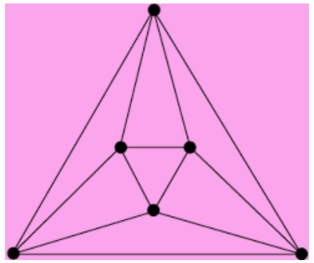
Polyeder reloaded: theoretisch, haptisch und mit Technologie

David Stuhlpfarrer

Pädagogische Hochschule Steiermark

Themen zu Polyedern

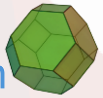
Winkel zwischen zwei durch jeweils drei ebene Punkte aufgespannten Flächen



Die großen Klassiker
- Euler'sche Polyederformel
- Platonische Körper
- Archimedische Körper
- Dualität
- Symmetrie
- Netze
- In- und Umkugeln
- Volumen und Oberfläche

Struktur & Tiefe
- Diederwinkel
- Schlegel-Diagramme
- Polyedergraphen
- Planare Graphen
- Steinitz-Theorem
- Starrheitssätze
- Zerlegung und Dissektion

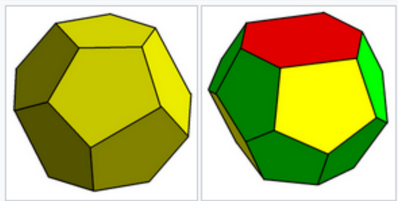
Raum & Optimierung
- Raumfüllung
- Rhombendodekaeder
- Voronoi-Zellen
- Kelvin-Problem
- Weaire-Phelan-Struktur
- Isoperimetrie
- Optimale Formen
- Bienenwabenproblem



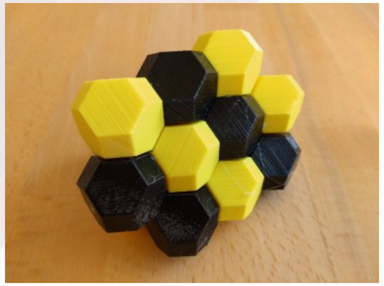
In 1887, Lord Kelvin asked the question [...]: how can space be partitioned into cells of equal volume with the least area of surface between them?

Moderne Erweiterungen
- Fullerene
- Geodätische Kuppeln
- Kristallographische Polyeder
- Computergeometrie
- 3D-Druck
- Algorithmische Konstruktion
- Origami-Polyeder
- 4D-Polytope

Wie kann man den dreidimensionalen Raum in Zellen gleichen Volumens aufteilen, sodass die gesamte Grenzfläche minimal wird?



Irregular dodecahedron   Tetrakaidecahedron

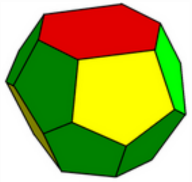


https://www.cutoutfoldup.com/214-weaire-phelan-structure.php

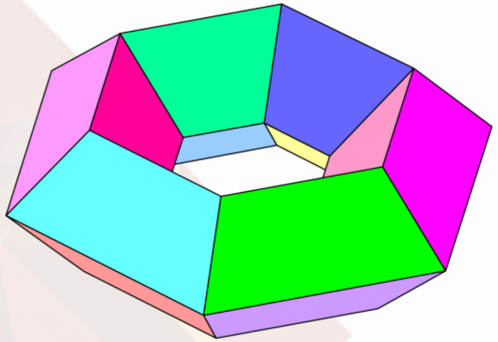
Klassische Schönheit, strukturelle Tiefe und moderne Optimierungsfragen.

Eulersche Polyederformel

$E-K+F=2$ (topologisch wie eine Kugel)

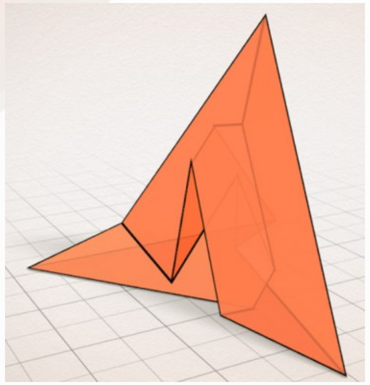


Sternpolyeder: kompliziert (selbst schneidende Flächen)



Löcher: $V-E+F=2-2g$ (g … Geschlecht, Anzahl der Löcher)

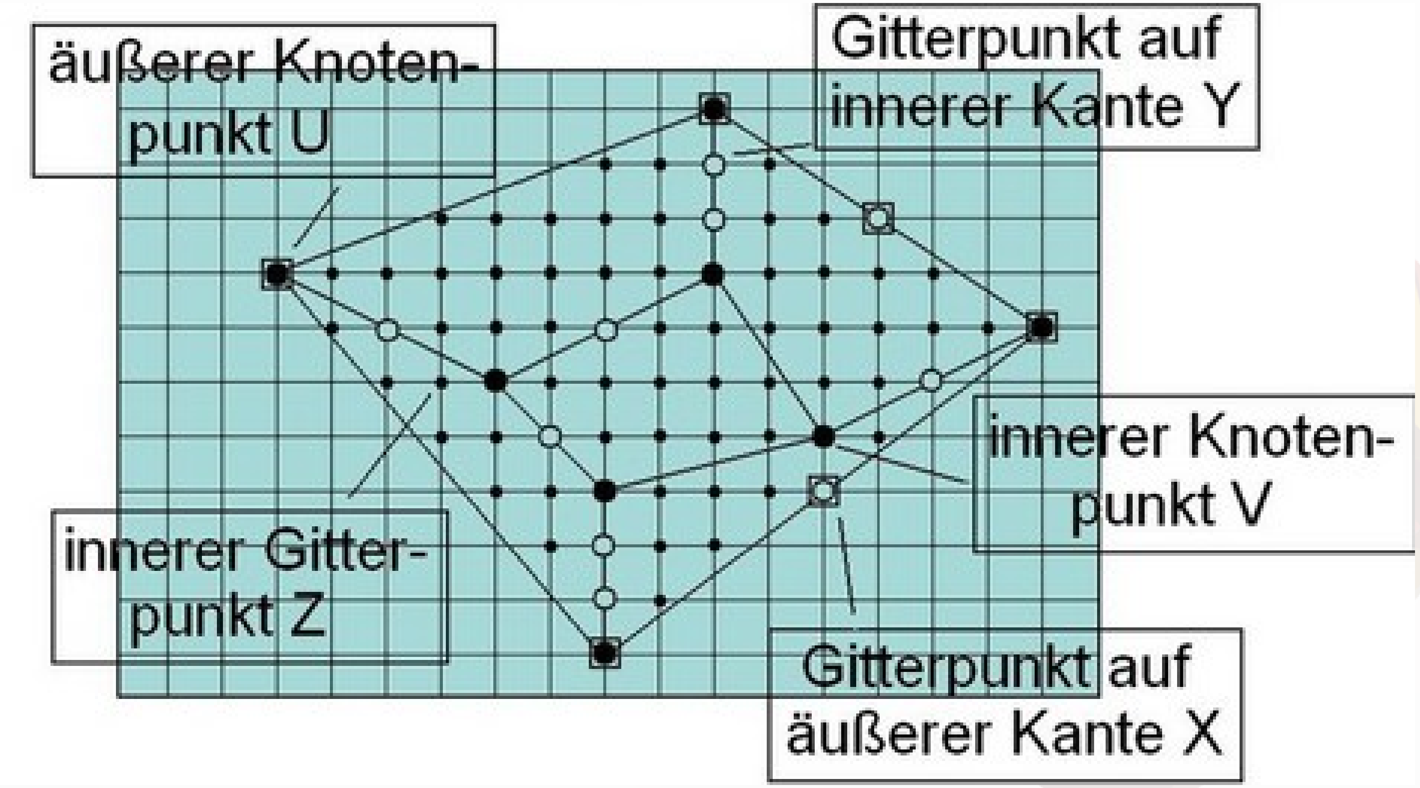
Bsp.: Szilassi-Polyeder (jede Fläche grenzt an jede andere),
Császár-Polyeder (dual: je zwei Ecken sind verbunden)



Origineller Beweis: Mit Satz von PICK

Satz von Pick ist äquivalent dem Eulerschen Polyedersatz.

