



**Materialien zu den
Vorlesungen und Übungen**

Strömungslehre und Wärmeübertragung

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Brenn

Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung
Inffeldgasse 25/F
8010 Graz

Formelsammlung zur ebenen Potentialströmung

Bezeichnungen

$W(z)$	komplexes Geschwindigkeitspotential
φ	Potentialfunktion
ψ	Stromfunktion
\dot{Q}	Quellstärke
Γ	Zirkulation
M	Dipolmoment
z, z_0	komplexer Zeiger
x, y	kartesische Koordinaten
r, Φ	Polarkoordinaten
$\tilde{r}, \tilde{\Phi}$	Polarkoordinaten relativ zu z_0
u	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
v	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
v_r	Geschwindigkeitskomponente in r-Richtung
v_Φ	Geschwindigkeitskomponente in Φ -Richtung

Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten:

kartesische Koordinaten:

$$\frac{dW(z)}{dz} = u(x,y) - iv(x,y)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Polarkoordinaten:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \qquad v_\Phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi}$$

Komplexes Potential, Potential- und Stromfunktion für die elementaren Strömungstypen der ebenen Potentialströmung

Strömungstyp	Geschwindigkeit	W(z)	φ	ψ	φ	ψ
			Polarkoordinaten		kartesische Koordinaten	
Parallelströmung x-Richtung	$u = U_\infty$ $v = 0$	$U_\infty z$	$U_\infty r \cos \Phi$	$U_\infty r \sin \Phi$	$U_\infty x$	$U_\infty y$
Parallelströmung y-Richtung	$u = 0$ $v = V_\infty$	$-iV_\infty z$	$V_\infty r \sin \Phi$	$-V_\infty r \cos \Phi$	$V_\infty y$	$-V_\infty x$
Quelle(+Q̇) Senke (-Q̇) Q̇ .. Quellstärke	$v_r = \frac{\pm \dot{Q}}{2\pi \tilde{r}}$ $v_\phi = 0$	$\frac{\pm \dot{Q}}{2\pi} \ln \frac{z-z_0}{c} \quad 1)$	$\frac{\pm \dot{Q}}{2\pi} \ln \frac{\tilde{r}}{c} \quad 1)$	$\frac{\pm \dot{Q}}{2\pi} \tilde{\Phi}$	$\frac{\pm \dot{Q}}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{c} \quad 1)$	$\frac{\pm \dot{Q}}{2\pi} \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0}$
Potentialwirbel Γ .. Zirkulation	$v_r = 0$ $v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi \tilde{r}}$	$-i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z-z_0}{c} \quad 1)$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \tilde{\Phi}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\tilde{r}}{c} \quad 1)$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0}$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{c} \quad 1)$
Dipol M .. Dipolmoment	$v_r = -\frac{M \cos \tilde{\Phi}}{2\pi \tilde{r}^2}$ $v_\phi = -\frac{M \sin \tilde{\Phi}}{2\pi \tilde{r}^2}$	$\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z-z_0}$	$\frac{M \cos \tilde{\Phi}}{2\pi \tilde{r}}$	$-\frac{M \sin \tilde{\Phi}}{2\pi \tilde{r}}$	$\frac{M}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$	$-\frac{M}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Hinweis:

$$z = x + iy = r e^{i\Phi}$$

$$z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\Phi_0}$$

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \tilde{r} e^{i\tilde{\Phi}}$$

Zeiger vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt P (x, y) im Strömungsfeld

Zeiger vom Ursprung des Koordinatensystems zum Zentrum (x₀, y₀) von Quelle, Senke, Wirbel oder Dipol

Zeiger vom Zentrum von Quelle, Senke, Wirbel oder Dipol zu einem Punkt P (x, y) im Strömungsfeld

1) c reelle Konstante, nur zur dimensionsrichtigen Darstellung des Argumentes.

Die Potentialströmung um einen Kreiszyylinder und Kräfte auf umströmte Körper

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Brenn, Institut für Strömungslehre und
Wärmeübertragung, Technische Universität Graz, Inffeldgasse 25/F

Das Potentialströmungsfeld mit Zirkulation um einen Kreiszyylinder entsteht durch Überlagerung dreier einfacher Potentialströmungen: der Parallelströmung, der Dipolströmung, und des Potentialwirbels. Wir betrachten den Spezialfall einer Parallelströmung in Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit U_∞ .

Wir geben auf den vorliegenden Seiten die wichtigsten Gleichungen zu diesem Strömungsfeld sowie zu den durch die Strömung verursachten Kräften wieder.

1. Fall: Strömung ohne Zirkulation

In diesem Fall werden lediglich die Parallelströmung und die Dipolströmung einander überlagert. Die komplexe Potentialfunktion lautet

$$W(z) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) .$$

Folglich wird die konjugiert komplexe Geschwindigkeit

$$\frac{dW(z)}{dz} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\Phi \right) + i U_\infty \left(\frac{R^2}{r^2} \sin 2\Phi \right) = u - iv .$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist also

$$|\vec{v}| = U_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{R}{r} \right)^4 - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\Phi} = V .$$

Die Staupunkte auf der Zylinderkontur (d.h. bei $r=R$) liegen bei $\Phi=0$ und $\Phi=\pi$, wo der Kosinus des Doppelten dieser Winkel gleich 1 ist.

Der Druckbeiwert ist definiert als $c_p = \frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2 / 2}$. Mit der Bernoulligleichung erhält man

hieraus $c_p = 1 - \left(\frac{V}{U_\infty} \right)^2$. Dies ist für die vorliegende Kreiszyliinderumströmung gleich mit der

Formulierung $c_p = 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^4 - 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\Phi \right] = 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\Phi - \left(\frac{R}{r} \right)^4$. Dies gilt in allen

Punkten des Strömungsfeldes.

Speziell auf der Kreiszyliinderkontur, wo $r=R$ ist, gilt $c_p = 2 \cos 2\Phi - 1 = 1 - 4 \sin^2 \Phi$.

Die resultierenden Kräfte berechnen sich wie folgt:

Wir können eine dimensionslose Kraft formulieren, die lediglich das Integral über den Druckbeiwert, ausgeführt über den Winkel Φ längs der Zylinderkontur darstellt.

Komponente in x-Richtung:

$$P_x^* = - \int_0^{2\pi} c_p \cos \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \Phi) \cos \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} \cos \Phi d\Phi + 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi \cos \Phi d\Phi = 0$$

Das heißt, dass der Zylinder in der x-Richtung keine Widerstandskraft erfährt, trotz Anströmung in dieser Richtung (d'Alembertsches Paradoxon).

Komponente in y-Richtung:

$$P_y^* = - \int_0^{2\pi} c_p \sin \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \Phi) \sin \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} \sin \Phi d\Phi + 4 \int_0^{2\pi} \sin^3 \Phi d\Phi = 0$$

Das heißt, dass der Zylinder auch keine Kraft quer zur Anströmrichtung, also keine Auf- oder Abtriebskraft erfährt.

2. Fall: Strömung mit Zirkulation

In diesem Fall werden die Parallelströmung, die Dipolströmung und der Potentialwirbel einander überlagert. Die komplexe Potentialfunktion lautet

$$W(z) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R} .$$

Es ist hier zweckmäßig, die konjugiert komplexe Geschwindigkeit in Polarkoordinaten zu berechnen. Mit der Transformation $x=r\cos\Phi$, $y=r\sin\Phi$ erhalten wir die Beziehungen

$$v_\Phi = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} \quad \text{für die Umfangs- und Radialkomponente der Geschwindigkeit.}$$

Die komplexe Potentialfunktion schreibt sich in Polarkoordinaten

$$W(z) = U_\infty \left(r e^{i\Phi} + \frac{R^2}{r} e^{-i\Phi} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{R} + i\Phi \right) ,$$

woraus wir als Imaginärteil die Stromfunktion

$$\Psi(r, \Phi) = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \Phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$$

extrahieren. Die Geschwindigkeitskomponenten in Umfangs- und in radialer Richtung errechnen sich hieraus zu

$$v_\Phi(r, \Phi) = -U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \Phi + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad v_r(r, \Phi) = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \Phi .$$

Auf der Kontur des Kreiszylinders, d.h. für $r=R$, erhalten wir

$$v_\Phi(R, \Phi) = -2U_\infty \sin \Phi + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{R} \quad \text{und} \quad v_r(R, \Phi) = 0 .$$

Hieraus ersieht man, dass die Potentialströmung die Bedingung verschwindender Normalkomponente auf der Körperoberfläche erfüllen kann, nicht aber die Haftbedingung, die das Verschwinden der Geschwindigkeit $V = \sqrt{v_r^2 + v_\Phi^2}$ fordert. Die Umfangskomponente der Geschwindigkeit ist im allgemeinen auch auf der Zylinderoberfläche nicht null.

Die Staupunkte auf der Zylinderoberfläche liegen dort, wo die Umfangskomponente der Geschwindigkeit verschwindet (denn die Radialkomponente ist sowieso null). Dies ist der Fall bei

$$\sin \Phi \Big|_{StP} = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R}.$$

Die Staupunkte liegen bei dieser zirkulationsbehafteten Strömung also nicht mehr bei $\Phi=0$ und $\Phi=\pi$. Die Wirkung der Zirkulation besteht hier also in einer Verschiebung der Staupunkte.

Der Druckbeiwert auf der Zylinderoberfläche ist für den Strömungsfall mit Zirkulation

$$c_p = 1 - \left(4 \sin^2 \Phi - \frac{2\Gamma}{\pi U_\infty R} \sin \Phi + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 U_\infty^2 R^2} \right).$$

Wieder errechnen wir die resultierenden Kräfte in x- und y-Richtung zunächst in dimensionsloser Form.

Komponente in x-Richtung:

$$\begin{aligned} P_x^* &= - \int_0^{2\pi} c_p \cos \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} \cos \Phi d\Phi + 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi \cos \Phi d\Phi \\ &\quad - \frac{\Gamma}{\pi U_\infty R} \int_0^{2\pi} 2 \sin \Phi \cos \Phi d\Phi + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 U_\infty^2 R^2} \int_0^{2\pi} \cos \Phi d\Phi = 0 \end{aligned}$$

Die x-Komponente der Druckkraft auf den Zylinder ist also auch im Falle der Umströmung mit Zirkulation null.

