Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

SYSTEMTHEORIE AK4

Kramers-Kronig-Dispersionsrelationen, Hilbert-Transformierte, Bode-Relationen

Heinico Dourdoumas

Version vom 20. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Prolegomena

Bei der Untersuchung zeitlicher Vorgänge in elektrischen Netzwerken oder mechanischen Systemen werden diese oft der Einfachheit halber durch *lineare und zeitinvariante* mathematische Modelle mit der skalaren Eingangsgröße u und der skalaren Ausgangsgröße y beschrieben.

Steht das Eingangs-Ausgangsverhalten eines Systems im Vordergrund, so kann dieses als eine Abbildung $y(t) = H\left[u(t)\right]$ aufgefasst werden. Man erhält unter Benutzung der Gewichtsfunktion (auch Impulsantwort genannt) g die Beschreibung

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \left(= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right) . \tag{1.1}$$

Physikalische Systeme, deren Eingangsgröße von der Zeit t abhängt, sind durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet: die Ausgangsgröße $y(t_1)$ zu irgend einem Zeitpunkt t_1 ist *unabhängig* vom Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ für *zukünftige* Werte $t > t_1$. Man nennt ein System, das für einen beliebigen Zeitpunkt τ die Eigenschaft

$$u(t) = 0 \quad \text{für } t \leq \tau \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = 0 \quad \text{für } t \leq \tau$$

besitzt, kausal. Somit verschwindet für negative t-Werte die Gewichtsfunktion eines solchen Systems (1.1), d.h. sie erfüllt die Bedingung

$$g(t) = 0 \qquad \text{für } t < 0. \tag{1.2}$$

Solch eine Funktion wird oft *kausal* oder *rechtsseitig* genannt. In diesem Fall ergibt sich aus (1.1) folgende Beschreibung

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

bzw.

$$y(t) = \int\limits_{0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \ . \tag{1.3}$$

Interessiert man sich für das Innere des Systems, so erhält man in vielen praktisch relevanten Fällen mit Hilfe des n-dimensionalen Zustandsvektors $\mathbf{x}$ - darin sind die interessanten Systemgrößen zusammengefasst - ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten als Modell. Die Beschreibung lautet in Matrix-Schreibweise

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad . \tag{1.4}$$

Man beachte, dass durch (1.4) für positive Werte $t > 0$ ein kausales System beschrieben wird.

Mit Hilfe der Laplace[1]- bzw. der Fourier[2]-Transformation kann man das Modell (1.1) (Integralrelation zwischen u und y) und (1.4) (Differentialgleichungen zwischen $\mathbf{x}$ und u) in äquivalente lineare *algebraische* Gleichungen überführen und im sogenannten Bildbereich - oft auch Frequenzbereich genannt - lösen. Die anschließende Rücktransformation dieser Lösungen in den Zeitbereich ergibt die gesuchten Zeitverläufe[3].

Darüberhinaus kann durch Verwendung der o.a. Transformationen das Verhalten linearer zeitinvarianter Systeme mit Hilfe der fundamentalen Begriffe der Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. des Frequenzganges $G(j\omega)$ charakterisiert und analysiert werden. Durch die Verwendung von Funktionen mit komplexem Argument und den zugehörigen mathematischen Werkzeugen der Theorie analytischer Funktionen gewinnt man Einsichten und Ergebnisse, die man durch Benutzung von Methoden der reellen Analysis schwerlich - oder nur mit Ach und Krach - bekommen hätte! Eine analytische Funktion besitzt nun mal eine extrem starke innere Gebundenheit. Man denke zBsp. an den Identitätssatz für analytische Funktionen. Bedenkt man, dass bei den meisten technischen Anwendungen das Verhalten eines realen Systems - das selbst gewissen Gesetzmäßigkeiten unterliegt - modelliert wird, ist eigentlich die Verwendung von Werkzeugen der Funktionentheorie eine natürliche und adäquate Vorgehensweise.

Es ist zu bemerken, dass die Laplace- mit der Fourier-Transformation eng verwandt ist. Mit Hilfe letzterer werden allgemeine (nichtperiodische) Zeitfunktionen (Signale) auf sinusförmige Zeitfunktionen zurückgeführt. Diese weisen günstige Eigenschaften auf - man denke beispielhaft daran, dass sie ihre Form durch Addition bzw. Differentiation nicht ändern - und sind sehr hilfreich bei der Analyse bzw. den Berechnungen linearer Systeme. Allerdings ist es von Nachteil, dass für etliche einfache aber in technischen Anwendungen wichtige Signale die Fourier-Transformation nur unter Benutzung der Theorie verallgemeinerter Funktionen (sogenannter δ-Funktionen) durchführbar ist. Bei Verwendung der Laplace-Transformation ist es günstig, dass der Einsatz funktionstheoretischer Methoden weitgehend problemlos ist. Man verzichtet zwar auf eine Zurückführung auf sinusförmige Größen, kann aber Einschwingvorgänge systematisch berechnen.

Beide Transformationen weisen demnach Vorteile auf, die allerdings *nicht gleichzeitig* sichergestellt werden können. Grob gesagt: die Anwendung der Fourier-Transformation ist bei nachrichtentechnischen Fragestellungen üblich; sie stellt ein wichtiges Konzept dar und ist ein analytisches Werkzeug in der Signalverarbeitung. Die Anwendung der Laplace-Transformation

---

[1] Pierre-Simon de Laplace (Baumont-en-Auge 1749 - Paris 1827)

[2] Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768 - Paris 1830)

[3] Siehe zBsp. Gustav DOETSCH: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* bzw. Athanasios PAPOULIS: *The Fourier Integral and its Applications bzw.* Otto FÖLLINGER: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation.*

ist wiederum in der Regelungstechnik (Regelungstheorie) und der Prozessautomatisierung gängiger.

Nachfolgend werden die Definitionsgleichungen beider Transformationen knapp wiedergegeben und grundlegende Eigenschaften der Fourier-Transformation aufgezeigt. Sie dienen der Herleitung eines fundamentalen Zusammenhangs von Real- und Imaginärteil der Fourier-Transformierten reeller und rechtsseitiger Funktionen bzw. daraus folgender Zusammenhänge für Laplace-Transformierte. Hierbei handelt es sich bei physikalischen Anwendungen um die Kramers[4]-Kronig[5]-Relationen, bei nachrichtentechnischen Problemstellungen um die Hilbert[6]-Transformierten sowie um die Bode[7]-Relationen, die in der Regelungstechnik gebräuchlich sind.

[4] Hendrik Anthony Kramers (Rotterdam 1894 - Oegstgeest, Niederlande 1952)
[5] Ralph Kronig (Dresden 1904 - Zeist, Niederlande 1995)
[6] David Hilbert (Königsberg 1862 - Göttingen 1943)
[7] Hendrik Wade Bode (Madison, Wisconsin 1905 - Cambridge, Massachusetts 1982)

Kapitel 2

Laplace- und Fourier-Transformation

2.1 Einseitige Laplace-Transformation

Bei dieser Transformation ordnet man einer Funktion $f(t)$ der reellen Variablen t in eindeutiger Weise eine Funktion $\bar{f}(s)$ der *komplexen* Variablen s zu. In den meisten technischen Anwendungen ist $f(t)$ eine Zeitfunktion. Es wird *angenommen*, dass

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 \tag{2.1}$$

gilt. Man betrachtet also ausschließlich *rechtsseitige* Funktionen. Das ist zBsp. bei Einschaltvorgängen der Elektrotechnik bzw. bei der Berechnung von Systemgrößen in elektrischen Schaltungen oder mechanischen Anordnungen der Fall.

Man bildet nun das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$ und führt damit eine Funktion $\bar{f}(s)$, die sogenannte einseitige Laplace-Transformierte, von $f(t)$ ein, die für alle Werte s, für die obiges Integral konvergiert, durch

$$\bar{f}(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \tag{2.2}$$

definiert ist[1].

Für die Konvergenz obigen Integrals reicht folgende einfache *hinreichende* Bedingung aus: *falls* eine stückweise stetige Funktion $f(t)$ einer Beschränkung $|f(t)| \leq M < \infty$ für $t \geq t_1 \geq 0$ genügt, so ist das Integral (2.2) für alle Werte der Variablen s mit positivem Realteil, d.h. $\mathrm{Re}\{s\} > 0$, *absolut konvergent*. In der Technik vorkommende, also *reale* Funktionen, unterliegen immer solch einer Beschränkung. Des Weiteren gilt, dass wenn das Integral (2.2) für einen Wert $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ der komplexen Variablen s konvergiert, so ist es für *jedes* s mit der Eigenschaft $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_0$ konvergent. Hieraus folgt (nach dem Dedekind-Schnitt), dass jede Funktion $f(t)$ mit einer reellen Konstante γ assoziiert ist und die Eigenschaft besitzt, dass

[1] Die Behandlung von Funktionen $f(t)$, die auch für $t < 0$ Werte ungleich Null annehmen, erfolgt mit Hilfe der sogenannten zweiseitigen Laplace-Transformation $\bar{f}(s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$. Sie ist im technischen Bereich kein gängiges Verfahren. Spricht man in technischen Anwendungen von der Laplace-Transformation, so meint man in der Regel die einseitige Variante.

das Integral (2.2) für $\mathrm{Re}\{s\} > \gamma$ konvergiert, während es für $\mathrm{Re}\{s\} < \gamma$ nicht konvergent ist. Es ist essentiell, dass $\bar{f}(s)$ im Bereich der absoluten Konvergenz eine holomorphe Funktion ist, die in weiteren Bereichen der komplexen s-Ebene analytisch fortgesetzt werden kann.

Somit wird gemäß (2.2) der Funktion $f(t)$ eine Funktion $\bar{f}(s)$ im sogenannten *Bildbereich* zugeordnet. Diese Zuordnung (auch Korrespondenz genannt) zwischen *Originalfunktion* $f(t)$ und zugehöriger *Bildfunktion* $\bar{f}(s)$ wird durch

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\} \tag{2.3}$$

symbolisiert. Hierbei kann die Originalfunktion mit Hilfe des Linienintegrals

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \bar{f}(s)\, e^{st} ds \tag{2.4}$$

angegeben werden, wobei die reelle Konstante α die Ungleichung $\alpha > \gamma$ erfüllt. D.h. die Integrationslinie - der sogenannte Bromwich-Weg[2]- muss im Konvergenzbereich obigen Linienintegrals liegen.

2.2 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte einer - nicht zwingend rechtsseitigen - Funktion $f(t)$ ist in einer der Laplace-Transformierten ähnlichen Weise mit Hilfe des uneigentlichen Integrals

$$\breve{f}(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \tag{2.5}$$

definiert. In der Fachliteratur wird in der Regel die Bezeichnung $F(\omega)$ verwendet. Die hier gewählte Darstellung ist zwar umständlich aber konsistenter und vorteilhaft, wenn man das Übertragungsverhalten linearer Systeme untersucht bzw. Zusammenhänge mit einer Beschreibung anhand der Laplace-Transformation durchleuchtet.

Hinreichend für die Existenz dieses Integrals ist die absolute Integrierbarkeit der Funktion $f(t)$, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$. Aufgrund dieser Voraussetzung ist das Fourier-Integral (2.5) als Cauchyscher[3] Hauptwert (auch Prinzipalwert genannt) zu interpretieren[4].

Die Funktion $\breve{f}(j\omega)$ ist auch bei reellen Funktionen $f(t)$ i.A. komplexwertig in der reellen Variablen ω. In der Nachrichtentechnik nennt man $\breve{f}(j\omega)$ die *Spektral-* oder *Frequenzfunktion* der Zeitfunktion $f(t)$. Man symbolisiert deren Zusammenhang durch

$$\breve{f}(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\}.$$

[2] Thomas John I´Anson Bromwich (Wolverhampton, England 1875 - Northampton 1929)

[3] Augustin-Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux bei Paris 1857)

[4] Für eine Funktion $h(x)$ bedeutet dies $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)dx := \lim \int\limits_{-T}^{T} h(x)dx$ für $T \to \infty$. Im Allgemeinen versteht man unter einem uneigentlichen Integral folgenden Grenzwert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)dx := \lim \int\limits_{-T_1}^{T_2} h(x)dx$ für $T_1, T_2 \to \infty$. Die Betrachtung des Spezialfalles, nämlich des Cauchy-Hauptwertes, ermöglicht und erleichtert in vielen Fällen die Ermittlung der Fourier-Transformierten.

Hierbei gilt für das sogenannte Fourier-Umkehrintegral[5]

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega. \tag{2.6}$$

Alternative Definitionen der Fourier-Transformation:

1. In vielen physikalischen oder mathematischen Fachbeiträgen wird die Fourier-Transformation durch folgende Korrespondenzen definiert

$$\breve{f}_+(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{+j\omega t}dt \qquad \text{und} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\breve{f}_+(j\omega)\,e^{-j\omega t}d\omega. \tag{2.7}$$

   Der Unterschied zur Definition (2.5) besteht im Vorzeichen des Exponentialterms. In manchen Relationen, in denen Fourier- und - die nachfolgend eingeführten - Hilbert-Transformierten enthalten sind, führt dieser Vorzeichenwechsel allerdings zu Ergebnissen, die sich durch ein negatives Vorzeichen unterscheiden. Aus diesem Grund ist - um Irritationen zu vermeiden - beim Lesen diverser Fachartikel Achtsamkeit geboten.

2. Betrachtet man statt der Kreisfrequenz ω die "einfache" Frequenz ν mit $\omega = 2\pi\nu$, so erhält man eine zum Fourier-Integral (2.5) symmetrisch aufgebaute Korrespondenz:

$$\breve{f}(j2\pi\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j2\pi\nu t}dt \qquad \text{und} \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(j2\pi\nu)\,e^{j2\pi\nu t}d\nu\ .$$

In den nachfolgenden Ausführungen stehen die - in der Technik besonders relevanten - reellen und rechtsseitigen Zeitfunktionen im Vordergrund. Es werden hochinteressante und wichtige Zusammenhänge bzw. Eigenschaften der zugehörigen Fourier- bzw. Laplace- Transformierten eruiert.

2.2.1 Grundlegendes über die Fourier-Transformation

Darstellung der Fourier-Transformierten $\breve{f}(j\omega)$. Ausgehend von (2.5) ist es manchmal zweckmäßig, den Real- bzw. den Imaginärteil der Spektralfunktion zu betrachten

$$\breve{f}(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} =: R(\omega) + j\cdot I(\omega). \tag{2.8}$$

Gegebenenfalls benutzt man auch deren Zerlegung nach Betrag und Winkel gemäß

$$\breve{f}(j\omega) = \left|\breve{f}(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)}\quad , \tag{2.9}$$

wobei für den Betrag

$$\left|\breve{f}(j\omega)\right| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{2.10}$$

und für den Winkel

$$\tan\varphi(\omega) = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} \tag{2.11}$$

gilt. Hierbei ist zu beachten, dass man den Winkel $\varphi(\omega)$ in dem Intervall $[-\pi,\ \pi]$ eindeutig festlegt, indem man den Quadranten der komplexen Ebene, in dem sich $\breve{f}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ befindet, bestimmt.

[5] Das Integral ist als Haupt- oder Prinzipalwert zu verstehen.

Einige wichtige Gesetzmäßigkeiten

- **Asymptotisches Verhalten der Spektralfunktion**. *Falls* die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ gilt, strebt für $|\omega| \to \infty$ die Funktion $\breve{f}(j\omega)$ nach null (Riemann[6]-Lebesgue[7] Lemma). Das Verhalten der Frequenzfunktion $\breve{f}(j\omega)$ für "große" ω-Werte hängt von den Stetigkeitseigenschaften der Zeitfunktion $f(t)$ und deren Ableitungen ab. Je glatter der Zeitverlauf von $f(t)$ ist, d.h. je höhere Zeitableitungen von $f(t)$ stetig verlaufen, um so schneller strebt die Spektralfunktion für $\omega \to \infty$ gegen null. Präziser formuliert[8]: *falls* $f(t)$ und ihre Zeitableitungen bis zur Ordnung n existieren und von beschränkter Variation[9] im Intervall $(-\infty.\infty)$ sind , strebt für $|\omega| \to \infty$ ihre Fourier-Transformierte $\breve{f}(j\omega)$ nach null mindestens so schnell wie $1/\omega^{n-1}$.

