Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

Systemtheorie AK3

Mathematisches Pendel

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber

Version vom 14. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Das mathematische Pendel **5**

1.1 Einführung 5

1.2 Modellbildung der Pendelbewegung 5

1.3 Stabilitätsverhalten der Ruhelagen im Sinne von Lyapunov 8

1.4 Eigenschaften / Verhalten der Lösungen φ und ω 9

1.4.1 Eine mögliche Umrechnung der Anfangswerte 10

1.5 Eine Differentialgleichung 1. Ordnung für den Winkel φ 11

1.5.1 Der Fall $\omega_0 > 2\Omega_0$ bzw. $E_0 > E_{pot,m}$ 12

1.5.2 Der Fall $\omega_0 < 2\Omega_0$ bzw. $E_0 < E_{pot,m}$ 14

1.5.3 Der Fall $\omega_0 = 2\Omega_0$ bzw. $E_0 = E_{pot,m}$ 16

1.6 Mathematische Ergänzungen 17

1.6.1 Klassische Einführung der Jacobischen elliptischen Funktionen 17

1.6.2 Systemtheoretische Einführung der Jacobischen elliptischen Funktionen 21

Kapitel 1

Das mathematische Pendel

1.1 Einführung

Wir betrachten die ebene Schwingung eines sogenannten mathematischen Pendels[1]. Hierbei führt ein an einem gewichtslosen Stab der Länge l aufgehängter punktförmiger Körper der Masse m unter dem Einfluss der Erdschwere eine reibungsfreie Drehbewegung durch. Die Bahn des Körpers ist ein Kreisbogen mit dem Radius l. Obwohl dieses mechanische System und sein Bewegungsablauf leicht vorstellbar sind, ist im allgemeinen Fall die Ermittlung einer Relation für den Pendelausschlag als Funktion der Zeit mathematisch diffizil. Nur im Falle "kleiner" Pendelauslenkungen kann die Bewegung mit Hilfe *trigonometrischer Funktionen* (Sinus bzw. Cosinus) explizit einfach beschrieben werden. Betrachtet man beliebige Winkelwerte, so ist eine Beschreibung erst durch Heranziehen mathematisch anspruchsvoller *elliptischer Funktionen* möglich. Bis vor ca. 30 Jahren war man bei der Auswertung elliptischer Funktionen auf Tabellenwerke (zBsp E. Jahnke und F. Emde oder M. Abramovitz und I.A. Stegan) angewiesen. Mit deren Hilfe konnte man mühevoll solche Probleme lösen. Die inzwischen vorhandenen und zugänglichen Programmpakete zur Lösung von Differentialgleichungen und zu symbolischen Berechnungen (zBsp Mathematica, Maple oder Matlab) ermöglichen einen relativ einfachen Zugang zur Lösung solcher Probleme. In den nachfolgenden Ausführungen werden die verschiedenen möglichen Bewegungsabläufe bzw. auftretende Phänomene der Pendelbewegung beschrieben und mathematisch analysiert.

1.2 Modellbildung der Pendelbewegung

Bezeichnet man den von der vertikalen Richtung aus gegen den Uhrzeigersinn gemessenen Drehwinkel mit φ und die zugehörige Winkelgeschwindigkeit mit ω, so ergeben sich durch

[1] Siehe zBsp: Agoston BUDO: *Theoretische Mechanik*, Kap.C (Spezielle Probleme aus der Dynamik des Massenpunktes). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1980 **oder** Dieter RÜDIGER und Alfred KNESCHKE: *Technische Mechanik, Kinematik und Kinetik* / Band 3, Kap. 13 (Schwingung eines Massenpunktes). Verlag Harri Deutsch 1966 **oder** István SZABO: *Einführung in die Technische Mechanik*, Kap.20 (Das Newtonsche Gesetz und seine Folgerungen). Springer Verlag 1962

Anwendung des Drallsatzes folgende Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \text{mit} \;\; \varphi_0 := \varphi(0) \tag{1.1}$$

und

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = -mgl\sin\varphi \qquad \text{mit} \;\; \omega_0 := \omega(0) \;\; . \tag{1.2}$$

Hierbei sind g die Gravitationskonstante und Θ das Massenträgheitsmoment des Körpers. Letzteres beträgt im vorliegenden Fall

$$\Theta = ml^2. \tag{1.3}$$

Nach Einsetzen von (1.3) in (1.2) und Einführung der Abkürzung

$$\Omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.4}$$

erhalten wir ein *nichtlineares* mathematisches Modell dieses Systems in der Form von zwei gewöhnlichen und zeitinvarianten Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{1.5}$$

und

$$\frac{d\omega}{dt} = -\Omega_0^2 \sin\varphi \; . \tag{1.6}$$

Daraus kann man sofort eine gewöhnliche *nichtlineare* Differentialgleichung 2. Ordnung für den Winkel φ erzeugen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_0^2 \sin\varphi = 0 \; , \tag{1.7}$$

die in der Fachliteratur üblicherweise als Pendelbeschreibung angeführt wird[2].

Um signifikante Situationen beim Bewegungsablauf zu erfassen, stellen wir die Frage, ob besondere Wertepaare $(\varphi_R,\ \omega_R)$ existieren, welche die Eigenschaft besitzen, dass bei diesen Werten das Pendel in Ruhe verharrt. Das bedeutet:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \textbf{und} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad \text{für } \varphi = \varphi_R \;\; \textbf{und} \; \omega = \omega_R \; .$$

Mit anderen Worten, wir suchen die sogenannten *Ruhelagen* $(\varphi_R,\ \omega_R)$ des obigen Systems (1.5), (1.6). Mit Hilfe von (1.5) und (1.6) kann man leicht ermitteln:

$$(\varphi_R,\ \omega_R) = (k\pi,\ 0) \qquad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.8}$$

[2] Es ist bemerkenswert, dass die gleiche Differentialgleichung auch in anderen Problemen der Technischen Mechanik auftritt. Hier sei beispielhaft die Berechnung von Auslenkungen bei großen Durchbiegungen eines Stabes (der nach Euler genannten *Elastica*) erwähnt. Siehe zBsp N.W. McLACHLAN: *Ordinary non-linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences*. Kap. 3.180. Oxford University Press 1956.

d.h. das Pendel verharrt in der Tiefst- bzw. in der Höchstlage in Ruhe, unter der Voraussetzung, dass die Winkelgeschwindigkeit an diesen Positionen verschwindet.