Komponente in y-Richtung:

$$P_y^* = - \int_0^{2\pi} c_p \sin \Phi d\Phi = - \int_0^{2\pi} \sin \Phi d\Phi + 4 \int_0^{2\pi} \sin^3 \Phi d\Phi - \frac{2\Gamma}{\pi U_\infty R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi d\Phi + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 U_\infty^2 R^2} \int_0^{2\pi} \sin \Phi d\Phi$$

Da das Integral über den $\sin^2 \Phi$, ausgeführt zwischen 0 und 2π , nicht verschwindet, sondern den Wert π liefert, verschwindet die Kraft in y-Richtung, also quer zur Anströmrichtung nicht. Wir erhalten das Ergebnis

$$P_y^* = - \frac{2\Gamma}{U_\infty R}.$$

Die dimensionsbehaftete Kraft F_y in y-Richtung ist das Integral des Druckes über die Oberfläche des Zylinders, projiziert auf die y-Richtung. Diese Kraft ist (wobei die Differenzbildung gegen p_∞ am Wert des Integrals nichts ändert, da eine Konstante, über eine geschlossene Oberfläche integriert, null ergibt):

$$F_y = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R \sin \Phi d\Phi = - \rho \frac{U_\infty^2}{2} R \int_0^{2\pi} \frac{p - p_\infty}{\rho U_\infty^2 / 2} \sin \Phi d\Phi = \rho \frac{U_\infty^2}{2} R \cdot P_y^* = - \rho U_\infty \Gamma.$$

Die Zirkulation bewirkt also eine Auftriebskraft in y-Richtung. Umgekehrt gilt auch, dass ohne die Zirkulation ein Körper in einer reibungsfreien Strömung keine Auftriebskraft erfahren kann. Bei diesen Rechnungen ist die Zirkulation negativ vereinbart, wenn sie im Uhrzeigersinn, also in mathematisch negativer Richtung dreht. Ein im Uhrzeigersinn drehender Wirbel wird also bei Anströmung von links eine Kraft in positiver y-Richtung erfahren.

Allgemeines zu Kräften auf einen umströmten Körper

Die resultierende Kraft durch die Umströmung ist gegeben als Druckintegral über die geschlossene Kontur K des Körpers. Die Kontur des Körpers ist eine Linie $\psi=\text{konstant}$, denn die Strömung verläuft tangential längs einer für das Fluid undurchlässigen Körperoberfläche.

In einem Punkt der Körperoberfläche schließt der Normalenvektor den Winkel α mit der positiven Abszisse ein. Der Druck wirkt der Normalenrichtung entgegen. Die Kraft wird daher formuliert als

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\int_K pn_x ds \\ -\int_K pn_y ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_K p \cos \alpha ds \\ -\int_K p \sin \alpha ds \end{pmatrix}.$$

Da das Differential der Bogenlänge ds längs der Körperkontur durch die Beziehungen $ds = -dx/\sin\alpha = dy/\cos\alpha$ mit den Differentialen der kartesischen Koordinaten zusammenhängt, formuliert sich die resultierende Kraft gemäß

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\int_K p dy \\ \int_K p dx \end{pmatrix}.$$

Mit Verwendung der Bernoulligleichung kann der Druck durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} (|\vec{v}_\infty|^2 - |\vec{v}|^2).$$

Integrale von Konstanten über geschlossene Konturen ergeben null. Daher bleibt für die Formulierung der Kraft die Beziehung

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{\rho}{2} \begin{pmatrix} \int_K |\vec{v}|^2 dy \\ -\int_K |\vec{v}|^2 dx \end{pmatrix}.$$

Durch Formulierung des Betragsquadrats des Geschwindigkeitsvektors mittels der komplexen Potentialfunktion und Zusammenfassung der Vektorkomponenten zu Real- und Imaginärteil einer komplexen Kraft formuliert sich dies als

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \int_K \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz.$$

Dies ist das erste Blasiusche Theorem. Fordert man, dass die konjugiert komplexe Geschwindigkeit dW/dz für große $z \rightarrow \infty$ dem Wert $U_\infty - iV_\infty$ zustreben muss, so kann diese Geschwindigkeit durch eine Reihe der Form

$$\frac{dW}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

formuliert werden, deren Quadrat

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)^2 = A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \left(\frac{A_1^2}{z^2} + \frac{2A_0A_2}{z^2} \right) + \dots$$

ist. Mit Wissen der Tatsache, dass das Integral

$$\int_K \frac{1}{z^m} dz = \begin{cases} i2\pi & \text{für } m = 1 \\ 0 & \text{für } m \neq 1 \end{cases}$$

ist, folgt für das Integral in der komplexen Formulierung für die Kraft

$$\int_K \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = i4\pi A_0 A_1,$$

und damit für die Kraft selbst

$$F_x - iF_y = -2\pi\rho A_0 A_1.$$

Da die Geschwindigkeit für $z \rightarrow \infty$ gegen den Wert $U_\infty - iV_\infty$ streben soll, muss A_0 diesen Wert haben. Den Koeffizienten A_1 berechnet man durch Betrachtung des Integrals über die Geschwindigkeit selbst (nicht über ihr Quadrat) längs der Körperkontur:

$$\int_K \left(\frac{dW}{dz} \right) dz = \int_K dW = \int_K d\varphi = \int_K \text{grad} \varphi d\bar{x} = \int_K \bar{v} d\bar{x} = \Gamma \quad .$$

Das Integral ergibt, wenn für dW/dz wieder die Reihenentwicklung eingesetzt wird, nur für jenen Term ein von null verschiedenes Ergebnis, der den Faktor $1/z$ enthält. Dies ist in der Reihe der Faktor mit dem Koeffizienten A_1 , den wir berechnen wollen. Wir erhalten also

$$\Gamma = \int_K \bar{v} d\bar{x} = A_1 2\pi i \quad , \text{ bzw. } A_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \quad .$$

Damit ist der Koeffizient A_1 bei bekannter Zirkulation des Strömungsfeldes ermittelt. Wir erhalten für die komplexe Kraft auf die Körperkontur die Beziehung

$$F_x - iF_y = 2\pi\rho(U_\infty - iV_\infty) \frac{i\Gamma}{2\pi} = V_\infty\rho\Gamma + iU_\infty\rho\Gamma \quad ,$$

woraus wir die Komponenten

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \rho\Gamma \begin{pmatrix} V_\infty \\ -U_\infty \end{pmatrix}$$

der Kraft auf die Körperkontur erhalten. Wir sehen sofort, dass der Kraftvektor senkrecht auf der Anströmrichtung steht, denn sein skalares (inneres) Produkt mit dem Geschwindigkeitsvektor (U_∞, V_∞) ergibt null. Der Betrag F der Kraft ist gegeben durch die Beziehung

$$F = |\vec{V}| \rho\Gamma \quad ,$$

wobei $|\vec{V}|$ der Betrag der Anströmgeschwindigkeit ist. Dies ist der Kutta-Joukowskysche Auftriebssatz. Da die wirkende Kraft senkrecht auf der Anströmrichtung steht, kann in Anströmrichtung wieder keine Kraft wirken. Das heißt, dass der Körper in jedem Fall, egal, wie er geformt ist, keinen Druckwiderstand erfährt. Dies ist das d'Alembertsche Paradoxon, formuliert für eine allgemeine Körperkontur.

Die Funktion $f(\eta)$ der Grenzschicht an der längs angeströmten ebenen Platte nach Howarth (1938)

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0	0	0	0,33206
0,2	0,00664	0,06641	0,33199
0,4	0,02656	0,13277	0,33147
0,6	0,05974	0,19894	0,33008
0,8	0,10611	0,26471	0,32739
1,0	0,16557	0,32979	0,32301
1,2	0,23795	0,39378	0,31659
1,4	0,32298	0,45627	0,30787
1,6	0,42032	0,51676	0,29667
1,8	0,52952	0,57477	0,28293
2,0	0,65003	0,62977	0,26675
2,2	0,78120	0,68132	0,24835
2,4	0,92230	0,72899	0,22809
2,6	1,07252	0,77246	0,20646
2,8	1,23099	0,81152	0,18401
3,0	1,39682	0,84605	0,16136
3,2	1,56911	0,87609	0,13913
3,4	1,74696	0,90177	0,11788
3,6	1,92954	0,92333	0,09809
3,8	2,11605	0,94112	0,08013
4,0	2,30576	0,95552	0,06424
4,2	2,49806	0,96696	0,05052
4,4	2,69238	0,97587	0,03897
4,6	2,88826	0,98269	0,02948
4,8	3,08534	0,98779	0,02187
5,0	3,28329	0,99155	0,01591
5,2	3,48189	0,99425	0,01134
5,4	3,68094	0,99616	0,00793
5,6	3,88031	0,99748	0,00543
5,8	4,07990	0,99838	0,00365
6,0	4,27964	0,99898	0,00240
6,2	4,47948	0,99937	0,00155
6,4	4,67938	0,99961	0,00098
6,6	4,87931	0,99977	0,00061
6,8	5,07928	0,99987	0,00037
7,0	5,27926	0,99992	0,00022
7,2	5,47925	0,99996	0,00013
7,4	5,67924	0,99998	0,00007
7,6	5,87924	0,99999	0,00004
7,8	6,07923	1,00000	0,00002
8,0	6,27923	1,00000	0,00001
8,2	6,47923	1,00000	0,00001
8,4	6,67923	1,00000	0,00000
8,6	6,87923	1,00000	0,00000

Tabelle aus Schlichting: Grenzschichttheorie, Braun Karlsruhe 1982

Profil der dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit längs einer ebenen Platte nach der Theorie von Blasius und nach Messungen