- **Spektralfunktion einer *reellen* Funktion**. Bei einer *reellen* Funktion $f(t)$ weist die Spektralfunktion eine besondere Struktur auf, indem Realteil $R(\omega)$ und Imaginärteil $I(\omega)$ besondere Eigenschaften besitzen. Das kann man folgendermaßen einsehen: eine reelle Funktion $f(t)$ ist gleich ihrer konjugiert komplexen Funktion $f^*(t)$, d.h. $\breve{f}^*(j\omega) = \breve{f}(-j\omega)$. Hierbei kennzeichnet das hochgestellte Symbol $*$ die Operation "konjugiert komplex". Damit ist die Funktion $f(t)$ genau dann *reell,* wenn der Realteil $R(\omega)$ eine *gerade* und der Imaginärteil $I(\omega)$ eine *ungerade* Funktion von ω ist[10]

$$\breve{f}^*(j\omega) = \breve{f}(-j\omega) \quad \Leftrightarrow \quad R(\omega) = R(-\omega) \quad \text{und} \quad I(\omega) = -I(-\omega) \quad . \tag{2.12}$$

  Nutzt man nun in dem Fourier-Integral die Euler[11]-Relation $e^{j\psi} = \cos\psi + j \sin\psi$, so kann man leicht die Beziehungen

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega t) dt \quad \text{und} \quad I(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega t) dt \tag{2.13}$$

  zeigen.

---

[6] Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Niedersachsen 1826 - Verbania, Italien 1866)

[7] Henri Léon Lebesgue (Beauvais, Frankreich 1875 - Paris 1941)

[8] Diese Formulierung beruht auf folgendem Riemannschen Lemma: sei $f(t)$ eine Funktion von beschränkter Variation, die in einem endlichen oder unendlichen Bereich (a, b) integrierbar ist. Beim Übergang $|\omega| \to \infty$ strebt dann die Funktion $F(\omega) := \int_a^b f(t) e^{-j\omega t} dt$ gegen null mindestens so schnell wie die Funktion $1/\omega$. D.h. $F(\omega = O(\frac{1}{\omega})$ für $|\omega| \to \infty$.

[9] Eine Funktion $f(t)$ ist von beschränkter Variation in einem Intervall (a, b), wenn sie in (a, b) eine Kurve mit endlicher Länge repräsentiert. Das bedeutet, es existiert eine Zahl M, so dass für *jede* Unterteilung $a < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < b$ die Ungleichung

$$|f(t_1) - f(a)| + |f(t_2) - f(t_1)| + ... + |f(b) - f(t_{n-1})| < M$$

gilt.

[10] Die hierzu äquivalenten Bedingungen für Betrag und Winkel lauten

$$\left|\breve{f}(j\omega)\right| = \left|\breve{f}(-j\omega)\right| \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \quad .$$

[11] Leonhard Euler (Basel 1707 - Sankt Petersburg, Russland 1783)

- **Gerade (ungerade) Funktionen $f(t)$ und $\breve{f}(j\omega)$.** Falls $f(t)$ eine *gerade* (*ungerade*) Funktion ist, dann ist die Spektralfunktion $\breve{f}(j\omega)$ ebenfalls eine *gerade* (*ungerade*) Funktion und umgekehrt:

$$f(t) = f(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad \breve{f}(j\omega) = \breve{f}(-j\omega) \tag{2.14}$$

bzw.

$$f(t) = -f(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad \breve{f}(j\omega) = -\breve{f}(-j\omega). \tag{2.15}$$

Die zugehörigen Korrespondenzen lauten im "geraden Fall"

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \breve{f}(j\omega)\,\cos(\omega t)d\omega \qquad \text{bzw.} \qquad \breve{f}(j\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\,\cos(\omega t)dt \tag{2.16}$$

und im "ungeraden Fall"

$$f(t) = j\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \breve{f}(j\omega)\,\sin(\omega t)d\omega \quad \text{bzw.} \quad \breve{f}(j\omega) = -j\cdot 2\int_0^\infty f(t)\,\sin(\omega t)dt\ . \tag{2.17}$$

- **Zerlegung von $f(t)$ bzw. $\breve{f}(j\omega)$ in einen geraden und einen ungeraden Anteil.** Die eben erwähnten Eigenschaften werden nun ausgenutzt, um eine prägnante Darstellung einer allgemeinen Funktion $f(t)$ zu erhalten: eine Funktion $f(t)$ ist immer als Summe einer *geraden* $f_g(t) := \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$ und einer *ungeraden* Funktion $f_u(t) := \frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$ eindeutig darstellbar

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)\ . \tag{2.18}$$

Für die zugehörige Fourier-Transformierte gilt dann

$$\begin{aligned}\breve{f}(j\omega) &= \mathcal{F}\left\{f_g(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{f_u(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\breve{f}(j\omega)+\breve{f}(-j\omega)\right] + \frac{1}{2}\left[\breve{f}(j\omega)-\breve{f}(-j\omega)\right].\end{aligned}$$

Durch Einführung des *geraden* Anteils $\breve{f}_g(j\omega) := \frac{1}{2}\left[\breve{f}(j\omega)+\breve{f}(-j\omega)\right]$ und des *ungeraden* Anteiles $\breve{f}_u(j\omega) := \frac{1}{2}\left[\breve{f}(j\omega)-\breve{f}(-j\omega)\right]$ erhalten wir die analoge Darstellung von $\breve{f}(j\omega)$ als Summe einer *geraden* und einer *ungeraden* Spektralfunktion

$$\breve{f}(j\omega) = \breve{f}_g(j\omega) + \breve{f}_u(j\omega). \tag{2.19}$$

Damit lauten die Korrespondenzen für den *geraden* Anteil

$$f_g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \breve{f}_g(j\omega)\,\cos(\omega t)d\omega \quad \text{bzw.} \quad \breve{f}_g(j\omega) = 2\int_0^\infty f_g(t)\,\cos(\omega t)dt \tag{2.20}$$

und für den *ungeraden* Anteil

$$f_u(t) = j\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \breve{f}_u(j\omega)\,\sin(\omega t)d\omega \quad \text{bzw.} \quad \breve{f}_u(j\omega) = -j\cdot 2\int_0^\infty f_u(t)\,\sin(\omega t)dt. \tag{2.21}$$

- **Real- und Imaginärteil der Spektralfunktion einer *reellen* Funktion** $f(t)$. Aus obigen Beziehungen folgt das bemerkenswerte Resultat, dass die Zerlegung einer *reellen* Funktion $f(t)$ in einen geraden und einen ungeraden Anteil der Zerlegung von $\breve{f}(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil entspricht

$$\breve{f}_g(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} = R(\omega) \text{ und } \qquad \breve{f}_u(j\omega) = j \cdot \mathrm{Im}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} = j \cdot I(\omega)\ . \qquad (2.22)$$

- **Faltungssatz im Zeit- bzw. im Frequenzbereich.** Wir betrachten zwei Funktionen der Zeit $g(t)$ und $h(t)$ und die zugehörigen Fourier-Transformierten $\breve{g}(j\omega)$ und $\breve{h}(j\omega)$.

  Unter der *Faltung der Zeitfunktionen* $g(t)$ und $h(t)$ versteht man die Funktion $f(t)$, die - unter Benutzung des sogenannten Faltungsproduktes $g(t) * h(t)$ - gemäß

$$f(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau =: g(t) * h(t) \qquad (2.23)$$

  definiert ist. Die Fourier-Transformierte $\breve{f}(j\omega)$ dieser Zeitfunktion ist gleich dem Produkt $\breve{f}(j\omega) = \breve{g}(j\omega) \cdot \breve{h}(j\omega)$ oder

$$\mathfrak{F}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} = \mathfrak{F}\left\{g(t) * h(t)\right\} = \breve{g}(j\omega) \cdot \breve{h}(j\omega). \qquad (2.24)$$

  Diese Beziehung ist fundamental bei der Beschreibung des Übertragungsverhaltens linearer zeitinvarianter Systeme.

  Unter der *Faltung der Frequenzfunktionen* $\tilde{g}(j\omega)$ und $\tilde{h}(j\omega)$ versteht man die Funktion $\tilde{f}(j\omega)$, die - unter Benutzung des sogenannten Faltungsproduktes $\tilde{g}(j\omega) * \tilde{h}(j\omega)$ - gemäß

$$\tilde{f}(j\omega := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(j\varpi)\tilde{h}(j\omega - j\varpi)d\varpi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(j\omega - j\varpi)\tilde{h}(j\varpi)d\varpi =: \tilde{g}(j\omega) * \tilde{h}(j\omega) \quad (2.25)$$

  definiert ist. Unter der Voraussetzung, dass $\tilde{g}(j\omega)$ bzw. $\tilde{h}(j\omega)$ die Fourier-Transformierten $\breve{g}(j\omega)$ bzw. $\breve{h}(j\omega)$ der Zeitfunktionen $g(t)$ bzw. $h(t)$ sind, gilt folgende Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \breve{g}(j\varpi)\breve{h}(j\omega - j\varpi)d\varpi = \frac{1}{2\pi}\breve{g}(j\omega) * \breve{h}(j\omega) = \mathfrak{F}\left\{g(t) \cdot h(t)\right\}.$$

  Es ist bemerkenswert, dass die komplizierte Faltungsoperation im Zeitbereich (bzw. Bildbereich) einer einfachen Multiplikation im Bildbereich (bzw. Zeitbereich) entspricht!

- **Parsevalsche[12] Gleichung.** Obige Relation (2.24) kann auch folgendermaßen angeschrieben werden

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{g}(j\omega)\cdot\check{h}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \ ,$$

aus der wir für $t = 0$ und unter Benutzung der komplexen Konjugation

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{g}(j\omega)\check{h}(j\omega)d\omega \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h^*(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{g}(j\omega)\check{h}^*(j\omega)d\omega$$

erhalten. Mit der Wahl $g(\tau) = h(\tau)$ erhält man die Beziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\check{g}(j\omega)|^2\,d\omega \ . \tag{2.26}$$

In der ingenieurwissenschaftlichen Fachliteratur wird dieser Zusammenhang als *Parsevalsche Gleichung* bezeichnet. Der Integralausdruck $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\,d\tau$ kann als *Energie* der Funktion $g(t)$, während $\frac{1}{2\pi}|\check{g}(j\omega)|^2$ als *spektrale Energiedichte* aufgefasst werden.

[12] Marc-Antoine Parseval (Rosièrs-aux-Salines, Frankreich 1755 - Paris 1836)

Kapitel 3

Reelle und rechtsseitige Funktionen

3.1 Grundlegendes

Wir betrachten nun *reelle und rechtsseitige* Funktionen, d.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$. Sie können durch ihren geraden bzw. ungeraden Teil beschrieben werden, nämlich $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$. Hierbei gelten die Beziehungen

$$f_g(t) = f_u(t) = \frac{1}{2} f(t) \qquad \text{für} \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$f_g(t) = -f_u(t) = \frac{1}{2}\, f(-t) \qquad \text{für} \quad t < 0, \tag{3.2}$$

sowie

$$f_g(0) = f(0) \;\text{ und }\; f_u(0) = 0 \qquad \text{für} \quad t = 0. \tag{3.3}$$

Aus (3.1) und (3.2) folgern wir durch Benutzen der Signumfunktion, dass zwischen geradem und ungeradem Beitrag die Beziehungen

$$f_g(t) = \; f_u(t) \cdot \operatorname{sign}(t) \tag{3.4}$$

bzw.

$$f_u(t) = \; f_g(t) \cdot \operatorname{sign}(t) \tag{3.5}$$

gelten. Aufgrund von (3.1) können wir zBsp. den ungeraden Beitrag $f_u(t)$ gemäß (2.21) in (2.20) einsetzen und erhalten

$$\breve{f}_g(j\omega) = 2\int_0^\infty \frac{j}{\pi}\int_0^\infty \breve{f}_u(j\varpi)\, \sin(\varpi t) d\varpi \cos(\omega t) dt = \frac{2j}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \breve{f}_u(j\varpi)\, \sin(\varpi t)\cos(\omega t) d\varpi dt$$

bzw. mit (2.22) die Darstellung des Realteils $R(\omega)$ mit Hilfe des Verlaufs des Imaginärteils $I(\omega)$

$$R(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty I(\varpi)\, \sin(\varpi t)\cos(\omega t) d\varpi dt. \tag{3.6}$$

Analog erhalten wir die Darstellung des Imaginärteils als Funktion des Verlaufs des Realteils

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty R(\varpi)\, \cos(\varpi t)\sin(\omega t) d\varpi dt. \tag{3.7}$$

Daraus geht hervor, dass gerader und ungerader Teil der Spektralfunktion voneinander abhängig sind. Mit anderen Worten: bei einer *reellen und rechtsseitigen* Funktion $f(t)$ kann der Realteil R durch den Imaginärteil I der Spektralfunktion

$$\breve{f}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = \breve{f}_g(j\omega) + \breve{f}_u(j\omega) \tag{3.8}$$

ausgedrückt werden und umgekehrt!

Es ist bemerkenswert, dass in der Netzwerktheorie solch ein Zusammenhang zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Admittanz eines idealen linearen RLC-Netzwerkes von Carson Anfang des 20. Jhdts festgestellt wurde[1].

Des Weiteren ist es nicht verwunderlich, dass eine *rechtsseitige reelle* Zeitfunktion $f(t)$ in Abhängigkeit vom Real- *oder* vom Imaginärteil ihrer Fourier-Transformierten $\breve{f}(j\omega)$ *allein* dargestellt werden kann. Unter Beachtung von (3.1), (3.2) und (2.20) erhalten wir die Beziehungen

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\,\cos(\omega t)d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I(\omega)\,\sin(\omega t)d\omega \qquad \text{für} \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Durch weitere Überlegungen erhält man eine - den Beziehungen (3.6) und (3.7) ähnliche - signifikante Darstellung der Abhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil der Spektralfunktion. Das sind in der Netzwerktheorie oder Signalverarbeitung die *Hilbert-Transformierten*

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi}d\varpi \quad \text{und} \quad I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega - \varpi}d\varpi \tag{3.10}$$

und in der Physik die daraus folgenden *Kramers-Kronig-Dispersionsrelationen*

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varpi \cdot I(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2}d\varpi \quad \text{und} \quad I(\omega) = -\frac{2}{\pi}\omega\int\limits_0^\infty \frac{R(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2}d\varpi \;. \tag{3.11}$$

Diese Integral-Relationen werden zur Erleichterung der Lesbarkeit sowie zum besseren Verständnis der vielfältigen Fachliteratur auf verschiedenen Wegen abgeleitet und durchleuchtet.

3.2 Kramers-Kronig-Dispersionsrelationen, Hilbert-Transformierte

3.2.1 Zugang aus der Perspektive der Funktionentheorie

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen basieren die oben angesprochenen Beziehungen zwischen Real- und Imaginärteil der Fourier-Transformierten einer reellen und rechtseitigen Funktion auf folgender Version der Cauchy-Formel für die Werte einer Funktion $\varphi(z)$ der

[1] John R. CARSON: *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus* (Kap. XI). McGraw-Hill Book Company. 1926

komplexen Variablen z *auf* einer Kontour: seien $\varphi(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ analytisch und γ eine einfach geschlossene Kurve, die samt ihrem Innengebiet in $\mathfrak{G}$ liegt und so durchlaufen wird, dass das Innengebiet links liegt - damit ist die sogenannte Umlaufzahl gleich 1. Für einen Punkt z_0 *auf* der Kontour γ gilt als Hauptwert-Version der Cauchy-Formel[2]

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{j\pi} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz. \tag{3.12}$$

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei nun die obere Halbebene, welche durch einen (oberen) Halbkreisbogen samt der reellen Achse charakterisiert wird. Diese Betrachtungsweise ist in mathematischen bzw. physikalischen Abhandlungen üblich. In der Signal- und Systemtheorie wird üblicherweise die rechte Halbebene betrachtet, die - aus Stabilitätsgründen - keine Pole der Übertragungsfunktion enthalten darf. Beide Betrachtunsgweisen sind äquivalent. Zur Auswertung des obigen Integrals (3.12) wird beim sogenannten *Hauptweg* die reelle Achse von $-\infty \rightarrow +\infty$ durchlaufen, so dass das Innengebiet links liegt. Es wird *vorausgesetzt*, dass die Funktion $\varphi(z)$ derart beschaffen ist, dass der obere Halbkreisbogen mit dem Radius R für den Integrand $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ mit *reellem* z_0 "harmlos" ist. Harmlos bedeutet, dass das Integral über den sogenannten *Hilfsweg* (Hilfsbogen) für $R \rightarrow \infty$ gegen null strebt. In diesem Zusammenhang ist es von substanzieller Bedeutung, dass beim Übergang $|z| \rightarrow \infty$ in der oberen Halbebene die Funktion $\varphi(z) \rightarrow 0$ strebt[3]. Damit verbleibt der Beitrag des Integrals auf dem Hauptweg - im vorliegenden Fall auf der reellen Achse - und wir erhalten, indem wir nun die reelle Variable mit ζ symbolisieren,

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \tag{3.13}$$

Zerlegt man obige Relation in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\varphi(\zeta_0)\} &= \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\{\varphi(\zeta)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\{\varphi(\zeta))\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + j \cdot \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\mathrm{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\{\varphi(\zeta_0)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Diese Relationen werden üblicherweise in folgender Form angeschrieben:

$$\mathrm{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta_0 - \zeta} d\zeta \tag{3.14}$$

[2] Siehe hierzu zBsp. Klaus JÄNICH: *Analysis für Physiker und Ingenieure.* (Kap. V: Der Residuenkalkül).

