Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

SYSTEMTHEORIE AK 2

Zur Stabilität von LZI – Systemen

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber

2. Version: 15. Januar 2021 (1.Version: 13.7.2018)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

BIBO-Eigenschaft von LZI-Systemen

1.1 Einleitung

Wir betrachten ein *kausales* LZI-System mit der skalaren Eingangsgröße u, der skalaren Ausgangsgröße y, der Gewichtsfunktion g und der Beschreibung

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau. \tag{1.1}$$

Es wird vorausgesetzt, dass es die BIBO[1]-Eigenschaft besitzt, d.h.

$$\text{für alle } u(t) \text{ mit } |u(t)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq Y \quad \text{für } t \geq 0 \ . \tag{1.2}$$

Hierbei ist Y eine *endliche* Konstante. Aufgrund der Linearitätseigenschaft folgt, dass *jede* betragsmäßig beschränkte Eingangsgröße eine betragsmäßig beschränkte Ausgangsgröße zur Folge hat[2].

Eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft ist die absolute Integrabilität der Gewichtsfunktion:

$$\int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau \leq K < \infty \quad . \tag{1.3}$$

---

[1] Es handelt sich um ein Akronym für "bounded input bounded output".

[2] Eine *vernünftige* - auch für nichtlineare(!) zeitinvariante Systeme - Charakterisierung der Stabilität des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines (kausalen) Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist die folgende: das zeitinvariante System (abgekürzt ZI-System) heißt Eingangs–Ausgangs-stabil, wenn eine Konstante ρ existiert, so dass für *alle* Eingangsgrößen u mit der Eigenschaft $\|u\|_p := \left[\int_0^\infty |u(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq U < \infty$ die Ungleichung $\|y\|_p \leq \rho \cdot \|u\|_p$ erfüllt ist. Man sieht, dass aus der Gültigkeit der letzten Relation für den Fall $p = \infty$ die BIBO-Eigenschaft bei LZI-Systemen folgt.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht für nichtlineare Systeme! Man betrachte hierzu das nichtlineare ZI-System $y = \text{sgn}\{u\}$ und den Fall $p = \infty$. Das System besitzt die BIBO-Eigenschaft. Allerdings ist es unmöglich, eine von der Eingangsgröße u unabhängige(!) Konstante ρ zu finden, damit obige Ungleichung erfüllt ist.

Dies ist einsichtig, wenn man bedenkt, dass durch die Wahl $u(\tau) = \mathtt{sgn}\{g(t-\tau)\}$ die Ausgangsgröße $y(t)$ für $t \to \infty$ ihren Maximalwert $y_{\max} := \int\limits_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau$ erreicht.

Die Gültigkeit obiger Ungleichung (1.3) bedeutet ferner, dass für *jede* (beliebig kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ ein Zeitpunkt T_ε existiert, so dass die Ungleichung

$$\int\limits_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau \leq \varepsilon \qquad \text{für} \quad t > T_\varepsilon \tag{1.4}$$

erfüllt ist.

Eine zu (1.3) alternative Bedingung für die BIBO-Eigenschaft erhält man durch Betrachtungen im Bildbereich der Laplace-Trasnformation. Man benutzt hierzu die Laplace-Transformierte der Gewichtsfunktion $g(t)$, d.h. die Übertragungsfunktion $G(s) = \int\limits_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ des Systems (1.1), und betrachtet den Ausdruck $|G(s)|$. Es gilt dann folgende Ungleichung

$$|G(s)| = \left| \int\limits_0^\infty g(t)e^{-st}dt \right| \leq \int\limits_0^\infty |g(t)| \left|e^{-st}\right| dt. \tag{1.5}$$

Unter der Voraussetzung $\mathrm{Re}\{s\} \geqq 0$ ergibt sich zunächst die Aussage

$$\mathrm{Re}\{s\} \geqq 0 \quad \Rightarrow \left|e^{-st}\right| \leq 1 \qquad \text{für} \quad t \geq 0$$

bzw. aus (1.5) die Ungleichung

$$|G(s)| \leq \int\limits_0^\infty |g(t)|\, dt \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} \geq 0\ . \tag{1.6}$$

Es ist nun einsichtig, dass bei Vorhandensein der BIBO-Eigenschaft (1.3)

$$|G(s)| \leq K < \infty \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} \geq 0 \tag{1.7}$$

gilt. D.h. die Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt *keine Pole* in der rechten abgeschlossenen s-Ebene $\mathrm{Re}\{s\} \geqq 0$. Man kann ferner zeigen, dass dies eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft darstellt.

In den nachfolgenden Ausführungen untersuchen wir das Systemverhalten bei Vorliegen der BIBO-Eigenschaft. Es wird sich zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen Eingangs- und Ausgangsgröße ein ähnliches Zeitverhalten aufweisen. Unterliegt ferner die Eingangsgröße u einer sogenannten verallgemeinerten Energiebeschränkung, so gilt dies auch für die Ausgangsgröße. Unpräzise formuliert: das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft bewirkt, dass die Ausgangsgröße y ähnliche Eigenschaften wie die Eingangsgröße u besitzt.

1.2 Periodische Eingangsgrößen

Es wird angenommen, dass $u(t)$ gemäß $|u(t)| \leq 1$ für $t \geq 0$ beschränkt und *periodisch* mit der Periode T ist:

$$u(t) = u(t+T) \quad \text{für} \quad t \geq 0 \quad . \tag{1.8}$$

Wir wollen nun zeigen, dass bei Vorhandensein der BIBO-Eigenschaft die Ausgangsgröße $y(t)$ für *hinreichend große* Werte von t die gleiche Periodizitäts-Eigenschaft aufweist. Das bedeutet

$$\lim_{t\to\infty} [y(t+T) - y(t)] = 0 \ . \tag{1.9}$$

Gemäß (1.1) gilt, aufgrund der Periodizität der Eingangsgröße,

$$y(t+T) = \int_0^{t+T} g(\tau)u(t+T-\tau)d\tau = \int_0^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Dieses Integral wird wie folgt umgeformt

$$y(t+T) = \int_0^{t} g(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau =: y(t) + \Delta(t,T) \ .$$

Wir schätzen nun den Betrag des Integrals $\Delta(t,T) = \int_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$ für hinreichend große Werte t ab. Offensichtlich gelten folgende Relationen

$$|\Delta(t,T)| = \left| \int_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_t^{t+T} |g(\tau)u(t-\tau)| \, d\tau \leq \int_t^{t+T} |g(\tau)| \, d\tau \ .$$

Da die BIBO-Eigenschaft, d.h. die absolute Integrabilität von $g(t)$, vorausgesetzt wurde, gilt $\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+T} |g(\tau)| \, d\tau = 0$. Damit verschwindet für hinreichend große t-Werte das Integral $\Delta(t,T)$ und es gilt $y(t+T) \approx y(t)$. Das bedeutet: für hinreichend große Werte von t strebt die Ausgangsgröße $y(t)$ gegen eine periodische Funktion mit *der gleichen* Periode T wie die Eingangsgröße!

1.3 Harmonische Eingangsgrößen, Eigenfunktionen und Frequenzgang

Es wird als Eingangsgröße die spezielle Funktion $u(t) = e^{pt}$ mit $p = \alpha + j\beta$ gewählt[3]. Die Ausgangsgröße lautet

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \left[\int_0^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau - \int_t^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right] \cdot e^{pt} \ .$$

Nach Einführung der Übertragungsfunktion $G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ lautet die Ausgangsgröße

$$y(t) = G(p) \cdot e^{pt} - \left[\int_t^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right] e^{pt} \ .$$

Der *konstante* Faktor bei der Eingangsgröße ist der Wert der Übertragungsfunktion $G(s)$ an der Stelle $s = p$. Mit Hilfe der Hilfsfunktion $\tilde{y}(t) := -\int_t^\infty g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau$ erhalten wir schließlich die Darstellung

$$y(t) = G(p) \cdot e^{pt} + \tilde{y}(t) \ , \tag{1.10}$$

in der ein Vielfaches der Eingangsgröße $G(p) \cdot e^{pt}$ erscheint.