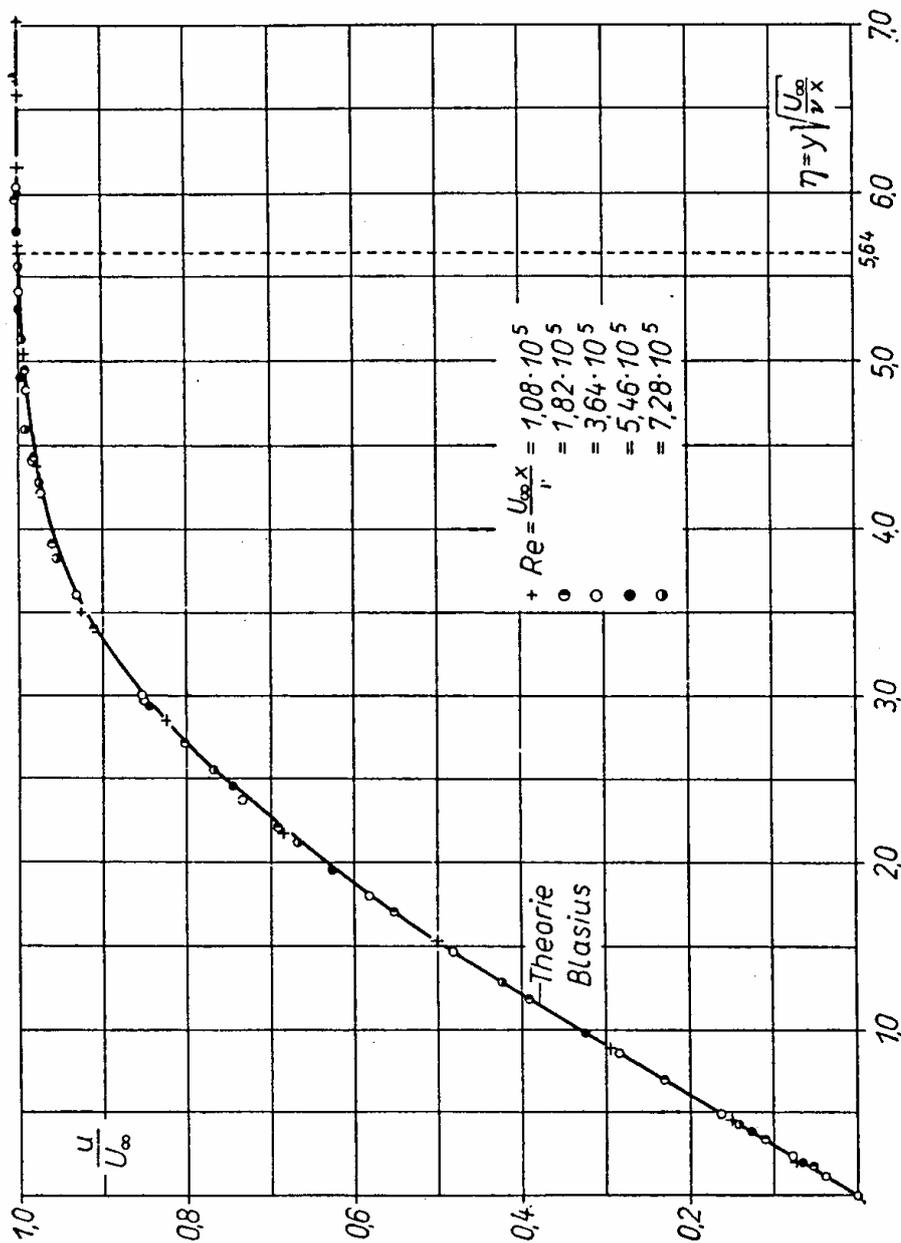
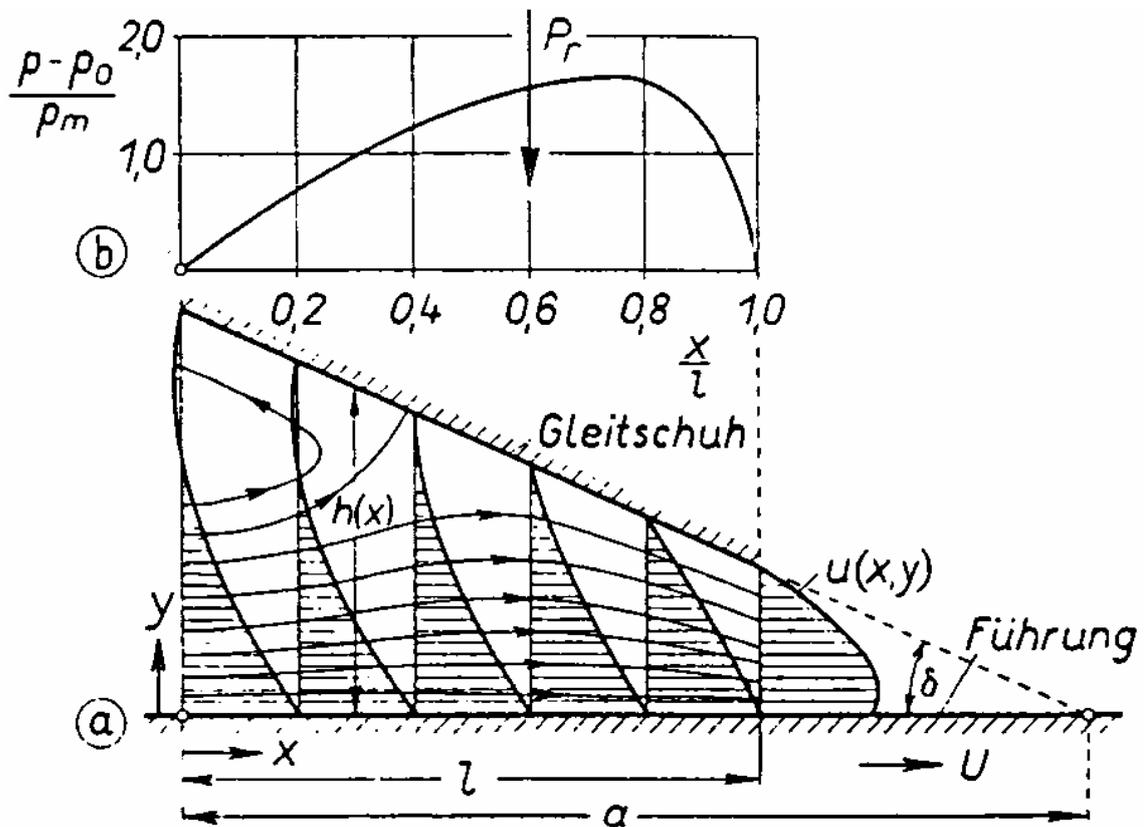


Bild 7,9. Geschwindigkeitsverteilung in der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte, nach Messungen von NIKURADSE [15]

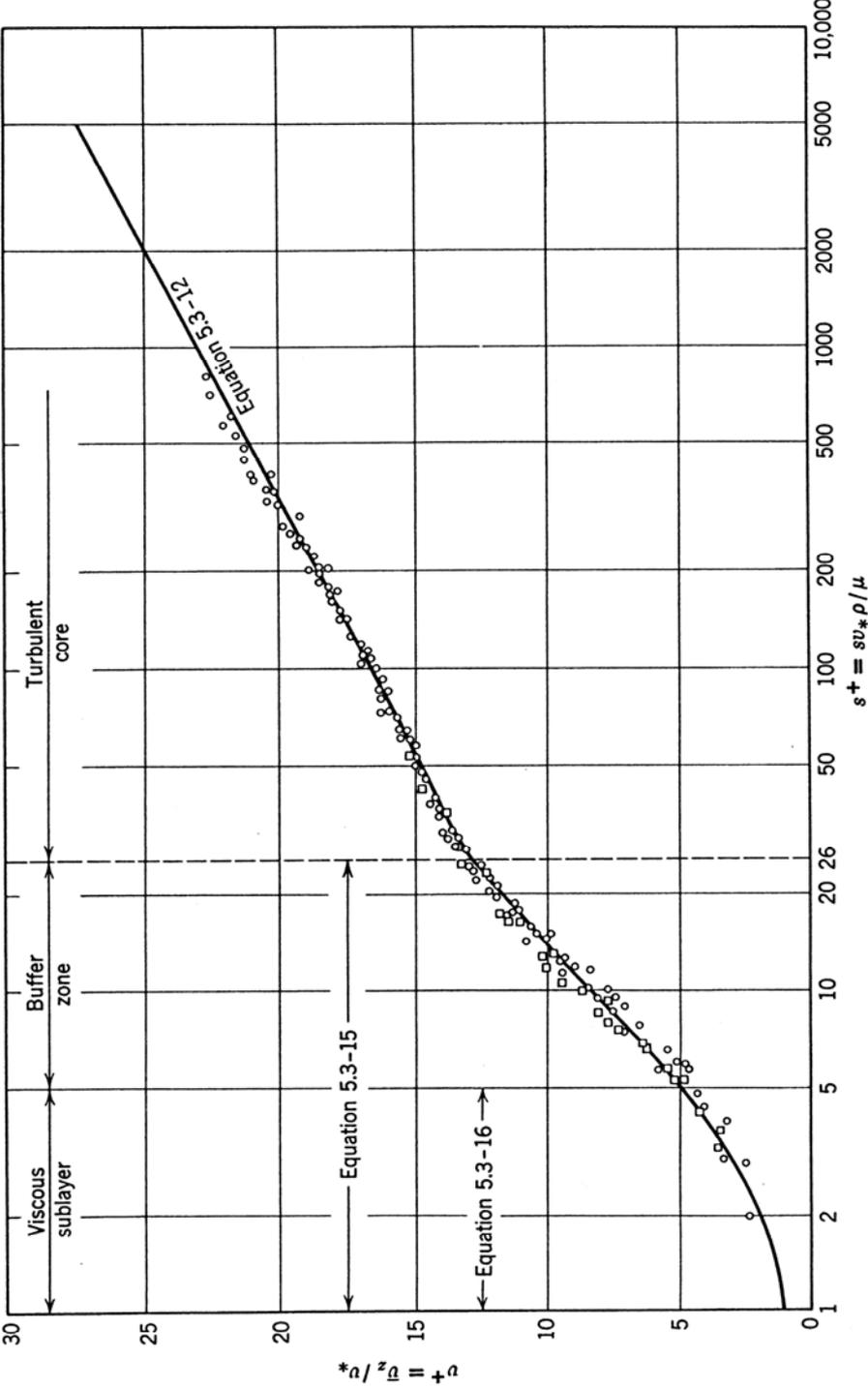
Abbildung aus Schlichting: Grenzschichttheorie, Braun Karlsruhe 1982

Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen in einem Schmierpalt



Aus Schlichting: Grenzschichttheorie, Braun Karlsruhe 1982

Turbulente wandnahe Geschwindigkeitsverteilungen



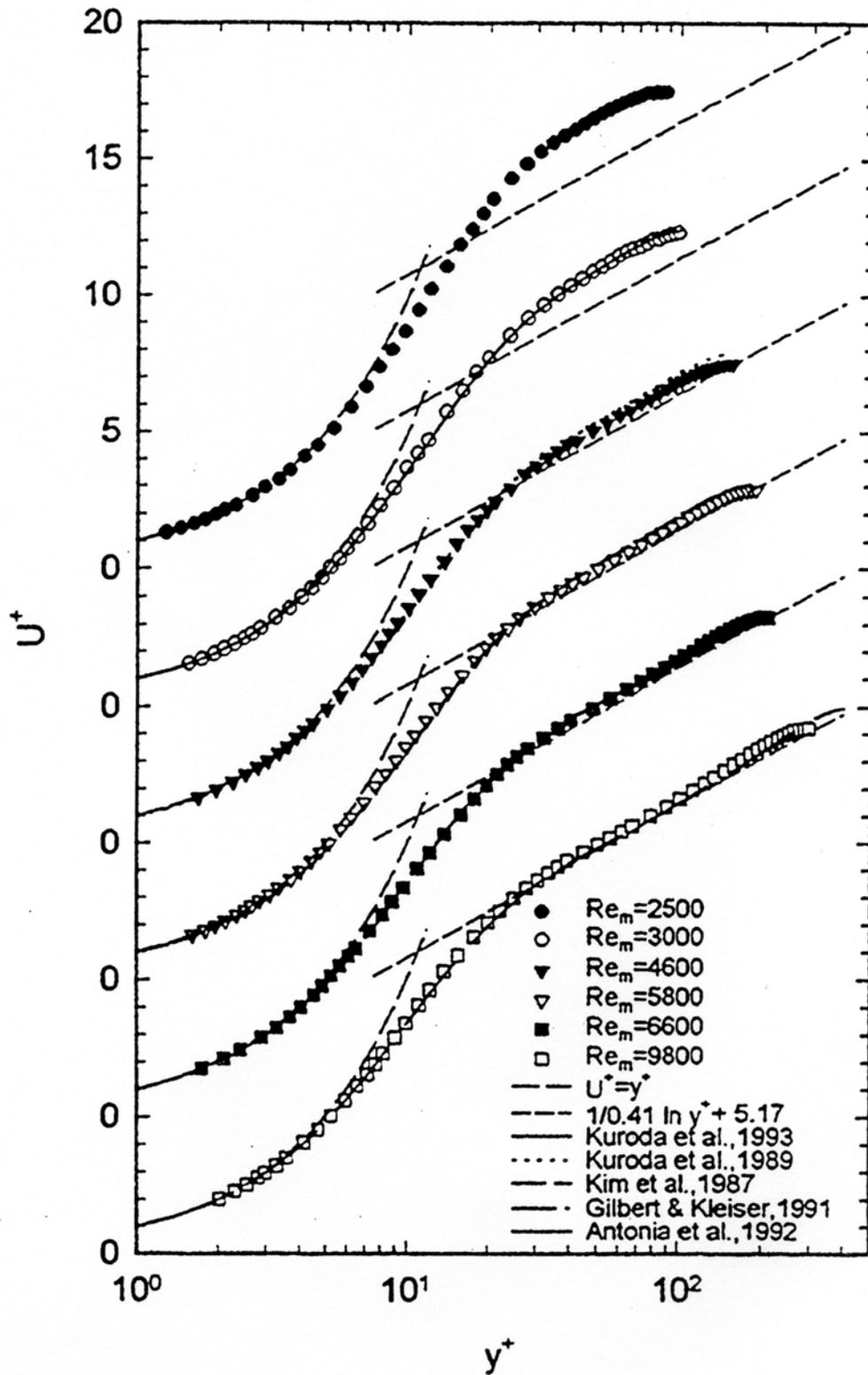
$$u^+ = y^+ \tag{5.3-16}$$

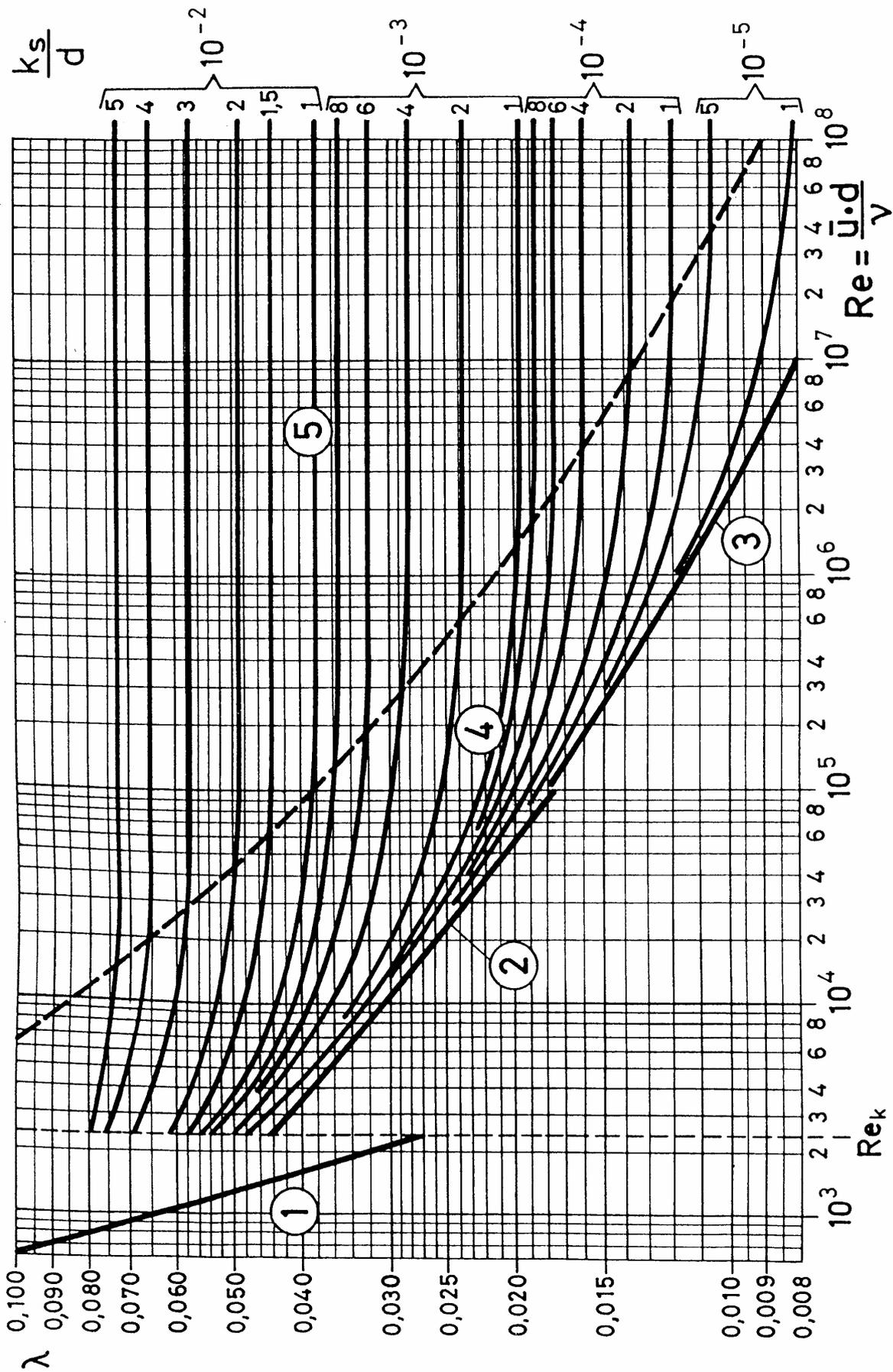
$$u^+ = \int_{y^+=0}^{y^+} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_m^{+2}}} dy^+, \quad l_m^+ = \kappa y^+ [1 - \exp(-y^+ / A^+)] \tag{5.3-15}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \tag{5.3-12}$$

Turbulente wandnahe Geschwindigkeitsverteilungen –

Messdaten aus Durst et al.: Methods to set up and investigate low Reynolds number, fully developed turbulent plane channel flows. J. Fluids Eng. 120, 496-503 (1998)





Moody-Diagramm der Rohrreibungszahl $\lambda = \lambda(Re, k_s/d)$ für gerade Kreisrohre

Tensoranalytische Operationen der Strömungsmechanik Strömungslehre und Wärmeübertragung I, LV 321.100

- Der Tensor der viskosen und/oder elastischen Spannungen τ schreibt sich in Komponenten

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

- Die Divergenz des Spannungstensors (Zeilenvektor Nabla mal Tensor) ist ein Vektor

$$\vec{\nabla} \cdot \tau = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt des Spannungstensors mit dem Geschwindigkeitsvektor (Spaltenvektor)

$$\tau \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{pmatrix}$$

- Das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Divergenz des Spannungstensors ist natürlich ein Skalar

$$\vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \tau] = u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

- Die Divergenz des Skalarprodukts aus Spannungstensor und Geschwindigkeitsvektors ist (natürlich) auch ein Skalar

$$\vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] = \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})$$

- Die Differenz der beiden letzten Gleichungen wird mit dem Doppelpunkt-Produkt symbolisiert und stellt die Dissipationsfunktion dar

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] - \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \tau] &= (\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) = \Phi_{\mu} = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$



BASIC EQUATIONS IN FLUID MECHANICS

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Brenn

Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung
Technische Universität Graz

THE BASIC EQUATIONS IN INTEGRAL FORM

Equation of continuity:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_O (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dO = 0$$

Equation of motion:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_O \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO = \int_O -p \vec{n} dO + \int_O \vec{\tau}_x n_x dO + \int_O \vec{\tau}_y n_y dO + \int_O \vec{\tau}_z n_z dO + \int_V \rho \vec{f}^B dV$$

Momentum equation for calculation of forces:

$$\begin{pmatrix} \int_O u(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dO \\ \int_O v(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dO \\ \int_O w(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dO \end{pmatrix} = - \underbrace{\int_O p \vec{n} dO}_{\text{known pressure forces}} + \underbrace{\vec{F}}_{\text{unknown force}} + \underbrace{\vec{F}^B}_{\text{body force}}$$

Equation of total energy:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \int_O \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO \\ &= \int_V (\rho \vec{v} \cdot \vec{f}^B) dV - \int_O (p \vec{v} \cdot \vec{n}) dO + \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_x) n_x dO + \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_y) n_y dO \\ &+ \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_z) n_z dO - \int_O (\vec{q} \cdot \vec{n}) dO + \int_V \dot{q}_Q dV \end{aligned}$$

THE DIFFERENTIAL BASIC EQUATIONS IN SYMBOLIC FORM

Equation of continuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) = 0$$

Equation of motion:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + [\vec{\nabla} \cdot \tau] + \rho \vec{f}^B$$

Equation of total energy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) \right] + \left[\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) \right] &= \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B) \\ &- (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}]) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

vic.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) = \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B) - (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}]) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q$$

Equation of mechanical energy:

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) + (\vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \tau]) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B)$$

vic.