[3] Präziser formuliert: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$, so dass für alle Werte z mit der Eigenschaft $\mathrm{Im}\{z\} \geq 0$ und $|z| \geq R$ die Funktion $\varphi(z)$ die Ungleichung $|\varphi(z)| < \varepsilon$ erfüllt.

und

$$\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta_0)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta_0 - \zeta} d\zeta. \tag{3.15}$$

Mit deren Hilfe kann man auf der reellen Achse den Real- aus dem Imaginärteil einer Funktion ermitteln und umgekehrt. Dies ist besonders interessant in technischen Anwendungen, bei denen Real- bzw. Imaginärteil messbare physikalische Größen sind.

Obige uneigentliche Integrale (3.14) und (3.15) können bezüglich der Integrationsgrenzen folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\varphi(-\zeta)\}}{-\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\frac{-\operatorname{Im}\{\varphi(-\zeta)\}}{\zeta + \zeta_0} d\zeta + \frac{\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta - \zeta_0}\right] d\zeta.
\end{aligned}$$

Unter der *Voraussetzung*, dass der Imaginärteil eine ungerade Funktion[4] ist, d.h. $\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\} = -\operatorname{Im}\{\varphi(-\zeta)\}$, erhalten wir

$$\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}\left[\frac{1}{\zeta + \zeta_0} + \frac{1}{\zeta - \zeta_0}\right] d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}\,\frac{\zeta - \zeta_0 + \zeta + \zeta_0}{\zeta^2 - \zeta_0^2} d\zeta.$$

Damit ergibt sich der Realteil für einen (reellen) Wert ζ_0 aus dem Verlauf des Imaginärteils längs der positiven reellen Achse, d.h. für Werte ζ im Intervall $[0, \infty)$, gemäß

$$\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta_0)\} = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\zeta \cdot \operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta_0^2 - \zeta^2} d\zeta. \tag{3.16}$$

Aus (3.15) erhalten wir unter der *Voraussetzung* $\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta)\} = \operatorname{Re}\{\varphi(-\zeta)\}$ - d.h. der Realteil ist eine gerade Funktion - die analoge Beziehung

$$\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta_0)\} = \frac{2}{\pi}\zeta_0\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta_0^2 - \zeta^2} d\zeta. \tag{3.17}$$

Beziehungen (3.16) und (3.17) sind in der Physik als *Kramers-Kronig-Dispersionsrelationen* wohlbekannt[5].

[4] Dies ist bei vielen relevanten technischen Anwendungen der Fall. Man denke zBsp. an die erwähnten besonderen Eigenschaften des Real- bzw. Imaginärteils der Spektralfunktion einer *reellen* Funktion. Dieser Umstand kann sogar allgemeiner formuliert werden. Beschreibt man das Verhalten linearer zeitinvarianter Systeme mittels der Übertragungsfunktion $g(s)$, so ist diese in der Regel eine *reelle* Funktion der komplexen Variablen $s = \sigma + j\omega$. Unter Benutzung der komplexen Konjugation $(*)$ bedeutet dies $g(s^*) = g^*(s)$ oder: für reelle s-Werte ist $g(s)$ ebenfalls reell. Zerlegt man nun den zugehörigen Frequenzgang $g(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil $g(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$, so gilt: $R(\omega) = R(-\omega)$ und $I(\omega) = -I(-\omega)$.

[5] Relation (3.16) wurde von Kramers im Jahre 1927 angegeben. Hierbei betrachtete er den Real- und den

Bemerkung

Dieser erste beschriebene Zugang ist besonders interessant, wenn man mit der alternativen Definition der Fourier-Transformierten gemäß (2.7)

$$\breve{f}_+(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{+j\omega t} dt \qquad \text{und} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \breve{f}_+(j\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega$$

operiert. Bedenkt man, dass $f(t)$ für negative t-Werte verschwindet, so lautet das Fourier-Integral

$$\breve{f}_+(j\omega) := \int_0^{\infty} f(t)\, e^{+j\omega t} dt \qquad (\omega \ \ \text{reell}) \ . \tag{3.18}$$

Dieses erlaubt in geradliniger Weise, eine Erweiterung obiger Beziehung für *komplexe* Frequenzen und die *analytische Fortsetzung*[6] dieser Funktion auf die obere Halbebene durchzuführen. Hierzu führen wir unter Benutzung der (reellen) realen Frequenz ω die komplexe Frequenz Ω gemäß

$$\Omega := \omega + j\Psi \qquad \text{mit} \ \ \omega = \mathrm{Re}\{\Omega\} \tag{3.19}$$

ein und betrachten die Erweiterung von (3.18)

$$\breve{f}_+(j\Omega) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{+j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\Psi t}\, e^{+j\omega t} dt \ . \tag{3.20}$$

Mit der *Festlegung* $\Psi > 0$, ist die Exponentialfunktion $e^{-\Psi t} < 1$, d.h. dieser Term im Integrand kann nur eine Verbesserung der Konvergenz des (existenten) Integrals (3.18) zur Folge haben. Damit hat man die Funktion $\breve{f}_+(j\omega)$ in die obere (komplexe) Halbebene hinein fortgesetzt und bezeichnet die Funktion $\breve{f}_+(j\Omega)$ als die analytische Fortsetzung der Funktion $\breve{f}_+(j\omega)$.

3.2.2 Zugang aus der Perspektive der Fourier-Transformation

Bei diesem Zugang gehen wir von der eindeutigen Darstellung einer reellen und rechtsseitigen Funktion $f(t)$ als Summe eines geraden Anteils $f_g(t)$ und eines ungeraden Anteiles $f_u(t)$ aus. Hierbei sind diese Anteile - gemäß (3.4) und (3.5) - miteinander verknüpft. Es gilt

$$f_u(t) = \ f_g(t) \cdot \mathrm{sign}(t) \qquad , \qquad f_g(t) = \ f_u(t) \cdot \mathrm{sign}(t)$$

mit

$$f_g(0) = f(0) \quad \text{und} \quad f_u(0) = 0 \qquad \text{für} \quad t = 0$$

Imaginärteil einer frequenzabhängigen Größe $f(\omega)$ und schrieb $\mathrm{Re}\{f(\omega)\} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \mathrm{Im}\{f(\omega')\} d\omega'$. Es ist bemerkenswert, dass die von Kramers (1927) und Kronig (1926) angegebenen Dispersionsrelationen das Resultat physikalischer und nicht mathematischer Untersuchungen von Eigenschaften analytischer Funktionen sind! Sie spielen auch heutzutage eine große Rolle in Anwendungen der optischen Spektroskopie, der Akustik und der statistischen Physik.

[6] Siehe zBsp. Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* (Drittes Kapitel, §1).

sowie für die zugehörigen Spektralfunktionen - gemäß (3.8) -

$$\breve{f}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = \breve{f}_g(j\omega) + \breve{f}_u(j\omega) \ .$$

Es wird *vorausgesetzt*, dass $f(t)$ keine Singularitäten (δ-Funktionen) bei $t = 0$ aufweist. Das hat zur Folge, dass beim Übergang $\omega \to \infty$ die zugehörige Spektralfunktion nach null strebt, d.h. $\breve{f}(j\omega) \to 0$.

Wir berechnen nun die Fourier-Transformierten $\breve{f}_u(j\omega)$ und $\breve{f}_g(j\omega)$ und erhalten eine Relation zwischen dem Imaginärteil $I(\omega)$ und dem Realteil $R(\omega)$. Hierfür nutzen wir den Faltungssatz im Frequenzbereich. Unter Beachtung der Korrespondenz der Signumfunktion $\mathfrak{F}\{\mathrm{sign}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$ erhalten wir zBsp. für den *ungeraden* Anteil

$$\breve{f}_u(j\omega) = jI(\omega) = \mathfrak{F}\{\ f_g(t) \cdot \mathrm{sign}(t)\} = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

bzw. mit Hilfe von (2.25)

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi \ . \tag{3.21}$$

Für den *geraden* Anteil bekommen wir dann analog vorgehend

$$\breve{f}_g(j\omega) = R(\omega) = \mathfrak{F}\{\ f_u(t) \cdot \mathrm{sign}(t)\} = \frac{1}{2\pi} jI(\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

bzw.

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi \ . \tag{3.22}$$

Obige Beziehung (3.21) entspricht (3.15), während (3.22) das Analogon zur Beziehung (3.14) darstellt. Der jeweilige Vorzeichenunterschied ist - wie zuvor angeführt - durch die Benutzung des Fourier-Integrals in der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$ begründet. Es ist bemerkenswert, dass der Wert des Imaginär- bzw. Realteils für eine bestimmte Frequenz ω von dem *gesamten Verlauf* des Real- bzw. Imaginärteils[7] längs der $j\omega$-Achse abhängt! Des Weiteren werden gemäß (3.21) bzw. (3.22) durch die Gewichtungsfunktion $\frac{1}{\omega - \varpi}$ Werte des Real- bzw. Imaginärteils in der Nähe von ω besonders hervorgehoben. Die in (3.22) auftretende Integraltransformation wird als *Hilbert-Transformation* bezeichnet und man sagt, dass $R(\omega)$ und $I(\omega)$ ein *Hilbert-Transformations-Paar* bilden.

[7] Man beachte, dass falls $f(t)$ einen Beitrag $c \cdot \delta(t)$ enthielte, die Fourier-Transformierte $\breve{f}(j\omega)$ für $\omega \to \infty$ gegen den Wert c strebte. Nachdem dieser Term in $f_u(t)$ nicht enthalten ist, gibt die Relation (3.22) nur den δ-freien Beitrag $\breve{f}_g(j\omega) - \breve{f}(\infty) = \breve{f}_g(j\omega) - c$ wieder. Bei Vorhandensein einer δ-Funktion gilt für den Realteil $R(\omega) = c + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi$.

Zur Hilbert-Transformation

Diese Transformation ist ein Standardwerkzeug der Signal- und Systemtheorie. Hierbei betrachtet man eine reelle Funktion $f(\xi)$ in der reellen Variablen ξ und definiert deren Hilbert-Transformierte $Hf(x)$ - für reelle Werte x - durch den Hauptwert des Integrals[8]

$$Hf(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f\ (\xi)}{x-\xi}d\xi \ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{f\ (-\xi)}{x+\xi} + \frac{f\ (\xi)}{x-\xi}\right] d\xi\ . \tag{3.23}$$

Sei nun die Funktion g durch

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f\ (\xi)}{x-\xi}d\xi \tag{3.24}$$

definiert, dann besteht zwischen f und g der besondere Zusammenhang

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g\ (\xi)}{x-\xi}d\xi \tag{3.25}$$

und die Funktionen bilden ein Hilbert-Transformations-Paar. Dieser Zusammenhang kann mit Hilfe des Faltungssatzes im Zeitbereich der Fourier-Transformation und der Korrespondenz $\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \frac{1}{j}\mathrm{sign}(\omega)$ leicht gezeigt werden. Unter Benutzung gemäß (3.23) der Schreibweise $Hf(x)$ für die Operation "Hilbert-Transformation" können die Beziehungen (3.24) und (3.25) der Funktionen f und g prägnant formuliert werden: wenn $Hf(x) = g(x)$ gilt, dann gilt $Hg(x) = -f(x)$. Daraus folgt die sogenannte Inversionsformel

$$H^2 f(x) := H(Hf)(x) = -f(x)$$

und man spricht von der Iterationseigenschaft der Hilbert-Transformation. Eine wichtige Anwendung der Hilbert-Transformation in der Signalverarbeitung ist die spezielle Signalklasse der sogenannten *analytischen Signale* $f_+(t)$. Zwischen einer reellen Funktion $f(t)$ mit der Fourier-Transformierten $\check{f}(j\omega)$ und dem zugehörigen analytischen Signal besteht der Zusammenhang

$$f_+(t) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \check{f}(j\omega)e^{j\omega t}dt = f(t) + jHf(t) = f(t) + jg(t),$$

wobei Real- und Imaginärteil dieses komplexen(!) Signals ein Hilbert-Transformations-Paar

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau \quad \text{und} \quad f(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

[8] Historisch betrachtet stammt diese Definition nicht von Hilbert. Er entwickelte für eine im Einheitskreis analytische Funktion zwei Integralgleichungen, die deren Real- und Imaginärteil verbinden. Es war G.H. Hardy, der später obige Definition angab und - in Anerkennung von Hilberts Verdiensten - diese Bezeichnung prägte.

bilden. Betrachtet man ferner die Fourier-Transformierte des analytischen Signals, so erhält man

$$\mathfrak{F}\{f_+(t)\} = \mathfrak{F}\{f(t) + jHf(t)\} = \check{f}(j\omega) + j\mathfrak{F}\{Hf(t)\} = \check{f}(j\omega) + \text{sign}(\omega)\mathfrak{F}\{Hf(t)\}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f_+(t)\} &= 2\check{f}(j\omega) \quad \text{für } \omega > 0 \\ &= 0 \qquad\quad\; \text{für } \omega < 0.\end{aligned}$$

D.h. die Fourier-Transformierte $\mathfrak{F}\{f_+(t)\}$ besitzt *keine* Spektralanteile für *negative* Frequenzen ω.

Eine Umformulierung

Obige Beziehungen können bezüglich der Integrationsgrenzen umgeformt werden, wenn man bedenkt, dass bei einer *reellen* Funktion $f(t)$ der Realteil $R(\omega)$ eine *gerade* und der Imaginärteil $I(\omega)$ eine *ungerade* Funktion von ω ist, d.h. $R(\omega) = R(-\omega)$ und $I(\omega) = -I(-\omega)$. Damit erhalten wir für den Realteil

$$\begin{aligned}R(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{-I(-\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{-I(\varpi)}{\omega + \varpi} d\varpi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi\end{aligned}$$

bzw.

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\varpi \cdot I(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2} d\varpi. \tag{3.26}$$

Analog verfahrend erhalten wir die Darstellung für den Imaginärteil

$$I(\omega) = -\frac{2}{\pi}\omega \int_{0}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2} d\varpi\ . \tag{3.27}$$

Ein spartanischer Zugang

Dieser basiert auf elementaren Grundkenntnissen der Fourier-Transformation. Der Kniff besteht darin, $f(t)$ raffiniert anzuschreiben: multipliziert man $f(t)$ mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$, so ändert sich diese - natürlich - nicht: $f(t) = f(t) \cdot \sigma(t)$. Wir ermitteln nun die Fourier-Transformierte $\check{f}(j\omega) = \mathfrak{F}\{f(t) \cdot \sigma(t)\}$ unter Beachtung des Faltungssatzes im Frequenzbereich und der Korrespondenz $\mathfrak{F}\left\{\sigma(t)\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left\{f(t)\cdot\sigma(t)\right\} &= \frac{1}{2\pi}\breve{f}(j\omega) * \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(j\varpi)\left[\frac{1}{j\omega - j\varpi} + \pi\delta(\omega-\varpi)\right]d\varpi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\breve{f}(j\varpi)\frac{1}{j\omega - j\varpi}d\varpi + \frac{1}{2}\breve{f}(j\omega),
\end{aligned}$$

bzw.

$$\breve{f}(j\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\breve{f}(j\varpi)}{j}\frac{1}{\omega-\varpi}d\varpi.$$

Mit Hilfe von $\breve{f}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ bekommen wir

$$R(\omega) + jI(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\varpi) + jI(\varpi)}{j}\frac{1}{\omega-\varpi}d\varpi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{I(\varpi)}{\omega-\varpi}d\varpi + j\frac{-1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\varpi)}{\omega-\varpi}d\varpi$$

und daraus den besonderen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Spektralfunktion einer reellen und rechtsseitigen Funktion

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{I(\varpi)}{\omega-\varpi}d\varpi \qquad \text{bzw.} \quad I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\varpi)}{\omega-\varpi}d\varpi\ . \tag{3.28}$$

3.3 Ein fundamentales Äquivalenztheorem

Entscheidend bei der Herleitung der Beziehungen (3.14) $\operatorname{Re}\left\{\varphi(z_0)\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$ und (3.15) $\operatorname{Im}\left\{\varphi(\zeta_0)\right\} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta)\}}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$ - die die innere Bindung zwischen Real- und Imaginärteil der holomorphen Funktion $\varphi(z)$ manifestieren - war die Voraussetzung, dass die Funktion hinreichend schnell im Unendlichen abfällt. Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen dieses asymptotische Verhalten sichergestellt ist. Das nachfolgende Theorem - in der physikalischen Fachiteratur als "Theorem von Titchmarsh[9]" wohlbekannt - gibt solche Bedingungen an. Hierbei spielt die *quadratische Integrierbarkeit* oder - aufgrund der Parsevalschen Gleichung - die *Beschränkung der Energie* gewisser Funktionen eine Schlüsselrolle. Das Theorem ermöglicht eine Verbindung der Fourier-Transformierten reeller rechtsseitiger Funktionen mit den Hilbert-Transformierten.