Wir betrachten nun hinreichend große Werte von t und stellen die Frage, unter welchen Bedingungen die Ausgangsgröße durch $y(t) \approx G(p) \cdot e^{pt}$ gegeben ist oder - präziser formuliert - Folgendes gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \left[y(t) - G(p) \cdot e^{pt}\right] = 0 \ . \tag{1.11}$$

- *Falls* $\alpha = \operatorname{Re}\{p\} < 0$ ist, so strebt die Eingangsgröße $u(t)$ exponentiell gegen null und damit strebt auch die Ausgangsgröße $y(t)$ gegen null. In diesem Fall ist (1.11) trivial erfüllt.

- *Falls* $\alpha = \operatorname{Re}\{p\} \geq 0$ gilt, so kann das Integral $\tilde{y}(t) := -\int_t^\infty g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau$ folgendermaßen abgeschätzt werden

$$|\tilde{y}(t)| = \left|\int_t^\infty g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau\right| \leq \int_t^\infty |g(\tau)|\, e^{\alpha(t-\tau)}d\tau \leq \int_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau.$$

[3] Hierzu siehe zBsp Martin Horn und Nicolaos Dourdoumas, *Regelungstechnik,* (Kap. 3.6 Eigenfunktionen). Pearson Verlag, 2. Auflage 2004

Aufgrund der BIBO-Eigenschaft gilt allerdings $\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau = 0$ und damit ist (1.11) erfüllt.

- *Falls* $\alpha = 0$ gilt, liegt eine *harmonische* Eingangsgröße $u(t) = e^{j\omega t}$ vor und die Ausgangsgröße lautet $y(t) = G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} - \int\limits_t^\infty g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$. Der zweite Term in dieser Relation kann folgendermaßen abgeschätzt werden: $\left| \int\limits_t^\infty g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right| \leqq \int\limits_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau$. Aufgrund der vorliegeden BIBO-Eigenschaft gilt allerdings $\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau = 0$. Damit ist die Ausgangsgröße $y(t)$ für hinreichend große Werte von t durch

$$y(t) \approx G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \tag{1.12}$$

gegeben. Sie ist ein Vielfaches der *harmonischen* Eingangsgröße $u(t)$und ergibt sich durch Multiplikation der Eingangsgröße mit einer Konstanten - dem sogenannten *Frequenzgang* - $G(j\omega)$. Für diese besonderen Eingangsgrößen - sogenannte *Eigenfunktionen* - ist Beziehung (1.12) im Zeitbereich das Analogon der Relation

$$\bar{y}(s) = G(s) \cdot \bar{u}(s) \tag{1.13}$$

im Bildbereich der Laplace-Transformation, die allerdings für *beliebige* Eingangsgrößen $u(t)$ gilt.

Bemerkung

Im Fall, dass das LZI-System durch ein Zustandsraum-Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

beschrieben wird, ist die Gewichtsfunktion durch $g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ gegeben. Es ist nun möglich, einen expliziten Ausdruck für die Ausgangsgröße anzuschreiben. Aus $y(t) = \int\limits_0^t g(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau$, ergibt sich zunächst

$$y(t) = \int\limits_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} e^{-p\tau} d\tau \cdot e^{pt} = \int\limits_0^t \mathbf{c}^T e^{(\mathbf{A}-p\mathbf{E})\tau} \mathbf{b} d\tau \cdot e^{pt},$$

bzw. unter der *Voraussetzung*, dass die Konstante p *kein* Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T\left(\mathbf{A}-p\mathbf{E}\right)^{-1} e^{(\mathbf{A}-p\mathbf{E})\tau}\Big|_0^t \mathbf{b}\cdot e^{pt} = \mathbf{c}^T\left(\mathbf{A}-p\mathbf{E}\right)^{-1} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} + \mathbf{c}^T\left(\mathbf{A}-p\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{b}\cdot e^{pt} \\ &= -\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{A}-p\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{b} + G(p)\cdot e^{pt}. \end{aligned}$$

Anhand dieses Ausdruckes ist ersichtlich, dass bei Vorliegen der BIBO-Eigenschaft der erste Summand $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{A}-p\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{b}$ für hinreichend große Werte von t verschwindet, was natürlich im Einklang mit obigen Ausführungen steht.

1.4 Eingangsgrößen mit beschränkter Energie

Man spricht von einer Eingangsgröße $u(t)$ mit beschränkter Energie im Zeitintervall $[0,\infty)$, wenn die Ungleichung

$$\left[\int_0^\infty |u(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \le U < \infty \tag{1.14}$$

für eine (endliche) Konstante U erfüllt ist. Es ist bemerkenswert, dass Folgendes gilt:

Die Ausgangsgröße $y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$ des (kausalen) LZI-Systems, das die BIBO-Eigenschaft besitzt(!), ist im Zeitintervall $[0,\infty)$ ebenfalls von beschränkter Energie. Das bedeutet, dass $y(t)$ die Ungleichung

$$\left[\int_0^\infty |y(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \le Y < \infty \tag{1.15}$$

für eine (endliche) Konstante Y erfüllt.

Zum Verständnis dieser Aussage:

Hierzu wird die sogenannte Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-Ungleichung[4] herangezogen

$$\int_a^b |f(t)h(t)|\,dt \le \left[\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b |h(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

Hierbei wird angenommen, dass die Funktionen $f(t)$ und $h(t)$ im Intervall $[a,b]$ quadratisch integrierbar, d.h. von beschränkter Energie sind

$$\left[\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \le F < \infty \quad \text{und} \quad \left[\int_a^b |h(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \le H < \infty \ .$$

[4] Augustin-Louis Cauchy (*21.8.1789 in Paris, +23.5.1857 in Sceaux/Frankreich, Victor Jakovlewitsch Bunyakovsky (*16.12.1804 in Bar/Russland, *12.12.1889 in St. Petersburg/Russland), Karl Hermann Amandus Schwarz (*25.1.1843 in Hermsdorf/Schlesien, *30.11.1921 in Berlin)

Wir betrachten nun den Betrag $|y(t)|$ der Ausgangsgröße $y(t)$ und schätzen diesen ab. Es gilt dann

$$|y(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)|\,|u(t-\tau)|\,d\tau = \int_0^t \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\right]\left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,|u(t-\tau)|\right] d\tau$$

bzw.

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\right]\left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,|u(t-\tau)|\right] d\tau.$$

Wir definieren anschließend gemäß $f(\tau) := |g(\tau)|^{\frac{1}{2}}$ und $h(\tau,t) := |g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\,|u(t-\tau)|$ zwei Funktionen f und h, wenden die Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-Ungleichung (1.16) an und erhalten die Ungleichung

$$|y(t)| \leq \left[\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty |g(\tau)|\cdot|u(t-\tau)|^2\,d\tau\right] .$$

Unter Ausnutzung der BIBO-Eigenschaft, d.h. $\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau \leq K < \infty$, ergibt sich

$$|y(t)| \leq \left[K\int_0^\infty |g(\tau)|\,|u(t-\tau)|^2\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \text{ und nach Quadratur } |y(t)|^2 \leq K\int_0^\infty |g(\tau)|\,|u(t-\tau)|^2\,d\tau.$$

Wir betrachten nun das Integral $\int_0^\infty |y(t)|^2\,dt$ und erhalten die Ungleichung

$$\int_0^\infty |y(t)|^2\,dt \leq K\int_0^\infty \left[\int_0^\infty |g(\tau)|\,|u(t-\tau)|^2\,d\tau\right] dt .$$

Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$\int_0^\infty |y(t)|^2\,dt \leq K\int_0^\infty \left[\int_0^\infty |u(t-\tau)|^2\,dt\right] |g(\tau)|\,d\tau$$

bzw. aufgrund der beschränkten Energie der Eingangsgröße (1.14) und der BIBO-Eigenschaft des Systems

$$\int_0^\infty |y(t)|^2\,dt \leq KU\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau \leq K^2U < \infty \quad .$$

Damit besitzt die Ausgangsgröße des (kausalen) LZI-Systems beschränkte Energie!

