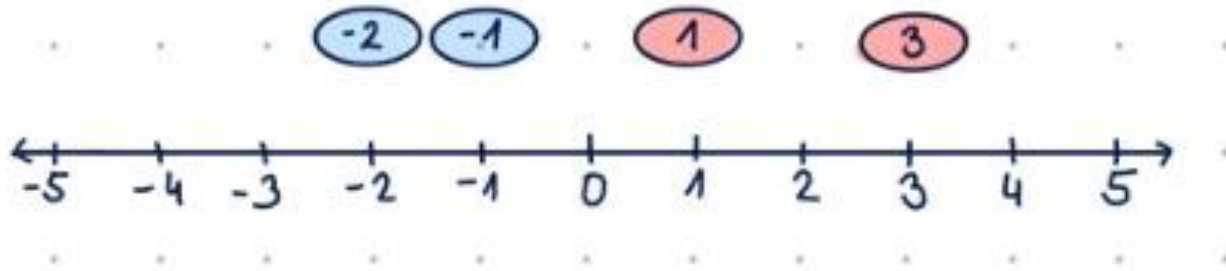




Übergang zur Definition (Objektivierung)

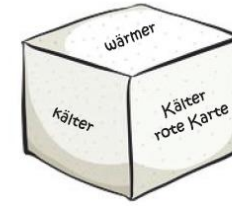
- Die 0 wird festgelegt.
- + 1 wird aufgelegt auf der anderen Seite ihre Gegenzahl (-1).
- Es folgt der Übertrag ins Heft.

Tafelbild:





Spiele



Höheres Leistungsniveau: „Wärmer oder Kälter“ – Ein Rechenspiel.

Es bedeuten:

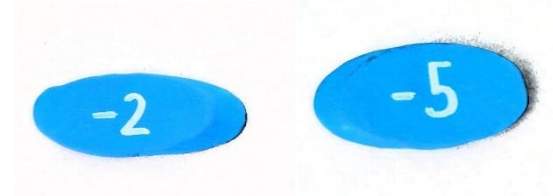
„kälter“	Lege eine rote oder eine blaue Karte ab, die eine kältere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.
„kälter – rote Karte“	Lege eine rote Karte ab, die eine kältere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.
„kälter – blaue Karte“	Lege eine blaue Karte ab, die eine kältere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.
„wärmer“	Lege eine rote oder eine blaue Karte ab, die eine wärmere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.
„wärmer – rote Karte“	Lege eine rote Karte ab, die eine wärmere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.
„wärmer – blaue Karte“	Lege eine blaue Karte ab, die eine wärmere Temperatur anzeigt als die aufgedeckte Karte.





Spiele

Niedrigeres Leistungsniveau: „**Welche Zahl hat den höheren Wert?**“
Vergleichs- und Ordnungsübung.



Zauberkessel – Addition und Subtraktion

Vorstellungsübung





Vorstellungsübung 1 (Bicker & Schütte-Seitz, 2020; gekürzt)

- Setz dich bequem hin und schließe die Augen. Atme ruhig ein und aus. Dein Körper wird ganz leicht.
- Du schwebst durch die Decke und fliegst über einen großen Zauberwald. Du landest zwischen hohen Bäumen. Es ist still.
- Zusammen mit deiner besten Freundin oder deinem besten Freund gehst du weiter. Auf einer Lichtung steht ein großer Zauberkessel.
- Auf dem Kessel siehst du eine Anzeige: 30 °C. Im Wasser liegen rote und blaue Steine. Das Wasser ist warm.
- Du nimmst einen roten Stein heraus. Die Anzeige zeigt 20 °C. Dann legst du einen blauen Stein hinein.
- Jetzt zeigt die Anzeige 10 °C.
- Plötzlich erscheint ein Magier und fragt: „Was glaubt ihr, passiert mit dem Wasser, wenn ihr weitere Steine nehmt?“
- Präge dir den Zauberkessel gut ein. Atme ruhig ein und aus und fliege zurück in die Schule. Öffne die Augen.



