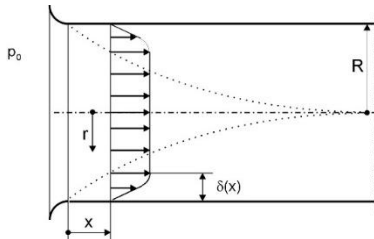


Grenzschichten - Fortsetzung

1. Aufgabe:

Es soll die Einlaufströmung in einem horizontalen Rohr (Radius R) berechnet werden, wobei das Fluid aus einem Raum mit dem statischen Druck p_0 angesaugt wird.



Es soll davon ausgegangen werden, dass die Strömung laminar ist und das Geschwindigkeitsprofil durch folgende Beziehungen angenähert werden kann:

$$u(r) = u_m \text{ in Kernbereich für } 0 \leq r \leq (R - \delta)$$

$$u(r) = u_m \left(1 - \left(\frac{r-(R-\delta)}{\delta} \right)^2 \right) \text{ für } (R - \delta) \leq r \leq R$$

Dabei bezeichnet u_m die Geschwindigkeit im Kernbereich der Strömung außerhalb der Grenzschicht. Der statische Druck p ist überall konstant über den Querschnitt.

Unter Verwendung der Bernoulligleichung, die außerhalb der Grenzschicht gültig ist, ist die dimensionslose Druckdifferenz zu bestimmen (\bar{U} bezeichnet die volumenstromäquivalente mittlere Geschwindigkeit): $(p_0 - p)/(\rho \bar{U}^2 / 2)$ in Abhängigkeit von $\delta(x)/R$.

- Bestimmen Sie die Druckdifferenz für eine beliebige Position im Rohr zwischen dem Einlaufbereich und jener Stelle, wo die Ausbildung des Geschwindigkeitsprofils erreicht wird.
- Spezialisieren Sie dieses Ergebnis für den Beginn des Rohres und jene Stelle, wo Ausbildung erreicht ist.

2. Aufgabe:

Zur Lösung praktischer Aufgaben wird das Geschwindigkeitsprofil in **laminaren** Grenzschichten längs ebener Wände häufig durch einen Polynomansatz der folgenden Form angenähert: $\varphi(\eta) =$

$$a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 \text{ mit } \varphi = \frac{u(x,y)}{U_\infty} \text{ und } \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

- Welche Randbedingungen können verwendet werden, um die Koeffizienten dieses Polynoms zu bestimmen? Bestimmen Sie daraus a_0, a_1, a_2 und a_3 .
- Berechnen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ sowie die Impulsverlustdicke $\delta_2(x)$ für das oben ermittelte Geschwindigkeitsprofil.
- Mit Hilfe des Kármánschen Impulssatzes kann der Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ bestimmt werden. Dabei für Grenzschichten über eine ebene Platte ohne Druckgradienten, also für $\frac{dp}{dx} = 0$ und $U_\infty = \text{Konstante}$, gilt $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$ mit τ_w die Wandschubspannung. Bestimmen Sie unter Verwendung der allgemeinen Definition der Schubspannung die Grenzschichtdicke $\delta(x)$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Blasius-Lösung $\delta(x) = 5 \frac{x}{\sqrt{Re(x)}}$

Für **turbulente** Grenzschichten längs ebener Wände ohne Druckgradienten ($\frac{dp}{dx} = 0, U_\infty = \text{Konstante}$) wird häufig der folgende Ansatz verwendet, wobei der Exponent n eine Funktion

der Reynoldszahl ist [$n = n(Re)$]: $\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}$ oder $\varphi = \eta^{1/n}$. Für praktische Zwecke wird meist mit dem über einen großen Bereich der Reynoldszahl anwendbaren Wert $n=7$ gerechnet. Daraus folgen $\frac{\delta_1(x)}{\delta(x)} = \frac{1}{8}$ und $\frac{\delta_2(x)}{\delta(x)} = \frac{7}{72}$. Auch im turbulenten Fall (ebene Platte ohne Druckgradienten) bleibt

die vereinfachte Form des Kármánschen Impulssatzes gültig: $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$. Da das angegebene Geschwindigkeitsprofil jedoch nicht zur direkten Berechnung der Wandschubspannung geeignet ist, soll stattdessen die folgende empirische Beziehung verwendet werden: $\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0,0225 \left(\frac{v}{U_\infty \delta}\right)^{1/4}$

d) Berechnen Sie die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem entsprechenden Ausdruck für laminare Strömungen.