1.5 Verallgemeinerte Energiebeschränkung der Eingangsgrößen

Obiges Resultat kann mit Hilfe der sogenannten Young[5]-Faltungs-Ungleichung verallgemeinert werden. Wir betrachten ein (kausales) LZI-System mit der skalaren Eingangsgröße u und der skalaren Ausgangsgröße y gemäß

$$y(t) = (g * u)(t) := \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Wir definieren die p-Norm einer Funktion f durch

$$\|f\|_p := \left[\int_0^\infty |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{mit} \quad p \in [1, \infty) \quad .$$

Es gelte nun

$$\|g\|_q := \left[\int_0^\infty |g(t)|^q \, dt\right]^{\frac{1}{q}} \leq K < \infty \quad \text{und} \quad \|u\|_p := \left[\int_0^\infty |u(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq U < \infty \quad .$$

Ferner sei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \qquad \text{mit} \quad p,\ q,\ r \in [1, \infty) \ .$$

Die Young-Faltungs-Ungleichung lautet

$$\|y\|_r = \|g * u\|_r \leq \|g\|_q \, \|u\|_p \quad .$$

Daraus folgt für $q = 1$: $p = r$ bzw.

$$\|y\|_p = \|g * u\|_p \leq \|g\|_1 \, \|u\|_p \ .$$

Das bedeutet: wenn das LZI-System die BIBO-Eigenschaft besitzt und die p-Norm der Eingangsgröße u beschränkt ist, so ist die p-Norm der Ausgangsgröße y ebenfalls beschränkt.

[5] William Henry Young (*20.10.1863 in London, +7.7.1942 in Lausanne/Schweiz)

Kapitel 2

Stabilität freier LZI-Systeme, Eigenwerte

2.1 Einleitung

Wir betrachten ein freies n-dimensionales lineares und zeitinvariantes System (abgekürzt LZI-System) mit der Beschreibung im Zustandsraum

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \ . \tag{2.1}$$

Seine Lösung $\mathbf{x}(t)$ kann mit Hilfe der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ angeschrieben werden:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad .$$

Man erkennt, dass die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ und damit die Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ das zeitliche Verhalten der Trajektorien des Systems prägen, da $e^{\mathbf{A}t}$ Funktionen $t^{\mu_i}e^{s_i t}$ mit $\mu_i \geq 0$ enthält.

Bei den weiteren Betrachtungen ist der Begriff der *Ruhelage* des obigen Systems essentiell und wird kurz wiederholt. Definitionsgemäß verschwindet bei einer Ruhelage $\mathbf{x}_R$ der Differentialquotient des Zustandsvektors, d.h.

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{\mathbf{x}_R} = \mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{0} \ . \tag{2.2}$$

Man erkennt, dass obiges LZI-System *immer* eine Ruhelage bei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ aufweist. Sie ist die einzige Ruhelage des Systems, falls die Systemmatrix $\mathbf{A}$ regulär ist! Im Falle einer singulären Systemmatrix existieren hingegen unendlich viele Ruhelagen. Wurde nämlich eine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ ermittelt, so ist jedes beliebige Vielfache $\alpha\mathbf{x}_R$ ebenfalls eine Ruhelage. Man spricht in dem Zusammenhang von einer Ruhezone, welche durch den Vektor $\alpha\mathbf{x}_R$ gegeben ist.

Zur Beurteilung des prinzipiellen Verhaltens der Trajektorien wird das System aus einer Ruhelage $\mathbf{x}_R$ auf einen *beliebigen* Anfangswert $\mathbf{x}_0$ ausgelenkt. Man betrachtet nun folgende "gutmütige" Szenarien und stellt folgende zwei Fragen:

1. Frage: Streben die Trajektorien zur Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ zurück? Nachdem die Transitionsmatrix für endliche Werte t regulär ist, bedeutet das: streben die Trajektorien für $t \to \infty$ zur Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ zurück? Bildhafter ausgedrückt: zieht der Ursprung $\mathbf{0}$ *alle* Trajektorien an? Ist das der Fall, so spricht man von einer attraktiven Ruhelage bzw. von einem asymptotisch stabilen LZI-System (2.1). Nachdem der Anfangszustand beliebig ist, kann dies nur bei einer *regulären* Systemmatrix $\mathbf{A}$ der Fall sein. D.h. es darf kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ bei Null liegen.

2. Frage: Verbleiben die Trajektorien in einer beliebig kleinen Umgebung einer Ruhelage, falls der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ hinreichend nah an der Ruhelage $\mathbf{x}_R$ liegt? Ist das der Fall, so spricht man von einer stabilen Ruhelage bzw. einem stabilen LZI-System (2.1).

Zur Beantwortung der ersten Frage dient **Satz 1**: Das LZI-System (2.1) ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn *alle* Eigenwerte s_i der Systemmatrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$ für $i = 1, ..., n$ erfüllen.

Die Beantwortung der zweiten Frage gestaltet sich aufwändiger. Hierzu dient **Satz 2**: Das LZI-System (2.1) ist genau dann *stabil*, wenn

- *alle* Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichungen $\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$ für $i = 1, ..., n$ erfüllen und

- Eigenwerte s_k mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$, welche die (sogenannte *algebraische*) Vielfachheit M_k aufweisen, M_k linear unabhängige Eigenvektoren (d.h. die sogenannte *geometrische* Vielfachheit M_k) besitzen.

Es gibt folgende *alternative* Möglichkeit zur Überprüfung der Stabilität. Unter Benutzung des sogenannten *Minimalpolynoms*[1] der Matrix $\mathbf{A}$ gilt **Satz 2a:** Das LZI-System (2.1) ist genau dann *stabil*, wenn

- *alle* Nullstellen s_i des Minimalpolynoms der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$ erfüllen und

- Nullstellen s_i mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s_i\} = 0$ *einfache* Nullstellen des Minimalpolynoms sind.

Die anschließenden Überlegungen sollen Einsicht in die formulierten Sätze bringen. Sie basieren auf der Partialbruchzerlegung der sogenannten *Resolventen* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

2.2 Partialbruchzerlegung der Resolventen von A

Die Transitionsmatrix kann mit Hilfe der Laplace[2]-Transformation berechnet werden: die Laplace-Transformierte von $e^{\mathbf{A}t}$ ist gleich der sogenannten Resolventen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ der Matrix

[1] Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom $\psi(s)$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist das monische Polynom mit kleinstem Grad und der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

[2] Pierre Simon de Laplace (*23.3.1749 in Baumont-en-Auge/Frankreich, +5.3.1827 in Paris)

A. Diese kann mit Hilfe des *charakteristischen Polynoms* $\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und der zu $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ *adjungierten Matrix* $\mathbf{F}(s)$ dargestellt werden

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s)\ . \tag{2.3}$$

Das charakteristische *Polynom* $\Delta(s)$ lautet

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{M_i} \qquad \text{mit} \qquad n = M_1 + M_2 + ... + M_K\ . \tag{2.4}$$

Es besitzt i.A. K verschiedene Nullstellen s_i mit der Vielfachheit M_i.

Die *Adjunkte* oder adjungierte Matrix $\mathbf{F}(s)$ ist ein "monisches" Matrix-Polynom in s vom Grad $n-1$:

$$\mathbf{F}(s) = s^{n-1}\mathbf{E} + s^{n-2}\mathbf{F}_{n-2} + s^{n-3}\mathbf{F}_{n-3} + ... + s^0\mathbf{F}_0\ . \tag{2.5}$$

Hierbei sind $\mathbf{F}_i$ konstante (n, n)-Matrizen, die zBsp mit Hilfe des Leverrier[3]-Algorithmus[4] *rekursiv* berechnet werden können.