[9] Edward Charles Titchmarsh (Newbury, England 1899 - Oxford 1963)

Theorem[10]**:** Unter der *Voraussetzung,* dass $f(j\omega)$ quadratisch integrierbar ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)^2|\, d\omega \leq K < \infty$, gilt Folgendes: erfüllt die Funktion $f(j\omega)$ eine der vier nachfolgenden Bedingungen, dann erfüllt sie alle vier.

1. Die inverse Fourier-Transformierte von $f(j\omega)$ ist eine rechtsseitige - auch kausal genannte - Funktion $f(t)$, d.h.
$$f(t) = 0 \qquad \text{für} \;\; t < 0. \tag{3.29}$$
2. Die Funktion $f(j\omega)$ ergibt sich beim Grenzübergang $\gamma \to 0_+$ als der Limes einer in der rechten Halbebene holomorphen Funktion $f(\gamma + j\omega)$
$$f(j\omega) = \lim_{\gamma \to 0_+} f(\gamma + j\omega), \tag{3.30}$$
die selbst längs *jeder* Parallelen zur imaginären Achse quadratisch integrierbar ist
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f(\gamma + j\omega)^2\right| d\omega \leq C < \infty \qquad\qquad (\gamma > 0)\ . \tag{3.31}$$
3. Der Realteil $R(\omega)$ von $f(j\omega)$ ergibt sich aus dem Verlauf des Imaginärteils $I(\omega)$ von $f(j\omega)$ gemäß
$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi\ . \tag{3.32}$$
4. Der Imaginärteil $I(\omega)$ von $\breve{f}(j\omega)$ ergibt sich aus dem Verlauf des Realteils $R(\omega)$ von $f(j\omega)$ gemäß
$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi\ . \tag{3.33}$$

Bemerkungen:

Eine Fourier-Transformierte, die eine der obigen vier Bedingungen erfüllt, wird als kausale Transformation bezeichnet.

Aus der Beziehung (3.31) folgt für das asymptotische Verhalten
$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \{f(\gamma + j\omega)\} = 0 \qquad \text{mit } \gamma \geq 0.$$

Die Äquivalenzen 1 und 2 entsprechen einem Theorem[11] von Paley[12] und Wiener[13]. Die Äquivalenzen 1 und 3 bzw. 1 und 4 entsprechen dem Theorem von Marcel Riesz[14].

[10] Bei dem Theorem werden diverse, zu verschiedenen Zeipunkten erarbeitete mathematische Resultate zusammengeführt. Dieses ist keineswegs als Leistung einer einzelnen Person zu verstehen. Siehe hierzu Cecille LABUDA and Iwo LABUDA: *On the mathematics underlying dispersion relations.*

[11] Siehe zBsp. Walter RUDIN: *Real and Complex Analysis.* (Kapitel 19, Holomorphic Fourier Transforms, Theorem 19.2).

[12] Raymond Edward Alan Christopher Paley (Bournemouth, England 1907 - Fossil Mountain, Kanada 1933)

[13] Norbert Wiener (Columbia, USA 1894 - Stockholm, Schweden 1964)

[14] Marcel Riesz (Györ, Ungarn 1886 - Lund, Schweden 1969)

3.4 Das log-Integral-Theorem nach Wiener und Paley

In diesem Theorem[15] verwendet man einen vorgegebenen (nichtnegativen) *Amplitudenverlauf* $A(\omega)$ einer Frequenzfunktion und macht eine Aussage, ob eine Spektralfunktion $\breve{f}(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ mit rechtsseitiger (kausaler) Originalfunktion überhaupt existiert. Hierbei geht man von einer im Intervall $-\infty < \omega < \infty$ definierten reellen, nichtnegativen, nicht - in einem Teilintervall - identisch verschwindenden und quadratisch integrierbaren Funktion $A(\omega)$, d.h. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)d\omega \leq K < \infty$ aus. Unter diesen *Voraussetzungen* für $A(\omega)$ gilt:

Notwendig und *hinreichend* für die Existenz einer rechtsseitigen Funktion $f(t)$, deren Spektralfunktion $\breve{f}(j\omega)$ die Bedingung $\left|\breve{f}(j\omega)\right| = A(\omega)$ erfüllt, ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega \leq C < \infty \; . \tag{3.34}$$

Man beachte: falls die Funktion $A(\omega)$ obige Ungleichung (3.34) *nicht* erfüllt, so gibt es *keinen* Phasenverlauf $\varphi(\omega)$, so dass $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ eine kausale Transformation ist. Die Erfüllung obiger Ungleichung bei einer vorgegebenen Spektralfunktion $\breve{f}(j\omega)$ bedeutet *nicht*, dass die Zeitfunktion $\mathfrak{F}^{-1}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\}$ rechtsseitig ist.

Bemerkungen: Die Voraussetzung, dass $A(\omega)$ nicht identisch verschwindet, ist aufgrund von (3.34) verständlich. Gilt $A(\omega) = 0$ in einem Intervall, so wird in diesem Intervall $\ln A(\omega)$ unendlich und obiges Integral ist divergent. Ferner erahnt man aufgrund der Struktur von (3.34) die Eigenschaft von $A(\omega)$, dass beim Grenzübergang $\omega \to \infty$ die Funktion $A(\omega)$ langsamer als eine Expontialfunktion nach null strebt. Wählt man zBsp. $A(\omega) = e^{-|\omega|}$, so konvergiert obiges Integral nicht.

3.5 Fourier- versus Laplace-Integral

Wir betrachten das Fourier-Integral $\breve{f}(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}dt$ bzw. das Laplace-Integral $\bar{f}(s) := \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt$ einer reellen und rechtsseitigen Funktion $f(t)$ und wollen Bedingungen angeben, damit die Spektralfunktion $\breve{f}(j\omega)$ aus der Laplace-Transformierten $\bar{f}(s)$ und umgekehrt gewonnen werden kann.

3.5.1 $\bar{f}(s) \implies \breve{f}(j\omega)$ Ermittlung der Spektralfunktion anhand der Laplace-Transformierten

Wir betrachten - je nach Lage der $j\omega$-Achse in Bezug zum Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{s\} > \gamma$ des Laplace-Integrals - drei Fälle $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ und $\gamma = 0$.

[15] Raymond E. A. C. PALEY and Norbert WIENER: *Fourier Transforms in the Complex Domain.* (Kapitel 1, Theorem XII).

1. Gilt $\gamma > 0$, so liegt die $j\omega$-Achse *außerhalb* des Konvergenzbereiches des Laplace-Integrals; damit existiert die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t)$ nicht.

2. Gilt $\gamma < 0$, so liegt die $j\omega$-Achse *innerhalb* des Konvergenzbereiches des Laplace-Integrals; dadurch ergibt sich das Fourier- aus dem Laplace-Integral, indem man formal s durch $j\omega$ ersetzt
$$\breve{f}(j\omega) = \bar{f}(s = j\omega).$$
In solch einem Fall können etliche Regeln bzw. Korrespondenzen der einen Transformation *unmittelbar* auf die andere durch Ersatz der Variablen s bzw. $j\omega$ übertragen werden.

3. Im letzten Fall gilt $\gamma = 0$, d.h. das Laplace-Integral besitzt den Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{s\} > 0$. Das bedeutet, dass die $j\omega$-Achse *außerhalb* des Konvergenzbereiches liegt und mindestens ein singulärer Punkt von $\bar{f}(s)$ auf der $j\omega$-Achse liegt. Um vorliegende Zusammenhänge leicht zu erfassen, wird beispielhaft folgender einfacher Fall durchleuchtet: hierbei besitzt die Laplace-Transformierte zwei rein imaginäre Pole bei $s = \pm j\omega_0$
$$\bar{f}(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right)$$
und die zugehörige Originalfunktion
$$f(t) = \sigma(t)\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \sigma(t)\sin\omega_0 t\ .$$
Die Fourier-Transformierte dieser Funktion ergibt sich unter Beachtung der Korrespondenz[16]
$$\mathfrak{F}\left\{\sigma(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j\omega - j\omega_0}$$
zu
$$\begin{aligned}\breve{f}(j\omega) &= \frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j\omega - j\omega_0}\right] - \frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j\omega + j\omega_0}\right] \\ &= \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} + \frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]\end{aligned}$$
bzw.
$$\breve{f}(j\omega) = \bar{f}(s = j\omega) + j\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right]\ .$$
Die Laplace-Transformierte für Werte $s = j\omega$ gibt den δ-freien Beitrag der Spektralfunktion. Dieses Resultat kann für den Fall, dass $\bar{f}(s)$ mehrfache Singularitäten (Pole) auf der $j\omega$-Achse besitzt, verallgemeinert werden.

[16] Eine andere Berechnungsmöglichkeit wäre das sogenannte Modulations-Theorem zu benutzen: sei $\breve{f}(j\omega)$ die Fourier-Transformierte von $f(t)$, dann gilt $\mathfrak{F}\left\{f(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\} = \breve{f}(j\omega - j\omega_0)$. Daraus folgt mit Hilfe der Euler-Relation
$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\left[\breve{f}(j\omega - j\omega_0) + \breve{f}(j\omega + j\omega_0)\right] \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{F}\{f(t)\sin\omega_0 t\} = \frac{1}{2j}\left[\breve{f}(j\omega - j\omega_0) - \breve{f}(j\omega + j\omega_0)\right].$$

3.5.2 $\breve{f}(j\omega) \Longrightarrow \bar{f}(s)$ Ermittlung der Laplace-Transformierten anhand der Spektralfunktion

Aufgrund der Existenz des Fourier-Integrals $\breve{f}(j\omega)$ folgt, dass die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ für s-Werte mit $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ eine analytische Funktion in s ist. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem, ob $\breve{f}(j\omega)$ eine gegebene *analytische* Funktion in $j\omega$ ist:

Falls $\breve{f}(j\omega)$ *analytisch* ist, ergibt sich die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ aus der Fourier-Transformierten $\breve{f}(j\omega)$, indem man einfach $j\omega$ durch s ersetzt

$$\bar{f}(s) = \breve{f}(s) \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s \geq 0\}\,.$$

Anderenfalls kann die Laplace-Transformierte durch Auswertung einer Integralrelation berechnet werden. Das ist zBsp. der Fall, wenn der Realteil $R(\omega)$ oder der Imaginärteil $I(\omega)$ der Spektralfunktion vorliegt. Hierzu bilden wir für $\alpha > 0$ die Fourier-Transformierte der (reellen und rechtsseitigen) Funktion $\varphi(t) := \sigma(t)\, e^{-\alpha t} f(t)$ und erhalten

$$\mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \bar{f}(\alpha + j\omega)\ .$$

Das bedeutet, bei gegebener reeller Konstante α ist die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ - als Funktion von ω betrachtet - die Fourier-Transformierte von $\sigma(t)\, e^{-\alpha t} \cdot f(t)$. Unter Benutzung der Korrespondenz $\mathcal{F}\{\sigma(t)e^{-\alpha t})\} = \frac{1}{\alpha+j\omega}$ und mit Hilfe des Faltungssatzes im Frequenzbereich $\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \breve{f}_1(j\varpi)\breve{f}_2(j\omega - j\varpi) d\varpi$ ergibt sich zunächst die Beziehung

$$\mathcal{F}\left\{\sigma(t)e^{-\alpha t} \cdot f(t)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\breve{f}(j\varpi)}{\alpha + j\omega - j\varpi} d\varpi = \bar{f}(\alpha + j\omega)$$

bzw. mit $s = \alpha + j\omega$

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\breve{f}(j\varpi)}{s - j\varpi} d\varpi \qquad \text{für} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \tag{3.35}$$

Demnach kann die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ aus dem Verlauf der Spektralfunktion $\breve{f}(j\varpi)$ längs der imaginären Achse gewonnen werden.

Obige Beziehung kann clever umgeformt werden. Das vereinfacht in der Regel die Integralauswertung. Hierzu nutzt man die Zerlegung einer reellen und rechtsseitigen Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$. Hierbei gelten - wie schon erwähnt - besondere(!) Verknüpfungen zwischen geradem und ungeradem Beitrag sowohl der Zeitfunktionen

$$f_g(t) = \ f_u(t) = \frac{1}{2}\, f(t) \quad \text{für } t > 0 \qquad \text{und} \quad f_g(t) = -f_u(t) = \frac{1}{2}\, f(-t) \quad \text{für} \quad t < 0\ \ ,$$

als auch der zugehörigen Fourier-Transformierten

$$\breve{f}_g(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} = R(\omega) \qquad \text{und} \qquad \breve{f}_u(j\omega) = j\,\mathrm{Im}\left\{\breve{f}(j\omega)\right\} = jI(\omega).$$

Damit erhalten wir mit Hilfe von $f(t) = 2f_g(t)$ bzw. $\sigma(t)\, e^{-\alpha t} \cdot f(t) = \sigma(t)\, e^{-\alpha t} \cdot 2f_g(t)$ zunächst die Integralrelation

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\varpi)}{s - j\varpi} d\varpi \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{3.36}$$

bzw. nach einigen Umformungen unter Beachtung, dass der Realteil R eine gerade Funktion der Kreisfrequenz ist

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\varpi)}{s - j\varpi} \frac{s + j\varpi}{s + j\varpi} d\varpi \; = \frac{2}{\pi} s \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{R(\varpi)}{s^2 + \varpi^2} d\varpi \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \tag{3.37}$$

Das bedeutet, dass die Kenntnis von dem Verlauf des Realteils der Spektralfunktion auf der *positiven* imaginären Achse die Funktion $\bar{f}(s)$ in der rechten Halbebene festlegt!