Um den Bewegungsablauf besser zu verstehen, betrachten wir nun die Energie E dieses mechanischen Systems. Sie ergibt sich aus der Summe der kinetischen E_{kin} und potentiellen Energie E_{pot} gemäß

$$E_{kin} := \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \qquad \text{und} \qquad E_{pot} := mgl(1 - \cos\varphi) = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

zu

$$E(\varphi, \omega) = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2} \ . \tag{1.9}$$

Unter Verwendung der größtmöglichen potentiellen Energie $E_{pot,m}$ des Pendels - sie wird in der Höchstlage $\varphi = \pi$ erreicht -

$$E_{pot,m} := 2mgl$$

kann sie folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$E(\varphi, \omega) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + E_{pot,m} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{1.10}$$

Sie ist eine positiv semidefinite Funktion. Sie verschwindet für $\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ ...$) und $\omega = 0$

$$E(2k\pi, 0) = 0 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Für alle anderen Werte der Variablen φ und ω ist sie positiv. Bildet man unter Beachtung von (1.5) und (1.6) die zeitliche Ableitung $\frac{dE}{dt}$, so erhält man

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} 2 m l^2 \omega \frac{d\omega}{dt} + E_{pot,m} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{1.11}$$

Das bedeutet, dass die Energie des Systems konstant bleibt. Es handelt sich also um ein sogenanntes *konservatives System.* Damit erhalten wir den Ausdruck

$$E(\varphi, \omega) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + E_{pot,m} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = E(\varphi_0, \omega_0) = E_0. \tag{1.12}$$

Anhand dieser Relation - aber auch intuitiv - kann man erwarten, dass je nachdem ob die Anfangsenergie E_0 größer, kleiner oder gleich der maximalen potientiellen Energie $E_{pot,m}$ ist, drei Szenarien möglich sind. Im *ersten* verschwindet die Winkelgeschwindigkeit ω nie, auch nicht im Extremfall $\varphi = \pi$. Dieser Fall entspricht einem umlaufenden oder sich überschlagenden Pendel. Im *zweiten* Szenario gibt es einen Punkt $\varphi \neq k\pi$ - also nicht in der Tiefst- oder Höchstlage -, in dem die Geschwindigkeit verschwindet. Letzteres entspricht einem hin- und herschwingenden Pendel. Im *dritten* Szenario verschwindet beim Erreichen der Höchstlage $\varphi = k\pi$ die Geschwindigkeit ω. Das bedeutet, das Pendel verharrt dann in Ruhe. Diese Szenarien werden nachfolgend mathematisch erfasst und untersucht.

1.3 Stabilitätsverhalten der Ruhelagen im Sinne von Lyapunov

Wir betrachten das Pendelmodell

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{dt} = -\Omega_0^2 \sin\varphi$$

mit den Ruhelagen

$$(\varphi_R,\ \omega_R) = (k\pi,\ 0) \qquad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2,\ ....$$

Wir stellen die Frage, ob die jeweilige Ruhelage $(\varphi_R,\ \omega_R)$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil im Sinne von Lyapunov ist[3]. Intuitiv erkennt man aufgrund der vorangegangenen Überlegungen, dass, wenn die Winkelgeschwindigkeit null ist, die Tiefstlage des Pendels stabil, während die Höchstlage instabil ist. Dies wollen wir nachfolgend mathematisch begründen.

Hierzu betrachten wir die Abweichungen der Systemgrößen von der Ruhelage, führen die Variablen-Transformation

$$x_1 = \varphi - \varphi_R \qquad \text{und} \quad x_2 = \omega - \omega_R$$

durch und erhalten nach einigen einfachen Umrechnungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{dx_2}{dt} = (-1)^k \left(-\Omega_0^2 \sin x_1\right) \qquad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2,\ ....\ .$$

Das bedingt, dass wir nur das Stabilitätsverhalten der Ruhelage Null

$$(x_{1R},\ x_{2R}) = (0,\ 0) \tag{1.13}$$

der Modelle

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dt} = -\Omega_0^2 \sin x_1 \qquad (k = 0) \tag{1.14}$$

bzw.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dt} = \Omega_0^2 \sin x_1 \qquad (k = 1) \tag{1.15}$$

zu untersuchen brauchen. Dieses erfolgt mit Hilfe der Lyapunov-Theorie.

Im vorangegangenen Kapitel hatten wir gezeigt, dass die Systemenergie E eine positiv semidefinite Funktion ist, deren zeitliche Ableitung verschwindet. Demnach gilt für das erste System (1.14) in einer Umgebung der Ruhelage Null mit $|x_1| < \pi$

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m l^2 x_2^2 + E_{pot,m} \sin^2 \frac{x_1}{2} > 0 \quad \text{für } x_1 \neq 0\ ,\ x_2 \neq 0,$$

[3] Nach Lyapunov wird eine Ruhelage *stabil* genannt, wenn die Trajektorien in einer beliebig kleinen Umgebung der Ruhelage bleiben, sofern sie in einer hinreichend kleinen Ungebung der Ruhelage gestartet sind. Ist das nicht der Fall, so nennt man sie *instabil*. Falls die Ruhelage stabil ist **und** Trajektorien, die in einer Umgebung der Ruhelage starten, für wachsende Werte der Zeit t gegen diese Ruhelage streben, so heißt sie *asymptotisch stabil*.

$$E(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für } x_1 = \ x_2 = 0 \ .$$

Die Systemenergie ist also eine lokal positiv definite Funktion mit der weiteren Eigenschaft $\frac{dE}{dt} = 0$ und kann demnach als eine sogenannte Lyapunov-Funktion aufgefasst werden. Nach der sogenannten *zweiten* Methode - auch *direkte* Methode genannt - von Lyapunov folgt, dass die Ruhelage Null stabil ist, da wir in einer Umgebung dieser Ruhelage eine positiv definite Funktion ermittelt haben, deren zeitliche Ableitung negativ semidefinit ist.