Man erkennt, dass gemäß (2.3) die n^2 Elemente der Matrix $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ rationale Funktionen $\alpha_{ik}(s)$ der komplexen Variablen s sind

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) =: [\alpha_{ik}(s)] \quad =: \left[\frac{F_{ik}(s)}{\Delta(s)}\right] \quad \text{mit} \quad i, k = 1, , , , n\ . \tag{2.6}$$

Für den Grad der in (2.6) eingeführten Polynome $F_{ik}(s)$ gilt[5]

$$\deg\{F_{ik}(s)\} \leq n - 1\ . \tag{2.7}$$

[3]Urbain Jean Joseph Le Verrrier, genannt Urbain Leverrier (*11.3.1811 in Saint-Lô/ Frankreich, + 23.9.1877 in Paris)

[4]Siehe zBsp Felix R. Gantmacher: *Matrizentheorie*, (Kapitel 4.4.), Springer-Verlag, 1986

[5]Das Polynom $F_{ik}(s)$ wird durch Bildung der sogenannten *algebraischen Komplemente* (auch Minoren genannt) der Matrix $s\mathbf{E} - \mathbf{A} =: [d_{ik}]$ mit $i, k = 1, , , , n$ ermittelt: man bildet die zu einem Element d_{ik} gehörige $(n-1)$-reihige Unterderminante, die durch Streichen der i-ten Reihe und der k-ten Spalte entsteht, und multipliziert diese mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$. Dadurch ergibt sich das zugehörige algebraische Komplement (oder der zugehörige Minor) $D_{ik}(s)$. D.h. es entsteht eine quadratische Matrix mit der Anordnung

$$[D_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & ... & D_{2n} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & ... & D_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & ... & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die in (2.6) eingeführten Größen $F_{ik}(s)$ ergeben sich durch *Transposition* obiger Anordnung:

$$[F_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & ... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{31} & ... & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & ... & D_{n3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & ... & D_{nn} \end{pmatrix}$$

bzw. $F_{ik}(s) := D_{ki}(s)$ mit $i, k = 1, , , , n$.

Wir betrachten nun die Elemente $\alpha_{ik}(s)$ der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, d.h. die Quotienten $F_{ik}(s)/\Delta(s)$. Falls ein Polynom $F_{ik}(s)$ eine oder mehrere gemeinsame Nullstellen $s = s_\nu$ mit dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ hat, so kommt es zu einer *Kürzung* der gemeinsamen Faktoren. Besonders interessant ist der Fall, wenn *alle* n^2 Polynome $F_{ik}(s)$ *dieselben gemeinsamen Nullstellen* mit $\Delta(s)$ aufweisen! Sei das Polynom $q(s)$ der größte gemeinsame Teiler (ggT) *aller* n^2 Polynome $F_{ik}(s)$. Dann gilt

$$\mathbf{F}(s) =: q(s)\tilde{\mathbf{F}}(s) \quad \text{und} \quad \Delta(s) =: q(s)\tilde{\Delta}(s) \quad . \tag{2.8}$$

Das bedeutet, dass das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ durch $q(s)$ ohne Rest teilbar ist[6]! Man nennt das auf diese Weise konstruierte Polynom $\tilde{\Delta}(s)$ das *Minimalpolynom*[7] der Matrix $\mathbf{A}$. Man beachte: die Nullstellen des gradreduzierten Polynoms $\tilde{\Delta}(s)$ stimmen - abgesehen von ihrer Vielfachheit - mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ der Matrix $\mathbf{A}$ überein. Unter Beachtung von $\Delta(s) = \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{M_i}$ gemäß (2.4) besitzt das Minimalpolynom die Form:

$$\tilde{\Delta}(s) := \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{\mu_i} \ ; \ m = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_K \quad \text{mit} \ \ m \le n \ \ \text{und} \quad \mu_i \le M_i \tag{2.9}$$

Nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren in *allen* Elementen $F_{ik}(s)/\Delta(s)$ der Resolventen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ hat sie die reduzierte Form

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s) \quad \text{mit} \ \deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = m \le n \quad \text{und} \quad \deg\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s)\right\} = m - 1. \tag{2.10}$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ wird als *reduzierte adjungierte Matrix* oder *reduzierte Adjunkte* bezeichnet.

Durch Partialbruchzerlegung (abgekürzt: PBZ) der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$erhalten wir den Ausdruck

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \mathbf{L}_{il} \cdot \frac{1}{(s - s_i)^{l+1}} \ . \tag{2.11}$$

Hierbei ergeben sich die konstanten (n,n)-Matrizen $\mathbf{Y}_{il}$ zu

$$\mathbf{L}_{il} = \frac{1}{l!}\frac{1}{(\mu_i - 1 - l)!}\lim_{s \to s_i}\left\{\left[(s - s_i)^{\mu_i}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right]^{\mu_i - 1 - l}\right\} \ .$$

[6] Dies ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= : \det[d_{ik}] \\ &= d_{i1}D_{i1} + d_{i2}D_{i2} + ... + d_{in}D_{in} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \\ &= d_{1k}D_{1k} + d_{2k}D_{2k} + ... + d_{1n}D_{1n} \qquad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)} \quad . \end{aligned}$$

[7] Diese Definition ist äquivalent mit der oben angegebenen Definition, nach der es sich um das monische Polynom $\psi(s)$ mit kleinstem Grad und der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ handelt.

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich dann für die Transitionsmatrix der Ausdruck

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \mathbf{L}_{il} \cdot t^l e^{s_i t}$$

bzw.

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{K} (\mathbf{L}_{i0} + \mathbf{L}_{i1} \cdot t + \mathbf{L}_{i2} \cdot t^2 + ... + \mathbf{L}_{i(\mu_i-1)} \cdot t^{\mu_i - 1}) \cdot e^{s_i t} \quad . \tag{2.12}$$

Anhand (2.12) erkennt man, dass *falls* $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$ mit $i = 1, ..., K$ gilt, kein "Anwachsen" von $e^{\mathbf{A}t}$ erfolgt. Insbesondere folgt, dass die Transitionsmatrix die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0} \tag{2.13}$$

erfüllt. Es ist bemerkenswert, dass (2.13) notwendig und hinreichend ist, damit die Norm der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$ *exponentiell* abnimmt. Das bedeutet, dass zwei (reelle) Konstanten $\Lambda \geq 1$ und $\lambda > 0$ exisitieren, so dass für $t \geq 0$ die Ungleichung $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \Lambda e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}_0\|$erfüllt ist.

Nehmen wir an, dass *alle* Eigenwerte s_i die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$ erfüllen. Gilt nun für einen Eigenwert $\mathrm{Re}\{s_N\} = 0$, so erfolgt kein "Anwachsen" der Transitionsmatrix, falls dieser Eigenwert einfach auftritt, d.h. $\mathbf{L}_{Nl} = \mathbf{0}$ für $1 \leq l \leq M_{N-1}$ gilt. Aus obiger Darstellung für die Transitionsmatrix sind folgende zwei Sätze einsichtig:

Satz 1a: Das LZI-System (2.1) ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn *alle* Nullstellen s_i des Minimalpolynoms (und damit des charakteristischen Polynoms) der Matrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil besitzen, d.h. die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$ erfüllt ist.

Satz 2a: Das LZI-System (2.1) ist genau dann *stabil*, wenn

- *alle* Nullstellen s_i des Minimalpolynoms der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$ erfüllen *und*
- Nullstellen mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s_i\} = 0$ *einfach* auftreten.

Das bedeutet, dass für alle Nullstellen s_N mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s_N\} = 0$ *und* einer Vielfachheit $M_N > 1$ die Relation

$$\lim_{s \to s_i} \left\{ \left[(s - s_N)^{M_N} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \right]^{M_N - 1 - l} \right\} = \mathbf{0} \qquad \text{für} \quad l = 1, 2, ..., M_N - 1$$

erfüllt wird.

2.2.1 Minimalpolynom und Eigenrichtungen von A (*optional*)

Bei den nachfolgenden Ausführungen geht es um das Verständnis des Satzes 2 bzw. der

Aussage: existieren zu einem M-fachen Eigenwert einer (n, n)-Matrix M linear unabhängige Eigenvektoren, so existiert ein Minimalpolynom $\psi(s)$ mit $\deg\{\psi(s)\} < n - M$.