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$



$$E - K + F = 2$$

Beweis siehe:
https://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz

Beweisideen

1. Ohne Loch:

Eine Fläche entfernen und das Polyeder in die Ebene legen.

Immer wieder Kanten zwischen zwei Flächen entfernen: K und F werden beide um 1 kleiner.

Danach äußere Kanten mit Endpunkt entfernen: K und E werden beide um 1 kleiner.

Am Ende bleibt ein Punkt übrig.

Deshalb bleibt $E - K + F$ immer gleich und hat den Wert 2.

2. Mit einem Loch (torusartig) :

Aufschneiden -> zwei neue Flächen, neue Kanten und Ecken kompensieren sich.

$$\boxed{V - E + F = 0}$$

Gleich lange Kanten

6: Tetraeder
12: Würfel, Oktaeder
18: abgestumpftes Tetraeder
24: Kuboktaeder, *Rhombendodekaeder*
30: Dodekaeder, Ikosaeder
36: abgestumpfter Würfel, abgestumpftes Oktaeder
48: Rhombenkuboktaeder
60: Ikosidodekaeder, snub cube, *Rhombentriakontaeder*
72: abgestumpftes Kuboktaeder
90: abgestumpftes Dodekaeder, abgestumpftes Ikosaeder
120: Rhombenikosidodekaeder
150: snub dodecahedron
180: abgestumpftes Ikosidodekaeder

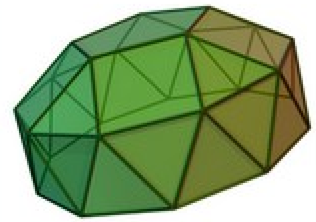
Weitere...

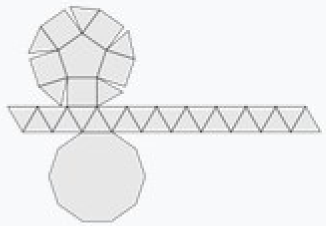
5 platonische
13 archimedische
2 katalanische Ausnahmen

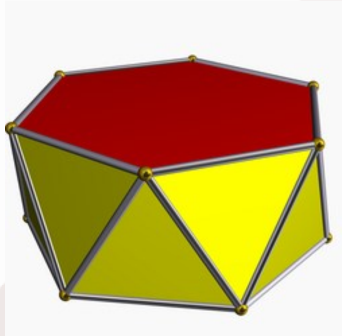
PLUS:
92 Johnson
unendlich viele Prismen
unendlich viele Antiprismen

Speziell: Deltaeder

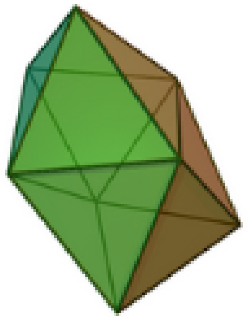
verdreht verlängerte Fünfeckskuppel







Trigondodekaeder



https://www.printables.com/model/930511-die-johnson-korper/files

https://polyhedra.tessera.li/

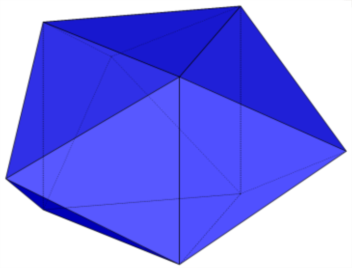
Konvexe Deltaeder (Δ)

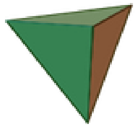
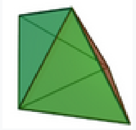
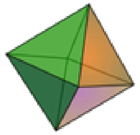
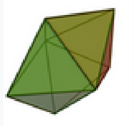
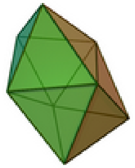
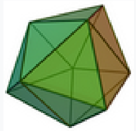
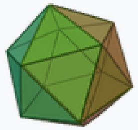
Da jede Fläche an drei Kanten und umgekehrt jede Kante an zwei Flächen stößt, gilt bei einem Deltaeder garantiert immer $3F = 2K$. Aus dem eulerschen Polyedersatz $E+F-K = 2$ ergeben sich dann weiter durch Eliminieren von K bzw. F die Formeln $F = 2(E-2)$ sowie $K = 3(E-2)$. Da aufgrund der Konvexität an jede Ecke maximal fünf Flächen stoßen, umgekehrt aber jede Fläche drei Ecken hat, gilt auf jeden Fall $5E \geq 3F$, woraus sich zusammen mit $F = 2(E-2)$ die Ungleichung $E \leq 12$ (folglich $F \leq 20$ und $K \leq 30$) ergibt.

Drei der acht existierenden konvexen Deltaedern sind platonische Körper (nämlich Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder). Die restlichen fünf Deltaeder sind Johnson-Körper.

Die exakte Form benötigt die Lösung einer kubischen Gleichung, daher ist sie nicht mit Zirkel und Lineal exakt konstruierbar.

Ansetzen von drei quadratischen Pyramiden an die Seitenflächen eines geraden dreiseitigen Prismas

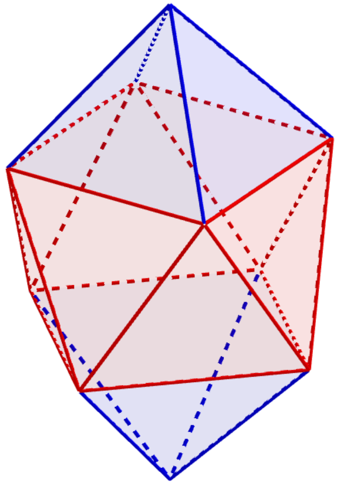


Deltaeder	Abbildung	Flächen (F)	Ecken (E)	Kanten (K)
Tetraeder		4	4	6
triangulare Bipyramide		6	5	9
Oktaeder		8	6	12
pentagonale Bipyramide		10	7	15
Trigondodekaeder		12	8	18
dreifach erweitertes Dreiecksprisma		14	9	21
zweifach erweitertes Antiprisma		16	10	24
Ikosaeder		20	12	30

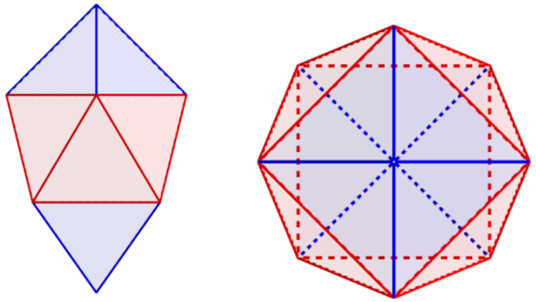
https://mathematische-basteleien.de/deltaeder.htm