Zauberkessel – Addition und Subtraktion

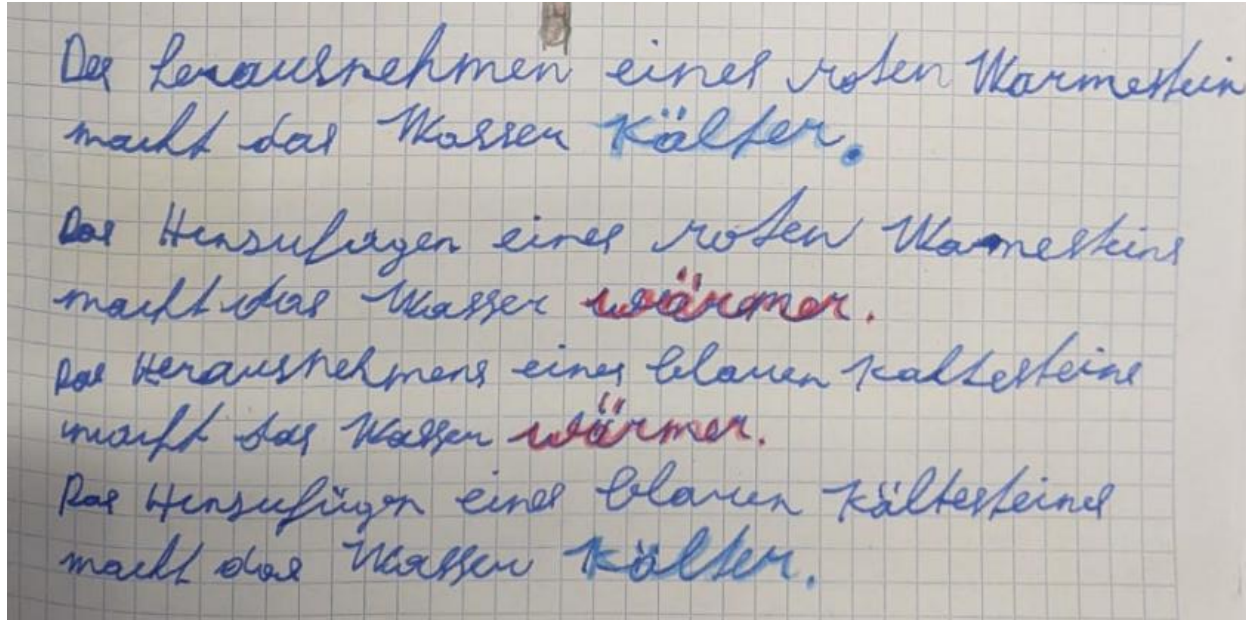
Reflexionsphase und Übertrag ins Heft:

- Was passiert, wenn ich einen roten/blauen Stein in den Zauberkessel hineingebe/herausnehme?