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] = p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}]) - (\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B)$$

Equation of thermal energy:

$$\rho \frac{de}{dt} = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q$$

vic.

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + (\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q$$

THE EQUATION OF CONTINUITY IN SEVERAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinates (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho u_\phi) = 0$$

THE EQUATION OF MOTION IN RECTANGULAR COORDINATES

(x, y, z)

$$\begin{aligned} \text{x-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant ρ and μ :

$$\begin{aligned} x\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

THE EQUATION OF MOTION IN CYLINDRICAL COORDINATES

$$(r, \theta, z); \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$\begin{aligned} r\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-component} \quad \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant ρ and μ :

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{r-component}} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\
 & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{\theta-component}} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
 & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{z-component}} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\
 & + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z
 \end{aligned}$$

THE EQUATION OF MOTION IN SPHERICAL COORDINATES

$$(r, \theta, \phi); \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{r-component}} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\textit{\theta-component}} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi\text{-component} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) \\
& = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant ρ and μ :

$$\begin{aligned}
r\text{-component} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) \\
& = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} \right) + \rho g_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\text{-component} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
& = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi\text{-component} \quad & \rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) \\
& = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

THE ENERGY EQUATION IN CARTESIAN COORDINATES

Total energy:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] + \left(\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right) = \\ & = \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B) - (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

vic.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} u \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} w \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) \right] = \\ & + \rho \left(u f_x^B + v f_y^B + w f_z^B \right) - \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) \right] \\ & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

Mechanical Energy:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial t} + u \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial x} + v \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial y} + w \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial z} \right] = \rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] = \\ & - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ & + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho \left(u f_x^B + v f_y^B + w f_z^B \right) \end{aligned}$$

Thermal Energy:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} \right) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

where $\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \Phi_\mu$ (Dissipation function)

Heat conduction equation:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{\dot{q}_Q}{\rho c}$$

Laplace operator in Cartesian coordinates:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Laplace operator in cylindrical coordinates:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Laplace operator in spherical coordinates:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS
IN RECTANGULAR COORDINATES (x, y, z)**

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{yy} = \mu \left[2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right]$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS
IN CYLINDRICAL COORDINATES (r, θ, z)**

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS
IN SPHERICAL COORDINATES (r, θ, ϕ)**

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right]$$

THE FUNCTION $(\tau : \nabla u) = \Phi_\mu$ FOR NEWTONIAN FLUIDS

Rectangular

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu &= 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]^2 \\ &- \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \end{aligned}$$

Cylindrical

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu &= 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{3} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2$$

Spherical

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu = & 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] \\ & + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 \\ & + \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right]^2 \\ & - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]^2 \end{aligned}$$

Konvektiver Wärmetransport: Durchströmung von Rohren und Kanälen

(1) Allgemeine Bemerkungen

Der bedeutende Unterschied zur Umströmung von Körpern besteht darin, dass im Falle der Durchströmung die Grenzschichten nicht beliebig anwachsen können, ohne die Außenströmung zu beeinflussen, da hier begrenzende Wände deren Entwicklung behindern.

Bei Umströmungen müssen wir grundsätzlich nur unterscheiden zwischen laminaren bzw. turbulenten Strömungen. Bei Durchströmungen ist zusätzlich eine Unterscheidung notwendig hinsichtlich

- Anlaufbereich und
- entwickelter Strömung.

Wenn wir inkompressible Strömung voraussetzen, ist die „voll entwickelte Strömung“ wohl definiert – das Geschwindigkeitsprofil ändert sich nicht mehr in Strömungsrichtung, und dies auch bei Wärmezufuhr, wenn von Dichteänderungen durch sehr große Temperatur-unterschiede abgesehen wird, was wir im folgenden voraussetzen wollen.

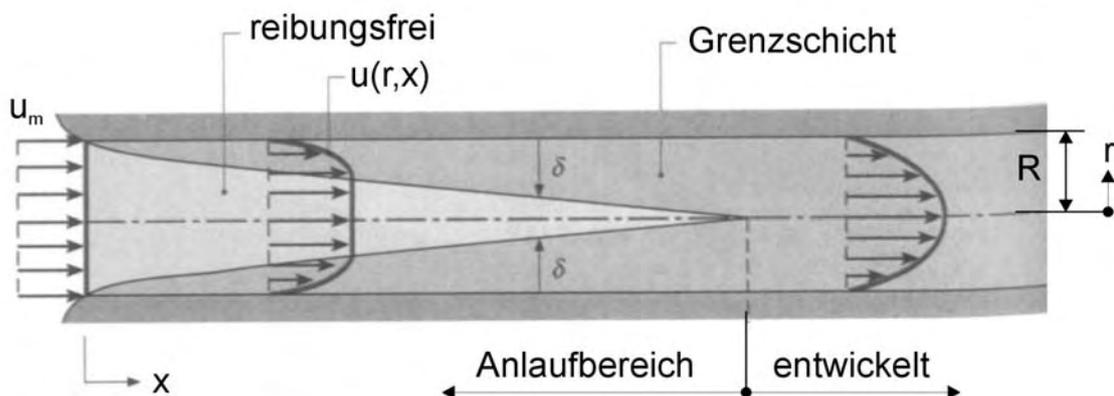
Daher ergibt sich die Frage, ob eine „thermisch entwickelte Strömung“ überhaupt existiert.

Im folgenden wollen wir uns auf die Strömung in Rohren mit kreisförmigem Querschnitt beschränken, wobei die Ergebnisse in vielen Fällen auch auf Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt übertragen werden können, wenn wir den Rohrdurchmesser D durch den hydraulischen Durchmesser D_h ersetzen: $D \rightarrow D_h = 4 A/U$, wobei A die durchströmte Querschnittsfläche bezeichnet und U den benetzten Umfang.

a) Hydrodynamischer Anlauf

Zur Wiederholung sei hier kurz die hydrodynamische Anlaufströmung dargestellt, was bedeutet, dass ab $x = x_E$ das Geschwindigkeitsprofil unverändert bleibt: $\partial u / \partial x = 0$ bzw. $v = 0$.

Grundsätzlich kann dies wie folgt dargestellt werden:



Für laminare Strömung hatten wir erhalten:

$$\frac{u}{u_m} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad \frac{u_m}{u_{\max}} = \frac{1}{2}$$

u_m ... volumenstromäquivalente mittlere Geschwindigkeit; u_{\max} ... Maximalgeschwindigkeit auf der Rohrachse.

Für die Länge des hydraulischen Anlaufes bei laminarer Strömung gilt (ohne Beweis):

$$\frac{x_E}{D} \approx 0,05 Re_D \quad \text{mit} \quad Re_D = \frac{u_m D}{\nu}$$

Für turbulente Strömung kennen wir:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

wobei y den Wandabstand bezeichnet, und für ausgebildete Strömung $\delta=R$ gilt. Ebenfalls ohne Beweis sei für die Länge des Anlaufbereiches in turbulenter Strömung als grober Anhalt angeführt:

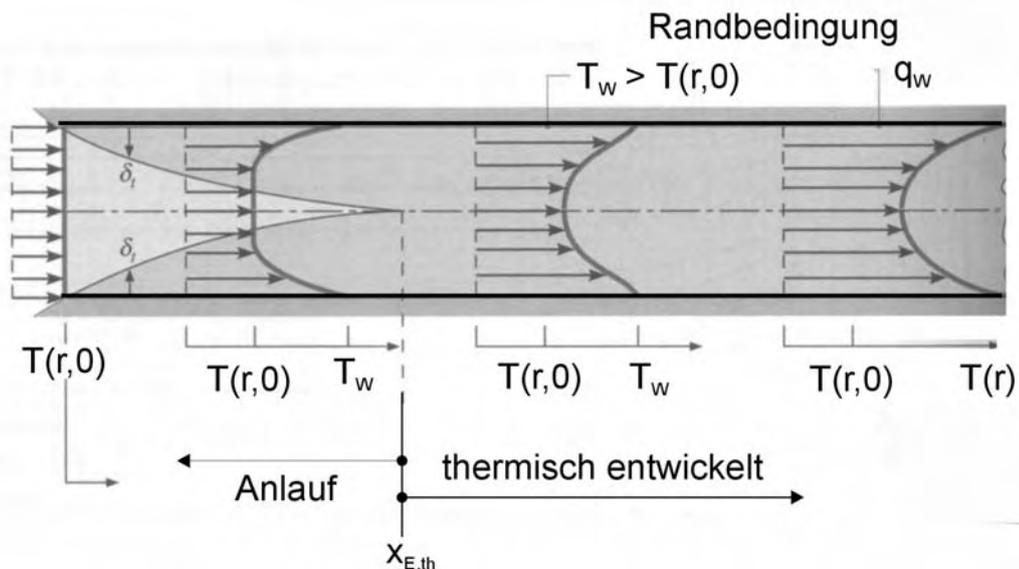
$$10 \leq \frac{x_E}{D} \leq 60.$$

b) Thermischer Anlauf

Um dies genauer zu erarbeiten, wollen wir annehmen, dass das Fluid mit gleichförmiger Temperatur $T(r,0) = \text{konstant} < T_w$ (Temperatur der Rohrwand) eintritt. Nun sollen gleich zwei mögliche Fälle unterschieden werden, die zwar idealisierte, aber dennoch realistische mögliche Randbedingungen darstellen:

- $T_w = \text{konstant} \Rightarrow q_w = q_w(x)$
- $q_w = \text{konstant} \Rightarrow T_w = T_w(x)$

In beiden Fällen entwickelt sich eine thermische Grenzschicht, und eventuell wird ein Zustand „thermisch entwickelter Strömung“ erreicht. Grundsätzlich kann dies wie folgt skizziert werden:



Das entstehende Temperaturprofil hängt nun von der speziellen Randbedingung ab. Allerdings wird in beiden Fällen die Temperatur-Überhöhung mit der Lauflänge x zunehmen \Rightarrow das bedeutet, dass die laufende Wärmezufuhr über die Wände notwendigerweise eine laufende Änderung der örtlichen Fluidtemperatur bedingt.