Wir wenden uns dem zweiten System (1.15) zu. Zur Beantwortung der Stabilitätsfrage benutzen wir die sogenannte *erste* Methode von Lyapunov. Hierzu linearisieren wir das nichtlineare System um seine Ruhelage und untersuchen die Stabilität des linearen(!) Ersatzsystems. Hierbei können wir unter bestimmten Voraussetzungen auf asymptotische Stabilität bzw. Instabilität der Ruhelage schliessen. Präziser formuliert sind folgende zwei Aussagen möglich: Ist das lineare Ersatzsystem asymptotisch stabil, so ist die Ruhelage des nichtlinearen Systems ebenfalls asymptotisch stabil. Ist das lineare Ersatzsystem instabil, so ist die Ruhelage des nichtlinearen Systems ebenfalls instabil. Die Linearisierung des obigen Systems liefert aufgrund von $\sin x_1 \approx x_1$ für "kleine" Auslenkungen das lineare Ersatzsystem

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \Omega_0^2 x_1$$

bzw. in der üblichen Matrixschreibweise

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Systemmatrix besitzt Eigenwerte bei Ω_0 bei $-\Omega_0$. Nachdem ein positiver Eigenwert vorliegt, ist das lineare Ersatzsystem instabil. Damit ist die Ruhelage des nichtlinearen Systems (1.15) instabil.

1.4 Eigenschaften / Verhalten der Lösungen φ und ω

Ausgehend von Gleichung (1.12)

$$E(\varphi, \omega) = \frac{1}{2} ml^2\omega^2 + E_{pot,m}\sin^2\frac{\varphi}{2} = E(\varphi_0, \omega_0) = E_0.$$

formen wir diese unter Verwendung der positiven Konstanten

$$\vartheta := \sqrt{\frac{E_0}{\frac{1}{2}ml^2}} \qquad \text{und} \quad \rho := \sqrt{\frac{E_0}{E_{pot,m}}} \tag{1.16}$$

um und erhalten die prägnante Darstellung

$$\frac{1}{\vartheta^2}\omega^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1\ . \tag{1.17}$$

Sie beschreibt in der $(\omega - \sin\frac{\varphi}{2})$-Ebene eine Ellipse. Sie ist die Gleichung der sogenannten *Phasentrajektorien* bzw. das sogenannte *Phansenporträt*[4] der Differentialgleichungen (1.5) und (1.6) und besitzt eine Reihe interessanter Eigenschaften. Zunächst ist es einleuchtend, dass der Trajektorienverlauf signifikant von der Konstanten ρ^2 abhängt. Sie entspricht nämlich dem Verhältnis der (konstanten) Gesamtenergie (d.h. der Anfangsenergie) E_0 zu der maximalen potentiellen Energie $E_{pot,m}$ des Pendels. Man erkennt, da ω in (1.17) quadratisch eingeht, dass die Kurven symmetrisch zur φ-Achse verlaufen. Aus (1.5) folgt, dass der Winkel φ in der oberen Halbebene zunimmt, während er in der unteren abnimmt. Der Trajektorienverlauf in der $(\varphi-\omega)$-Ebene (*Phasenebene*) ist periodisch bezüglich φ mit der Periode 2π. Es liegt ferner eine Nullpunktsymmetrie vor, da die Paare (φ,ω) und $(-\varphi,-\omega)$ die Differentialgleichungen (1.5) und (1.6) erfüllen. Damit genügt es für den Trajektorienverlauf, den Drehwinkel φ im Bereich $[0,\pi]$ und die Winkelgeschwindigkeit ω im positiven Bereich zu untersuchen. Für die nachfolgenden Untersuchungen ist es ausreichend den Verlauf der Trajektorien im I. Quadranten der $(\varphi-\omega)$-Ebene zu analysieren!

1.4.1 Eine mögliche Umrechnung der Anfangswerte

Aufgrund von (1.12) bzw. (1.17) kann *jeder* Anfangswert $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\omega}_0)$ durch einen äquivalenten Anfangswert $(0,\omega_0)$ dargestellt werden. Das führt zu Vereinfachung mancher mathematischer Beziehungen und Überlegungen. Das bedeutet, dass ohne Einschränkung der Allgemeinheit das Pendel zum Anfangszeitpunkt $t=0$ in der Tiefstlage mit einer nichtverschwindenden Anfagngsgeschwindigkeit ω_0 sich befindet. Aus

$$\frac{1}{\vartheta^2}\omega^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1$$

folgt

$$\frac{1}{\vartheta^2}\tilde{\omega}_0^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\frac{\tilde{\varphi}_0}{2} = \frac{1}{\vartheta^2}\omega_0^2 = 1 \tag{1.18}$$

bzw.

$$\omega_0^2 = \tilde{\omega}_0^2 + \left(\frac{\vartheta}{\rho}\right)^2 \sin^2\frac{\tilde{\varphi}_0}{2}.$$