Analog vorgehend erhalten wir - *vorausgesetzt* $f(t)$ weist keine Singularitäten bei $t = 0$ auf - unter Benutzung von $f(t) = 2f_u(t)$ bzw. $\sigma(t)\, e^{-\alpha t} \cdot f(t) = \sigma(t)\, e^{-\alpha t} \cdot 2f_u(t)$ die Relationen

$$\bar{f}(s) = \frac{j}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{s - j\varpi} d\varpi \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{3.38}$$

bzw.

$$\bar{f}(s) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varpi I(\varpi)}{s^2 + \varpi^2} d\varpi \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \tag{3.39}$$

Beispiel

Die Auswertung der Relationen (3.37) bzw. (3.39) wird bei der Ermittlung der Laplace-Transformierten der Funktionen $\sigma(t)\sin\omega_0 t$ und $\sigma(t)\cos\omega_0 t$ demonstriert. Hierzu betrachten wir die Funktion $f(t) = \sigma(t)e^{j\omega_0 t}$ bzw. ihre Fourier-Transformierte

$$\mathfrak{F}\left\{\sigma(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j\omega - j\omega_0} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + j\frac{1}{\omega_0 - \omega}.$$

Mit Hilfe der Euler-Relationen $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ und $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{F}\left\{\sigma(t)\cos\omega_0 t\right\} &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + j\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \pi\delta(\omega + \omega_0) - j\frac{1}{\omega_0 + \omega} \\ &= \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] + j\frac{2\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathfrak{F}\left\{\sigma(t)\cos\omega_0 t\right\} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] + j\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3.40}$$

und

$$\begin{aligned} j2\mathfrak{F}\{\sigma(t)\sin\omega_0 t\} &= \pi\delta(\omega-\omega_0)+j\frac{1}{\omega_0-\omega}-\pi\delta(\omega+\omega_0)+j\frac{1}{\omega_0+\omega} \\ &= \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]+j\frac{2\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathfrak{F}\{\sigma(t)\sin\omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}-j\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]. \tag{3.41}$$

Im vorliegenden Fall können beide der abgeleiteten Relationen

$$\bar{f}(s) = \frac{2}{\pi}s\int_0^\infty \frac{R(\varpi)}{s+\varpi^2}d\varpi = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varpi I(\varpi)}{s+\varpi^2}d\varpi \qquad \text{für} \quad \operatorname{Re}\{s\}>0$$

benutzt werden. Es ist geschickt, zur Ermittlung von $\mathfrak{L}\{\sigma(t)\sin\omega_0 t\}$ den Imaginärteil von $\mathfrak{F}\{\sigma(t)\sin\omega_0 t\}$ und für $\mathfrak{L}\{\sigma(t)\cos\omega_0 t\}$ den Realteil von $\mathfrak{F}\{\sigma(t)\cos\omega_0 t\}$ zu benutzen, weil aufgrund der im Integrand enthaltenen δ-Funktionen die Integration ganz einfach ist. Es ergeben sich für die Sinusfunktion

$$\bar{f}(s) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varpi I(\varpi)}{s+\varpi^2}d\varpi = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varpi\cdot\left[-\frac{\pi}{2}\delta(\varpi-\omega_0)\right]}{s+\varpi^2}d\varpi = \frac{\omega_0}{s+\omega_0^2}$$

und für die Cosinusfunktion

$$\bar{f}(s) = \frac{2}{\pi}s\int_0^\infty \frac{R(\varpi)}{s+\varpi^2}d\varpi = \frac{2}{\pi}s\int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}\delta(\varpi-\omega_0)}{s+\varpi^2}d\varpi = \frac{s}{s+\omega_0^2}.$$

Alternativer Lösungsweg: Hierbei benutzt man die Relationen (3.36) und (3.38). Für die Cosinusfunktion zBsp. ergibt sich für $\mathfrak{L}\{\sigma(t)\cos\omega_0 t\}$ anhand

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{R(\varpi)}{s-j\varpi}d\varpi \qquad \text{für} \quad \operatorname{Re}\{s\}>0$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{R(\varpi)}{s-j\varpi}d\varpi \quad = \bar{f}(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]}{s-j\varpi}d\varpi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{s}{s+\omega_0^2}. \end{aligned}$$

3.6 Übertragungsmaß, minimalphasige Systeme

Wie in der Einführung erwähnt, ist die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines kausalen linearen Systems eine reelle und rechtsseitige Funktion. Wir *setzen nun voraus*, dass sie δ-frei ist und daher keine Singularitäten bei $t = 0$ aufweist sowie dass ihre Fourier-Transformierte $\breve{g}(j\omega)$ existiert. Damit ist auch ihre Laplace-Transformierte $\bar{g}(s)$ für $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ existent. Zwischen Real- und Imaginärteil von $\breve{g}(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$ besteht der - wunderbare - Zusammenhang

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varpi \cdot I(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2} d\varpi \tag{3.42}$$

bzw.

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega - \varpi} d\varpi = -\frac{2}{\pi} \omega \int\limits_{0}^{\infty} \frac{R(\varpi)}{\omega^2 - \varpi^2} d\varpi \ . \tag{3.43}$$

Für die Praxis ist erfahrungsgemäß eine Beziehung zwischen Betrag und Winkel von $\breve{g}(j\omega)$ von größerer Bedeutung als ein Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Spektralfunktion. Um solch eine Beziehung aufzustellen, betrachtet man Real- und Imaginärteil des sogenannten Übertragungsmaßes $\Gamma(j\omega)$

$$\Gamma(j\omega) = \mathrm{Re}\{\Gamma(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{\Gamma(j\omega)\} =: A(\omega) + jB(\omega)\ , \tag{3.44}$$

das anhand

$$\breve{g}(j\omega) =: e^{-\Gamma(j\omega)} \tag{3.45}$$

definiert wird. Unter Verwendung der Begriffe *Dämpfung* $A(\omega)$ für den Realteil und *Phase* $B(\omega)$ für den Imaginärteil von $\Gamma(j\omega)$ gilt dann

$$\breve{g}(j\omega) = e^{-\Gamma(j\omega)} = e^{-A(\omega) - jB(\omega)}\ . \tag{3.46}$$

Durch Benutzung des Logarithmus einer Funktion ergibt sich eine zu $\breve{g}(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$ analoge Darstellung

$$\ln \breve{g}(j\omega) = \ln e^{-\Gamma(j\omega)} = -\Gamma(j\omega) = -A(\omega) - jB(\omega)\ . \tag{3.47}$$

Damit erhalten wir für Dämpfung und Phase die Gleichungen

$$A(\omega) = -\ \ln|\breve{g}(j\omega)| = \ln \frac{1}{|\breve{g}(j\omega)|} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|\breve{g}(j\omega)|^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{3.48}$$

und

$$B(\omega) = -\mathrm{arc}\{\breve{g}(j\omega)\} = -\arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}\ . \tag{3.49}$$

Nachdem $R(\omega)$ eine gerade und $I(\omega)$ eine ungerade Funktion von ω ist, folgt aus (3.48) und (3.49), dass die Dämpfung eine gerade und die Phase eine ungerade Funktion der Kreisfrequenz ist

$$A(\omega) = A(-\omega) \quad \text{und} \quad B(\omega) = -B(-\omega)\ . \tag{3.50}$$

Bei der Entwicklung einer Beziehung zwischen $A(\omega)$ und $B(\omega)$ muss man Folgendes beachten:

- Relation (3.46) bzw. (3.49) ist mehrdeutig. Es gilt ja $\breve{g}(j\omega) = e^{-\Gamma(j\omega)-j2k\pi} = e^{-A(\omega)-jB(\omega)-j2k\pi}$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Die komplexe Zahl $\breve{g}(j\omega)$ hat (abzählbar) unendlich viele Logarithmen $\ln\breve{g}(j\omega) = -A(\omega) - jB(\omega) - j2k\pi$. Mit anderen Worten: die Umkehrfunktion $\ln\breve{g}(j\omega)$ ist bestimmt bis auf Vielfache von $j2\pi$.

- Falls die Funktion $\breve{g}(j\omega)$ Pole *oder* Nullstellen *auf* der imaginären Achse besitzt, so weist die Funktion $\Gamma(j\omega) = -\ln\breve{g}(j\omega)$ sogenannte logarithmische Singularitäten auf.

Zur Erinnerung: die Ermittlung o.a. Relationen (3.42) bzw. (3.43) zwischen $R(\omega)$ und $I(\omega)$ basierte auf der Eigenschaft der Rechtsseitigkeit der reellen Gewichtsfunktion. Im Gegensatz hierzu bedarf die Ermittlung einer Relation zwischen Dämpfung und Phase *zusätzlicher* Voraussetzungen.

Zunächst wird der mathematischen Einfachheit halber angenommen, dass $\breve{g}(j\omega = 0) > 0$ gilt[17]. Dadurch ist mit der Anweisung $B(0) = 0$ auch der Wert $\Gamma(j\omega = 0)$ festgelegt. Die Funktion $\Gamma(j\omega)$ wird nun eindeutig festgelegt, indem man fordert, dass die Phase $B(\omega)$ eine stetige Funktion von ω ist. Die Erfüllung dieser Forderung ist problemlos, solange keine Singularitäten auf der imaginären Achse existieren. Liegt nämlich eine Singularität bei $j\omega_0$ vor, so hat dies bei Variation der Kreisfrequenz im Intervall $(-\infty,\ +\infty)$ an der Stelle ω_0 eine *sprunghafte* Veränderung des Winkels um ein Vielfaches von π - je nach Ordnung der Singularität - zur Folge.

Untersucht man eine reelle Funktion $g(s) = e^{-\Gamma(s)}$ in der komplexen Variablen s für Werte $s = j\omega$ bzw. die zugehörige Dampfung $A(\omega)$ und Phase $B(\omega)$, um einen Zusammenhang zwischen diesen Größen zu ermitteln, so ist die Lage der Pole und der Nullstellen der Funktion $g(s)$ ausschlaggebend. Wir setzen nun - aus Stabilitätsgründen - voraus, dass $g(s)$ *keine* Pole mit positivem Realteil $\mathrm{Re}\{s\} > 0$, aber *einfache* Pole mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s\} = 0$ aufweisen darf. Damit verbleibt der Einfluß der Lage der Nullstellen in der komplexen s-Ebene zur Untersuchung, genauer formuliert: ob Nullstellen von $g(s)$ in der offenen rechten Halbebene $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ vorliegen.

Um diesen Umstand zu verstehen, betrachten wir eine rationale, reelle Funktion $g(s)$ in der komplexen Variablen s, deren Pole den eben angegebenen Voraussetzungen genügen, und die allerdings *Nullstellen* mit positivem Realteil aufweist, und untersuchen den Winkelverlauf $\mathrm{arc}\{g(j\omega)\}$ in Abhängigkeit von ω. Hierzu stellen wir $g(s)$ als Produkt einer Funktion $g_0(s)$, deren Pol- *und* Nullstellen *keinen positiven* Realteil besitzen, und einer sogenannten Allpassfunktion $g_\Sigma(s)$ dar. Letztere hat ausschließlich Nullstellen ν_i mit *positivem* Realteil und Pole $\lambda_i = -\nu_i^*$ mit *negativem* Realteil. Hierdurch gilt $g(s) = g_0(s)g_\Sigma(s)$ mit

$$|g(j\omega)| = |g_0(j\omega)| \quad \text{und} \quad |g_\Sigma(j\omega)| = 1 \qquad \text{für alle Werte von } \omega\ .$$

[17]Ist das bei einer betrachteten Funktion nicht der Fall, so reicht die Multiplikation dieser Funktion mit (-1) aus, um die gleiche Anfangssituation für die Funktion $\tilde{g}(j\omega) := -\breve{g}(j\omega)$ zu erhalten. Es gilt dann $\tilde{B}(\omega) = B(\omega) - (2k+1)\pi$, bzw. mit der einfachen Wahl $k = 0$ bzw. $k = -1$:

$$B(\omega) = \tilde{B}(\omega) \pm \pi \qquad \text{für } \omega \gtrless 0\ .$$

Der Einfachheit halber wird nachfolgend eine Funktion $g(s)$ mit einer einzigen reellen "rechten" Nullstelle betrachtet - eine Verallgemeinerung der Resultate ist relativ einfach -

$$g(s) = g_0(s)g_\Sigma(s) = g_0(s)\frac{\nu - s}{\lambda + s} \qquad \text{mit} \quad \nu > 0 \quad \text{und } \lambda = -\nu < 0 \ .$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} g(j\omega) &= e^{-\Gamma(j\omega)} = e^{-A(\omega)-jB(\omega)} = e^{-A_0(\omega)-jB_0(\omega)} \cdot e^{-A_\Sigma(\omega)-jB_\Sigma(\omega)} \\ &= e^{-[A_0(\omega)+A_\Sigma(\omega)]} \cdot e^{-j[B_0(\omega)+B_\Sigma(\omega)]} \ . \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung $g_\Sigma(j\omega) = e^{-A_\Sigma(\omega)-jB_\Sigma(\omega)}$ folgert man für die Dämpfung $A_\Sigma(\omega)$

$$A_\Sigma(\omega) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|g_\Sigma(j\omega)|^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\lambda + j\omega}{\nu - j\omega}\right|^2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\nu + j\omega}{\nu - j\omega}\right|^2 = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$$

und aus $g_\Sigma(j\omega) = 1 \cdot e^{-jB_\Sigma(\omega)} = \frac{\nu - j\omega}{-\nu + j\omega}$ für die Phase $B_\Sigma(\omega)$

$$B_\Sigma(\omega) = 2\arctan\frac{\omega}{\nu} \qquad \text{oder} \qquad \tan\frac{B_\Sigma(\omega)}{2} = \frac{\omega}{\nu}.$$

Die Phase ist demnach eine *streng monoton anwachsende* Funktion der Kreisfrequnz ω. Variiert man ω von $-\infty \to +\infty$, so verändert sich $B_\Sigma(\omega)$ von $-\pi \to +\pi$.

Die Gesamtphase beträgt $B(\omega) = B_0(\omega) + B_\Sigma(\omega)$. Eine Differentiation nach ω ergibt $\frac{d}{d\omega}B(\omega) = \frac{d}{d\omega}B_0(\omega) + \frac{d}{d\omega}B_\Sigma(\omega)$ bzw. aufgrund der strengen Monotonie von $B_\Sigma(\omega)$, d.h. $\frac{d}{dt}B_\Sigma(\omega) > 0$,

$$\frac{d}{d\omega}B(\omega) > \frac{d}{d\omega}B_0(\omega) \ . \tag{3.51}$$

Bei *gleichem* Verlauf der Dämpfung $A(\omega) = A_0(\omega)$ - für alle ω-Werte - ist der Phasenanstieg von $g(j\omega)$ in *jedem beliebigen* ω-Intervall *größer* als derjenige von $g_0(j\omega)$! Aus diesem Grund nennt man ein System, das durch $g_0(s)$ charakterisiert wird, *minimalphasig* und spricht von einer *minimalphasigen Funktion* $g_0(s)$. Man kann sagen: von allen Systemen, die identischen Verlauf $A(\omega)$ aufweisen, ist das minimalphasige durch den kleinsten Wert der Ableitung der Phase $\frac{d}{d\omega}B(\omega)$ charakterisiert[18]. Das bedeutet, dass in solch einem Fall *keine eindeutige* Relation zwischen Betrag und Winkel bzw. zwischen Dämpfung $A(\omega)$ und Phase $B(\omega)$ der Funktion $g(j\omega)$ existiert.

Dieses Resultat gilt auch für den Fall, dass $g(s)$ mehrfache evtl. komplexe Nullstellen mit *positivem* Realteil besitzt. Dies kann relativ leicht durch Betrachtung der Allpassfunktion $g_\Sigma(s) = \frac{\nu - s}{\lambda + s}\frac{\nu^* - s}{\lambda^* + s}$ mit den konjugiert komplexen "rechten" Nullstellen ν und ν^* eingesehen werden. Die Phase $B_\Sigma(\omega)$ ist eine *streng monoton anwachsende* Funktion der Kreisfrequenz ω. Variiert man nun ω von $-\infty \to +\infty$, so verändert sich $B_\Sigma(\omega)$ von $-2\pi \to +2\pi$.

In dem nachfolgenden Abschnitt wird für minimalphasige Systeme eine Relation - sie ist in praktischen Anwendungen von besonderer Bedeutung - zwischen Dämpfung und Phase erarbeitet.

[18] Die Ableitung $\frac{d}{d\omega}B(\omega)$ spielt in der Signalverarbeitung eine wichtige Rolle und hängt mit der sogenannten Laufzeit von Signalen zusammen.

3.7 Bode-Relationen

Wir betrachten eine rationale, reelle Funktion $g(s)$, die keine Pole für $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ aufweist[19], keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ besitzt - $g(s)$ ist also minimalphasig - und bei $s = \infty$ holomorph ist, d.h. sie ist durch eine Laurent[20]-Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=-N}^{\infty} a_\nu s^{-\nu}$ darstellbar, wobei N eine *endliche* Zahl ist. Unter diesen Voraussetzungen für $g(s)$ existiert eine *eindeutige* Relation zwischen der Dämpfung A und der Phase B, mit deren Hilfe aus dem Frequenzverlauf der Dämpfung der Wert der Phase für eine vorgegebene Kreisfrequenz ω_0 ermittelt werden kann[21]. Allerdings besitzt das inverse Problem *keine* eindeutige Lösung: der Wert der Dämpfung für eine bestimmte Frequenz ω_0 kann aus dem Verlauf der Phase nur bis auf eine additive Konstante K ermittelt werden[22]. Diese Resultate - aus dem Jahre 1945 - ermittelt zu haben sind das Verdienst von H. W. Bode. Es ist zu bemerken, dass in der Fachliteratur bei Benutzung des Terminus "Bode-Relation" die erstgenannte eindeutige Relation gemeint ist.