Für die thermische Anlauflänge im Fall laminarer Strömung gilt (ohne Beweis)

$$\frac{x_{E,th}}{D} \approx 0,05 Re_D Pr \quad \text{mit} \quad Re_D = \frac{u_m D}{\nu},$$

was die Abhängigkeit der thermischen Grenzschichtdicke von der Prandtl-Zahl in laminaren Strömungen zum Ausdruck bringt.

- $Pr = 1: x_{E,th} = x_E$ $Pr > 1: x_{E,th} > x_E$ $Pr < 1: x_{E,th} < x_E$

$Pr \sim 1$ gilt für die meisten Gase ($\sim 0,7$ für Luft), $Pr > 1$ gilt für sehr viele Flüssigkeiten,

$Pr \gg 1$ z. B. für hochviskose Öle, $Pr \ll 1$ für flüssige Metalle mit großer Temperaturleitfähigkeit.

(2) Definition von „mittleren Größen“

Bei Durchströmungsproblemen existiert keine definierte Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht, weshalb hier günstigerweise mit der volumenstromäquivalenten mittleren Geschwindigkeit gerechnet wird:

$$u_m = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int_A u(r) dA$$

Noch viel wesentlicher ist die Einführung einer „mittleren Fluidtemperatur“ T_m , die für den Energietransport durch eine Querschnittsfläche charakteristisch ist.

Der Enthalpiestrom durch einen Rohrquerschnitt A kann wie folgt angegeben werden:

$$\dot{H} = \int_A \rho u h(T) dA \quad \text{wobei} \quad T = T(x, r)$$

Die mittlere Temperatur T_m definiert man so, dass das Produkt aus dem Massenstrom und der spezifischen Enthalpie bei der Temperatur T_m dem Enthalpiestrom \dot{H} entspricht.

$$\text{Massenstrom:} \quad \dot{m} = \int_A \rho u dA, \quad \text{Enthalpiestrom:} \quad \dot{H} = \dot{m} h(T_m)$$

Mit $h = c_p T$ für ideale Gase und $c_p = \text{konstant}$ sowie für inkompressible Strömung erhalten wir:

$$T_m = \frac{1}{\dot{m}} \int_A \rho u T dA = \frac{\int_A \rho u T dA}{\int_A \rho u dA} = \frac{1}{u_m} \int_A u T dA$$

Diese Temperatur ist die „enthalpiestromäquivalente mittlere Fluidtemperatur“, und u_m die volumenstromäquivalente mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

(3) Bedingungen für thermisch entwickelte Strömung

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, dass bei kontinuierlicher Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr das Temperaturprofil laufend veränderlich ist:

$$\Rightarrow \frac{\partial T(r, x)}{\partial x} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{dT_m(x)}{dx} \neq 0$$

Eingehende Analysen dieser Problematik konnten aber zeigen, dass ein „thermisch entwickelter“ Zustand (im folgenden durch den Index „E“ gekennzeichnet) definiert werden kann, wenn geeignete dimensionslose Größen gewählt werden. Ohne Beweis kann dies geschrieben werden wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T_w(x) - T(r, x)}{T_w(x) - T_m(x)} \right]_E = 0. \quad (\otimes)$$

In dieser Beziehung bedeuten $T_w(x)$ die Wandtemperatur, $T_m(x)$ die mittlere Fluidtemperatur und $T(r, x)$ die lokale Fluidtemperatur.

Dieser Zustand, der die Unveränderlichkeit des dimensionslosen Temperaturprofils mit x bedeutet, kann mit beiden möglichen Formen des Wärmetransportes über die Wände erreicht werden, also bei $T_w = \text{konstant}$ und mit $q_w = \text{konstant}$.

(4) Allgemeine Schlussfolgerungen aus Gleichung (\otimes)

Wenn das dimensionslose Temperaturprofil wie oben angegeben keine Funktion von x ist, dann folgt daraus, dass auch die Ableitung nach der radialen Koordinate keine Funktion von x sein kann,

$\frac{\partial}{\partial r} [\dots] \neq f(x)$, da für diese Ableitung T_w und T_m Konstante sind. Speziell bei $r=R$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right]_{r=R} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}}{T_w - T_m} \neq f(x)$$

Für die Wandwärmestromdichte gilt:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

Andererseits können wir auch schreiben:

$$q_w = \alpha (T_w - T_m)$$

Ein Vergleich liefert dann:

$$\Rightarrow \frac{-\frac{q_w}{\lambda}}{(T_w - T_m)} = \frac{-\frac{\alpha}{\lambda} (T_w - T_m)}{(T_w - T_m)} \neq f(x)$$

Daraus folgt sofort eine für thermisch entwickelte Strömungen besonders wichtige Aussage:

Ist die Wärmeleitzahl konstant, d. h. keine Funktion von x , dann ist auch die Wärmeübergangszahl konstant:

$$\alpha = \text{konstant} \neq f(x) \text{ für thermisch entwickelte Strömung}$$

Dies gilt sowohl für $T_w = \text{konstant}$, als auch für $q_w = \text{konstant}$, allerdings nimmt die Konstante in beiden Fällen verschiedene Werte an.

Im Anlaufbereich gilt dies nicht, dort ist die Wärmeübergangszahl von x abhängig: $\alpha = \alpha(x)$! In der Nähe von $x=0$ ist die Dicke der thermischen Grenzschicht δ_t gering und daher die Wärmeübergangszahl hoch. Mit zunehmender Lauflänge im Rohr wird δ_t größer, und α nimmt ab bis zum Erreichen des thermisch entwickelten Zustandes.

(5) Spezielle Schlussfolgerungen aus Gleichung (⊗) für thermisch entwickelte Strömung

a) Wandwärmestrom $q_w = \text{konstant}$

Aus $\frac{q_w}{\alpha} = T_w - T_m$ folgt mit $\alpha = \text{konstant}$ sofort $(T_w - T_m) \neq f(x)$ und damit weiter

$$\frac{dT_w}{dx} \Big|_E = \frac{dT_m}{dx} \Big|_E \quad \text{für } q_w = \text{konstant}$$

b) Wird Gleichung (⊗) partiell differenziert und umgeformt, so erhalten wir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E = \frac{dT_w}{dx} \Big|_E - \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \left[\frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_m}{dx} \right] \Big|_E$$

Daraus können wir nun getrennt zwei Schlussfolgerungen ziehen.

1) Für $q_w = \text{konstant}$ folgt unter Verwendung von a) sofort $[\dots] = 0$, und damit weiter, dass der axiale Temperaturgradient keine Funktion von r ist:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E = \left(\frac{dT_w}{dx} \Big|_E \right) = \frac{dT_m}{dx} \Big|_E \neq g(r) \quad \text{für } q_w = \text{konstant}$$

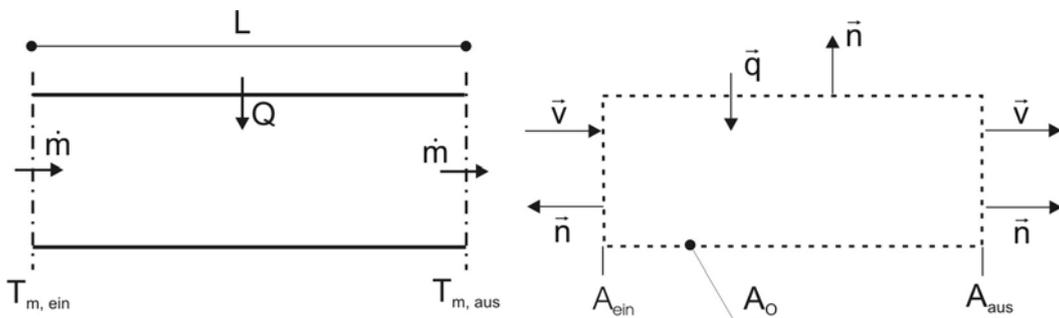
- 2) Für $T_W = \text{konstant}$ gilt $\frac{dT_W}{dx} = 0$, und wir erhalten als Ergebnis, dass in diesem Fall der axiale Temperaturgradient mit der radialen Koordinate im Rohrquerschnitt veränderlich ist:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_E = \frac{T_W - T}{T_W - T_m} \left. \frac{dT_m}{dx} \right|_E = h(r, x)$$

Aus diesen Betrachtungen wird aber auch sofort ersichtlich, dass die enthalpiestrom-äquivalente mittlere Temperatur T_m zur Berechnung von Durchströmungsproblemen eine wichtige Größe darstellt.

(6) Globale Betrachtung, Energiebilanz

Hierzu betrachten wir ein Rohr mit konstantem Querschnitt (Durchmesser D) und der Länge L . Über die Rohrwand soll Wärme durch Konvektion zugeführt werden. Die kinetische Energie der Strömung soll sich dabei nicht ändern, und die Wärmeleitung in x -Richtung soll aufgrund ihres geringen Einflusses nicht berücksichtigt werden.



Die Energiegleichung für den skizzierten Kontrollraum lautet dann, wobei O die gesamte Oberfläche des Kontrollraumes bezeichnet:

$$\int_O \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO = - \int_O p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO - \int_O \vec{q} \cdot \vec{n} dO$$

Speziell ausgewertet erhalten wir daraus:

$$- \int_{A_{\text{ein}}} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) v dO + \int_{A_{\text{aus}}} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) v dO = \int_{A_{\text{ein}}} p v dO - \int_{A_{\text{aus}}} p v dO - \int_{A_o} (-q) dO$$

Da die kinetische Energie voraussetzungsgemäß am Eintritt und am Austritt gleich sein soll, können wir zusammenfassen und erhalten mit Q als dem insgesamt über die Mantelfläche zugeführten Wärmestrom:

$$\int_{A_{\text{aus}}} \rho v \left(e + \frac{p}{\rho} \right) dO - \int_{A_{\text{ein}}} \rho v \left(e + \frac{p}{\rho} \right) dO = Q$$

Unter Einführung der Enthalpie $h = e + \frac{p}{\rho}$ erhalten wir:

$$\dot{H}_{\text{aus}} - \dot{H}_{\text{ein}} = Q,$$

und mit der bereits früher erfolgten Festlegung $\dot{H} = \dot{m} h(T_m) = \dot{m} c_p T_m$ eine äußerst wichtige Beziehung, aus der die Änderung der mittleren Fluidtemperatur zwischen Eintritt und Austritt berechnet werden kann, wenn der konvektiv zugeführte Wärmestrom bekannt ist:

$$\boxed{Q = \dot{m} c_p (T_{m,\text{aus}} - T_{m,\text{ein}})}$$

Diese Beziehung ist bis auf die vereinbarten Spezialisierungen (ideales Gas usw.) allgemein und damit unabhängig von der speziellen Randbedingung, die entweder $q_w = \text{konstant}$ oder $T_w = \text{konstant}$ sein kann. Auch haben wir keinerlei Einschränkungen gemacht, dass die Strömung entwickelt sein soll.