Aus (1.18) beträgt die Konstante ϑ

$$\vartheta = \omega_0 \ . \tag{1.19}$$

Unter Beachtung von (1.4) ergibt sich der Quotient $\left(\frac{\vartheta}{\rho}\right)^2$

$$\left(\frac{\vartheta}{\rho}\right)^2 = \frac{E_0}{\frac{1}{2}ml^2}\ \frac{E_{pot,m}}{E_0} = \frac{4g}{l} = 4\Omega_0^2 \ .$$

Daraus folgt mit Hilfe von (1.19)

$$\rho = \frac{\omega_0}{2\Omega_0}$$

[4] Siehe zBsp: Wolfgang HAHN: *Stability of Motion*, Kap. 22 (Conservative Second Order Systems). Springer Verlag 1967 **oder** Hans Wilhelm KNOBLOCH und Franz KAPPEL: "*Gewöhnliche Differentialgleichungen*", Kap. 7 (Einiges über autonome Systeme. Phasenebene). Teubner Verlag 1973

und damit erhalten wir die Umrechnungsformel für den besonderen Anfsngswert

$$\omega_0^2 = \tilde{\omega}_0^2 + 4\Omega_0^2 \sin^2 \frac{\tilde{\varphi}_0}{2}. \tag{1.20}$$

sowie die Gleichung der Trajektorien

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{2\Omega_0}{\omega_0}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \ . \tag{1.21}$$

Man erkennt, dass in diesem besonderen Fall die Winkelgeschwindigkeit ω die Ungleichung

$$|\omega| \leq \omega_0$$

erfüllt.

1.5 Eine Differentialgleichung 1. Ordnung für den Winkel φ

Unter Beachtung von $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ erhalten wir unmittelbar aus Gleichung (1.21) eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für den Drehwinkel φ

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \ . \tag{1.22}$$

Alle Lösungen $\varphi(t)$ und $\omega(t)$ der Systemgleichungen (1.5) und (1.6) erfüllen obige Differentialgleichung[5]. Wir unterscheiden drei Fälle

$$\rho > 1, \quad \rho < 1 \quad \text{ und } \quad \rho = 1 \ .$$

Das bedeutet

$$\omega_0 > 2\Omega_0, \quad \omega_0 < 2\Omega_0 \quad \text{und} \quad \omega_0 = 2\Omega_0,$$

bzw.

$$E_0 > E_{pot,m}, \qquad E_0 < E_{pot,m} \quad \text{und} \quad E_0 = E_{pot,m} \ .$$

Im **ersten Fall** $(E_0 > E_{pot,m})$ ist die Anfangsenergie *größer* als die potentielle Energie in der Höchstlage $\varphi = \pi$. Ausgehend von der Tiefstlage $\varphi = 0$ und der *positiven* Anfangsgeschwindigkeit ω_0 wächst der Pendelausschlag φ an und erreicht nach einer Zeit $\hat{t}$ die Höchstlage. Innerhalb des Intervalls $[0,\ \hat{t}]$ nimmt gemäß (1.6) die Winkelgeschwindigkeit ab. Der Wert $\hat{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit in dieser Lage beträgt nach (1.22)

$$\hat{\omega} := \omega(\hat{t}) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}.$$

[5] Diese besitzt allerdings - unter der Voraussetzung, dass die (positive) Konstante ρ die Ungleichung $\rho \leq 1$ erfüllt - auch die konstante Lösung $\sin \frac{\varphi}{2} = \pm\rho$.

Dies hat ein weiteres Anwachsen des Winkels bis zum Wert $\varphi = 2\pi$ zur Folge. Danach wiederholen sich aufgrund der Periodizität die Verhältnisse. Es handelt sich um ein sich überschlagendes Pendel. Das Pendel kehrt nie in die Ausgangslage zurück, da der Winkel φ monoton anwächst. Die Zeitfunktion $\varphi(t)$ ist nicht periodisch! Die Trajektorien in der $(\varphi - \omega)$-Ebene sind *keine* geschlossenen Kurven.

Im **zweiten Fall** ($E_0 < E_{pot,m}$) ist die Anfangsenergie E_0 *kleiner* als die potentielle Energie in der Höchstlage $\varphi = \pi$. Ausgehend von der Tiefstlage $\varphi = 0$ und der *positiven* Anfangsgeschwindigkeit ω_0 wächst der Pendelausschlag φ an, während die Winkelgeschwindigkeit ω abnimmt und zum Zeitpunkt $\check{t}$ den Wert null erreicht. Nach (1.22) erfüllt der Winkel $\tilde{\varphi}$ zu diesem Zeitpunkt die Gleichung

$$\frac{1}{\rho^2}\sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2} = 1$$

bzw.

$$\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2} = \rho < 1.$$

D.h. der Winkel $\tilde{\varphi}$ ist kleiner als π

$$0 < \tilde{\varphi} < \pi.$$

In der Phasenebene erreicht man den Punkt ($\tilde{\varphi} < \pi$, 0). Aufgrund der erwähnten Symmetrie der Phasentrajektorien zur φ-Achse "spiegelt sich" der Verlauf bis zum Erreichen des Punktes ($-\check{\varphi} > -\pi$, 0). Die Trajektorien sind geschlossene Kurven in der $(\varphi - \omega)$-Ebene und schliessen die Ruhelage ($\varphi_R = 0,\ \omega_R = 0$) des Systems um. Die Zeitfunktionen $\varphi(t)$ und $\omega(t)$ sind periodische Funktionen. Das Pendel schwingt hin und her.

Im **dritten Fall** ($E_0 = E_{pot,m}$) strebt das Pendel ausgehend vom Punkt $(0, \omega_0)$ zu dem Punkt ($\bar{\varphi} = \pi$, 0). Nachdem es sich dabei um eine Ruhelage des Systems handelt, verharrt es beim Erreichen dieses Punktes in Ruhe.

