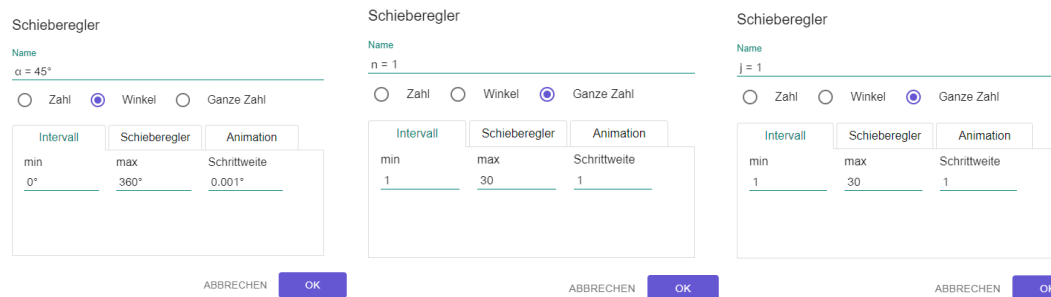


## Räumliche Kinematik mit GeoGebra 3D

### Ebene Lissajous-Figuren

Zum Aufwärmen konstruieren wir ebene Lissajous-Figuren. Hier eine Schritt-für-Schritt-Anleitung.

- 1.) Erstelle drei Schieberegler für die Variablen  $\alpha$ ,  $n$  und  $k$  (siehe Bilder unten)



- 2.) Erstelle zwei Kreismittelpunkte  $M_1 = (3|0)$  und  $M_2 = (0|3)$  und zwei Kreise  $k_1$  (Mittelpunkt  $M_1$  und Radius 1) und  $k_2$  (Mittelpunkt  $M_2$  und Radius 1).

- 3.) Konstruiere einen Punkt  $P_1$  auf  $k_1$  und einen Punkt  $P_2$  auf  $k_2$ .

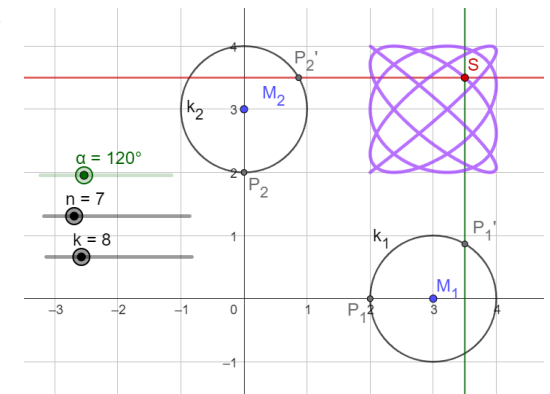
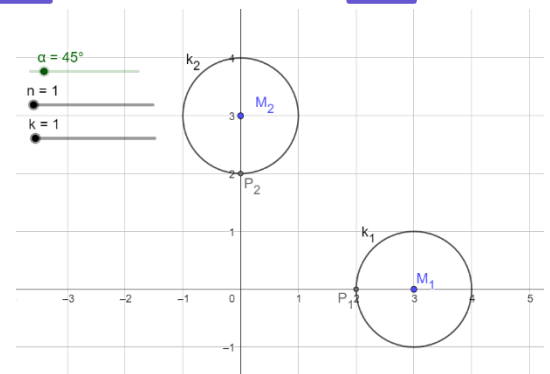
Hinweis: praktisch sind Punkte auf den Koordinatenachsen (siehe Abbildung rechts), am besten sieht aber aus, wenn man  $P_1 = (3|-1)$  und  $P_2 = (0|2)$  wählt.

- 4.) Der Punkt  $P_1$  wird nun um den Mittelpunkt  $M_1$  mit dem Winkel  $n \cdot \alpha$  gedreht. Analog für  $P_2$  um  $M_2$  mit Winkel  $k \cdot \alpha$ . Es entstehen so die Punkte  $P_1'$  und  $P_2'$ .