Wärmeleitung

3. Aufgabe:

In vielen technischen Anwendungen treten feste Körper mit gleichmäßig verteilten Wärmequellen auf. Die erzeugte Wärme wird durch Wärmeleitung im Festkörper zur Oberfläche transportiert und dort durch Konvektion an ein umgebendes Fluid abgegeben.

Im Folgenden wird ausschließlich die stationäre Wärmeleitung betrachtet. Dabei werden zwei verschiedene Geometrien untersucht.

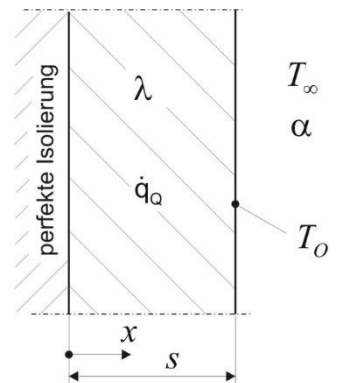
3.1. Ebene Wand

Eine ebene Wand der Dicke s enthält gleichmäßig verteilte Wärmequellen der Stärke \dot{q}_Q [W/m^3].

Die Wärmeleitfähigkeit der Wand beträgt λ .

Die Rückseite der Wand ist perfekt isoliert, während an der Vorderseite ein Wärmeübergang mit der Wärmeübergangszahl α an eine Umgebung mit Temperatur T_∞ erfolgt.

Die Wand kann als eindimensionales Problem in x -Richtung behandelt werden.



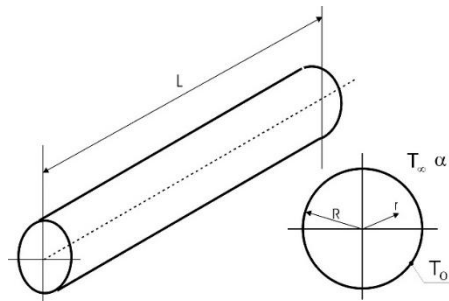
a) Berechnen Sie den Temperaturverlauf $T(x)$ in der Wand allgemein.

b) Geben Sie die Randbedingungen für die Stellen $x = 0$ bzw. $x = s$ an. Bestimmen Sie anschließend den Temperaturverlauf $T(x)$ für das vorliegende Problem.

c) Berechnen Sie mit den gegebenen Zahlenwerten die Temperatur der Oberfläche der Heizschicht $T_0 = T(x = s)$.

Zahlenangaben: $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ $\alpha = 5 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}$ $\dot{q}_Q = 1000 \text{ W}/\text{m}^3$ $s = 0,1 \text{ m}$ $\lambda = 12 \text{ W} / \text{m K}$

3.2. Zylindrisches Metall stab



Ein zylindrischer Metallstab mit Radius R enthält ebenfalls gleichmäßig verteilte Wärmequellen der Stärke \dot{q}_Q [W/m^3]. Die Wärme wird über die Mantelfläche durch Konvektion an eine Umgebung mit Temperatur T_∞ abgegeben. Die Wärmeübergangszahl beträgt α . Aufgrund der großen Länge des Stabes ($L/R \gg 1$) kann das Problem als eindimensional in radialer Richtung betrachtet werden.

a) Berechnen Sie vorerst allgemein den Temperaturverlauf $T(r)$ im Stab.

b) Geben Sie die für das Problem relevanten Rand- bzw. Regularitätsbedingungen an, um die Konstanten C_1 und C_2 im folgenden Temperaturverlauf zu bestimmen: $T(r) = -\left(\frac{\dot{q}_Q}{4\lambda}\right)r^2 + C_1 \ln r + C_2$

c) Bestimmen Sie die Oberflächentemperatur $T_0 = T(r = R)$ des Stabes.