Bei der vorangegangenen Berechnung wurde auch keine Festlegung über die Länge des Rohres getroffen – die oben genannte Beziehung gilt also zwischen beliebigen Querschnitten im Rohr. Daraus können wir daher auch eine Bilanz für ein Rohrelement der differentiellen Länge dx ableiten, womit die Formulierung noch allgemeiner wird:

$$dQ = \dot{m} c_p \left(\frac{dT_m}{dx} dx \right)$$

Andererseits gilt auch $dQ = q_w U dx$, wobei $U = \pi D$ den Umfang des Rohres bezeichnet. Für die Wärmestromdichte können wir $q_w = \alpha (T_w - T_m)$ einsetzen und erhalten

$$dQ = \alpha (T_w - T_m) U dx$$

Werden nun die beiden Ausdrücke für dQ gleichgesetzt, so folgt:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\alpha D \pi}{\dot{m} c_p} (T_w - T_m) \quad (\otimes \otimes)$$

Diese Beziehung ist ganz wesentlich zur Berechnung des Verlaufes der mittleren Fluidtemperatur. Ihre Lösung hängt allerdings von der speziellen Randbedingung ab. Der Durchmesser D kann im allgemeinsten Fall auch eine Funktion von x sein.

Daraus können wir folgendes Verhalten ablesen:

$$T_w > T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} > 0: \text{Wärmezufuhr}$$

$$T_w < T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} < 0: \text{Wärmeabfuhr}$$

$$D = \text{konstant} \Rightarrow \frac{D \pi}{\dot{m} c_p} = \text{konstant}$$

Wir halten außerdem fest:

Im Anlaufbereich ist $\alpha = \alpha(x)$, für entwickelte Strömung ist $\alpha = \text{konstant}$. Unabhängig von der speziellen Randbedingung gilt immer $T_m = T_m(x)$!

(7) Folgerungen für $q_w = \text{konstant}$

Dafür gilt $Q = q_w U L$, womit aus der globalen Energiebilanz sofort die Differenz der mittleren Fluidtemperaturen zwischen Ein- und Austritt berechnet werden kann.

Aus $q_w = \alpha (T_w - T_m) = \text{konstant}$ folgt mit $\dot{m} c_p = \text{konstant}$ aus Gleichung $(\otimes \otimes)$ weiter

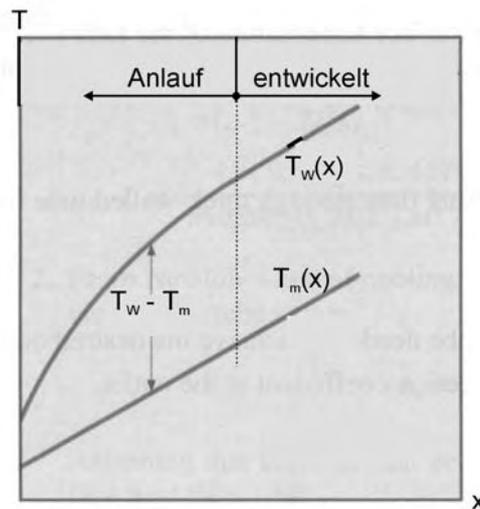
$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{q_w D \pi}{\dot{m} c_p} \neq f(x).$$

Nach Integration von $x = 0$ bis zu einer Stelle x im Rohr erhalten wir unter Verwendung der Randbedingung $T_m(x=0) = T_{m,\text{ein}}$:

$$T_m(x) = T_{m,\text{ein}} + \frac{q_w D \pi}{\dot{m} c_p} x$$

Das bedeutet, dass die mittlere Fluidtemperatur einen linearen Verlauf längs der Koordinate x aufweist, und zwar gleichermaßen im Anlaufbereich wie auch im thermisch entwickelten Bereich. Für

den Anlaufbereich folgt zusätzlich aus $q_w = \alpha(x) (T_w - T_m)$, dass $(T_w - T_m)$ zunehmen muss, da $\alpha(x)$ abnimmt. Den Temperaturverlauf bei $q_w = \text{konstant}$ können wir also wie folgt skizzieren:



Hinweis: Auch im allgemeineren Fall, wenn $q_w = q_w(x)$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, und $D = D(x)$ variabel ist, kann Gleichung (⊗⊗) integriert werden.

Mit $Q = \int_0^x q_w(x) U(x) dx$ kann auch die Differenz $(T_{m,aus} - T_{m,ein})$ berechnet werden.

(8) Folgerungen für $T_w = \text{konstant}$

Ausgangspunkt ist ebenfalls Gleichung (⊗⊗), die hier nochmals angeführt werden soll:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\alpha D \pi}{\dot{m} c_p} (T_w - T_m)$$

Mit $T_w = \text{konstant}$ können wir günstigerweise eine Temperaturdifferenz $\Delta T(x) = T_w - T_m(x)$ zur leichteren Rechnung einführen. Damit geht Gleichung (⊗⊗) über in:

$$-\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{U \alpha}{\dot{m} c_p} \Delta T$$

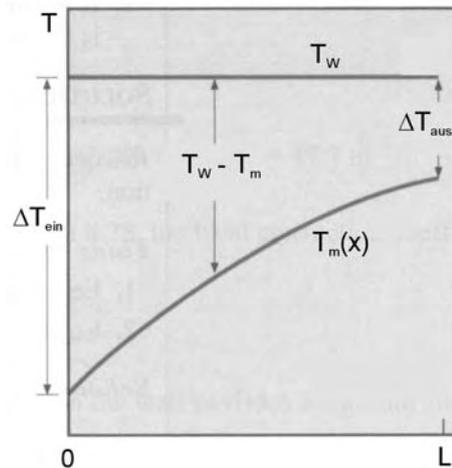
Trennung der Variablen und Integration liefert:

$$\int_{\Delta T_{ein}}^{\Delta T_{aus}} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = - \frac{U}{\dot{m} c_p} \int_0^x \alpha(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\Delta T_{aus}}{\Delta T_{ein}} = - \frac{U x}{\dot{m} c_p} \left[\frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx \right] \quad (\otimes\otimes\otimes)$$

wobei der Ausdruck in eckiger Klammer $\left[\frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx \right] = \bar{\alpha}_x$ die zwischen $x = 0$ und irgendeiner Stelle x im Rohr gemittelte Wärmeübergangszahl darstellt. Daraus erhalten wir durch Umformen

$$\frac{\Delta T_{aus}}{\Delta T_{ein}} = \frac{T_w - T_m(x)}{T_w - T_{m,ein}} = \exp \left(- \frac{U x}{\dot{m} c_p} \bar{\alpha}_x \right).$$

Hieraus erkennt man, dass die Temperaturdifferenz $T_w - T_m(x)$ exponentiell mit der Koordinate x abnimmt, was in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Die Berechnung des insgesamt übertragenen Wärmestromes ist hier aufgrund des exponentiellen Temperaturverlaufes etwas komplizierter. Die globale Energiebilanz zwischen Eintritt und Austritt lautet etwas umgeformt wie folgt:

$$Q = \dot{m} c_p \left[(T_W - T_{m,\text{ein}}) - (T_W - T_{m,\text{aus}}) \right] = \dot{m} c_p \left[\Delta T_{\text{ein}} - \Delta T_{\text{aus}} \right]$$

Wenn wir hier $(\dot{m} c_p)$ mit Hilfe von Gleichung (⊗⊗⊗) ausdrücken, so erhalten wir

$$Q = U \times \bar{\alpha}_x \frac{\Delta T_{\text{aus}} - \Delta T_{\text{ein}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{aus}}}{\Delta T_{\text{ein}}}} = A_O \bar{\alpha}_x (\Delta T_{\text{log}})$$

mit

$A_O = U \cdot x$ als die Oberfläche und $\Delta T_{\text{log}} = \frac{\Delta T_{\text{aus}} - \Delta T_{\text{ein}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{aus}}}{\Delta T_{\text{ein}}}}$ als die mittlere logarithmische

Temperaturdifferenz. Diese Beziehung stellt ein Wärmeübergangsgesetz dar, das einen Zusammenhang zwischen dem insgesamt übertragenen Wärmestrom und der Differenz der mittleren Fluidtemperatur zwischen Eintritt und Austritt wiedergibt.

Bemerkung: Die beiden isoliert betrachteten Randbedingungen stellen zwar Vereinfachungen dar, die aber bei praktischen Rechnungen in vielen Fällen plausibel argumentiert werden können.

- $q_w = \text{konstant}$: elektrisch beheizte Wände oder konstante Beaufschlagung der äußeren Wandoberfläche durch Strahlung.
- $T_w = \text{konstant}$: in der Regel bei vielen Problemen mit Phasenübergang (Sieden, Kondensation).
- Beide Randbedingungen können natürlich durch entsprechend geregelte Beheizung oder Kühlung eingestellt werden.

(9) Bestimmung von Wärmeübergangszahlen bzw. Nußeltzahlen

(a) Laminare Strömung in Rohren mit Kreisquerschnitt, thermisch voll entwickelter Bereich.

Dafür ist die Geschwindigkeitsverteilung bekannt:

$$\frac{u}{u_m} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{u_m}{u_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad v = 0.$$

Die Energiegleichung für inkompressible, stationäre Strömung unter Vernachlässigung der Dissipation durch innere Reibung sowie unter Berücksichtigung der Grenzschichtnäherung $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ lautet:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

Für voll entwickelte Strömung ist mit $v = 0$ eine Lösung der folgenden vereinfachten Gleichung möglich:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

- i) Wandwärmestrom $q_w = \text{konstant}$

Für diesen Fall hatten wir schon gezeigt, dass gilt

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_E = \left. \frac{dT_m}{dx} \right|_E,$$

und außerdem, dass die mittlere Fluidtemperatur linear mit x veränderlich ist. In diesem Fall ist also die Grenzschichtnäherung $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ exakt. Nach Einsetzen der obigen Beziehung sowie der Geschwindigkeitsverteilung in die Energiegleichung kann diese integriert werden und liefert die Temperaturverteilung $T(r,x)$. Daraus kann nach Einführen der mittleren Temperatur T_m und einigen Manipulationen das folgende sehr wichtige Ergebnis erhalten werden (ohne weiteren Beweis):

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 4,36} \quad \text{für } q_w = \text{konstant} \text{ am Rohr mit Kreisquerschnitt}$$

Die Nußelt-Zahl, die für diese Belange mit dem Rohrdurchmesser D gebildet wird, ist konstant.