Hierzu betrachten wir eine (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$. Der mathematischen Einfachheit wegen besitze sie einen zweifachen Eigenwert $s_1 = s_2 =: \lambda$ und sonst *verschiedene* Eigenwerte s_i, d.h.

$s_1 = s_2 =: \lambda,\ s_3,\ s_4,\ ...\ ,s_n$. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet $\Delta(s) := \det\{s\mathbf{E}-\mathbf{A}\} = \prod_{i=1}^{n}(s-s_i)$. Wir untersuchen zwei Fälle:

1. Fall. Es wird *angenommen*, dass zum Eigenwert λ *zwei linear unabhängige* Eigenvektoren existieren. Demnach gelten die Beziehungen

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \ \text{ und } \ (\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

sowie

$$(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad i = 3,4,...,n \quad .$$

Hierbei sind *alle* Eigenvektoren linear unabhängig. Da die Matrizen $(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})$ und $(s_k\mathbf{E}-\mathbf{A})$ für alle Indizes i,k vertauschbar sind, können obige Beziehungen kompakt als Produkt zweier (n,n)-Matrizen angeschrieben werden

$$[(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})]\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,...,\mathbf{p}_n) = \mathbf{0} \quad . \tag{2.14}$$

Da die Matrix $(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,...,\mathbf{p}_n)$ in (2.14) aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren regulär ist, folgt, dass

$$\psi(\mathbf{A}) := [(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})] = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

gilt! Das bedeutet: es existiert ein Matrix-Polynom $\psi(\mathbf{A})$ vom Grad $(n-1)$, das gleich der Nullmatrix ist! Man beachte, dass nach dem Theorem von Cayley für *jede* Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i mit $i = 1,2,..,n$ die Relation

$$\Delta(\mathbf{A}) := [(s_1\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_2\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})] = \mathbf{0} \tag{2.16}$$

mit $\deg\{\Delta(\mathbf{A})\} = n$ gilt. Das bedeutet: das Polynom

$$\psi(s) := \prod_{i=2}^{n}(s-s_i) \quad \text{mit } \deg\{\psi(s)\} = n-1 \tag{2.17}$$

ist das Minimalpolynom der Matrix $\mathbf{A}$.

2. Fall: Wir nehmen an, dass zum zweifachen Eigenwert $s_1 = s_2 =: \lambda$ ein einziger Eigenvektor $\mathbf{p}_1$ gemäß $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ existiert. Dann kann ein sogenannter *Hauptvektor* $\mathbf{w}$ gemäß $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{w} = \mathbf{p}_1$berechnet werden, wobei die Vektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{w}$ linear unabhägig sind! Es gilt ferner $(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ für $i = 3,4,...,n$. Damit ist die (n,n)-Matrix $(\mathbf{p}_1,\mathbf{w},\mathbf{p}_3,...,\mathbf{p}_n)$ eine reguläre Matrix und das Produkt

$$\begin{aligned} & [(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})]\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{w},\mathbf{p}_3,...,\mathbf{p}_n) \\ = \ & (\mathbf{0},\mathbf{p}_1,\mathbf{0},...,\mathbf{0}) \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ergibt keine Nullmatrix. Das bedeutet, dass im vorliegenden Fall

$$[(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})] \neq \mathbf{0}$$

gilt und das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ auch das Minimalpolynom der Matrix ist.

Kapitel 3

Stabilität freier LZI-Systeme, lineare Matrix-Gleichungen

3.1 Einführung (direkte methode von Lyapunov)

Wir betrachten das freie lineare und zeitinvariante System (abgekürzt LZI-System) in Zustandsdarstellung

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \tag{3.1}$$

mit der (n, n)-Systemmatrix $\mathbf{A}$ und dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi}$. Zur Erinnerung: dieses System ist *genau dann* asymptotisch stabil, wenn $\mathbf{A}$ eine sogenannte Hurwitz[1]-Matrix ist. D.h. alle n Eigenwerte s_i von $\mathbf{A}$ weisen einen negativen Realteil auf $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$ für $i = 1, ..., n$.

Die Überprüfung des Stabilitätsverhaltens kann mit Hilfe der sogenannten direkten Mehode von Lyapunov[2]-Theorie und der Verwendung besonderer Funktionen (sogenannter Lyapunov-Funktionen) erfolgen: existiert in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ des Ursprungs $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine Funktion $V(\mathbf{x})$, die positiv definit ist und deren zeitliche Ableitung dV/dt negativ definit ist, so ist obiges LZI-System asymptotisch stabil! Der Ansatz $V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$ - es handelt sich um eine quadratishe Form in $\boldsymbol{\xi}$ -, wobei $\mathbf{P}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix[3] ist, führt mit (3.1) zu der Ableitung

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\xi} \ .$$

Diese ist ebenfalls eine quadratische Form in $\boldsymbol{\xi}$. *Falls* die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ negativ definit ist, so liegt asymptotische Stabilität vor. D.h. es muss $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ gelten, wobei $\mathbf{Q}$ eine symmetrische positiv definite (n, n)-Matrix ist.

Die Vorgehensweise zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität ist dann folgende: man gibt $\mathbf{Q}$ vor, löst obige lineare Matrix-Gleichung nach $\mathbf{P}$ auf und überprüft, ob sie positiv definit

[1] Adolf Hurwitz (*26.3.1859 in Hildesheim/Deutschland, +18.11.1919 in Zürich). DMV-Mitgliedschaft 1891-1919.

[2] Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (*6.6.1857 Yaroslavl/Russland, +3.11.1918 Odessa/Ukraine)

[3] Eine (n, n)-Matrix $\mathbf{P}$ heisst positiv definit, wenn für alle $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ die Ungleichung $\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} > 0$ erfüllt ist.

ist. Der Witz dieses Vorgehens besteht darin, dass eine Stabilitätsaussage *ohne* Berechnung des charakteristischen Polynoms $\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ durch Benutzung der Systemmatrix $\mathbf{A}$ selbst erfolgt! Nach Lyapunov gilt folgendes

Theorem: Das LZI-System (3.1) ist *genau dann* asymptotisch stabil, wenn zu jeder symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}$ eine eindeutige, symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{P}$ als Lösung der linearen Matrix-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \tag{3.2}$$

existiert.

Die nachfolgenden Ausführungen dienen einerseits dem tieferen Verständnis dieses Satzes, andererseits führen sie zu weiteren Anwendungen der sogenannten Lyapunov-Gleichung (3.2).

3.2 Die Sylvester-Gleichung FX + XG = H

Die Lyapunov-Gleichung (3.2) stellt einen Speziallfal der sogenannten Sylvester[4]-Gleichung

$$\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} = \mathbf{H} \tag{3.3}$$

dar[5]. Hierbei sind $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{X}$ quadratische (n, n)-Matrizen[6]. Es stellt sich folgende Frage: Unter welchen Bedingungen für $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ besitzt die Sylvester-Gleichung bei gegebener Matrix $\mathbf{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{X}$?

Diese Frage ist im skalaren Fall

$$fx + xg = h$$

leicht zu beantworten. Für

$$f + g \neq 0 \tag{3.4}$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$x = \frac{1}{f+g}h\ .$$

Bedenkt man, dass f bzw. g die Eigenwerte der $(1,1)$-Matrizen $\mathbf{F} := f$ bzw. $\mathbf{G} := g$ sind, bedeutet obige Bedingung (3.4), dass die Summe zweier *Eigenwerte* der Matrizen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ verschieden von null sein muss: $f + g \neq 0$. Es wird sich zeigen, dass im allgemeinen Fall die Summe zweier *beliebiger* Eigenwerte f_k von $\mathbf{F}$ und g_i von $\mathbf{G}$ verschieden von null sein muss

$$f_k + g_i \neq 0 \quad \text{für} \;\; i, k = 1, 2, ..., n. \tag{3.5}$$

[4] James Joseph Sylvester (*3.9.1814 in London, +15.3.1897 in London)

[5] J. Sylvester: *Sur l´equations en matrices px-xq.* Comptes rendus de l´Académie des sciences, 99(2) 67-71, 115-116, 1884

[6] Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für den Fall, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{H}$ *rechteckige* (m, n)-Matrizen, $\mathbf{F}$ eine (m, m)-Matrix und $\mathbf{G}$ eine (n, n)-Matrix sind. Ferner gelten sie auch für den Fall *komplexwertiger* Matrizen. Man braucht nur die Operation "Tranposition (T)" duch die Operation "konjugierte Transposition (*)" zu ersetzen.