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltaeder

One World Trade Center

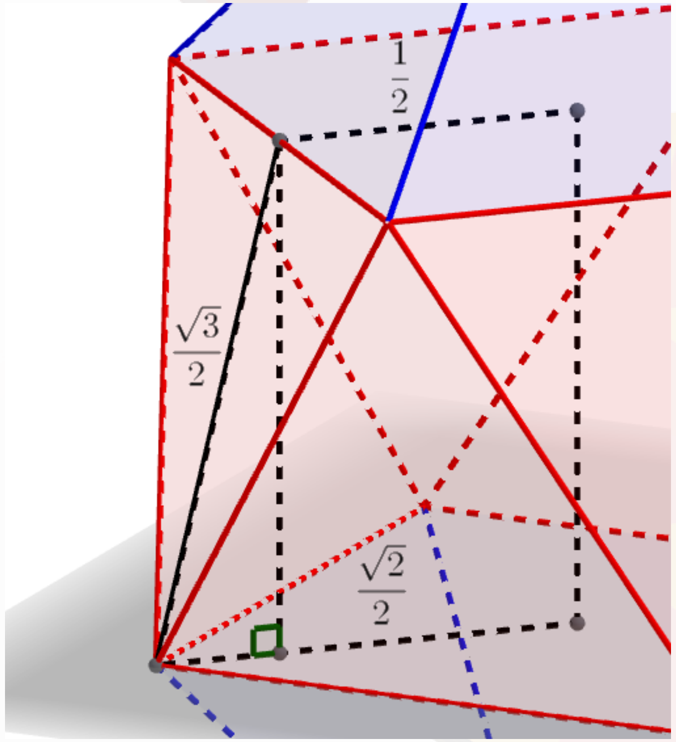


$$H = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} a = 2^{-1/4} a$$

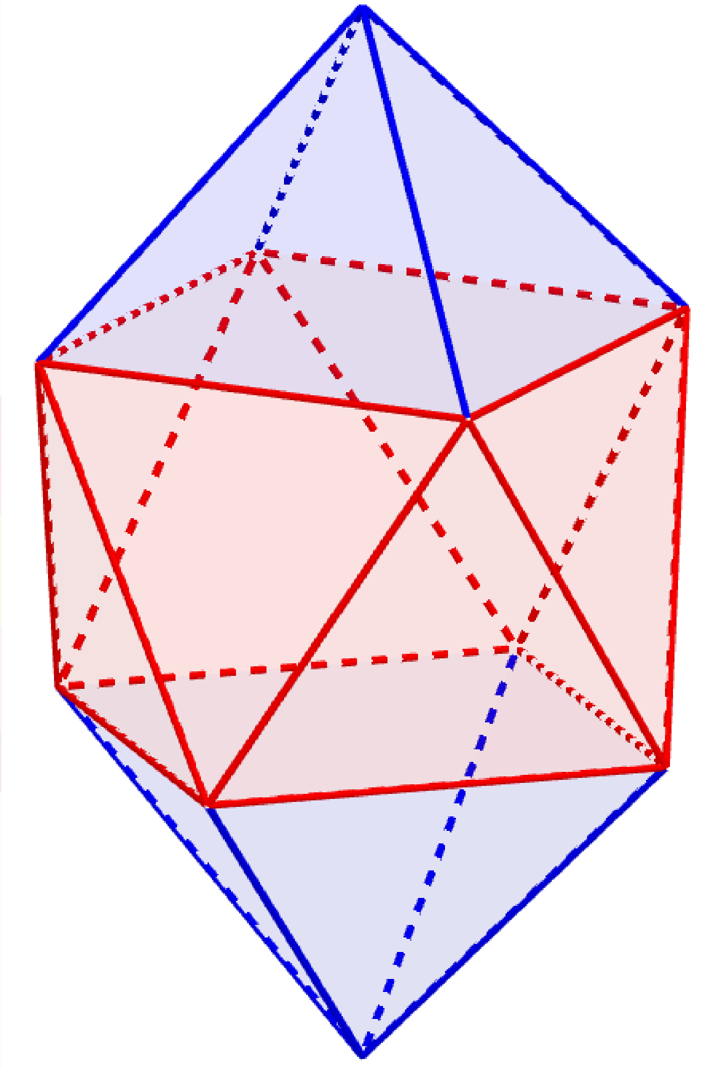


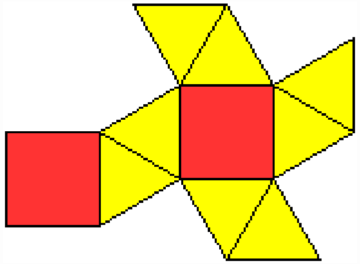
https://www.mathematische-basteleien.de/quadratischesantiprisma.html

Formel für die Höhe



$$h = \sqrt{2^{-1/2}}\,a = 2^{-1/4}a = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$$





Vierseitiges reguläres Antiprisma

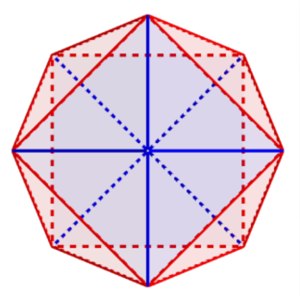
https://www.mathematische-basteleien.de/quadratischesantiprisma.html