1.5.1 Der Fall $\omega_0 > 2\Omega_0$ bzw. $E_0 > E_{pot,m}$

Die Energie des Systems beträgt gemäß (1.12) für den Wert $\varphi = \pi$, d.h. in der Höchstlage

$$E(\pi, \hat{\omega}) = E_0 = \frac{1}{2}ml^2\hat{\omega}^2 + E_{pot,m}$$

mit

$$0 \neq \hat{\omega} < \omega_0.$$

Der Punkt $(\pi, \hat{\omega})$ ist keine Ruhelage des Systems.

Mit Hilfe der Abkürzung

$$\kappa := \frac{1}{\rho} = \frac{2\Omega_0}{\omega_0} < 1 \tag{1.23}$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \omega_0^2\left(1 - \kappa^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \tag{1.24}$$

Nach Trennung der Veränderlichen φ und t und anschliessender Integration ergibt sich

$$t = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Die Auswertung dieses sogenannten *elliptischen* Integrals[6] ist im Allgemeinen nichttrivial[7]. Es kann *nicht* in geschlossener Form mit elementaren Funktionen ausgedrückt werden. Solche Integrale können allerdings auf gewisse Normalformen gebracht werden, deren Auswertung ursprüglich - klassisch mühevoll - mit Hilfe von Tabellenwerken oder heutzutage rechnerunterstützt mit Hilfe von speziellen Programmpaketen erfolgen kann. Nach einer Substitution der Integrationsvariablen

$$\varphi = 2\psi \tag{1.25}$$

erhalten wir den Ausdruck

$$t = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\frac{\Phi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}} \,. \tag{1.26}$$

in dem, ein sogenanntes elliptisches Normalintegral 1. Gattung in der Legendre-Normalform $F(\frac{\Phi}{2}, \kappa)$

$$F(\frac{\Phi}{2}, \kappa) := \int_0^{\frac{\Phi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}. \tag{1.27}$$

erscheint. Das Integral $F(\frac{\Phi}{2}, \kappa)$ ist eine Funktion des "Moduls" κ und der "Amplitude" $\frac{\Phi}{2}$. Dessen Werte können nach Vorgabe von κ sowie des Ausschlages $\frac{\Phi}{2}$ für den Drehwinkel in elementarer Weise zBsp aus Tabellen[8] entnommen werden. Dadurch erhält man gemäß (1.26)

$$t = \frac{2}{\omega_0} F(\frac{\Phi}{2}, \kappa)$$

[6]Bei der Integration von Ausdrücken der Form

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

wobei $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ eine rationale Funktion von x und $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ist, erhält man nach einer Reihe von Substitutionen elliptische Integrale 1., 2. und 3. Gattung. Sie werden deswegen elliptisch genannt, da sie ursprüglich zur Bestimmung der Ellipsenbogenlänge benutzt wurden.

[7]Siehe zBsp Wladimir Iwanowitsch SMIRNOW: *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III,2.* (Kap. 6, §4 Elliptische Integrale und elliptische Funktionen). VEB Verlag 1961

[8]Siehe zBsp

- Eugen JAHNKE und Fritz EMDE: *Tafeln höherer Funktionen.* Teubner Verlag 1948.
- Milton ABRAMOWITZ und Irene Ann STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Dover Publications 1964

bzw.

$$\frac{\omega_0}{2}t = F(\frac{\Phi}{2}, \kappa) \tag{1.28}$$

den zugehörigen Wert für die Zeit t. Nach einer mathematisch nichttrivialen Umkehrung dieser Relation ergibt sich die gesuchte Funktion $\Phi = \Phi(t)$.

Ermittlung einer expliziten Relation für den Pendelausschlag

Hierzu betrachtet man im Integral

$$v = F(\Psi, \kappa) := \int_0^\Psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}$$

den Winkel Ψ als Funktion von v, und verwendet das Symbol "am" für die Umkehrfunktion (*Amplitudenfunktion)*

$$\Psi = F^{-1}(\Psi, \kappa) = \mathrm{am}(v, \kappa) = \mathrm{am}(\frac{\omega_0}{2}t, \kappa)\ .$$

Benutzt man (1.25)

$$\frac{\Phi}{2} = \Psi$$

so erhält man unter Verwendung der sogenannten Jacobischen elliptischen Funktion

$$\mathrm{sn}(v, \kappa) := \sin\alpha = \sin \mathrm{am}(v, \kappa) \qquad \text{sog. sinus amplitudinis}$$

die Beziehung

$$\sin\frac{\Phi}{2} = \sin \mathrm{am}(\frac{\omega_0}{2}t, \kappa) = \mathrm{sn}(\frac{\omega_0}{2}t, \kappa).$$

Daraus folgt

$$\Phi = 2 \arcsin\left[\mathrm{sn}(\frac{\omega_0}{2}t, \kappa)\right].$$

1.5.2 Der Fall $\omega_0 < 2\Omega_0$ bzw. $E_0 < E_{pot,m}$

Für das Wertepaar $(\varphi = \pi, \tilde{\omega})$ erhalten wir gemäß (1.12) die nicht erfüllbare Relation

$$E(\pi, \tilde{\omega}) = E_0 = \frac{1}{2}ml^2\tilde{\omega}^2 + E_{pot,m}\ .$$

Demnach kann der Wert $\varphi = \pi$ *nicht* angenommen werden. Es handelt sich um ein hin- und herschwingendes Pendel, das der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 \qquad \text{mit} \quad \rho < 1 \tag{1.29}$$

gehorcht. Bemerkenswerterweise kann - nach einer Variablentransformation - deren Lösung in der gleichen Art wie im vorigen Fall durchgeführt werden!