3.2.1 Lösung der Sylvester-Gleichung mit Hilfe des Kronecker-Produktes

Die Gleichung (3.3) ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen für die gesuchten n^2 Elemente x_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ der Matrix $\mathbf{X} := [x_{ij}]$. Dieses Gleichungssystem hat die Form

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{h}} \; . \tag{3.6}$$

Der n^2-dimensionale Zeilenvektor $\hat{\mathbf{x}}^T$ wurde durch Aneinanderreihen der *Zeilen* der Matrix $\mathbf{X}$ gebildet:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \ldots \\ \mathbf{x}_{n-1}^T \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\mathbf{x}}^T := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T & \mathbf{x}_2^T & \ldots & \mathbf{x}_{n-1}^T & \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix} .$$

Der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{h}}$ wird in derselben Weise aus den *Zeilen* der Matrix $\mathbf{H}$ gebildet. In diesem Fall kann die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ vorteilhaft mit Hilfe des Kronecker[7]-Produktes[8] $\otimes$ zweier Matrizen durch

$$\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) + (\mathbf{G}^T \otimes \mathbf{E}) \tag{3.7}$$

dargestellt werden.

Die Eindeutigkeit des Lösungsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ bzw. der Lösungsmatrix $\mathbf{X}$ hängt von der Regularität der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. des linearen Operators $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{X}) := \mathbf{FX} + \mathbf{XG} \tag{3.8}$$

ab. Entscheidend für eine eindeutige Lösung der linearen Gleichung (3.6) ist die Lage der Eigenwerte η_l $(l = 1, 2, ..., n^2)$ der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$.

Zur Erinnerung: es gilt folgender

- **Satz 2**: Zu jedem $\hat{\mathbf{h}}$ existiert genau dann eine eindeutige Lösung $\hat{\mathbf{x}}$, wenn die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ regulär ist, d.h. wenn *kein* Eigenwert η_l verschwindet: $\eta_l \neq 0$ für $l = 1, ..., n^2$.

Es stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Eigenwerten η_l der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ und jenen der Matrizen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$. Hierzu gilt folgender

[7] Leopold Kronecker (7.12.1823 in Liegnitz/Deutschland, +29.12.1891 in Berlin)

[8] Seien $\mathbf{K} := [k_{ij}]$ eine (p, m)-Matrix und $\mathbf{L} := [l_{ij}]$ eine (q, n)-Matrix. Das Kronecker-Produkt $\mathbf{F} \otimes \mathbf{L}$ ist eine (pq, mn)-Matrix, deren (i, j)-Block die Matrix $k_{ij}\mathbf{L}$ ist:

$$\mathbf{K} \otimes \mathbf{L} := \begin{pmatrix} k_{11}\mathbf{L} & k_{12}\mathbf{L} & \ldots & k_{1m}\mathbf{L} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p1}\mathbf{L} & k_{p2}\mathbf{L} & & k_{pm}\mathbf{L} \end{pmatrix} .$$

Man beachte, dass das Kronecker-Produkt assoziativ und distributiv ist.

- **Satz 3**: η ist genau dann ein Eigenwert von $\hat{\mathbf{H}}$, wenn η durch die Summe $\eta := f + g$ mit einem Eigenwert f von $\mathbf{F}$ und einem Eigenwert g von $\mathbf{G}$ darstellbar ist[9].

Diese bemerkenswert einfache Beziehung wird mit Hilfe der Ausführungen im nachfolgenden Kapitel einsichtig.

Zum Verständnis des Satzes 3 (*optional*)

Hierbei untersuchen wir die Aussagen:
1.) " die Summe $(f_k + g_i)$ ist ein Eigenwert des Operators $\mathfrak{L}$ bzw. der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$" ,
2.) " *alle* Eigenwerte von $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. von $\mathfrak{L}$ ergeben sich durch die Summen $(g_i + f_k)$ ",

- **Zu 1):** Für einen Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_k$ der Matrix $\mathbf{F}$ gilt

$$\mathbf{F}\mathbf{p}_k = f_k\mathbf{p}_k \qquad k = 1, ..., n \quad .$$

Analog gilt für einen Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i^T$ der Matrix $\mathbf{G}$

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = g_i\boldsymbol{\rho}_i^T \qquad i = 1, ..., n \quad .$$

Wir betrachten nun die (n, n)-Matrix, die durch das dyadische Produkt $\mathbf{\Gamma}_{kl} := \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T$ entsteht, und bilden gemäß (3.8) den Ausdruck $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_k\mathbf{q}_i^T)$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{\Gamma}_{kl}) = \mathbf{F}\mathbf{\Gamma}_{kl} + \mathbf{\Gamma}_{kl}\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = f_k\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k g_i\boldsymbol{\rho}_i^T$$

bzw.

$$\mathfrak{L}(\mathbf{\Gamma}_{kl}) = \mathbf{F}\mathbf{\Gamma}_{kl} + \mathbf{\Gamma}_{kl}\mathbf{G} = (f_k + g_i)\mathbf{\Gamma}_{kl} \quad .$$

Das bedeutet, durch die Operation $\mathfrak{L}(\mathbf{\Gamma}_{kl})$ entsteht ein Vielfaches von $\mathbf{\Gamma}_{kl}$. Damit ist $(f_k + g_i)$ ein Eigenwert des Operators $\mathfrak{L}$ bzw. der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$.

- **Zu 2):** Umgekehrt gilt, dass sich *alle* Eigenwerte von $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. von $\mathfrak{L}$ durch die Summen $(g_i + f_k)$ ergeben. Dies kann folgendermaßen gezeigt werden: angenommen es gilt $\mathbf{FX} + \mathbf{XG} = \lambda\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$. Daraus folgt

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X} + \mathbf{XG} = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

Nach Multiplikation mit $\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}$ von links erhalten wir

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{X} + (\mathbf{F}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\mathbf{XG} = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

Durch Ausnutzung von $(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = -\mathbf{XG}$ gemäß (3.9) ergibt sich für (3.10)

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{X} - \mathbf{XG}^2 = \mathbf{0}.$$

[9] Eine alternative Formulierung ist die folgende: bezeichnet man die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{G}$ mit g_i und die der Matrix $\mathbf{F}$ mit f_k, so gilt

$$\eta_l = g_i + f_k \quad \text{mit} \quad i, k = 1, ..., n \;\; \text{und} \;\; l = i(n-1) + k$$

Die nochmalige Multiplikation mit $(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})$ ergibt dann analog vorgehend

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^3\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G}^3 = \mathbf{0}.$$

Man erkennt leicht das allgemeine witzige(!) Resultat

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^i\mathbf{X} - \mathbf{X}(-\mathbf{G})^i = \mathbf{0}$$

bzw.

$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F})^i\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{G}^i. \tag{3.11}$$

Das Cayley-Theorem, angewandt auf die Matix $\mathbf{G}$ mit dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$, besagt

$$\Delta(\mathbf{G}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{G}-g_i\mathbf{E}) = \mathbf{0}\ .$$

Nutzt man nun die Eigenschaft (3.11) aus, so gilt

$$\Delta(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}\cdot\Delta(\mathbf{G}) = \mathbf{0}.$$

Das bedeutet

$$\Delta(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}, \qquad \prod_{i=1}^{n}(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F}-g_i\mathbf{E})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

und schließlich

$$\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E}-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}\ .$$

Nachdem $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ ist, muss die Matrix $\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E}-\mathbf{F}\right]$ singulär sein. D.h. für einen Eigenwert g_i gilt:

$$\det\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E}-\mathbf{F}\right] = 0.$$

Damit gilt

$$f_k = \lambda - g_i$$

bzw. ein Eigenwert λ des Operators (3.8)

$$\mathfrak{L}(\mathbf{X}) := \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G}$$

ergibt sich durch eine Summe $(f_i + g_k)$ mit $i, k = 1, 2, ..., n$.