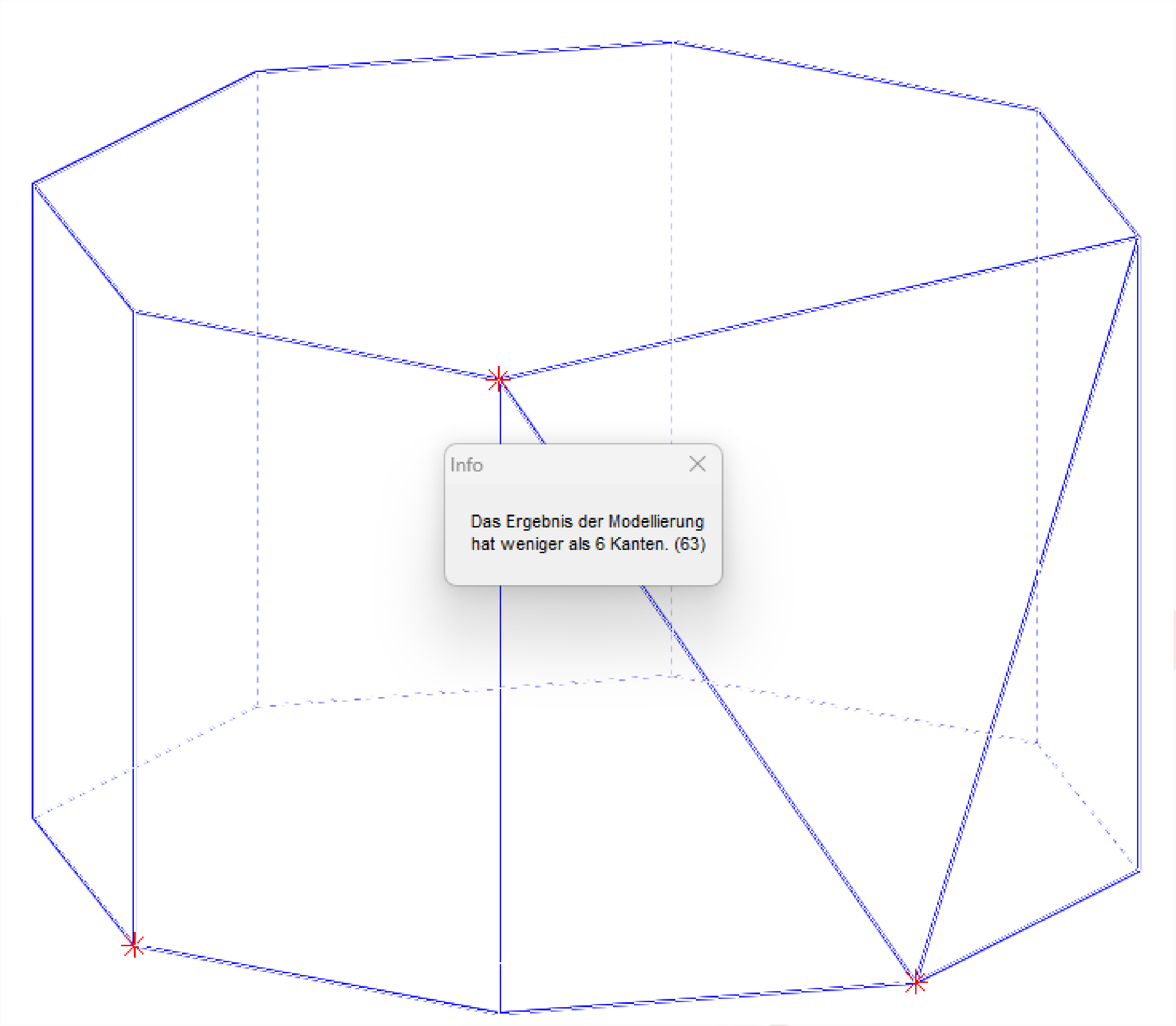
GAM 1

Aus achteckigem Prisma herausschneiden

$$s = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 0{,}541$$

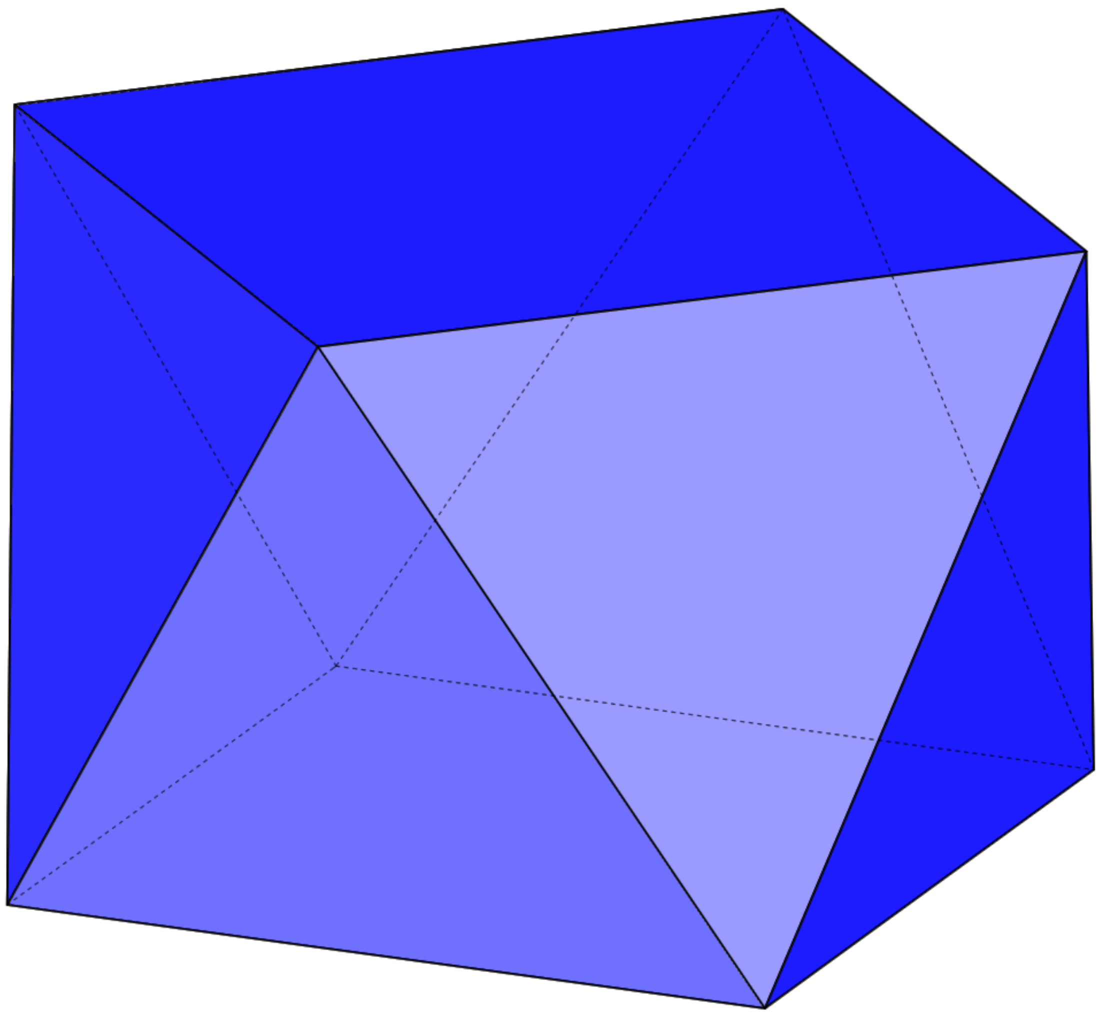
$$h = \sqrt{2^{-1/2}}\,a = 2^{-1/4}a = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$$

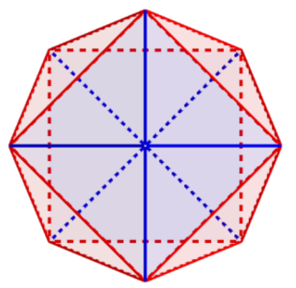




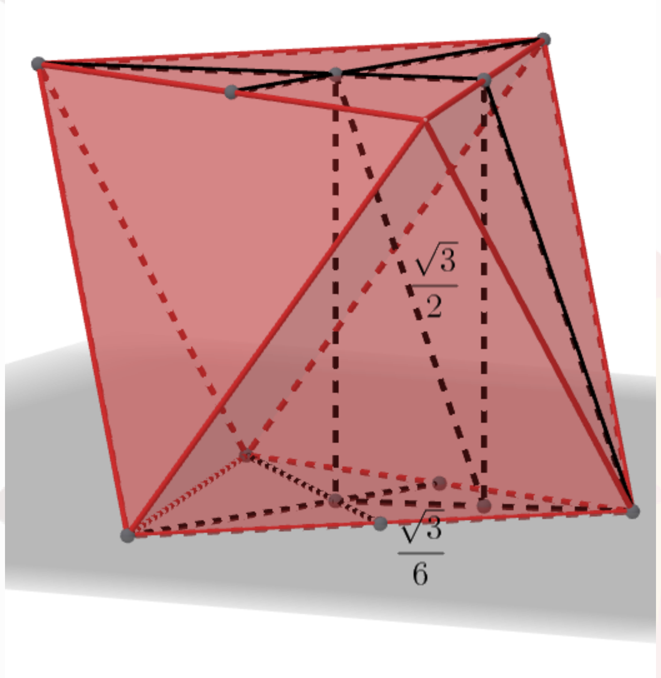
GAM 2

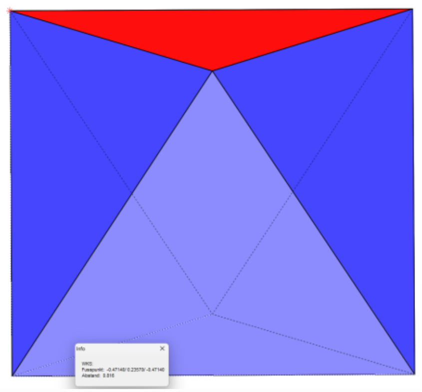
Durchschnitt zweier quadratischer Pyramiden abstumpfen.