3.7.1 Ermittlung der Phase $B(\omega_0)$ aus dem Verlauf der Dämpfung $A(\omega)$

Zur Ermittlung der Beziehung wird der Cauchyche Integralsatz benutzt. Einfach formuliert besagt er, dass das geschlossene Integral einer im Gebiet $\mathfrak{G}$ analytischen Funktion $f(s)$ gleich null ist $\oint\limits_\gamma f(s)ds = 0$, wobei der Integrationsweg γ *keine* Singularitäten von $f(s)$ einschließen darf[23]. Zur Erinnerung: das eingeführte Übertragungsmaß $\Gamma(s)$ ist für $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ eine reguläre Funktion von s. Wir wählen

$$f(s) := \frac{\Gamma(s)}{s^2 + \omega_0^2} \qquad \text{mit} \quad g(s) = e^{-\Gamma(s)}, \tag{3.52}$$

wobei ω_0 eine beliebige reelle Zahl ist mit der Einschränkung, dass sich bei $s = \pm j\omega_0$ *keine* Singularitäten von $\Gamma(s)$ ergeben. Damit gilt nach Cauchy

$$\oint\limits_\gamma \frac{\Gamma(s)}{s^2 + \omega_0^2} ds = 0, \tag{3.53}$$

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ ist die rechte Halbebene, welche durch einen rechten Halbkreisbogen mit "unendlich großem" Radius R und die imaginäre Achse charakterisiert wird. Zur Bestimmung

[19] Das bedeutet ein durch $g(s)$ beschriebenes System ist asymptotisch stabil nach Lyapunow bzw. es besitzt die BIBO-Eigenschaft. Die Voraussetzung kann gelockert und *einfache* Pole auf der imaginären Achse können zugelassen werden. Damit läge - nur einfache - Stabilität nach Lyapunow vor. Diese Pole ergäben zwar logarithmische Singularitäten, die allerdings keine zusätzlichen mathematischen Einschränkungen mit sich bringen und keinen Einfluss auf das Ergebnis der nachfolgenden Untersuchungen haben.

[20] Pierre Alphonse Laurent (Paris 1813 - Paris 1854)

[21] Hendrik W. BODE: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* (Chapter 14.3. Phase Characteristic Corresponding to a Prescribed Attenuation Characteristic).

[22] Hendrik W. BODE: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* (Chapter 14.8. Attenuation Characteristic Corresponding to a Given Phase Characteristic).

[23] Siehe hierzu zBsp. Klaus JÄNICH: *Analysis für Physiker und Ingenieure.* (Kap. II: Komplexe Integration).

des Integrals wird beim Hauptweg die imaginäre Achse von $-\infty \to +\infty$ und beim Hilfsweg der Halbkreisbogen durchlaufen, so dass das Innengebiet rechts liegt. Entscheidend bei der Durchführung der Integration ist Folgendes: sowohl der Beitrag evtl. vorliegender logarithmischer Singularitäten auf dem Hauptweg als auch der Beitrag zum Integral auf dem Hilfsweg sind gleich null! Unter Verzicht der einzelnen nichttrivialen Rechenschritte an dieser Stelle ergibt die Auswertung obigen Integrals (3.53)

$$\frac{\pi}{2\omega_0}\left[\Gamma(j\omega_0) - \Gamma(-j\omega_0)\right] + j\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(j\omega)}{-\omega^2+\omega_0^2}d\omega = 0\ . \tag{3.54}$$

Benutzt man die Symmetrie-Eigenschaften von $\Gamma(j\omega)$ gemäß (3.50), so ergibt sich für die Differenz

$$\Gamma(j\omega_0) - \Gamma(-j\omega_0) = 2jB(\omega_0).$$

Nachdem $B(\omega)$ eine ungerade Funktion von ω ist, verschwindet das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega)}{-\omega^2+\omega_0^2}d\omega = 0$ und es verbleibt

$$B(\omega_0) = \frac{1}{\pi}\omega_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\ . \tag{3.55}$$

Diese Beziehung ermöglicht die Ermittlung der Phase B zu jedem Wert ω_0 der Kreisfrequenz mit Hilfe des Verlaufs der Dämpfung A für alle ω-Werte. Sie besitzt - es verwundert nicht - die gleiche Struktur, wie (3.43), die den Zusammenhang zwischen Realteil R und Imaginärteil I einer Frequenzfunktion manifestiert. Man erkennt, dass durch einfachen Ersatz von R durch A und I durch B in (3.43) die Relationen (3.55) bzw. (3.56) entstehen. Solch ein Zugang kann nach Bode - nicht gerade elementar - mathematisch begründet werden.

Nachdem $A(\omega)$ eine gerade Funktion ist, kann obige Beziehung zu

$$B(\omega_0) = \frac{2}{\pi}\omega_0 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \tag{3.56}$$

bzw.

$$\operatorname{arc}\{g(j\omega_0)\} = \frac{2}{\pi}\omega_0 \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln|g(j\omega)|}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega$$

umgeformt werden. In manchen Literaturstellen - zBsp. in der Originalarbeit von Bode im Jahre 1945 - wird eine alternative Formulierung angegeben. Man nutzt hierbei die Tasache, dass $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{-\omega^2+\omega_0^2}d\omega = 0$ gilt, wenn man das Integral als Hauptwert im Sinne von Cauchy betrachtet und schreibt

$$B(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{A(\omega)-A_0}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega\ . \tag{3.57}$$

Hierbei ist A_0 eine beliebige (reelle) Konstante, die man zwecks einfacher Auswertung des Integrals geeignet, zBsp. $A_0 = A(\omega_0)$, wählen kann.

Darstellung von $\Gamma(s)$ anhand des Verlaufs der Dämpfung $A(\omega)$

Unter der Voraussetzung, dass $g(s)$ keine Pole für $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ aufweist, minimalphasig ist - also keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ besitzt - und bei $s = \infty$ holomorph ist, gilt

$$\ln g(s) = -\frac{2}{\pi} s \int_0^\infty \frac{A(\bar{\omega})}{s^2 + \bar{\omega}^2} d\bar{\omega} \ .$$

Diese Beziehung ist das Analogon zu Relation (3.37) und kann auf die gleiche Art bewiesen werden. Die Integralrelation verdeutlicht, dass der Verlauf der Dämpfung auf der positiven imaginären Achse die Funktion $\ln g(s)$ in der rechten Halbebene festlegt.

Bemerkungen zur Durchführung der Integration (3.53)

Man beachte, dass

$$f(j\omega) = \frac{\Gamma(j\omega)}{-\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{A(\omega)}{-\omega^2 + \omega_0^2} + j\frac{B(\omega)}{-\omega^2 + \omega_0^2} =: f_g(j\omega) + j f_u(j\omega)$$

gilt. Der gerade Anteil ist eine Funktion der Dämpfung, während der ungerade Anteil von der Phase abhängt. Dies wird bei der Auswertung des Cauchy-Integrals ausgenutzt.

Auf dem Hauptweg:

Kommt man bei der Integration in die Nähe einer Singularität $j\psi$ auf der imaginären Achse, so wird diese durch einen Umweg auf einem "kleinen" Halbkreis um $j\psi$ in der rechten Halbebene umlaufen. Dadurch verläuft der Weg γ im Gebiet $\mathfrak{G}$.

Bei der Durchführung der Integration wird die Funktion $g(s)$ in der Nähe einer evtl. vorliegenden Singularität bei $j\psi$ der Ordnung k durch $g(s) \approx c(s - j\psi)^k$ approximiert, wobei c eine Konstante ist und $s - j\psi = \rho e^{j\phi}$ mit $\rho > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ gilt. Damit gilt $g(s) \approx c(s - j\psi)^k = c\rho^k e^{jk\phi}$. Der Beitrag zum Integral (3.53) auf dem "kleinen" Halbkreis mit dem Radius ρ, mit $ds = j\rho e^{j\phi} d\phi$ und dem Integrand

$$\ln\left(c\rho^k e^{jk\phi}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \phi^2}$$

beträgt

$$-j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{k \ln\rho + jk\phi + \ln c}{\omega_0^2 - \phi^2} e^{j\phi} d\phi.$$

Er verschwindet für $\rho \to 0$, da $\rho \ln \rho$ nach null strebt. Das bedeutet, dass evtl. vorliegende logarithmische Singularitäten *keinen* Beitrag zum Integral liefern.

In der Nähe der Pole, d.h. auf einem "kleinen" Halbkreis jeweils um $\pm j\omega_0$, gilt $s = \pm j\omega_0 + \rho e^{j\phi}$ mit $\rho > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$. Damit gilt für "kleine" Werte ρ: $s^2 + \omega_0^2 \approx \pm j2\omega_0\rho e^{j\phi}$. Daraus ergibt sich der Beitrag zum Integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(j\omega_0)}{j2\omega_0\rho e^{j\phi}} j\rho e^{j\phi} d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(-j\omega_0)}{-j2\omega_0\rho e^{j\phi}} j\rho e^{j\phi} d\phi = \frac{\pi}{2\omega_0}\left[\Gamma(j\omega_0) - \Gamma(-j\omega_0)\right]$$

Auf dem Hilfsweg:

Aufgrund der Voraussetzung, dass $g(s)$ durch eine Laurent-Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=-N}^{\infty} a_\nu s^{-\nu}$ mit endlichem N darstellbar ist, verschwindet auf dem Hilfsweg - also für $R \to \infty$ - der Beitrag zum Integral (3.53). Im Fall $N = \infty$ läge übrigens eine *wesentliche* Singularität der Funktion $g(s)$ vor!

Die Funktion $g(s)$ kann durch $g(s) \approx cs^N = cR^N e^{jN\phi}$ approximiert werden. Hierbei ist c eine Konstante und es gilt $s = Re^{j\phi}$ mit $R > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$. Der Beitrag zum Integral (3.53) auf dem "großen" Halbkreis vom Radius R mit $ds = jRe^{j\phi}d\phi$ und dem Integrand

$$\ln\left(cR^N e^{jN\phi}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - R^2 e^{2j\phi}}$$

beträgt dann

$$-j \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} R \frac{N \ln R + jN\phi + \ln c}{\omega_0^2 - R^2 e^{2j\phi}} e^{j\phi} d\phi = -j \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{N \ln R + jN\phi + \ln c}{\frac{1}{R}\omega_0^2 - Re^{2j\phi}} e^{j\phi} d\phi.$$

Für $R \to \infty$ verschwindet dieser Term, da $\frac{1}{R}\ln R$ nach null strebt.

3.7.2 Eine prägnante Umformulierung der Bode-Relation für die Phase

Ausgehend von der Beziehung (3.56) kann man nach einer Variablentransformation[24]

$$\omega = \omega_0 e^{\Omega} \qquad \text{bzw.} \qquad \Omega = \ln \frac{\omega}{\omega_0} \tag{3.58}$$

- d.h. einer logarithmischen Frequenzskalierung - und etlichen mathematischen Schritten, die Integralrelation folgendermaßen umschreiben

$$B(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Omega} A \cdot \ln\coth \frac{|\Omega|}{2} d\Omega \ . \tag{3.59}$$

Aus dieser Beziehung ist die logarithmische Repräsentation für ingenieurwissenschaftliche Anwendungen mit logarithmischen Frequenzkennlinien augenscheinlich. Die Phase $B(\omega_0)$ entspricht demnach dem mit der Funktion

$$\Delta(\Omega) := \ln\coth \frac{|\Omega|}{2} \left(= \ln \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0}\right) \ .$$

gewichteten Mittelwert der Steigung der Dämpfung. Man beachte, dass die Funktion $\Delta(\Omega)$ in der Nähe von $\omega = \omega_0$ logarithmisch unendlich wird. Ihr Verlauf ähnelt einer δ-Funktion an

[24] Hendrik W. BODE: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* (Chapter 14.5. Alternative Formula for the Relation between Loss and Phase).

der Stelle $\omega = \omega_0$. Man kann nämlich zeigen, dass eine der Beziehung $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega) d\Omega = 1$ ähnliche Relation

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \coth \frac{|\Omega|}{2} d\Omega = \frac{\pi^2}{2}$$

gilt. Damit ist der Steigungsverlauf der Dämpfung in der Umgebung von ω_0 ausschlaggebend. Auch wenn obige Relation für die Phase (3.59) komplizierter als die anfangs angegebene ist, so hat sie eine praktische Relevanz. Sie führt in regelungstechnischen Anwendungen unter Benutzung der wohlbekannten logarithmischen Kennlinien (Bode-Diagrammen) zu interessanten Erkenntnissen. Besonders erwähnenswert ist hierbei der Fall einer konstanten Steigung $\frac{d}{d\Omega} A = k$. Man erhält für die Phase den konstanten Wert

$$B(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k \cdot \ln \coth \frac{|\Omega|}{2} d\Omega = -k \frac{\pi}{2}. \tag{3.60}$$

Angenommen, die Steigung ist in einem hinreichend großen Intervall um ω_0 näherungsweise konstant, so kann die Phase bei $\omega = \omega_0$ durch obigen Wert approximiert werden. Als Faustregel betrachtet man in der Regelungstechnik das Intervall $\left[\frac{1}{10}\omega_0,\, 10\omega_0\right]$. Dieser Umstand ist bedeutend beim Entwurf von Regelkreisen nach dem Frequenzkennlinien-Verfahren[25]. Verlangt man zBsp. zur Erfüllung der BIBO-Eigenschaft eines Standardregelkreises nach dem vereinfachten Schnittpunktkriterium einen hinreichend großen Wert - ca. 60^0 - der sogenannten Phasenreserve $\Phi_r := L\left(j\omega_c\right) + \pi$, so darf der Betrag $|L(j\omega)|$ des Frequenzganges des offenen Kreises in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ω_c nicht zu schnell abfallen. Aufgrund von (3.56) bzw. (3.59) leuchtet sofort ein, dass beim Entwurf eines Standardregelkreises durch Manipulation des Frequenzganges $L(j\omega)$ des offenen Kreises keine beliebigen Wünsche, sondern diesbezügliche Kompromisse erfüllt werden können, da Betrag und Phase von $L(j\omega)$ *nicht* unabhängig voneinander vorgegeben werden können.

Zur Ermittlung der Relation (3.59)

Durch die Einführung der neuen Variablen Ω gemäß (3.59) $\omega = \omega_0 e^{\Omega}$ erhalten wir mit $d\omega = \omega_0 e^{\Omega} d\Omega$ unter Beachtung der neuen Grenzen $\omega = 0 \longleftrightarrow \Omega = -\infty$ und $\omega = \infty \longleftrightarrow \Omega = \infty$ und nach Verwendung der Bezeichnung $V(\Omega) = A(\omega_0 e^{\Omega}) = -\ln\left|g(j\omega_0 e^{\Omega})\right|$ für das Integral (3.56)

$$B(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\omega_0^2 e^{2\Omega} - \omega_0^2} \omega_0 e^{\Omega} d\Omega = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{e^{\Omega} - e^{-\Omega}} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\sinh \Omega} d\Omega.$$

[25] Siehe zBsp. Martin HORN, Nicolaos DOURDOUMAS: *Regelungstechnik.* (Kap. 10 Einschränkungen beim Entwurf).

Bei der Auswertung des Integrals $\hat{B}(\omega_0) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega$ spalten wir es zunächst auf

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega,$$

schreiben das erste Integral mit $\Omega = -w$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{V(-w)}{\sinh(-w)} (-dw) = -\int\limits_{0}^{\infty} \frac{V(-w)}{\sinh w} dw$$

um und erhalten

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{V(\Omega) - V(-\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega.$$

Im Integrand erscheint der *ungerade* Teil $V_u(\Omega) := \frac{1}{2}\left[V(\Omega) - V(-\Omega)\right]$ der Funktion $V(\Omega)$, d.h. $\hat{B}(\omega_0) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2V_u(\Omega)}{\sinh\Omega} d\Omega$. Nachdem $\frac{d}{d\Omega} \ln\coth\Omega = -\frac{2}{\sinh 2\Omega}$ gilt, erhalten wir die Gleichung

$$-\hat{B}(\omega_0) = \int\limits_{0}^{\infty} V_u(\Omega) \frac{d}{d\Omega} \ln\coth\frac{\Omega}{2} = V_u(\Omega) \ln\coth\frac{\Omega}{2}\bigg|_0^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dV_u(\Omega)}{d\Omega} \ln\coth\frac{\Omega}{2} d\Omega.$$

Zur Auswertung des Ausdrucks $V_u(\Omega) \ln\coth\frac{\Omega}{2}\big|_0^{\infty}$ approximiert man $\ln\coth\frac{\Omega}{2}$ in der Nähe von $\Omega = 0$ bzw. $\Omega = \infty$.