Eine **zu 2)** *alternative Betrachtung*: Es gilt, dass *alle* Eigenwerte von $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. $\mathfrak{L}$ sich durch die Summen $(g_i + f_k)$ ergeben. Dies kann auch folgendermaßen gezeigt werden: Angenommen es gilt

$$\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} = \lambda\mathbf{X}\ , \tag{3.12}$$

wobei λ *nicht* durch eine Summe eines Eigenwertes f der Matrix $\mathbf{F}$ und eines Eigenwertes g der Matrix $\mathbf{G}$ darstellbar ist. Dann kann λ unter Verwendung von zwei Eigenwerten zBsp f_I

und g_K durch $\lambda = f_I + g_K + \gamma$ mit $\gamma \neq 0$ dargestellt werden. Für Gleichung (3.12) ergibt sich somit

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{G}-g_K\mathbf{E}) = \gamma\mathbf{X}. \tag{3.13}$$

Multiplizieren wir obige Gleichung von rechts mit einem Rechtseigenvektor $\mathbf{g}$ zum Eigenwert g_K der Matrix $\mathbf{G}$, so erhalten wir

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X}\mathbf{g} + \mathbf{X}(\mathbf{G}-g_K\mathbf{E})\mathbf{g} = \gamma\mathbf{X}\mathbf{g}$$

bzw.

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})(\mathbf{X}\mathbf{g}) = \gamma(\mathbf{X}\mathbf{g}).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I: es wird *angenommen* dass das Produkt $\mathbf{Xg}$ verschieden vom Nullvektor ist: $\mathbf{Xg} \neq \mathbf{0}$. Das ist zBsp der Fall, wenn die Matrix $\mathbf{G}$ lauter verschiedene Eigenwerte und damit n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Dann ist $\mathbf{Xg}$ ein Rechtseigenvektor der Matrix $\mathbf{F}$ und γ ist Eigenwert der Matrix $\mathbf{F}-f_I\mathbf{E}$, d.h.

$$\gamma = f_k - f_I \quad \text{mit} \quad K \neq k \;\; \text{und} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Damit wird λ zu $\lambda = f_I + g_K + \gamma = g_K + f_k$, was im Widerspruch zu der getroffenen Annahme steht.

Fall II: Es wird nun *angenommen*, dass *kein* Rechtseigenvektor $\mathbf{g}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{Xg} \neq \mathbf{0}$ existiert. Dann besitzt die Matrix $\mathbf{G}$ mindestens einen mehrfachen Eigenwert g_M. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass ein einziger mehrfacher Eigenwert g_M existiert und dieser die algebraische Vielfachheit $\rho_M \geq 2$ besitzt. Die Matrix besitzt demnach $n - \rho_M + 1$ verschiedene Eigenwerte, die zugehörigen Rechtseigenvektoren sind linear unabhängig und erfüllen die Gleichung $\mathbf{Xg} = \mathbf{0}$. Ist die geometrische Vielfachheit des mehrfachen Eigenwertes g_M gleich seiner algebraischen Vielfachheit, so existieren ρ_M linear unabhängige Eigenvektoren. Damit liegt die gleiche Situation wie im Fall I vor. Zu dem mehrfachen Eigenwert kann ein Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$ ermittelt werden

$$(\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M = \mathbf{g}_M \qquad \text{mit} \;\; (\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\mathbf{g}_M = \mathbf{0} \;\; . \tag{3.14}$$

Man beachte, dass der Eigenvektor $\mathbf{g}_M$ sowie der Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$ linear unabhängig sind. Multiplizieren wir obige Gleichung (3.13) von rechts mit dem Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$, so erhalten wir

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M + \mathbf{X}(\mathbf{G}-g_K\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M = \gamma\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M$$

bzw. mit (3.14)

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M + \mathbf{X}\mathbf{g}_M = \gamma\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M \;.$$

Aufgrund der Annahme $\mathbf{X}\mathbf{g}_M = \mathbf{0}$ gilt dann

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})(\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M) = \gamma(\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M).$$

Ist das Produkt $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M \neq \mathbf{0}$, so liegt wieder der besprochene Fall I vor. Das bedeutet, dass $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M$ ein Rechtseigenvektor der Matrix $\mathbf{F}-f_I\mathbf{E}$ und dass γ deren Eigenwert ist. Wie im Fall I führt dies zu einem Widerspruch. Ist das Produkt $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M = \mathbf{0}$, so wird obige Vorgehensweise wiederholt, indem man einen weiteren Hauptvektor bildet. Das geschieht anhand der rekursiven Relation (für $i = 2, 3, ..., \rho_M$)

$$(\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M^{(i)} = \tilde{\mathbf{g}}_M^{(i-1)} \qquad \text{mit} \;\; \tilde{\mathbf{g}}_M^{(1)} = \mathbf{g}_M \;\; \text{und } (\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M^{(\rho_M)} = \mathbf{0}$$

und erzeugt eine Kette von Hauptvektoren, die aus linear unabhängigen(!) Vektoren besteht. Man nennt $\tilde{\mathbf{g}}_M^{(i)}$ einen Hauptvektor der Stufe i, wobei $\tilde{\mathbf{g}}_M^{(1)}$ der Hauptvektor der Stufe 1 der Eigenvektor $\mathbf{g}_M$ ist. Damit erzeugt man Verhältnisse wie im Fall I und kann die dortige Argumentation benutzen, um einen Widerspruch zu erzeugen. Mit anderen Worten: *jeder* Eigenwert η der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ ergibt sich durch die Summe $\eta = f + g$ der Eigenwerte f der Matrix $\mathbf{F}$ und der Eigenwerte g der Matrix $\mathbf{G}$.

3.2.2 Lösung der Sylvester-Gleichung mit Hilfe einer Differentialgleichung

Wir betrachten die lineare Matrix-Differentialgleichung bezüglich der quadratischen (n, n)-Matrix $\mathbf{X}(t)$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG} - \mathbf{H} \tag{3.15}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_0$. Hierbei sind $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ konstante quadratische (n, n)-Matrizen. Die Lösung $\mathbf{X}(t)$ kann aufgrund der Linearitätseigenschaft durch Superposition der Lösungen folgender Probleme ermittelt werden:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{GX} \qquad \text{mit } \mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_0 \qquad (\textit{freie}\ \text{Lösung}) \tag{3.16}$$

und

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{GX} - \mathbf{H} \qquad \text{mit } \mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{0} \qquad (\textit{erzwungene}\ \text{Lösung}) \; . \tag{3.17}$$

Zur freien Lösung: die vorliegende Differentialgleichung (3.16) ist die Verallgemeinerung der wohlbekannten Differentialgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\Xi}}{dt} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Xi} \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Xi}(t = 0) = \boldsymbol{\Xi}_0 \; .$$

Bezeichnen wir mit $e^{\mathbf{F}t}$ die Transitionsmatrix, so lautet die Lösungsmatrix $\boldsymbol{\Xi}(t) = e^{\mathbf{F}t} \cdot \boldsymbol{\Xi}_0$. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{G} \qquad \text{bzw. deren Transponierte} \quad \frac{d\boldsymbol{\Psi}^T}{dt} = \mathbf{G}^T\boldsymbol{\Psi}^T$$

mit dem Anfangswert $\boldsymbol{\Psi}(t = 0) = \boldsymbol{\Psi}_0$. Mit Hilfe der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{G}^T t} = \left(e^{\mathbf{G}t}\right)^T$ erhalten wir die Lösung

$$\boldsymbol{\Psi}^T(t) = e^{\mathbf{G}^T t} \cdot \boldsymbol{\Psi}_0^T \qquad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Psi}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t} \; .$$

Damit erscheint naheliegend, für die Lösung der *freien* Differentialgleichung $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG}$ mit $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$ den Ansatz