- ii) Wandtemperatur $T_w = \text{konstant}$

Ausgangspunkt dafür ist wieder die Energiegleichung in Grenzschichtnäherung. Unter Berücksichtigung der in den vorigen Abschnitten dargestellten Zusammenhänge für $T_w = \text{konstant}$ erhält man eine Gleichung, die allerdings nicht geschlossen, sondern nur iterativ gelöst werden kann. Das Ergebnis wird ebenfalls ohne weiteren Beweis angegeben:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 3,66} \quad \text{für } T_w = \text{konstant} \text{ am Rohr mit Kreisquerschnitt}$$

- (b) Turbulente Strömung in Rohren mit Kreisquerschnitt, thermisch voll entwickelter Bereich

Die beiden im folgenden angeführten Beziehungen gelten nur für nicht allzu große Differenzen $(T_w - T_m)$, und die Stoffwerte sind jeweils bei T_m zu ermitteln. Beide Beziehungen gelten sowohl für $T_w = \text{konstant}$ als auch für $q_w = \text{konstant}$, und wurden experimentell bestätigt für folgende Parameter:

$$0,7 \leq Pr \leq 160$$

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} > 10000$$

$$\frac{L}{D} \geq 10$$

- Gleichung von Colburn:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^{1/3}$$

- Gleichung von Dittus-Boelter:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n$$

mit $n=0,4$ für Wärmezufuhr $T_W > T_m$

und $n=0,3$ für Wärmeabfuhr $T_W < T_m$.

Abschließend muss festgehalten werden, dass beide Beziehungen in der Anwendung sehr einfach sind, aber Fehler bis zu 25% des Wärmestromes verursachen können. Auf komplexere Beziehungen wollen wir aber nicht eingehen.

- (c) Strömung mit Wärmezufuhr im Anlaufbereich

Die Berechnung von Wärmetransportvorgängen bei thermischer Anlaufströmung bzw. bei kombiniertem hydraulischem und thermischem Anlauf sind naturgemäß komplexer. Entsprechende Beziehungen zur Bestimmung von Nußeltzahlen können der einschlägigen Fachliteratur entnommen werden.

Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung
Technische Universität Graz
Strömungslehre und Wärmeübertragung I, UE (LV 321.101)

Stoffwerte von Wasser bei einem Druck von p = 1 bar								
T [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kg K]	β [10 ⁻³ /K]	λ [W/m K]	μ [10 ⁻⁶ Pa s]	ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	a [10 ⁻⁶ m ² /s]	Pr [-]
- 20	992,8	4375	- 0,7056	0,5118	4311,0	4,342	0,118	36,85
- 15	995,8	4312	- 0,4946	0,5259	3312,8	3,372	0,122	27,17
- 10	997,8	4269	- 0,3281	0,5388	2533,4	2,639	0,125	20,86
- 5	999,1	4238	- 0,1943	0,5508	2149,4	2,151	0,130	16,54
0	999,8	4217	- 0,0852	0,5620	1791,8	1,792	0,133	13,44
5	1000,0	4202	0,0055	0,5724	1519,6	1,520	0,136	11,16
10	999,8	4192	0,0823	0,5820	1307,6	1,308	0,139	9,42
15	999,2	4186	0,1486	0,5911	1139,0	1,140	0,141	8,07
20	998,3	4182	0,2067	0,5996	1002,6	1,004	0,144	6,99
25	997,2	4180	0,2586	0,6076	890,8	0,893	0,146	6,13
30	995,8	4178	0,3056	0,6151	797,7	0,801	0,148	5,42
35	994,1	4178	0,3488	0,6221	719,5	0,724	0,150	4,83
40	992,3	4179	0,3890	0,6287	653,1	0,658	0,152	4,34
45	990,3	4180	0,4267	0,6348	596,3	0,602	0,153	3,93
50	988,1	4181	0,4523	0,6405	547,1	0,554	0,155	3,57
55	985,7	4183	0,4963	0,6458	504,3	0,512	0,157	3,27
60	983,2	4185	0,5288	0,6507	465,8	0,475	0,158	3,00
65	980,5	4187	0,5590	0,6553	433,8	0,442	0,160	2,77
70	977,7	4190	0,5900	0,6595	404,5	0,414	0,161	2,57
75	974,7	4193	0,5190	0,6633	378,3	0,388	0,162	2,39
80	971,4	4196	0,6473	0,6668	355,0	0,365	0,164	2,23
85	968,5	4200	0,6748	0,6699	333,9	0,345	0,165	2,09
90	965,1	4205	0,7018	0,6728	315,0	0,326	0,166	1,97
95	961,7	4210	0,7284	0,6753	297,8	0,310	0,167	1,86
99,63 ⁺⁾	958,4	4215	0,7527	0,6773	283,3	0,296	0,168	1,76

⁺⁾ Sättigungszustand

Stoffwerte von Wasser bei einem Druck $p = 5$ bar

T [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kg K]	β [10 ⁻³ /K]	λ [W/m K]	μ [10 ⁻⁶ Pa s]	ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	a [10 ⁻⁶ m ² /s]	Pr [-]
0	1000,0	4215	- 0,08376	0,5622	1791	1,79	0,133	13,4
25	997,3	4178	0,2590	0,6078	890,7	0,893	0,146	6,12
50	988,2	4180	0,4622	0,6407	547,2	0,554	0,155	3,57
75	974,9	4192	0,6185	0,6635	378,4	0,388	0,162	2,39
100	958,3	4215	0,7539	0,6777	282,3	0,295	0,168	1,76
150	916,8	4310	1,024	0,6836	181,9	0,198	0,173	1,15

Stoffwerte von Wasser bei einem Druck $p = 10$ bar

T [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kg K]	β [10 ⁻³ /K]	λ [W/m K]	μ [10 ⁻⁶ Pa s]	ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	a [10 ⁻⁶ m ² /s]	Pr [-]
0	1000,3	4212	- 0,08199	0,5625	1790	1,79	0,134	13,4
25	997,6	4177	0,2595	0,6081	890,6	0,893	0,146	6,12
50	988,5	4179	0,4620	0,6410	547,2	0,554	0,155	3,57
75	975,1	4191	0,6179	0,6638	378,6	0,388	0,162	2,39
100	958,6	4214	0,7530	0,6780	282,4	0,295	0,168	1,76
150	917,1	4308	1,022	0,6839	182,0	0,198	0,173	1,15

Stoffwerte von Wasser im Sättigungszustand (Flüssigkeit)

T [°C]	p [bar]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kg K]	β [10 ⁻³ /K]	λ [W/m K]	μ [10 ⁻⁶ Pa s]	ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	a [10 ⁻⁶ m ² /s]	Pr [-]
0,01	0,00611	999,8	4217	- 0,0853	0,562	1791,4	1,792	0,1333	13,44
10	0,01227	999,7	4193	0,0821	0,582	1307,7	1,308	0,1388	9,42
20	0,02337	998,3	4182	0,2066	0,600	1002,7	1,004	0,1436	6,99
30	0,04242	995,7	4179	0,3056	0,615	797,7	0,801	0,1478	5,42
40	0,07375	992,2	4179	0,3890	0,629	653,1	0,658	0,1516	4,34
50	0,12335	988,0	4181	0,4624	0,640	547,1	0,554	0,1550	3,57
60	0,19919	983,1	4185	0,5288	0,651	466,8	0,475	0,1582	3,00
70	0,31151	977,7	4190	0,5900	0,659	404,4	0,414	0,1610	2,57
80	0,47359	971,6	4197	0,6473	0,667	355,0	0,365	0,1635	2,234
90	0,70108	965,1	4205	0,7019	0,673	315,0	0,326	0,1658	1,969
100	1,01325	958,1	4216	0,7547	0,677	282,2	0,294	0,1677	1,756
110	1,4326	950,7	4229	0,8068	0,681	254,9	0,268	0,1694	1,583
120	1,9854	942,8	4245	0,8590	0,683	232,1	0,246	0,1707	1,442
130	2,7012	934,6	4263	0,9121	0,684	212,7	0,228	0,1718	1,325

Stoffwerte von trockener Luft bei einem Druck $p = 1$ bar

T [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kg K]	β [10 ⁻³ /K]	λ [W/m K]	μ [10 ⁻⁶ Pa s]	ν [10 ⁻⁶ m ² /s]	a [10 ⁻⁶ m ² /s]	Pr [-]
- 40	1,4952	1006	4,304	0,02145	15,09	10,09	14,3	0,71
- 20	1,3765	1006	3,962	0,02301	16,15	11,73	16,6	0,71
0	1,2754	1006	3,671	0,02454	17,10	13,41	19,1	0,70
20	1,1881	1007	3,419	0,02603	17,98	15,13	21,8	0,70
40	1,1120	1008	3,200	0,02749	18,81	16,92	24,5	0,69
60	1,0452	1009	3,007	0,02894	19,73	18,88	27,4	0,69
80	0,9859	1010	2,836	0,03038	20,73	21,02	30,5	0,69
100	0,9329	1012	2,684	0,03181	21,60	23,15	33,7	0,69
120	0,8854	1014	2,547	0,03323	22,43	25,33	37,0	0,68
140	0,8425	1017	2,423	0,03466	23,19	27,53	40,5	0,68
160	0,8036	1020	2,311	0,03607	24,01	29,88	44,0	0,68
180	0,7681	1023	2,209	0,03749	24,91	32,43	47,7	0,68
200	0,7356	1026	2,115	0,03891	25,70	34,94	51,6	0,68
250	0,6653	1035	1,912	0,04243	27,40	41,18	61,6	0,67

T	Temperatur in °C	β	thermischer Ausdehnungskoeffizient	a	Temperaturleitzahl
p	Druck	λ	Wärmeleitfähigkeit	Pr	Prandtl-Zahl
ρ	Dichte	μ	dynamische Zähigkeit		
c_p	spezifische Wärmekapazität bei $p =$ konstant	ν	kinematische Zähigkeit		