Für $\Omega \approx 0$ ergibt sich anhand

$$\coth\frac{\Omega}{2} = \frac{e^{\Omega}+1}{e^{\Omega}-1} \approx \frac{2}{\Omega} \quad \text{bzw.} \quad \ln\coth\frac{\Omega}{2} \approx \ln\frac{2}{\Omega} = -\ln\frac{\Omega}{2}$$

letztlich

$$V_u(\Omega) \ln\coth\frac{\Omega}{2}\bigg|_0 \approx -V_u(\Omega) \ln\frac{\Omega}{2}\bigg|_0.$$

Approximiert man die (ungerade) Funktion $V_u(\Omega)$ in der Nähe von Null durch $c\Omega$, so verschwindet der Beitrag $V_u(\Omega) \ln\coth\frac{\Omega}{2}\big|_0 \approx \lim_{\Omega\to 0}(c\Omega \ln\frac{\Omega}{2}) = 0$.

Für $\Omega \approx \infty$ ergibt sich anhand

$$\coth\frac{\Omega}{2} = \frac{1+e^{-\Omega}}{1-e^{-\Omega}} \approx (1+e^{-\Omega})^2$$

bzw.

$$\ln\coth\frac{\Omega}{2} \approx \ln(1+e^{-\Omega})^2 = 2\ln(1+e^{-\Omega}) \approx 2e^{-\Omega}.$$

Laut Voraussetzung besitzt $g(s)$ Tiefpassverhalten, damit gilt - unter Benutzung der Graddifferenz μ - für große ω-Werte $g(j\omega) \approx (j\omega)^{-\mu}$, und wir erhalten

$$\ln|g(j\omega)| \approx \ln\omega^{-\mu} = -\mu\ln\omega = -\mu\ln(\omega_0 e^{\Omega})$$

bzw.

$$V(\Omega)\ln\coth\frac{\Omega}{2}\bigg|^{\infty} \approx \lim_{\Omega\to\infty}\left[-\mu\ln(\omega_0 e^{\Omega})2e^{-\Omega}\right] = 0.$$

Das bedeutet, es verbleibt

$$\hat{B}(\omega_0) = \int_0^{\infty}\frac{dV_u(\Omega)}{d\Omega}\ln\coth\frac{\Omega}{2}d\Omega = \int_0^{\infty}\frac{dV(\Omega)-V(-\Omega)}{d\Omega}\ln\coth\frac{\Omega}{2}d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dV(\Omega)}{d\Omega}\ln\coth\frac{|\Omega|}{2}d\Omega\ .$$

3.7.3 Ermittlung der Dämpfung $A(\omega_0)$ aus dem Verlauf der Phase $B(\omega)$

Zur Ermittlung der Beziehung gehen wir analog zu den o.a. Ausführungen für die Phase vor. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(s) := \frac{\Gamma(s)}{s\,(s^2+\omega_0^2)} \qquad \text{mit} \quad g(s) = e^{-\Gamma(s)} \tag{3.61}$$

bei beliebiger reeller Zahl ω_0 und der Einschränkung, dass bei $s = \pm j\omega_0$ und $s = 0$ *keine* Singularitäten von $\Gamma(s)$ vorliegen. Damit gilt nach Cauchy

$$\oint_{\gamma}\frac{\Gamma(s)}{s\,(s^2+\omega_0^2)}ds = 0\ . \tag{3.62}$$

Der Integrationsweg γ wird durch einen rechten Halbkreisbogen mit "unendlich großem" Radius R um den Nullpunkt und die imaginäre Achse charakterisiert. Zur Auswertung des Integrals wird beim Hauptweg die imaginäre Achse von $-\infty \to +\infty$ und beim Hilfsweg der Halbkreisbogen so durchlaufen, dass das Innengebiet rechts liegt. Bei der Durchführung der Integration gilt wiederum Folgendes: sowohl der Beitrag evtl. vorliegender logarithmischer Singularitäten auf dem Hauptweg als auch der Beitrag zum Integral auf dem Hilfsweg sind gleich null! An dieser Stelle verzichten wir auf etliche nichttriviale Schritte bei der Auswertung obigen Integrals (3.62) beim Hauptweg und erhalten

$$j\frac{\pi}{\omega_0^2}\left[A(0)-A(\omega_0)\right] + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(j\omega)}{j\omega(-\omega^2+\omega_0^2)}j\,d\omega = 0 = j\frac{\pi}{\omega_0^2}\left[A(0)-A(\omega_0)\right] + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)+jB(\omega)}{\omega(-\omega^2+\omega_0^2)}d\omega\ .$$

Da $A(\omega)$ eine *gerade* Funktion von ω ist, verschwindet das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega(-\omega^2+\omega_0^2)}d\omega = 0$ und es verbleibt die Beziehung

$$A(\omega_0) - A(0) = -\frac{\omega_0^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\omega)}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)}d\omega\ . \tag{3.63}$$

Das Integral auf der rechten Seite ermöglicht bis auf eine Konstante(!) die Ermittlung der Dämpfung A zu jedem Wert ω_0 der Kreisfrequenz, falls der Verlauf der Phase B für alle ω-Werte bekannt ist.

Nachdem $B(\omega)$ eine ungerade Funktion ist, kann (3.63) zu

$$A(\omega_0) = A(0) - \frac{2\omega_0^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{B(\omega)}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega \tag{3.64}$$

umgeformt werden.

Bemerkungen zur Durchführung der Integration (3.62)

Man beachte, dass

$$f(j\omega) = \frac{\Gamma(j\omega)}{j\omega\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)} = \frac{B(\omega) - jA(\omega)}{\omega\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)} = \frac{B(\omega)}{\omega\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)} + j\frac{-A(\omega)}{\omega\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)} =: f_g(j\omega) + jf_u(j\omega)$$

gilt. Im Unterschied zum vorigen Fall hängt nun der gerade Anteil von der Phase ab, während der ungerade Teil eine Funktion der Dämpfung ist.

Auf dem Hauptweg:

Kommt man bei der Integration in die Nähe einer Singularität $j\psi$ auf der imaginären Achse, so wird diese durch einen Umweg auf einem "kleinen" Halbkreis um $j\psi$ in der rechten Halbebene umlaufen. Dadurch verläuft der Weg γ im Gebiet $\mathfrak{G}$.

Bei der Integration wird die Funktion $g(s)$ in der Nähe einer bei $j\psi$ vorliegenden Singularität der Ordnung k durch $g(s) \approx c(s - j\psi)^k$ beschrieben. Hierbei ist c eine Konstante und $s = j\psi + \rho e^{j\phi}$ mit $\rho > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$. Damit gilt $g(s) \approx c\rho^k e^{jk\phi}$. Der Beitrag zum Integral (3.62) auf dem *kleinen* Halbkreis mit dem Radius ρ, mit $ds = j\rho e^{j\phi} d\phi$ und dem Integrand

$$\frac{\ln\left(c\rho^k e^{jk\phi}\right)}{\left(j\psi + \rho e^{j\phi}\right)\left[\omega_0^2 + (j\psi + \rho e^{j\phi})^2\right]} \approx \frac{\ln\left(c\rho^k e^{jk\phi}\right)}{\psi(\omega_0^2 - \psi^2)}$$

beträgt *näherungsweise*

$$j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{k\ln\rho + jk\phi + \ln c}{\psi(\omega_0^2 - \psi^2)} e^{j\phi} d\phi.$$

Dieser Term verschwindet für $\rho \to 0$, da $\rho \ln \rho$ nach null strebt. Damit liefern evtl. vorliegende logarithmische Singularitäten *keinen* Beitrag zum Integral.

In der Nähe der rein imaginären Pole, d.h. auf einem "kleinen" Halbkreis um $\pm j\omega_0$ gilt $s = \pm j\omega_0 + \rho e^{j\phi}$ mit $\rho > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$. Damit gilt für "kleine" Werte ρ: $s(s^2 + \omega_0^2) \approx -2\omega_0^2 \rho e^{j\phi}$. Daraus ergibt sich der Beitrag zum Integral näherungsweise

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(j\omega_0)}{-2\omega_0^2 \rho e^{j\phi}} j\rho e^{j\phi} d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(-j\omega_0)}{-2\omega_0^2 \rho e^{j\phi}} j\rho e^{j\phi} d\phi = -j\frac{\pi}{2\omega_0^2}\left[\Gamma(j\omega_0) + \Gamma(-j\omega_0)\right] = -j\frac{\pi}{\omega_0^2} A(\omega_0)$$

In der Nähe des Pols bei $s = 0$, d.h. auf einem "kleinen" Halbkreis um den Nullpunkt gilt $s = \rho e^{j\phi}$ mit $\rho > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$. Damit gilt für "kleine" Werte ρ: $s(s^2 + \omega_0^2) \approx \omega_0^2 \rho e^{j\phi}$. Daraus ergibt sich der Beitrag zum Integral näherungsweise

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(j0)}{\omega_0^2 \rho e^{j\phi}} j\rho e^{j\phi} d\phi = j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Gamma(j0)}{\omega_0^2} d\phi = j\frac{\pi}{\omega_0^2}\Gamma(j0) = j\frac{\pi}{\omega_0^2}A(0).$$

Der Beitrag der drei Pole bei der Integration auf dem Hauptweg lautet dann

$$-j\frac{\pi}{\omega_0^2}A(\omega_0) + j\frac{\pi}{\omega_0^2}A(0) = j\frac{\pi}{\omega_0^2}\left[A(0) - A(\omega_0)\right].$$

Auf dem Hilfsweg:

Laut Voraussetzung ist $g(s)$ durch eine Laurent-Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=-N}^{\infty} a_\nu s^{-\nu}$ mit *endlichem* N darstellbar. Damit verschwindet auf dem Hilfsweg - also für $R \to \infty$ - der Beitrag zum Integral (3.53). Die Funktion $g(s)$ kann durch $g(s) \approx cs^N = c\rho^N e^{jN\phi}$ beschrieben werden. Hierbei ist c eine Konstante und es gilt $s = Re^{j\phi}$ mit $R > 0$ und $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$.Der Beitrag zum Integral (3.62) auf dem "großen" Halbkreis vom Radius R mit $ds = jRe^{j\phi}d\phi$ und dem Integrand

$$\ln\left(cR^N e^{jN\phi}\right)\frac{1}{Re^{j\phi}(\omega_0^2 - R^2 e^{2j\phi})}$$

beträgt dann näherungsweise

$$-j\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{N\ln R + jN\phi + \ln c}{(\omega_0^2 - R^2 e^{2j\phi})} d\phi \approx j\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{N\ln R + jN\phi + \ln c}{R^2 e^{2j\phi}} d\phi.$$

Für $R \to \infty$ verschwindet das Intergral, da der Term $\frac{1}{R}\ln R$ nach null strebt.

Eine alternative Beziehung zu (3.64)

Bei den Relationen (3.63) bzw. (3.64) benutzt man den Dämpfungswert für die Frequenz $\omega = 0$. Nach Bode kann eine zu (3.64) alternative Relation angegeben werden, bei der man den Wert der Dämpfung bei der Frequenz $\omega = \infty$ verwendet. Hierzu dienen nachfolgende Überlegungen.

Zunächst etwas Grundsätzliches: nach Bode kann Relation (3.56) für die Phase $B(\omega_0) = \frac{2}{\pi}\omega_0 \int\limits_0^\infty \frac{A(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$ dazu benutzt werden, um durch eine Analogiebetrachtung die Relation (3.64) für die Dämpfung auf elegantem Weg zu erhalten. Zur Erinnerung: (3.56) wurde mit Hilfe von

$$f(j\omega) := \frac{\Gamma(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} \qquad \text{mit} \quad \Gamma(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

abgeleitet. Hierbei wurde vorausgesetzt, das $\Gamma(j\omega)$ für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ analytisch ist. Das bedeutet, dass folgende Potenzreihen-Entwicklungen

$$\Gamma(j\omega) = A_0 + jB_0\omega + A_1\omega^2 + jB_1\omega^3 + ... \text{ und } \Gamma(j\omega) = A_\infty + jB_\infty\omega^{-1} + \bar{A}_1\omega^{-2} + j\bar{B}_1\omega^{-3} + ...$$

möglich sind. Bodes Idee besteht nun darin, $\Gamma(j\omega)$ durch die Funktion

$$\hat{\Gamma}(j\omega) := \frac{1}{j\omega}\left[\Gamma(j\omega) - A_0\right]$$

zu ersetzen und in Gedanken die Schritte zur Ableitung von (3.56) durchzuführen. Die neue Funktion lautet

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(j\omega) \quad : &= \frac{1}{j\omega}\left[\Gamma(j\omega) - A_0\right] = \frac{1}{j\omega}\left[A(\omega) - A_0 + jB(\omega)\right] = \frac{B(\omega)}{\omega} + j\frac{-A(\omega) + A_0}{\omega} \\ = &: \hat{A}(\omega) + j\hat{B}(\omega)\end{aligned}$$

mit der Potenzreihen-Entwicklung

$$\hat{\Gamma}(j\omega) = \hat{A}_0 + j\hat{B}_0\omega + \hat{A}_1\omega^2 + j\hat{B}_1\omega^3 + \ldots \quad .$$

Ersetzt man in (3.56) A durch $\hat{A}$ und B durch $\hat{B}$, so erhalten wir

$$\frac{-A(\omega_0) + A_0}{\omega_0} = \frac{2}{\pi}\omega_0 \int_0^\infty \frac{\frac{B(\omega)}{\omega}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$$

bzw. die schon abgeleitete Beziehung (3.64)

$$A(\omega) = A_0 - \frac{2\omega_0^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{B(\omega)}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega \ .$$

Des Weiteren kann man eine zu (3.64) *äquivalente* Beziehung ermitteln. Hierzu ersetzt man $\Gamma(j\omega)$ durch die Funktion $\hat{\Gamma}(j\omega) := j\omega\left[\Gamma(j\omega) - A_\infty\right]$ und führt - in Gedanken - die Schritte zur Ableitung von (3.56) durch. Die neue Funktion lautet

$$\tilde{\Gamma}(j\omega) := \frac{1}{j\omega}\left[\Gamma(j\omega) - A_\infty\right] = j\omega\left[A(\omega) - A_\infty + jB(\omega)\right] = -\omega B(\omega) + j\omega\left[A(\omega) - A_\infty\right] =: \tilde{A}(\omega) + j\tilde{B}(\omega)$$

mit der Potenzreihen-Entwicklung

$$\tilde{\Gamma}(j\omega) = \tilde{A}_0 + j\tilde{B}_0\omega^{-1} + \tilde{A}_1\omega^{-2} + j\tilde{B}_1\omega^{-3} + \ldots \quad .$$

Ersetzt man in (3.56) A durch $\tilde{A}$ und B durch $\tilde{B}$ so erhalten wir

$$\omega_0\left[A(\omega_0) - A_\infty\right] = \frac{2}{\pi}\omega_0 \int_0^\infty \frac{-\omega B(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$$

bzw.

$$A(\omega_0) = A_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega B(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega \ .$$

Kapitel 4

Appendix: Grundbegriffe der Funktionentheorie

Differentiation einer komplexer Funktion[1]

Wir betrachten eine komplexe Funktion $f(z)$ in einem (endlichen) Gebiet $\mathfrak{G}$ der z-Ebene mit $z = x + jy$. Spalten wir die Zuordnung $w = f(z)$ in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir

$$w = u + jv = \varphi(x, y) + j \cdot \psi(x, y),$$

wobei u und v reelle Funktionen der (reellen) Variablen x und y sind. Wir fassen nun einen Punkt z_0 in $\mathfrak{G}$ ins Auge und betrachten die komplex-lineare Approximation von f

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + h(z,\ z_0) \cdot |z - z_0|\ .$$

Hierbei ist a eine endliche Konstante und $h(z, z_0)$ hat die Eigenschaft

$$\lim_{z \to z_0} h(z,\ z_0) = h(z_0,\ z_0) = 0\ .$$

Daraus folgt für die Konstante a die Formel

$$a = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Man nennt a die komplexe Ableitung von f nach z im Punkt z_0 und sagt: f ist im Punkt z_0 komplex differenzierbar.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: Unter der *Voraussetzung* der komplexen Differenzierbarkeit im Punkt z_0 existieren die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) \ &: = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y), \quad \varphi_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y), \\ \psi_x(x, y) \ &: = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y) \quad \text{und} \quad \psi_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) \end{aligned}$$

[1] Siehe zBsp. Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* (Erstes Kapitel, §8).

und es gelten die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\varphi_x(x_0, y_0) = \psi_y(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \varphi_y(x_0, y_0) = -\psi_x(x_0, y_0) \ .$$

Das bedeutet, es existieren besondere Bindungen (Verknüpfungen) zwischen den Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$f_x(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(x, y) + j\psi(x, y)\right] \quad \text{und} \quad f_x(z) = \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(x, y) + j\psi(x, y)\right]$$

können sie - nach Riemann im Jahre 1857 - kompakt angeschrieben werden

$$j \cdot f_x(z_0) = f_y(z_0) \quad .$$

Holomorphe Funktion[2]*:* Falls die Funktion $f(z)$ in jedem Punkt aus dem (offenen) Gebiet $\mathfrak{G}$ komplex differenzierbar ist, so nennt man sie holomorph in $\mathfrak{G}$. In der Fachliteratur wird auch die Bezeichnung "analytische Funktion" bzw. "reguläre Funktion" verwendet[3].