Allgemeine Formel für die Höhe





Dreiseitiges reguläres Antiprisma

$$\boxed{d = a\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165\,a}$$

Vierseitiges reguläres Antiprisma

$$H_n = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$

Für $n = 3$:

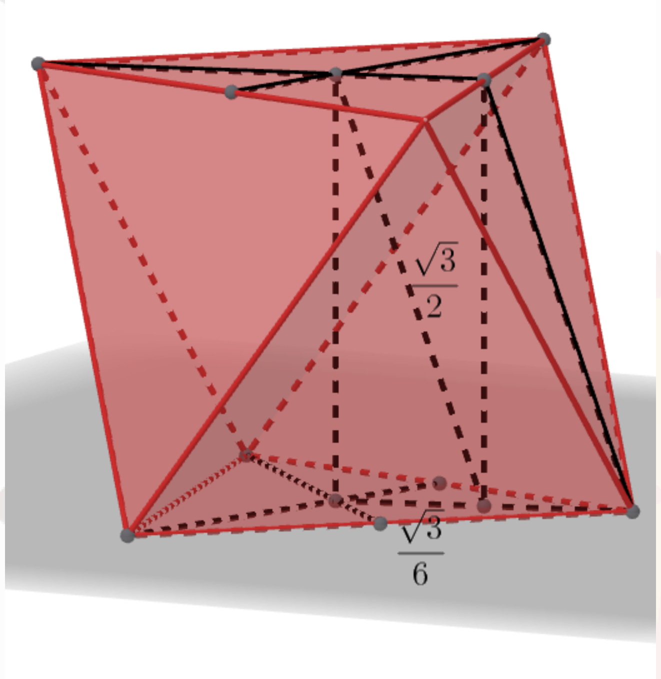
$$H_3 = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2(\pi/6)}} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 3/4}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

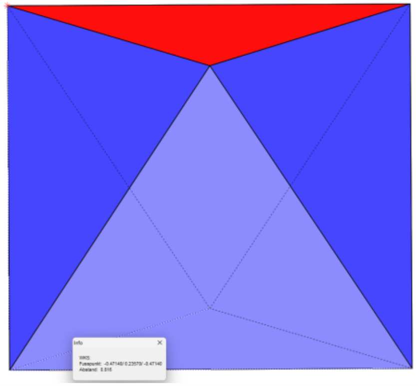
Für $n = 4$:

$$H_4 = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2(\pi/8)}} = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}.$$

https://mathworld.wolfram.com/Antiprism.html

Allgemeine Formel für die Höhe





OKTAEDER

$$d = a\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165\,a$$

Vierseitiges reguläres Antiprisma

$$H_n = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$

Für $n = 3$:

$$H_3 = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2(\pi/6)}} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 3/4}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

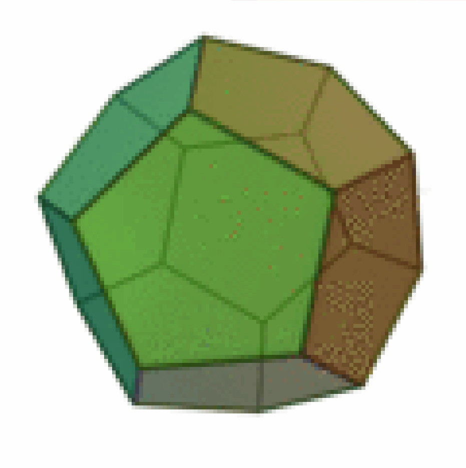
Für $n = 4$:

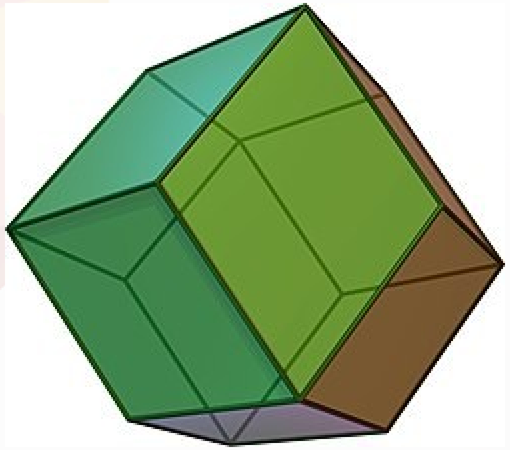
$$H_4 = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2(\pi/8)}} = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}.$$

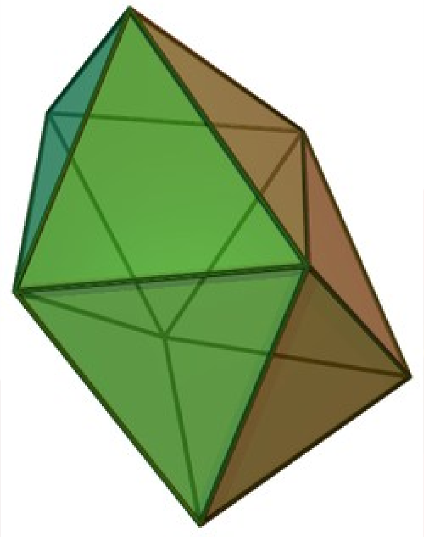
https://mathworld.wolfram.com/Antiprism.html

Dodekaeder

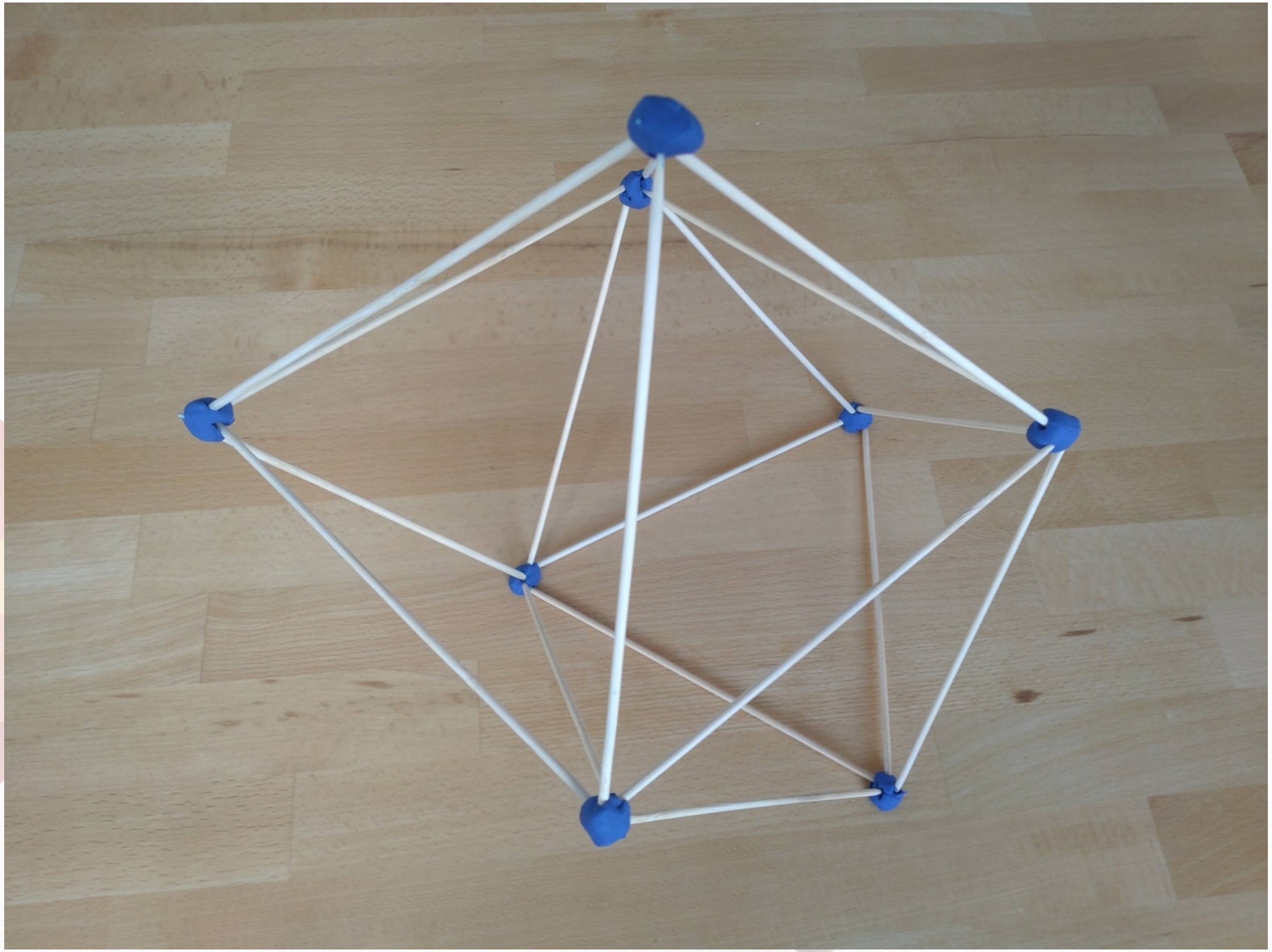
Die exakte Form benötigt die Lösung einer kubischen Gleichung, daher ist sie nicht mit Zirkel und Lineal exakt konstruierbar.