- 5.) Nun wird durch  $P_1'$  eine parallele zur  $y$ -Achse und durch  $P_2'$  eine parallele zur  $x$ -Achse konstruiert.

- 6.) Der Schnittpunkt  $S$  der beiden Parallelen ist ein Punkt der Lissajous-Figur. Mit dem Befehl Ortslinie (zuerst  $S$  und dann den Schieberegler für  $\alpha$  anklicken) kann man die Figur anzeigen lassen.

- 7.) Perfekt sehen dann Animationen aus (:



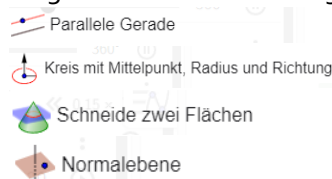
Geht das auch räumlich??? Alles eine Ansichtssache (:

### Räumliche Lissajous-Figuren

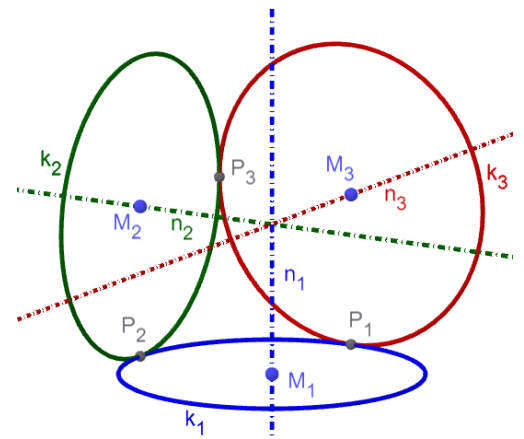
Um Lissajous-Figuren räumlich zu konstruieren, benötigt man nun die 3D-Ansicht in GeoGebra. Kurz zur Theorie: Wir benötigen nun drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$  in den Koordinatenebenen. Diese legen wir mit den Mittelpunkten, den Kreisachsen und den Radien 1 fest. Durch geeignetes Drehen von Punkten und den jeweiligen Ebenen durch die gedrehten Punkte erreichen wir wieder Punkte auf den jeweiligen Lissajous-Figuren als Schnittpunkt von drei Ebenen. Los geht's!

Achtung: Schieberegler funktionieren nur in der 2D-Ansicht.

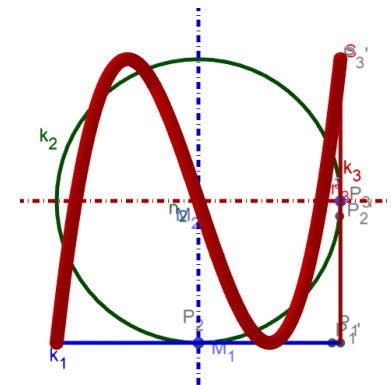
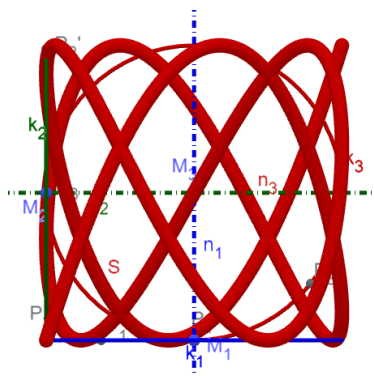
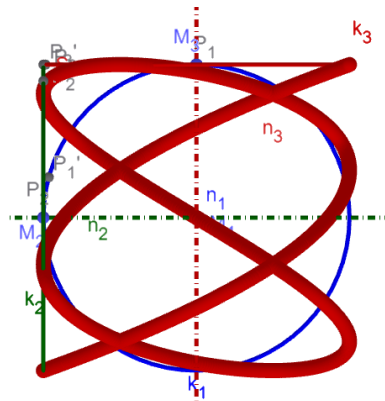
Folgende Befehle werden gebraucht:



- 1.) Erstelle vier Schieberegler, einen für den Drehwinkel  $\alpha$  und drei für die jeweiligen Parameter  $n, k$  und  $l$  (analog zu oben!)
- 2.) Konstruiere die Mittelpunkte  $M_1 = (1|1|0)$ ,  $M_2 = (1|0|1)$  und  $M_3 = (0|1|1)$  und dazu folgende Kreisachsen und Kreise:  
 $n_1$  durch  $M_1$  parallel zur  $z$ -Achse; Kreis  $k_1$  mit Mittelpunkt  $M_1$ , Kreisachse  $n_1$  und Radius 1  
 $n_2$  durch  $M_2$  parallel zur  $y$ -Achse; Kreis  $k_2$  mit Mittelpunkt  $M_2$ , Kreisachse  $n_2$  und Radius 1  
 $n_3$  durch  $M_3$  parallel zur  $x$ -Achse; Kreis  $k_3$  mit Mittelpunkt  $M_3$ , Kreisachse  $n_3$  und Radius 1
- 3.) Wähle drei Punkte wie folgt:  $P_1 = k_1 \cap k_3$ ;  $P_2 = k_1 \cap k_2$ ;  $P_3 = k_2 \cap k_3$
- 4.)  $P_1$  bzw.  $P_2$  bzw.  $P_3$  werden jetzt um  $n_1$  bzw.  $n_2$  bzw.  $n_3$  mit dem Winkel  $n \cdot \alpha$  bzw.  $k \cdot \alpha$  bzw.  $l \cdot \alpha$  gedreht, was dann  $P'_1$  bzw.  $P'_2$ , bzw.  $P'_3$  ergibt.
- 5.) Nun werden drei Normalebenen konstruiert:  
 $\varepsilon_1$  normal zu  $n_1$  durch  $P'_3$   
 $\varepsilon_2$  normal zu  $n_2$  durch  $P'_1$   
 $\varepsilon_3$  normal zu  $n_3$  durch  $P'_2$
- 6.) Der gesuchte Punkt unserer Lissajous-Figur ist  $S = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$ .
- 7.) Den Punkt  $S$  jetzt noch eine Farbe geben, die Größe anpassen und die Spur anzeigen (:)



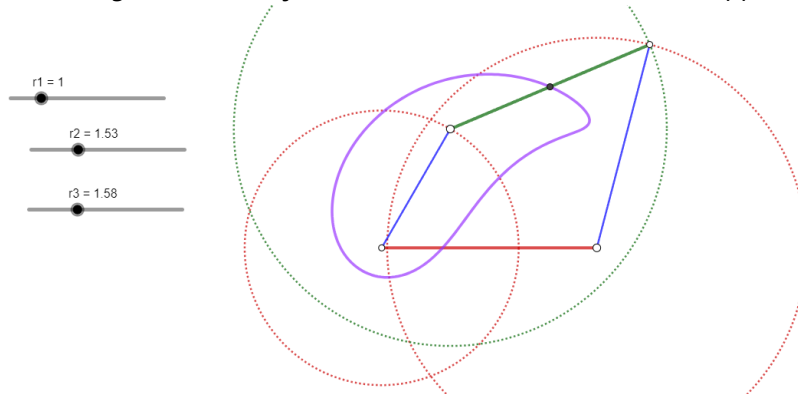
Man beachte in diesem Fall die drei Haupttrisse der Kurve ( $n = 5, k = 9, l = 3$ ):