Zauberessel – Addition und Subtraktion

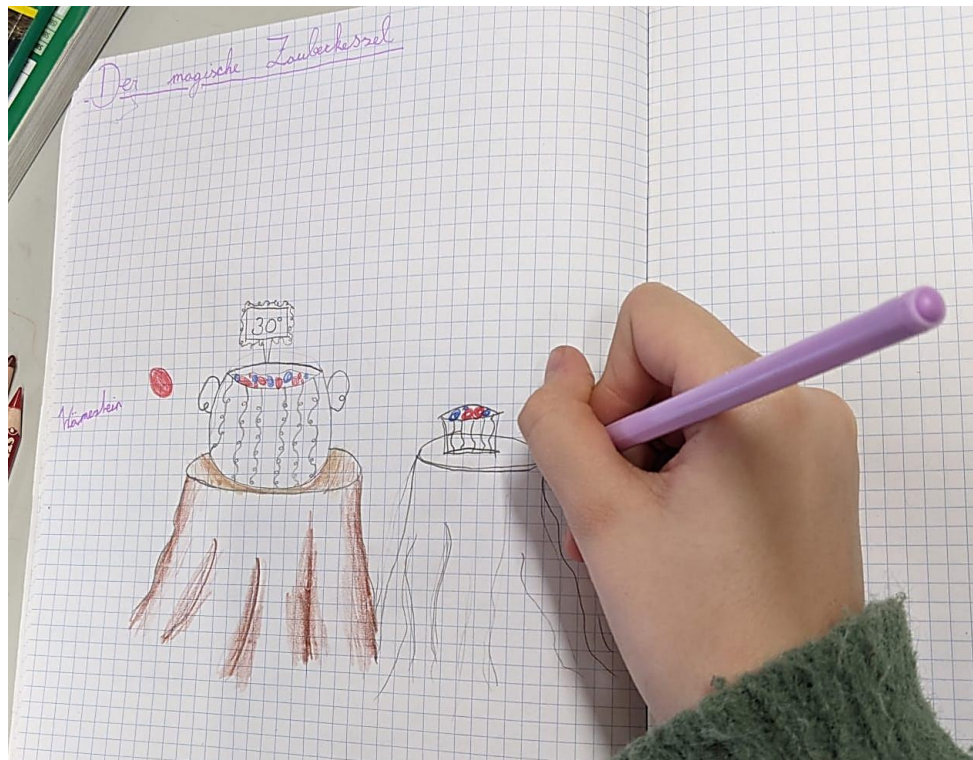
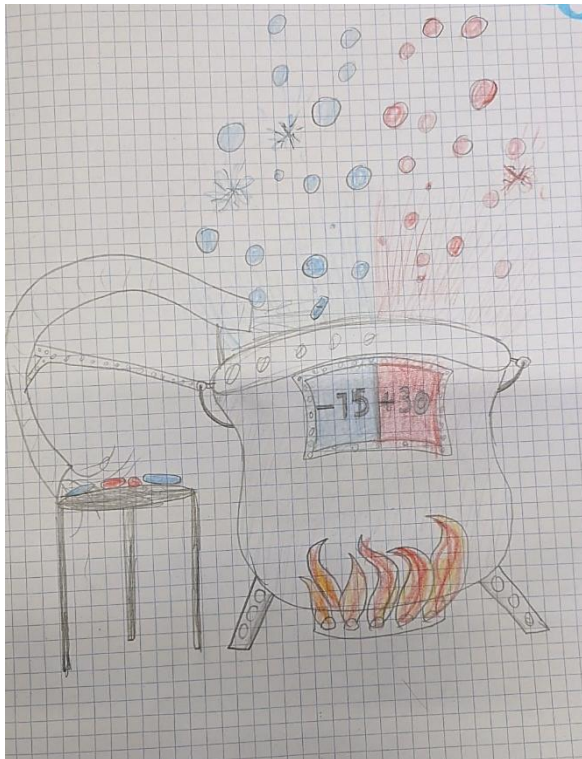
Die Ergebnisse und korrekten Formulierungen werden im Heft festgehalten.





Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Die Schüler*innen zeichnen zusätzlich auch einen Zauberkessel.





Verinnerlichung von Zustand und Veränderung

- **Ausgangszustand:** Temperatur im Zauberkessel
→ Startpunkt auf der Zahlengerade
- **Veränderung:** Wärmestein wird hinzugefügt oder weggenommen
→ Bewegung auf der Zahlengerade
- **Endzustand:** Temperatur im Zauberkessel
→ Endpunkt auf der Zahlengerade



Verinnerlichung von Zustand und Veränderung

Veränderung



+ (+)

+

Wärmestein hinzufügen → Ausgangstemperatur wird höher

- (+)

-

Wärmestein wegnehmen → Ausgangstemperatur wird niedriger



Verinnerlichung von Zustand und Veränderung

Veränderung



+ (-)

-

Kältestein hinzufügen → Ausgangstemperatur wird niedriger

- (-)

+

Kältestein wegnehmen → Ausgangstemperatur wird höher

(7. Schulstufe)



Bewegung auf der Zahlengerade

Darstellung von Addition und Subtraktion als Bewegung auf der Zahlengerade für die 6. Schulstufe

- Eine Zahlengerade wird am Gang aufgeklebt.
- Die Lehrperson nennt Beispiele (ganze Zahl $\pm$ natürliche Zahl). Die Schüler*innen gehen auf der Zahlengerade auf bzw. ab.

Im Zauberkessel herrscht eine Temperatur von -7°C . Es wird ein Wärmestein herausgenommen.	Im Zauberkessel herrscht eine Temperatur von -1°C . Es wird ein Wärmestein herausgenommen.	Im Zauberkessel herrscht eine Temperatur von -13°C . Es wird ein Wärmestein herausgenommen.
+8	+8	+1



Pädagogische
Hochschule
Steiermark





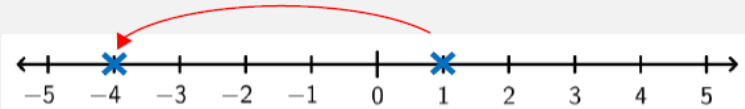
Stationenbetrieb

Bewegung an der Zahlengerade: Die Schüler*innen führen die Bewegungen auf der Zahlengeraden entsprechend der Aufgabenstellung auf den Kärtchen aus und zeichnen diese in die auf einem Arbeitsblatt abgebildeten Zahlengeraden ein.

z. B.