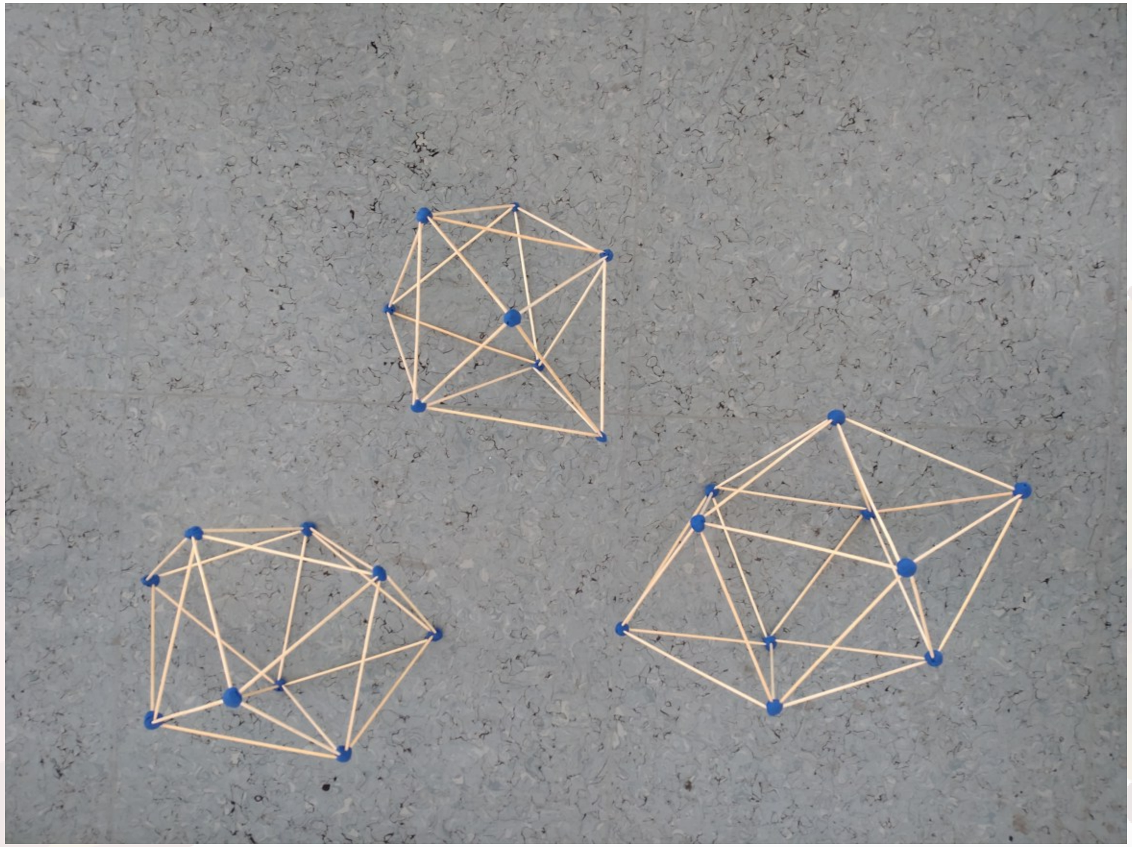




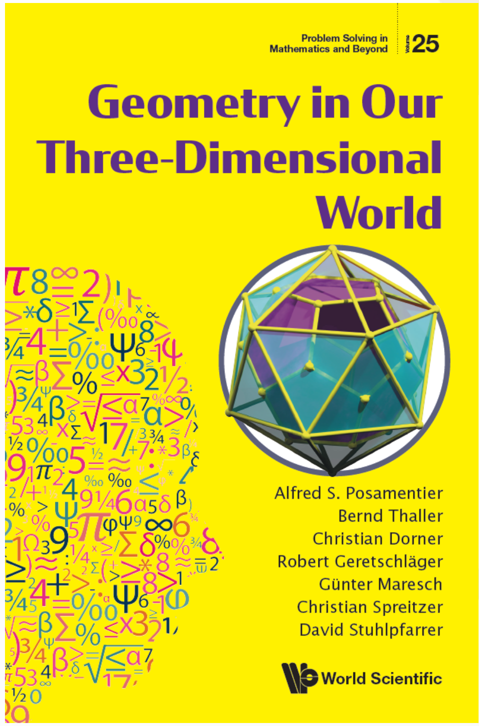
Trigondodekaeder



Modelle der Teilnehmerinnen

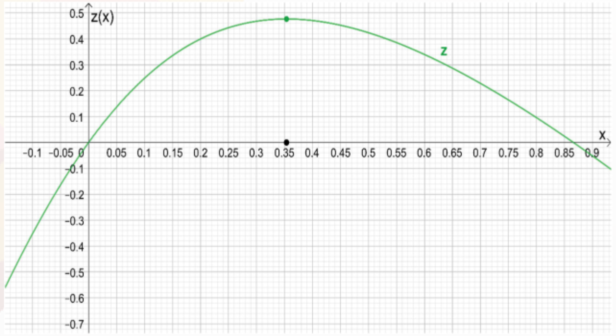


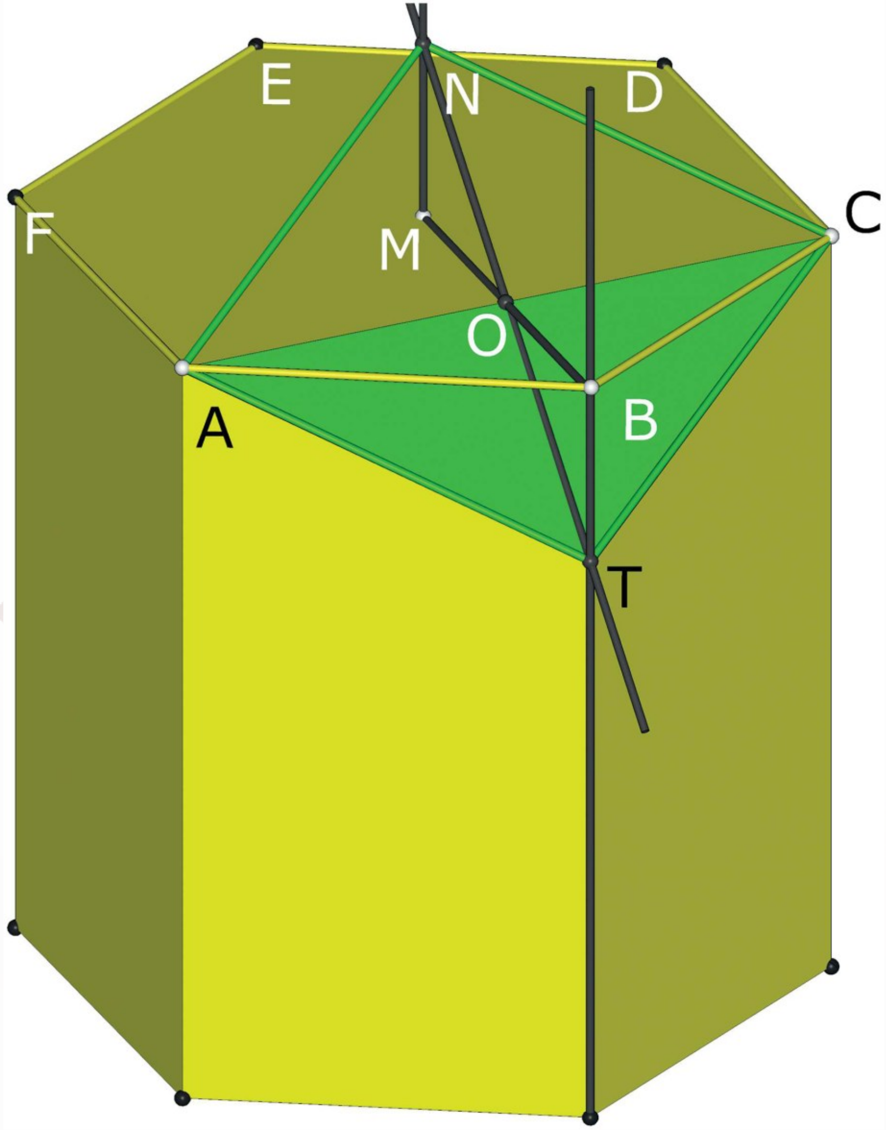
Rhombendodekaeder



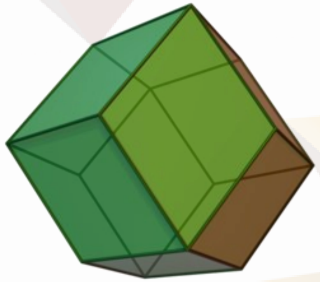
pp 193

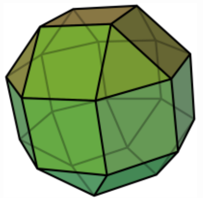
$$z(x)=3l\left[x-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{4x^2+l^2}-l\right)\right]$$





Konvexe Polyeder mit gleich langen Kanten



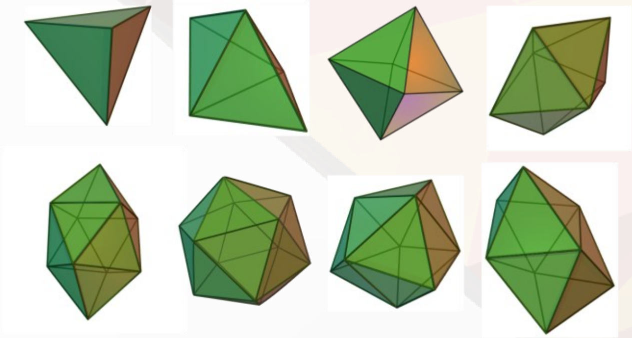


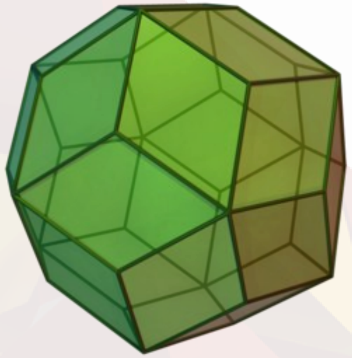
Das Pseudo-Rhombenkuboktaeder

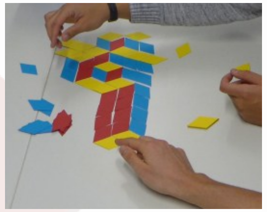
Lange Zeit benutzte man für die Definition der archimedischen Körper nicht die globale, sondern die anschaulichere lokale Uniformität der Ecken. Erst im Jahr 1930 stellte der britische Mathematiker J. C. P. Miller fest, dass ein konvexes Polyeder mit regelmäßigen Seitenflächen existiert, welches die lokale Uniformität der Ecken erfüllt, aber bisher nicht als archimedischer Körper erkannt worden war. Dieses Polyeder entsteht, wenn man beim Rhombenkuboktaeder eine Kappe um 45 Grad verdreht. Es wird als *Pseudo-Rhombenkuboktaeder*, als *Miller's solid* oder als Johnson-Körper J_{37} bezeichnet.