Potenzreihe: Eine Potenzreihe um z_0 ist eine unendliche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit komplexen Koeffizienten a_ν. Der Einfachheit halber setzt man oft $z_0 = 0$ und untersucht die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Eine Übertragung von Ergebnissen auf den Fall $z_0 \neq 0$ erfolgt geradlinig. Es ist bemerkenswert, dass wenn die Reihe bei einem Wert z_1 konvergiert, sie - absolut und gleichmäßig - auf einer Kreisscheibe vom Radius R mit $0 < R < |z_1|$ konvergiert. Der betragsmäßig größte Wert von z, für den Konvergenz vorliegt, ergibt den Konvergenzradius ρ. Die Reihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises (mit dem Radius ρ) eine holomorphe Funktion, die gliedweise differenziert werden darf.

Laurent-Reihe: Eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{1} a_\nu (z - z_0)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(z - z_0)^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

nennt man Laurent-Reihe um den Punkt z_0. Die Theorie der Laurent-Reihen ist eine Theorie der Potenzreihen für Kreisringe. Erwähnenswert ist folgender Satz, in dem die Begriffe "holomorphe Funktion" und "Laurent-Reihe" verbunden werden[4]: Eine Funktion $f(z)$, die in einem Kreisring $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ um z_0 holomorph ist, läßt sich eindeutig in eine Laurent-Reihe um z_0 entwickeln. Diese ist im Inneren des Kreisringes gleichmäßig konvergent. Die in der Technik wohlbekannte Fourier-Reihe ist eine Laurent-Reihe um $z_0 = 0$. Hierbei ist es wesentlich, dass eine holomorphe *periodische* Funktion als eine solche Reihe angeschrieben werden kann.

---

[2] Siehe zBsp. Klaus JÄHNICH: *Analysis für Physiker und Ingenieure.* Kapitel II, Analytische Funktionen bzw. Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Zweites Kapitel, §1).

[3] Bei Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (drittes Kapitel, §3) findet man allerdings für die Bezeichnung "analytische Funktion" eine andere Definition.

[4] Siehe zBsp. Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Drittes Kapitel, §3, insbesondere Satz 6 bzw. 7).

Isolierte Singularität[5]**:** Bei vielen Anwendungen ist der Fall $\rho_1 = 0$ wichtig; d.h. die Funktion $f(z)$ ist in einer Umgebung von z_0 überall definiert und holomorph *außer* in z_0, wo sie "nicht regulär" sondern "singulär" ist. Man spricht dann von einer (schlichten) *isolierten* Singularität bei z_0. Es gilt Folgendes: ist z_0 eine endliche (isolierte) Singularität, so ist die Reihe konvergent *im* größten in z_0 punktierten Kreis - d.h. der Punkt z_0 ist aus der Kreisumgebung entfernt -, in dem $f(z)$ holomorph ist. Beträgt die isolierte Singularität $z_0 = \infty$, so ist sie konvergent *außerhalb* des kleinsten Kreises um den Nullpunkt, in dem $f(z)$ holomorph ist; d.h. unter einer Laurent-Reihe um den Punkt ∞ versteht man eine Reihe $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$, die außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt konvergiert.

Bei einer isolierten Singularität besteht die Laurent-Reihe aus einem Haupt- und einem Nebenteil. Der Hauptteil enthält alle Terme, die einzeln in z_0 singulär werden. Ist z_0 endlich, so gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=-\infty}^{1} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(z-z_0)^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \\ &\triangleq \quad \text{Hauptteil} \quad + \quad \text{Nebenteil} \ .\end{aligned}$$

Ist wiederum $z_0 = \infty$, so gilt

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{z^\nu} \triangleq \text{Hauptteil} \quad + \quad \text{Nebenteil} \ .$$

Bei holomorphen Funktionen gibt es drei Arten von isolierten Singularitäten. Deren Charakter wird folgendermaßen klassifiziert.

1. Verschwindet der Hauptteil

   $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(z-z_0)^\nu} = 0 \ , \quad \text{d.h.} \quad a_{-\nu} = 0 \quad \text{für } \nu = 1, ..., \infty \ ,$$

   so heißt z_0 eine *hebbare* Singularität. Es liegt im Grunde eine scheinbare Singularität vor, die durch eine nachträgliche Angabe des Funktionswertes von $f(z)$ an der Stelle z_0, nämlich $f(z_0) := a_0$, behoben wird und eine abgeänderte, im ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion ergibt. In diesem Fall wird die Laurent-Reihe zur Taylor[6]-Reihe.

2. Besitzt der Hauptteil *endlich* viele Glieder

   $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(z-z_0)^\nu} = \sum_{\nu=1}^{K} a_{-\nu} \frac{1}{(z-z_0)^\nu}, \qquad \text{d.h. } a_{-\nu} = 0 \quad \text{für} \quad K < \nu < \infty \quad ,$$

   so nennt man (die isolierte Singularität) z_0 einen *Pol* - oder nach Weierstraß[7] eine *außerwesentliche* Singularität - der Funktion $f(z)$ mit der Ordnung K. Es gilt Folgendes:

[5] Siehe zBsp. Reinhold REMMERT: *Funktionentheorie I.* (Kapitel 10).
[6] Brook Taylor (Edmonton, England 1685 - London 1731)
[7] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (Ostenfelde, Münsterland 1815 - Berlin 1897)

Der Punkt z_0 ist genau dann ein Pol von $f(z)$ der Ordnung K, wenn die Funktion $g(z) := (z - z_0)^K \cdot f(z)$ - bzw. $g(z) := z^{-K} \cdot f(z)$, falls $z_0 = \infty$ ist - in z_0 holomorph und verschieden von Null ist. Das Verhalten der Funktion in der Nähe eines Pols ist folgendermaßen charakterisiert: liegt ein *endlicher* Pol vor, so existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \neq z_0$ mit der Eigenschaft $|z - z_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(z) - f(z_0)| > \eta$ gilt

$$z \neq z_0 \ \text{ mit } \ |z - z_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(z) - f(z_0)| > \eta \ .$$

Liegt der Pol im *Unendlichen*, so existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes endliches z mit $|z| > \delta$ die Ungleichung $|f(z)| > \eta$ gilt

$$z \ \text{ mit } \ |z| > \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(z)| > \eta \ .$$

In der Nähe von z_0 verhält sich die Funktion $f(z)$ im Wesentlichen wie $a_{-K} \frac{1}{(z-z_0)^K}$. Man schreibt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Besitzt die Funktion $f(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ nur Pole, so nennt man sie *meromorph in* $\mathfrak{G}$, bzw. *meromorph* falls $\mathfrak{G}$ die endliche Ebene ist.

3. Besitzt der Hauptteil *unendlich* viele *nichtverschwindende* Glieder $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(z-z_0)^\nu}$, so liegt in z_0 eine *wesentliche* Singularität vor[8]. Hier ist i.A. das Wachstumsverhalten signifikant anders als bei bei Vorliegen eines Pols[9]. Das Funktionsverhalten in der Nähe von z_0 kann man am besten nach Weierstraß beschreiben: "Hiernach ändert sich die Funktion $f(z)$ in einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle z_0 in der Art discontinuierlich, dass sie jedem willkürlich angenommenen Werthe beliebig nahe kommen kann, für $z = z_0$ also einen bestimmten Werth nicht besitzt".

Rationale Funktionen, holomorphe Logarithmen[10]: Die in technischen Anwendungen oft auftretenden rationalen Funktionen in z sind meromorph. Sie sind übrigens die einzigen Funktionen, deren Singularitäten in der geschlossenen Ebene nur Pole sind. Sie haben die Form

$$f(z) = \frac{K(s-n_1)^{\nu_1}...(s-n_k)^{\nu_k}}{(s-p_1)^{\mu_1}...(s-p_l^{\mu_l})} =: \frac{Z(s)}{N(s)} \qquad \text{mit } \ n_i \neq n_j \text{ und } \ p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j \ ,$$

[8] Ein Beispiel hiefür ist die Funktion $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu! \cdot z^\nu}$, die bei $z = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt. Hierzu untersucht man die Werteverteilung von $f(z)$ durch Einführung von Polarkoordinaten und schreibt $\exp(\frac{1}{z}) = Pe^{j\Theta}$ sowie $z = \rho e^{j\theta}$. Damit gilt $Pe^{j\Theta} = \exp(\frac{1}{\rho} e^{-j\theta})$. Nach Benutzung der Eulerbeziehungen ehält man $\rho = \frac{-\sin\theta}{\Theta \pm n2\pi}$ $\quad (n = 0, 1, 2, ...)$ und $\cot\theta = \frac{-\ln P}{\Theta \pm n2\pi}$. Gibt man nun *beliebige* Werte $P > 0$ und Θ sowie eine positive Zahl ε vor, so existiert ein z im Bereich $|z| < \varepsilon$, so dass der Wert $Pe^{j\Theta}$ angenommen werden kann: durch Wahl von n kann $\rho < \varepsilon$ sicher erreicht werden. Mit dem so festgelegtem n, können $\cot\theta$ bzw. θ und letztlich z berechnet werden. Damit kann $f(z)$ in jeder noch so kleinen Umgebung von $z = 0$ einen beliebig kleinen Wert annehmen, d.h. $z = 0$ ist kein Pol von $f(z)$.

[9] Siehe hierzu den berühmten Satz von Casorati-Weierstraß.

[10] Siehe zBsp. Reinhold REMMERT: *Funktionentheorie I.* (Kapitel 9, §3).

wobei Zähler- und Nennerpolynom teilerfremd sind. Die einzigen Singularitäten sind die Pole $p_1, ..., p_l$. Die Ableitung nach z lautet

$$\frac{df}{dz} = \frac{N\frac{dZ}{dz} - Z\frac{dN}{dz}}{N^2},$$

und man erkennt, dass die Ableitung an den Polen von $f(z)$ unendlich groß wird. In der Nachrichtentechnik bzw. Signaltheorie arbeitet man mit dem Logarithmus[11] $g(z)$ einer holomorphen Funktion $f(z)$. Hierbei nennt jede im Gebiet $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion $g(z)$, welche die Gleichung

$$e^{g(z)} = f(z)$$

erfüllt, einen (holomorphen) Logarithmus zu $f(z)$ im Gebiet $\mathfrak{G}$. Falls der Logarithmus der Funktion $f(z)$ exisitiert, so besitzt $f(z)$ keine *Nullstellen* im Gebiet $\mathfrak{G}$. Dies erkennt man auch durch Bildung der sogenannten *logarithmischen Ableitung* von $f(z)$

$$\frac{dg}{dz} := \frac{\frac{df}{dz}}{f} = \frac{N\frac{dZ}{dz} - Z\frac{dN}{dz}}{N \cdot Z}.$$

Sie wird unendlich, sobald das Polynom N oder das Polynom Z gleich null wird. Alle Pole und Nullstellen der Funktion $f(z)$ sind singuläre Punkte des Logarithmus $g(z)$ und werden *logarithmische Singularitäten* genannt. Sie sind *keine* Pole der Logarithmusfunktion. Zur Erinnerung, wenn p_1 ein Pol der Funktion $f(z)$ ist, so verhält sich die Funktion für Werte in der Nähe von p_1 wie $\frac{1}{(p-p_1)^{\mu_1}}$. Zum besseren Verständnis der vorliegenden Situation denke man an das Verhalten der üblichen Logarithmusfunktion für reelle Werte. Für reelle Werte ς strebt die Funktion $\ln\varsigma = -\ln\frac{1}{\varsigma}$ nach $-\infty$, wenn ς nach null strebt. Es gilt aber

$$\lim_{\varsigma\to 0}(\varsigma\ln\varsigma) = \lim_{\varsigma\to 0}\left(-\varsigma\ln\frac{1}{\varsigma}\right) = 0.$$

Das bedeutet, $\varsigma = 0$ ist kein Pol. Die Logarithmusfunktion nimmt langsamer als die Funktion $1/\zeta$ ab. Interessant für manche Betrachtungen sind die Residuen der logarithmischen Ableitung der Funktion $f(z)$. Diese können durch Betrachtung von $f(z)$ in der Nähe einer Nullstelle n_1 bzw. Polstelle p_1 berechnet werden. In der Nähe einer Nullstelle hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = (z-n_1)^{\nu_1}\,\hat{f}(z) \qquad \text{mit} \quad \hat{f}(n_1) \neq 0\ .$$

Bilden wir die logarithmische Ableitung von $f(z)$ in der Nähe der Nullstelle erhalten wir

$$\frac{dg}{dz} = \frac{d}{dz}\ln f(z) = \nu_1\frac{d}{dz}\ln(z-n_1) + \frac{d}{dz}\ln\hat{f}(z) = \frac{\nu_1}{z-n_1} + \frac{\frac{d\hat{f}(z)}{dz}}{\hat{f}(z)}\ .$$

Demnach ist n_1 ein Pol mit der Ordnung 1 dieser Funktion. Deren Residuum bei n_1 ist gleich ν_1. Analog ergeben sich für eine Polstelle p_1

$$f(z) = (z-p_1)^{-\mu_1}\,\hat{f}(z) \qquad \text{mit} \quad \hat{f}(p_1) \neq 0$$

[11] Siehe zBsp. Reinhold REMMERT: *Funktionentheorie I.* (Kapitel 5, §4 und 9, §3).

bzw.

$$\frac{dg}{dz} = \frac{d}{dz} \ln f(z) = -\mu_1 \frac{d}{dz} \ln(z - p_1) + \frac{d}{dz} \ln \hat{f}(z) = \frac{-\mu_1}{z - n_1} + \frac{\frac{d\hat{f}(z)}{dz}}{\hat{f}(z)} \ .$$

Demnach ist p_1 ein Pol mit der Ordnung 1 dieser Funktion, deren Residuum bei p_1 gleich $-\mu_1$ ist. Hierauf basiert die Anwendung des Residuensatzes[12] mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{df}{dz}}{f} dz = \sum_{i=1}^{k} \nu_i - \sum_{i=1}^{l} \mu_i \ .$$

[12] Siehe zBsp. Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* (Drittes Kapitel, §4).

Kapitel 5

Literatur

- Heinrich BENKE, Friedrich SOMMER:*Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Springer Verlag, 1962
- Hendrik W. BODE: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* D. Van Nostrand Company, 1945
- John R. CARSON: *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus.* McGraw-Hill Book Company, 1926
- John R. CARSON: *Elektrische Ausgleichvorgänge und Operatorenrechnung.* Erweiterte deutsche Bearbeitung von Franz OLLENDORF und Karl POHLHAUSEN. Verlag Julius Springer Berlin, 1929
- Gustav DOETSCH: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* Birkhäuser Verlag, 1958
- Alfred FETTWEIS: *Elemente nachrichtentechnischer Systeme.* Teubner Studienbücher Elektrotechnik, 1996
- Otto FÖLLINGER: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation.* Hüthig Verlag, 9. Auflage 2007
- Klaus JÄNICH: *Analysis für Physiker und Ingenieure.* Springer-Lehrbuch, 1990
- Martin HORN, Nicolaos DOURDOUMAS: *Regelungstechnik.* Pearson Verlag, 2. Auflage 2004
- H. A. KRAMERS: *La diffusion de la lumiére par les atomes.* Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, vol 2,pp.545-557; Zanichelli, Bologna, 1927
- R. de L. KRONIG: *On the Theory of dispersion of x-rays.* J. Opt. Soc. Am. **12,**547-557, 1926
- Cecille LABUDA and Iwo LABUDA. *On the mathematics underlying dispersion relations.* The European Physical Journal H, published online 24 October 2014

- Raymond E. A. C. PALEY and Norbert WIENER: *Fourier Transforms in the Complex Domain.* American Mathematical Society. New York, 1934
- Athanasios PAPOULIS: *The Fourier Integral and its Applications.* McGraw-Hill, 1962
- Reinhold REMMERT: *Funktionentheorie I.* Springer Verlag, 1984
- Walter RUDIN: *Real and Complex Analysis.* Tata McGraw-Hill Company, TMH Edition, 1974
- V. UCARINI, J.J. SAARINEN, K.-E. PEIPONEN, E.M. VARTIAINEN: *Kramer-Kronig Relations in Optical Materials Research.* Springer 2004