Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung
Technische Universität Graz
Strömungslehre und Wärmeübertragung I, UE (LV 321.101)
SS 2019 — 2. Übungsblatt

Kinematische Grundbegriffe: Bahnlinien und Stromlinien

1. Aufgabe:

Zeigen Sie ganz allgemein, dass die beiden folgenden Bedingungen zur Berechnung der Stromlinien einander äquivalent sind:

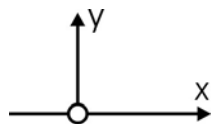
$$\vec{v} \times d\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

2. Aufgabe

Für eine zweidimensionale zeitunabhängige (stationäre) Strömung ist das Geschwindigkeitsfeld in folgender Form bekannt (a bezeichnet dabei eine positive Konstante):

$$u = a\,.\,x, \quad v = -a\,.\,y, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Stromlinien dieses Strömungsfeldes und skizzieren Sie diese mit Bezug auf das folgende Koordinatensystem.



b) Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}\vec{v}$ und den Rotor $\operatorname{rot}\vec{v}$ des gegebenen Geschwindigkeitsfeldes. Erklären Sie anhand des Ergebnisses, ob die Strömung drehungsfrei und inkompressibel ist.

c) Für stationäre Strömungen sind Stromlinien und Bahnlinien deckungsgleich, was hier auch die Berechnung von Bahnkurven erlaubt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein sehr kleines Teilchen am Ort (x_0, y_0) in die Strömung eingebracht, das der Strömung schlupffrei folgen möge. Berechnen Sie die Zeit t_E, nach der das Teilchen den Ort (x_1, y_1) auf derselben Bahnlinie erreicht hat.

3. Aufgabe

Es soll der Einfluss eines gleichmäßig drehenden Windes auf die Ausbreitung von Schadstoffen untersucht werden. Dazu wird die Erdoberfläche in der Umgebung einer Stadt als (x, y)-Ebene angenommen, und die Mündung eines Schornsteines soll im Koordinatenursprung liegen. Das Geschwindigkeitsfeld des Windes ist durch folgende Komponenten gegeben ($c > 0$ und ω sind Konstante):

$$u = c\,.\,\cos(\omega t), \quad v = -\,c\,.\,\sin(\omega t), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Schar der Stromlinien des Windes für einen beliebigen Zeitpunkt t. Welche Kurven sind die Stromlinien? Skizzieren Sie die Stromlinien für $\omega t = \pi/4$. Bestimmen Sie die Gleichung jener Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t = 0$ genau durch den Schornstein (0, 0) geht.

b) Berechnen Sie die Schar der Bahnlinien des Windes. Geben Sie dazu die Gleichung der Bahnlinie für jenes Teilchen an, das zur Zeit t_0 am Ort (x_0, y_0) ist. Welche Art von Kurven sind die Bahnlinien? Skizzieren Sie die Bahnlinien einiger Teilchen, die zu verschiedenen Zeiten aus dem Schornstein treten. Bestimmen Sie die Gleichung jener Bahnlinie, die zur Zeit $t_0 = 0$ vom Schornstein ausgeht.

c) Skizzieren Sie jene Bahnlinie und jene Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Schornstein gehen, und geben Sie den Durchlaufsinn an.

4. Aufgabe

Das Geschwindigkeitsfeld in einem Tornado kann in Zylinderkoordinaten durch folgende Beziehung angenähert werden:

$$\vec{v} = -\frac{a}{r}\vec{e}_r + \frac{b}{r}\vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Zeigen Sie, dass die Stromlinien logarithmische Spiralen sind. Berechnen Sie dazu die Gleichung der Stromlinie, die durch den Ort (r_0, $\varphi=0$) geht.