## Räumliches Vierstabgetriebe

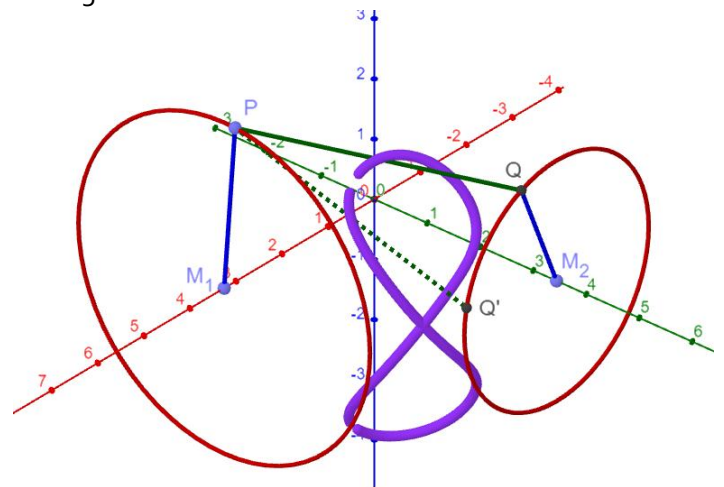
Zur Erinnerung: eine ebenes Vierstabgetriebe mit Koppelkurve.

Dazu benötige man drei Schieberegler, einen für jeden Basiskreis und einen für die Koppellänge.



Jetzt eine räumliche Version:

1. Wir erstellen drei Schieberegler für die Radien  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$ .
2. Konstruiere einen Kreis  $k_1$  mit Radius  $r_1$  um die  $x$ -Achse (der Mittelpunkt  $M_1$  kann frei auf der  $x$ -Achse gewählt werden) und einen weiteren Kreis  $k_2$  mit Radius  $r_2$  um die  $y$ -Achse (der Mittelpunkt  $M_2$  kann frei auf der  $y$ -Achse gewählt werden).
3. Um einen Punkt  $P$  auf  $k_1$  konstruiert man eine Kugel mit Radius  $r_3$ , diese schneidet  $k_2$  in den Punkten  $Q$  und  $Q'$ .
4. Die Koppel ist nun die Verbindungsstrecke  $PQ$  (die zweite Lösung wäre  $PQ'$ ).
5. Nun kann man die Spur eines Punktes auf der Koppel anzeigen lassen und den Punkt  $P$  animieren.

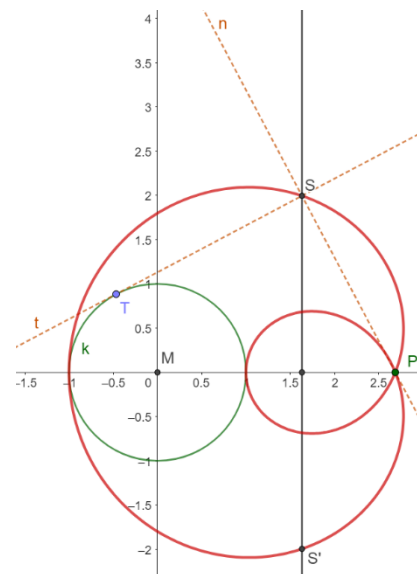


## Räumliche Fußpunktskurven

Für eine räumliche Art von Fußpunktskurven starten wir mit der ebenen Version.

Achtung: GeoGebra verwirrt das ganze ein bisschen, man muss die ebene Konstruktion zuerst abschließen und dann erst die 3D-Ansicht aktivieren.

1. Konstruiere einen Kreis  $k$  um den Ursprung mit Radius 1 und einen Punkt  $P$  auf der  $x$ -Achse.
2. Auf dem Kreis  $k$  wählen wir einen Punkt  $T$  und konstruieren in diesem die Tangente  $t$  an  $k$ .
3. Einen Punkt  $S$  der Fußpunktskurve erhält man indem man die Normale  $n$  auf  $t$  konstruiert und diese mit  $t$  schneidet.
4. Die Fußpunktskurve kann nun als Ortslinie eingezeichnet werden.
5. Den Punkt  $S$  spiegeln wir noch ein an der  $x$ -Achse und erhalten  $S'$ .



Jetzt kann man in der 3D-Ansicht weitermachen:

6. Konstruiere einen Kreisbogen von  $S$  nach  $S'$  um die  $x$ -Achse (in diesem Schritt muss man ein bisschen tricksen).
7. Nun lassen wir uns die Spur des Halbkreisbogens anzeigen und schon sieht man die entstehende Fläche.