Hierzu führen wir eine neue Veränderliche ψ gemäß

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \rho\sin\psi \tag{1.30}$$

ein. Daraus folgt

$$\cos\frac{\varphi}{2}\frac{1}{2}d\varphi = \rho\cos\psi d\psi,$$

$$d\varphi = 2\rho\frac{\cos\psi}{\cos\frac{\varphi}{2}}d\psi = 2\rho\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}d\psi$$

bzw.

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\rho\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\psi}}\frac{d\psi}{dt}\ . \tag{1.31}$$

Damit erhalten eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die neue Variable ψ

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(2\rho\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\psi}}\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin^2\psi = 1\ ,$$

$$\frac{1}{\Omega_0^2}\frac{\cos^2\psi}{1-\rho^2\sin^2\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \cos^2\psi$$

bzw. die prägnante Darstellung

$$\frac{1}{\Omega_0^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \rho^2\sin^2\psi = 1 \tag{1.32}$$

Sie ist das Analogon der Relation gemäß (1.24) im vorigen Fall

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \kappa^2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1\ .$$

Aus (1.32) folgt nach einer Trennung der Variablen ψ und t das elliptische Integral

$$t = \frac{1}{\Omega_0}\int\limits_0^{\Psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\psi}} \qquad \text{mit} \qquad \Psi = \arcsin\left(\frac{2\Omega_0}{\omega_0}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

bzw.

$$\Omega_0 t = F(\Psi,\rho)\ .$$

Die Umkehrung dieser Relation liefert die gesuchte Funktion $\Psi = \Psi(t)$.

Ermittlung einer expliziten Relation für den Pendelausschlag

Hierzu betrachtet man im Integral

$$v = F(\Psi, \rho) := \int_0^\Psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}$$

den Winkel Ψ als Funktion von v, und die Umkehrfunktion (*Amplitudenfunktion)*

$$\Psi = F^{-1}(\Psi, \rho) = \mathrm{am}(v, \rho) = \mathrm{am}(\Omega_0 t, \rho)\ .$$

Benutzt man (1.30)

$$\sin \frac{\Phi}{2} = \rho \sin \Psi$$

so erhält man unter Verwendung der Jacobischen elliptischen Funktion

$$\mathrm{sn}(v, k) := \sin \alpha = \sin \mathrm{am}(v, k)$$

die Beziehung

$$\sin \frac{\Phi}{2} = \rho \cdot \sin \mathrm{am}(\Omega_0 t, \rho) = \rho \cdot \mathrm{sn}(\Omega_0 t, \rho).$$

Daraus folgt

$$\Phi = 2 \arcsin \left[\rho \cdot \mathrm{sn}(\Omega_0 t, \rho)\right].$$

Eine approximative Lösung für kleine Auslenkungen

Im Fall hinreichend kleiner Pendelschwingungen, zBsp $|\varphi(t)| < 6^0$ (Grad), erhalten wir durch die Approximation

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

aus (1.29) durch Verwendung der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ die Darstellung in der Phasenebene

$$\frac{1}{\omega_0^2}\omega^2 + \frac{1}{\rho^2}\varphi^2 \approx 1.$$

Die Trajektorien sind näherungsweise Ellipsen in der $(\varphi - \omega)$-Ebene.

1.5.3 Der Fall $\omega_0 = 2\Omega_0$ bzw. $E_0 = E_{pot,m}$

In diesem Fall lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \omega_0^2,$$

bzw.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}, \tag{1.33}$$

da der Winkel für Werte $t \geq 0$ anwächst. Im vorliegenden Fall ist der Trajektorienverlauf in der $(\varphi - \omega)$-Ebene gemäß (1.33)

$$\omega = \omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

durch Cosinuskurven gekennzeichnet. Nach Trennung der Variablen φ und t in (1.33) und Integration ergibt sich[9]

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{\omega_0} \ln \tan \frac{\pi + \varphi}{4} = -\frac{2}{\omega_0} \ln \tan \frac{\pi - \varphi}{4} \; .$$

Daraus folgt

$$\tan \frac{\pi - \varphi}{4} = e^{-\frac{\omega_0}{2} t}$$

bzw.

$$\varphi = \pi - 4 \arctan e^{-\frac{\omega_0}{2} t}$$

Es ist ersichtlich, dass nachdem

$$\lim_{t \to \infty} \arctan e^{-\frac{\omega_0}{2} t} = 0$$

gilt, der Winkel φ für wachsende Werte t gegen den Wert π strebt. Ausgehend von den Anfagswerten $\varphi = 0$ und $\omega_0 > 0$ erreicht das Pendel nach *unendlich* langer Zeit seine Höchstlage. Nach (1.33) ist die Winkelgeschwindigkeit gleich null, d.h. in der $(\varphi - \omega)$-Ebene liegt die Ruhelage ($\varphi = \pi$, $\omega = 0$) vor. Das Pendel kommt - nach unendlich langer Zeit - in der Höchstlage zur Ruhe!

1.6 Mathematische Ergänzungen

1.6.1 Klassische Einführung der Jacobischen elliptischen Funktionen

Betrachtet man für $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq k \leq 1$ in der Relation

$$v := F(\alpha, k) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \tag{1.34}$$

den Winkel α als Funktion von v, so kann man unter Verwendung des Symbols "am" für die *Amplitudenfunktion* in

$$\alpha = F^{-1}(\alpha, k) = \mathrm{am}(v, k) \tag{1.35}$$

[9] Es gilt die trigonometrische Beziehung:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \; .$$

Daraus folgt

$$\tan \frac{\pi + \varphi}{4} \tan \frac{\pi - \varphi}{4} = 1.$$

die Umkehrfunktion von $F(\alpha, k)$ ausdrücken.