I. mit regelmäßigen Flächen
- 1. Platonische Körper (5)
- 2. Uniforme konvexe Polyeder
  - 2a. Archimedische Körper (13)
  - 2b. Prismen (unendlich)
  - 2c. Antiprismen (unendlich)
- 3. Johnson-Körper (92)

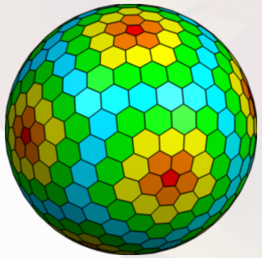
II. ohne die Bedingung „regelmäßige Flächen“
- weitere gleichkantige konvexe Polyeder

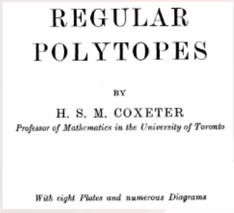






Rhombische Familien
Deltaederartige Familien
Goldberg-/Fulleren-Familien
Zonoeder
freie Spezialfamilien





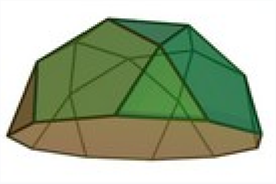
2·8. Zonohedra. These rhombic figures suggest the general concept of *a convex polyhedron bounded by parallelograms.* We proceed to prove that such a polyhedron has $n(n-1)$ faces, where n is the number of different directions in which edges occur.

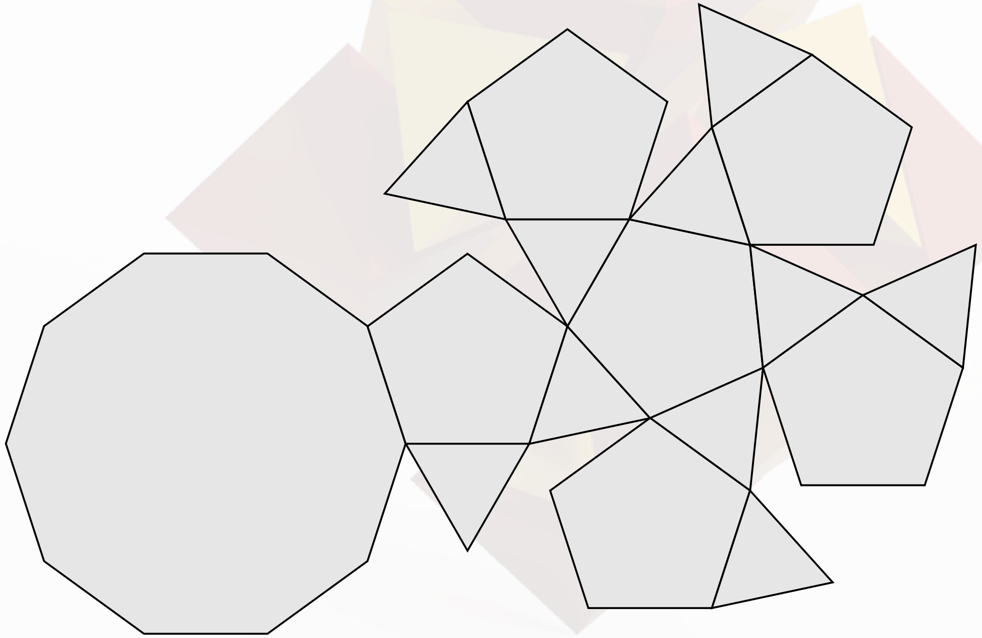
Ein Zonoeder ist ein konvexes Polyeder, dessen Flächen alle punktsymmetrische Vielecke sind (im häufigsten Fall also Parallelogramme oder Rhomben).