Im Zauberkessel herrscht eine Temperatur von 1°C . Es wird ein Wärmestein herausgenommen.

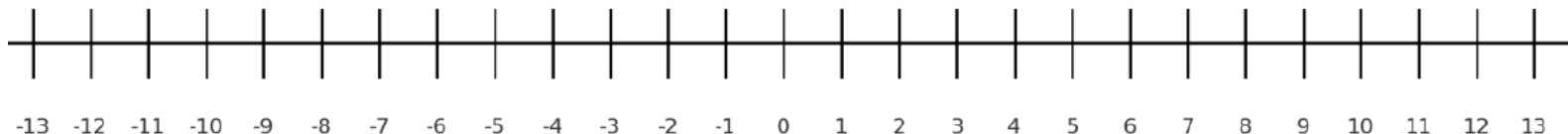
+5





Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Stationenbetrieb



Hin und Her Spiel:



Mit Spielkegeln gehen die Schüler*innen die gewürfelte Augenzahl auf einer ausgedruckten Zahlengerade ab.



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Stationenbetrieb

Lernbuffet: Arbeitsblätter in verschiedenen Schwierigkeitsgraden

Computerstation: FLINK-Material

Zusatzstation: Bingo für schnellere Schüler*innen



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Fink in Mathe



JKU / Flink in Mathe / 2. Klasse

Zahlen und Maße.

Wiederholung	▼
Teilbarkeit	▼
Bruchzahlen	▼
Ganze Zahlen	▲
• Negative Zahlen - Einführung ↗ • Ganze Zahlen & Arbeiten mit der Zahlengerade ↗ • Ordnen und Vergleichen von ganzen Zahlen ↗	

GeoGebra

Suche



Ordnen und Vergleichen von ganzen Zahlen

Autoren: FUNK-Team

Thema: Ganze Zahlen, Zahlen



Inhaltsverzeichnis

Entdecken

- [Ordnung ganzer Zahlen](#)
- [Vergleichen mit der Zahlengerade](#)
- [Mehrere Zahlen ordnen](#)
- [Guthaben, Schulden, Kontostand](#)

Üben

- [Ganze Zahlen vergleichen - Level 1](#)
- [Ganze Zahlen vergleichen - Level 2](#)
- [Zauberkeisel](#)
- [Schneckenrennen](#)
- [Klecksaufgaben](#)
- [Ordnungskette - Level 1](#)
- [Ordnungskette - Level 2](#)
- [Guthaben, Schulden, Kontostand](#)



5. Fehlvorstellungen entgegenwirken

- Das Problem, dass die Schüler*innen die positiven und die negativen Zahlen als eigene Bereiche sehen → bewusst Übergänge über die Null einplanen.
- Fokus auf Zustand und Veränderung: Die Schüler*innen sollen bei Unsicherheiten auf die Bewegung auf der Zahlengeraden zurückgreifen. Bei der Richtungsentscheidung an das Hinzufügen oder Wegnehmen von Wärme- und Kältesteinen denken.



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!





Literatur

Bicker, U. & Schütte-Seiz, D. (2020). Was hast du dir vorgestellt? Mit einer mathematischen Vorstellungsübung zu den negativen Zahlen, *Mathematik 5-10*, 51, 15–19.

bmbwf (2024). *Lehrplan Mittelschule - AHS*. https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ms.html

Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkbjekten. *Mathematik lehren*, 142, 52–57.

Padberg, F., & Wartha, S. (2023). *Didaktik der Bruchrechnung*. 6. Auflage. Springer Spektrum.

Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl: Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Springer.

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer Spektrum.

Wittmann, E. C. (2024). *Mathematik fachlich-aufbauend und schülerorientiert unterrichten. Ein Handbuch für die Sekundarstufe*. Band II: Vom Rechenunterricht der Grundschule zu den ganzen Zahlen und den Brüchen mit einer Einführung in die elementare Algebra. WTM-Verlag.