Des Weiteren führt man in diesem Kontext die sogenannten *Jacobischen elliptischen Funktionen* ein[10]:

$$\mathrm{sn}(v,k) := \sin\alpha = \sin\mathrm{am}(v,k) \qquad \text{sog. } \textit{sinus amplitudinis}, \tag{1.36}$$

$$\mathrm{cn}(v,k) := \cos\alpha = \cos\mathrm{am}(v,k) \qquad \text{sog. } \textit{cosinus amplitudinis} \tag{1.37}$$

und

$$\mathrm{dn}(v,k) := \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(v,k)} \qquad \text{sog. } \textit{delta amplitudinis} \quad . \tag{1.38}$$

Mit Hilfe der sogenannten *vollständigen elliptischen Integrale* mit dem Modul k bzw. Komplementärmodul $\bar{k}$

$$K(k) := F(\frac{\pi}{2}, k) := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{1.39}$$

bzw[11]

$$F(\frac{\pi}{2}, k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(k^2\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \left(k^2\right)^6 + \ldots\right], \tag{1.40}$$

[10]**Bemerkung 1:** Der Definitionsbereich der Jacobischen Funktionen kann durch analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene ausgedehnt werden. Es ist das Verdienst von Abel und Jacobi erkannt zu haben, dass diese Umkehrfunktionen funktionenstheoretisch betrachtet, einfacher(!) als das Integral (1.34) sind. Sie sind im Gegensatz zum Integral eindeutige Funktionen. Es liegt eine ähnliche Situation wie bei den üblichen trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ vor. Diese sind eindeutige (periodische) Funktionen, aber deren Umkehrfunktionen $\arcsin\varphi$ und $\arccos\varphi$ sind mehrdeutig. Im Übrigen sind die Jacobischen Funktionen im komplexen Bereich "doppelperiodisch". Sie besitzen eine reelle *und* eine imaginäre Periode.

Bemerkung 2: Es gibt zwölf Jacobische Funktionen $\mathrm{pq}(v,k)$, wobei neun Funktionen mit Hilfe der oben definierten drei Funktionen $\mathrm{sn}(v,k)$, $\mathrm{cn}(v,k)$ und $\mathrm{dn}(v,k)$ eingeführt werden:

$$\mathrm{pq}(v,k) := \frac{\mathrm{pr}(v,k)}{\mathrm{qr}(v,k)}$$

Hierbei können die Buchstaben p, q und r mit den Buchstaben s,c,d und n besetzt werden, wobei $\mathrm{pp}(v,k) := 1$ gilt.

[11]Diese Beziehung folgt aus (1.39) indem man den Integranden in eine gleichmäßig konvergente binomische Reihe entwickelt

$$\left(1-k^2\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2\sin^2\psi + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(k^2\sin^2\psi\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \left(k^2\sin^2\psi\right)^6 + \ldots \quad .$$

Deren gliedweise Integration liefert unter Benutzung von

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi d\psi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 2n}\frac{\pi}{2}$$

Relation (1.40).

$$\bar{K}(\bar{k}) := F(\frac{\pi}{2}, \bar{k}) := \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \psi}} \qquad \text{mit} \quad \bar{k} = \sqrt{1-k^2} \tag{1.41}$$

sowie der Abkürzung

$$q := e^{-\pi \frac{\bar{K}(\bar{k})}{K(k)}} \tag{1.42}$$

können die Amplitudenfunktion und die Jacobischen Funktionen durch *Reihenentwicklungen* (Potenz- bzw. Fourierentwicklungen) folgendermaßen dargestellt werden:

"*Amplitudenfunktion*"

$$\mathrm{am}(v,k) = \frac{\pi}{2K(k)} v + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{q^n}{n\,(1+q^{2n})} \sin \frac{n\pi v}{K(k)}, \tag{1.43}$$

"*Sinus amplitudinis*"

$$\mathrm{sn}(v,k) = v - (1+k^2)\frac{v^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{v^5}{5!} + ... \tag{1.44}$$

bzw.

$$\mathrm{sn}(v,k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi v}{2K(k)}, \tag{1.45}$$

"*Cosinus amplitudinis*"

$$\mathrm{cn}(v,k) = 1 - \frac{v^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{v^4}{4!} + (1+44k^2+16k^4)\frac{v^6}{6!} + ... \tag{1.46}$$

bzw.

$$\mathrm{cn}(v,k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \cos \frac{(2n+1)\pi v}{2K(k)} \tag{1.47}$$

"*Delta amplitudinis*"

$$\mathrm{dn}(v,k) = 1 - k^2\frac{v^2}{2!} + k^2(4+k^2)\frac{v^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{v^6}{6!} + ... \tag{1.48}$$

bzw.

$$\mathrm{dn}(v,k) = \frac{\pi}{2K(k)} + \frac{2\pi}{K(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi v}{K(k)}, \tag{1.49}$$

Einige bemerkenswerte Eigenschaften der Jacobischen Funktionen:

1. Die Jacobischen Funktionen sind für $k \neq 1$ *periodische* Funktionen in v.

2. Es gelten folgende *Identitäten*:

$$\mathrm{sn}^2(v,k) + \mathrm{cn}^2(v,k) = 1 \tag{1.50}$$

sowie

$$\mathrm{dn}^2(v,k) + k^2\mathrm{sn}^2(v,k) = 1. \tag{1.51}$$

3. Ausgehend von (1.34) und (1.36) erhält man nach einmaliger Differentiation nach v unter Ausnutzung der Beziehung

$$\frac{d}{dv}\mathrm{am}(v,k) = \frac{1}{\frac{d}{dv}F(v,k)} = \sqrt{1-k^2\sin^2 v}$$

für die *ersten Ableitungen* der Jacobischen Funktionen die Ausdrücke:

$$\frac{d}{dv}\mathrm{sn}(v,k) = \mathrm{cn}(v,k)\mathrm{dn}(v,k),$$

$$\frac{d}{dv}\mathrm{cn}(v,k) = -\mathrm{dn}(v,k)\mathrm{sn}(v,k)$$

sowie

$$\frac{d}{dv}dn(v,k) = -k^2 sn(v,k)cn(v,k).$$

4. Durch *Grenzwertbetrachtungen* des Moduls k erhält man interessante Resultate, die einen Einblick in das Verhalten dieser recht komplizierten Funktionen ermöglichen:

- Mit abnehmenden Werten des Moduls k nähern sich die Funktionen $\mathrm{sn}(v,k)$ bzw. $\mathrm{cn}(v,k)$ den *trigonometrischen* Funktionen "Sinus" und "Cosinus" :

$$\lim_{k\to 0}[\mathrm{sn}(v,k) - \sin v] = 0,$$

$$\lim_{k\to 0}[\mathrm{cn}(v,k) - \cos v] = 0$$

sowie

$$\lim_{k\to 0}[\mathrm{dn}(v,k) - 1] = 0.$$

- Lässt man den Modul k gegen Eins streben, so ergeben sich *hyperbolische* Funktionen, nämlich der "Tangens hyperbolikus"

$$\tanh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{\sinh v}{\cosh v}$$

und der "Cosekans hyperbolikus" - der Kehrwert der "Cosinus hyperbolikus" -

$$\mathrm{sech}(v) := \frac{2}{e^v + e^{-v}} = \frac{1}{\cosh v}.$$

Es gilt

$$\lim_{k\to 1}[\mathrm{sn}(v,k) - \tanh(v)] = 0\ ,$$

$$\lim_{k\to 1}[\mathrm{cn}(v,k) - \mathrm{sech}(v)] = 0$$

sowie

$$\lim_{k\to 1}[\mathrm{dn}(v,k) - \mathrm{sech}(v)] = 0\ .$$

1.6.2 Systemtheoretische Einführung der Jacobischen elliptischen Funktionen

Es wurde oben erwähnt, dass die trigonometrischen Funktionen in der reellen Variablen t

$$x(t) = \sin t \qquad \text{und} \qquad y(t) = \cos t$$

als Grenzwerte elliptischer Funktionen $\mathrm{sn}(t,k)$ und $\mathrm{cn}(t,k)$ aufgefasst werden können. Bekanntlich kann man diese trigonometrischen Funktionen interpretieren als Lösungen eines sogenannten linearen Oszillators, der durch folgende zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

bzw. in Matrix-Schreibweise

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

beschrieben wird. Das bedeutet, dass durch (1.52) die Funktionen "Sinus" und "Cosinus" *definiert* werden können.

Beachtenswert ist die Tatsache, dass die Jacobischen Funktionen $\mathrm{sn}(t,k)$, $\mathrm{cn}(t,k)$ und $\mathrm{dn}(t,k)$ als Lösungen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ eines Systems von *drei* gewöhnlichen *nichtlinearen* Differentialgleichungen 1. Ordnung *definiert* werden können[12].

$$\frac{dx}{dt} = y \cdot z \quad , \tag{1.53}$$

$$\frac{dy}{dt} = -z \cdot x \quad , \tag{1.54}$$

$$\frac{dz}{dt} = -k^2 \cdot x \cdot y \qquad \text{mit} \;\; 0 \leq k \leq 1 \tag{1.55}$$

mit den Anfangswerten

$$\mathrm{sn}(0,k) = x(0) = 0$$

$$\mathrm{dn}(0,k) = y(0) = 1$$

und

$$\mathrm{dn}(0,k) = z(0) = 1 \ .$$

Die Verwandtschaft zum linearen Oszillator erkennt man unmittelbar, wenn man die ersten zwei Differentialgleichungen zusammenfasst:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

[12] Siehe zBsp Einar HILLE: *Lectures on Ordinary Differential Equations.* Kap. 2 (Existence and Uniqueness Theorems), Addison Wesley, 1969

Bemerkungen

Aus obigen Differentialgleichungen (1.53), (1.54) und (1.55) erhalten wir nach Quadratur sowie Verwendung der Identitäten (1.50)

$$x^2(t) + y^2(t) = 1, \tag{1.56}$$

und (1.51)

$$z^2(t) + k^2 x^2(t) = 1 \tag{1.57}$$

bzw. des Komplementärmoduls $\bar{k}$ gemäß

$$k^2 + \bar{k}^2 = 1 \tag{1.58}$$

folgende Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(1 - x^2\right)\left(1 - k^2 x^2\right) \ , \tag{1.59}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(1 - y^2\right)\left(\bar{k}^2 - k^2 y^2\right) \tag{1.60}$$

bzw.

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\left(1 - z^2\right)\left(\bar{k}^2 - k^2 z^2\right) \ . \tag{1.61}$$

Wir gehen auf die Differentialgleichung (1.59) ein, indem man

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

betrachtet. Nach Trennung der Veränderlichen und Integration, bekommen wir

$$t = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\left(1 - \xi^2\right)\left(1 - k^2 \xi^2\right)}}. \tag{1.62}$$

Daraus erkennen wir, dass die Jacobische Funktion $x(t) = \mathrm{sn}(t, k)$ als Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals erhalten wird.

Die Analogie zu der trigonometrischen Funktion $\sin x$ erkennt man, wenn das Integral

$$I(x) := \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arcsin x$$

betrachtet. Der Wert von I ist eine Funktion der oberen Grenze x. Betrachten wir x als Funktion von I, d.h. die Umkehrfunktion, so erhalten wir die eindeutige (periodische) Funktion $x = \sin I$.

Setzen wir in (1.62)

$$\xi = \sin \varphi$$

an, so erhalten wir nach einigen Umrechnungen die am Anfang unserer Betrachtungen der Pendelbewegung angegebene Form

$$t = \int\limits_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} =: F\,(x, k) \qquad \text{mit } x = \sin \Phi.$$