

1. Aufgabe *Wiederholung aus der Mathematik*

Für die mathematische Beschreibung von Strömungsvorgängen sind die nachfolgend behandelten mathematischen Grundlagen aus der Vektoralgebra und der Vektoranalysis wichtig. Bearbeiten Sie diese wie folgt:

- a) Geben Sie die Definition des *inneren Produkts* (Skalarprodukts) zweier Vektoren an. Errechnen Sie jene Winkel, die der Vektor $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$ jeweils mit den Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems einschließt.
- b) Geben Sie die Definition des *äußeren Produkts* (Vektorprodukts) zweier Vektoren an. Erläutern Sie zwei verschiedene Methoden zur Berechnung dieses Produkts und wenden diese für die Berechnung des Produkts der beiden Vektoren $\vec{a} = (1, -3, 2)$ und $\vec{b} = (2, 0, -1)$ an.
- c) Geben Sie die Definitionsgleichung für den Gradienten eines skalaren Feldes an. Berechnen Sie den Gradientenvektor am Beispiel der skalaren Funktion $f(x, y, z) = 2x + yz - 3y^2$.
- d) Schreiben Sie die Gleichung zur Berechnung einer Richtungsableitung einer skalaren Funktion in Richtung eines Vektors \vec{b} an. Berechnen Sie diese am Beispiel des skalaren Feldes $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ und des Vektors $\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
- e) Wie ist die Divergenz eines Vektorfeldes definiert? Wie kann man diese symbolisch mit dem Operator „Nabla“ (∇) anschreiben? Berechnen Sie $\text{div } \vec{v}$ am Beispiel des Vektorfeldes $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3xz \\ 2xy \\ -y^2z \end{pmatrix}$. Welchen Differentialoperator erhalten Sie, wenn Sie die Operation „Divergenz“ auf den Gradientenvektor eines skalaren Feldes anwenden?
- f) Wie ist die Rotation eines Vektorfeldes als äußeres Produkt zweier Vektoren definiert? Ist die Rotation des Vektorfeldes eine skalare oder eine vektorielle Größe? Berechnen Sie als Beispiel die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v} = \begin{pmatrix} yz \\ 3zx \\ z \end{pmatrix}$. Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn das Vektorfeld der Gradient eines skalaren Feldes ist?
- g) Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabenteil f), ob die folgenden Strömungsfelder drehungsfrei sind, d.h. ihre Rotation null ist: $\vec{v}_1 = (0, z^2, 0)$ und $\vec{v}_2 = \left(-\frac{y}{4}, 4x, 0\right)$.