https://www.spektrum.de/news/mathematische-unterhaltungen-spiraloeder/2100288

Netze

https://de.wikipedia.org/wiki/Johnson-K%C3%B6rper#/media/Datei:Johnsonkoerpernetz06.svg

Fünfecksrotunde, ein in der Mitte geteiltes Ikosidodekaeder		



Ebene

Ein Tangentialpolygon zerfällt in Dreiecke:

$$A = \frac{1}{2}\rho U$$

also

$$\rho = \frac{2A}{U}$$

Das ist sogar ein wunderbares „**Dimensionen-Muster**“:

- **2D**: $\rho = \frac{2A}{U}$
- **3D**: $r = \frac{3V}{O}$

und allgemeiner in Dimension n:

$$\boxed{r = \frac{n \cdot \text{Inhalt}}{\text{Randinhalt}}}$$

Raum

Ein tangentiales Polyeder zerfällt in Pyramiden mit gemeinsamer Höhe r:

$$V = \sum \frac{1}{3} A_i r$$

mit den Flächen A_i. Da

$$\sum A_i = O$$

folgt

$$V = \frac{1}{3} r O$$

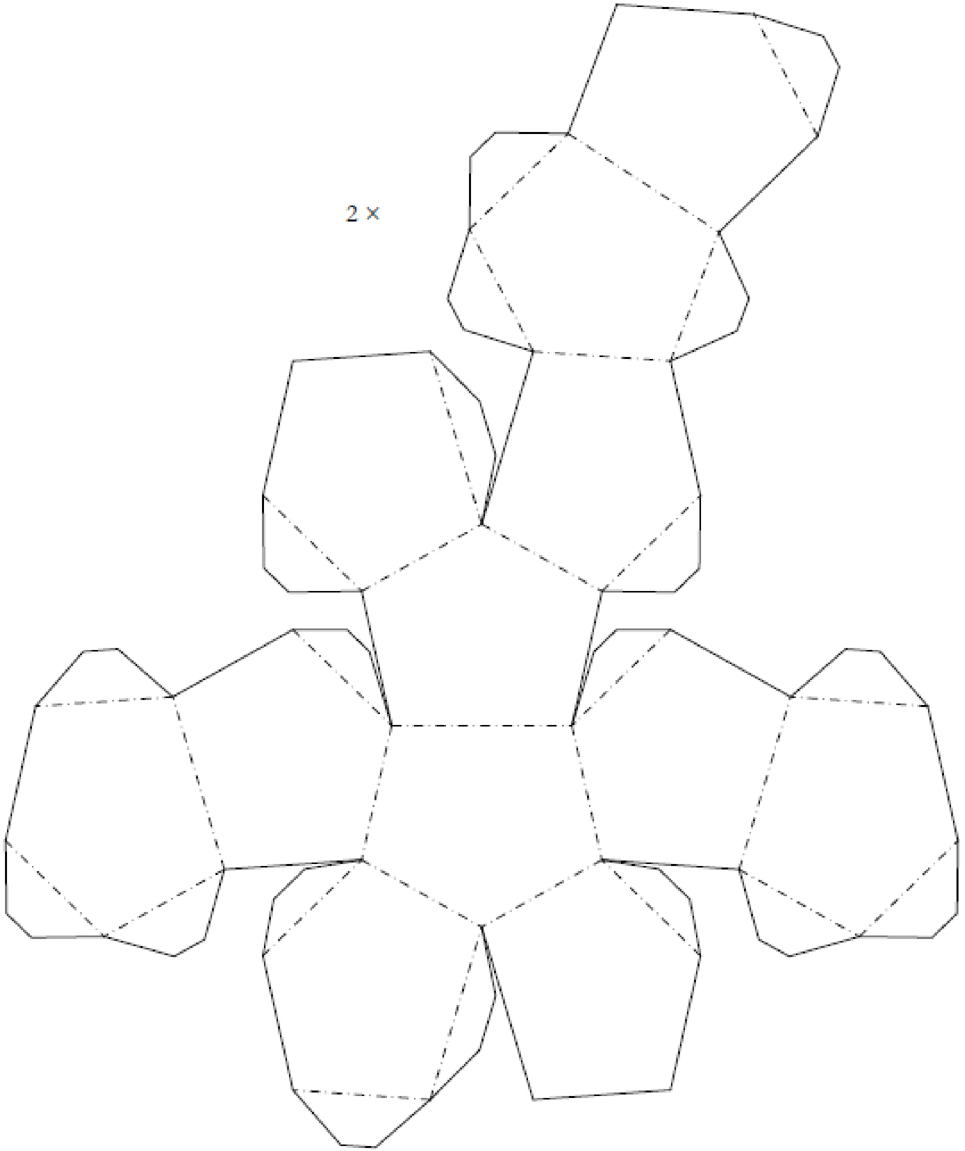
also

$$\boxed{r = \frac{3V}{O}}$$

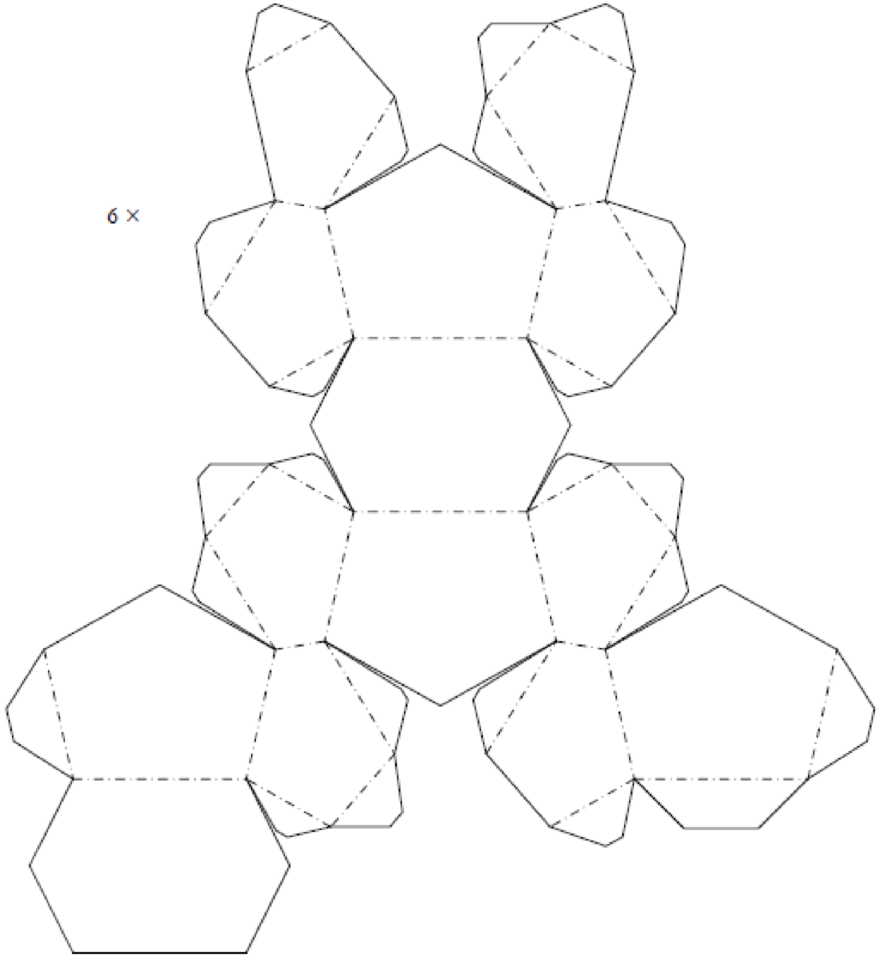
Das ist die perfekte 3D-Analogie.

Weaire-Phelan structure

2 ×



6 ×



Adapted from the net available at http://www.vongirsewald.com/foam/

Adapted from the net available at http://www.vongirsewald.com/foam/