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t} \tag{3.18}$$

aufzustellen. Die Differentiation dieses Ausdruckes nach t ergibt (erfreulicherweise)

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{G}e^{\mathbf{G}t} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG} \ .$$

Zur erzwungenen Lösung: Ausgehend von obigem Resultat wird im vorliegenden Fall (3.17) der Ansatz (3.18) verändert und durch folgenden ("Variation der Matrix-Konstanten") ersetzt:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{Z}(t) \cdot e^{\mathbf{G}t}. \tag{3.19}$$

Gesucht ist die Matrix $\mathbf{Z}(t)$. Nach Differentiation des Ansatzes

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t}\right] &= \frac{de^{\mathbf{F}t}}{dt}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)\frac{de^{\mathbf{G}t}}{dt} \\
&= \mathbf{F}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t}\mathbf{G} \\
&= \mathbf{FX}(t) + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + \mathbf{X}(t)\mathbf{G}
\end{aligned}$$

und Einsetzen in (3.17) erhalten wir eine Differentialgleichung für $\mathbf{Z}(t)$

$$e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} = -\mathbf{H} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = -e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}t} \ .$$

Deren Lösung ergibt sich *unmittelbar* durch Integration zu

$$\mathbf{Z}(t) = -\int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}\tau}d\tau \ . \tag{3.20}$$

Durch Überlagerung der freien und der erzwungenen Lösung erhalten wir die Gesamtlösung

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t}\left(\mathbf{X}_0 - \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}\tau}d\tau\right)e^{\mathbf{G}t} = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{X}_0e^{\mathbf{G}t} - \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}(t-\tau)}d\tau \ .$$

Nach einer Änderung der Integrationsvariablen ergibt sich schließlich

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{X}_0e^{\mathbf{G}t} - \int_0^t e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}\tau}d\tau. \tag{3.21}$$

Man erkennt anhand dieses Ausdruckes, dass *falls* $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ Hurwitz-Matrizen sind, die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{F}t} = \lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{G}t} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) =: \mathbf{X}_\infty$$

existieren. Letzterer ist durch

$$\mathbf{X}_\infty = -\int_0^\infty e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}\tau}d\tau \tag{3.22}$$

gegeben. Damit gilt im vorliegenden Fall

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{0} = \mathbf{F}\mathbf{X}_\infty + \mathbf{G}\mathbf{X}_\infty - \mathbf{H} \ ,$$

d.h. $\mathbf{X}_\infty$ erfüllt die algebraische Matrix-Gleichung $\mathbf{F}\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{G} = \mathbf{H}$ gemäß (3.3) und ist deren eindeutige Lösung.

Bemerkungen zur Struktur der freien Lösung:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} \tag{3.23}$$

und suchen *eine mögliche* Lösung. Wir stellen - in voller Analogie zu der Vorgehensweise bei LZI-Systemen gemäß (3.1) - den Ansatz

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Gamma}e^{st} \tag{3.24}$$

auf. Hierbei müssen die konstante Matrix $\mathbf{\Gamma}$ und die skalare Konstante s noch ermittelt werden. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung (3.23) ergibt sich nach Kürzung des von null verschiedenen Faktors e^{st} folgende *nichtlineare* Gleichung mit den unbekannten Größen $\mathbf{\Gamma}$ und s

$$s\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{G} \ . \tag{3.25}$$

Zur Ermittlung von $\mathbf{\Gamma}$ und s gehen wir folgendermaßen vor: es wird für $\mathbf{\Gamma}$ ein Ansatz mit Hilfe von Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ aufgestellt. Hierzu benutzt man Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_k$ der Matrix $\mathbf{F}$ und Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$ der Matrix $\mathbf{G}$, d.h.

$$\mathbf{F}\mathbf{p}_k = f_k\mathbf{p}_k \quad \text{mit } k = 1, ..., n \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = g_i\boldsymbol{\rho}_i^T \quad \text{mit } i = 1, ..., n \ .$$

Wählen wir die konstante Matrix $\mathbf{\Gamma}$ als das dyadische Produkt $\mathbf{\Gamma}_{ki} = \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T$, so erhalten wir für (3.25)

$$\begin{aligned} s\mathbf{\Gamma}_{ki} &= \mathbf{F}\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = f_k\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k g_i\boldsymbol{\rho}_i^T = (f_k + g_i)\,\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T \\ &= (f_k + g_i)\,\mathbf{\Gamma}_{ki} \ . \end{aligned}$$

Durch die weitere Festlegung $s = f_k + g_i$ ist $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Gamma}_{ki}e^{st}$ eine mögliche Lösung der Differentialgleichung (3.23)!

Das zeitliche Verhalten der Lösung

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Gamma}_{ki} \cdot e^{(f_k+g_i)t} = \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T \cdot e^{(f_k+g_i)t} \tag{3.26}$$

wird durch Exponentialfunktionen $e^{(f_k+g_i)t}$ charakterisiert. Wählt man ferner mit Hilfe von Eigenrichtungen von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ den Anfangswert gemäß

$$\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{\Gamma}_{ki} = \mathbf{p}_k \boldsymbol{\rho}_i^T,$$

so besitzt die Lösung $\mathbf{X}(t)$ obige prägnante Struktur (3.26). Damit kann $\mathbf{\Gamma}_{ki} = \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T$ als "Eigenmatrix" und $s = f_k + g_i$ als "Eigenwert" des "Systems" $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG}$ interpretiert werden.

3.3 Die Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A^TP + PA = \text{-}Q}$

Es wird *vorausgesetzt*, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{Q}$ quadratische (n,n)-Matrizen sind. Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen bekanntersweise die gleichen Eigenwerte α_i. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass

$$\alpha_i + \alpha_k \neq 0 \quad \text{für} \qquad i,k = 1,...,n \tag{3.27}$$

gilt. Demnach existieren *keine* Eigenwerte mit verschwindendem Realteil bzw. *keine* an der imaginären Achse gespiegelten Eigenwerte. Nach den oben formulierten Sätzen 1 und 2 existiert damit für *jede* Matrix $\mathbf{Q}$ eine *eindeutige* Lösung $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$.

3.3.1 Lösung mit Hilfe des Kronecker-Produktes

Obige Lyapunov-Gleichung ist folgendem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Elemente p_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ der Matrix $\mathbf{P} := [p_{ij}]$ äquivalent:

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{q}} \quad . \tag{3.28}$$

Hierbei wird der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{p}}^T$ durch Aneinanderreihen der Zeilen der Matrix $\mathbf{P}$ gebildet:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ ... \\ \mathbf{p}_{n-1}^T \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{p}}^T := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T & \mathbf{p}_2^T & ... & \mathbf{p}_{n-1}^T & \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix}.$$

Der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{q}}$ wird in derselben Weise aus den Zeilen der Matrix $\mathbf{Q}$ gebildet. Die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ kann mit Hilfe des Kronecker-Produktes $\otimes$

$$\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{A}^T) + (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{E}) \tag{3.29}$$

dargestellt werden.

Beispielhaft sei hier der Fall der allgemeinen $(2,2)$-Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

angeführt. Es ergibt sich für $\hat{\mathbf{H}}$:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{11}+a_{22} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{11}+a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} .$$

3.3.2 Integral-Darstellung der Lösungsmatrix P

Es wird nun *angenommen*, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist. Die Lösung $\mathbf{P}$ kann dann mit Hilfe des folgenden uneigentlichen Integrals dargestellt werden:

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt \quad . \tag{3.30}$$

Das Ergebnis kann aufgrund der vorangegangenen Ausführungen über die Sylvester-Gleichung bzw. der Relation (3.22) unmittelbar angegeben werden. Die Richtigkeit der Relation (3.30) kann ansonsten leicht nachvollzogen werden. Hierzu beachte man, dass das Integral $\mathbf{I} := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt$ wohldefiniert ist, da $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist. Wir bilden nun $\mathfrak{L}(\mathbf{I})$ gemäß (3.8) und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathbf{I}) &= \mathbf{A}^T\mathbf{I} + \mathbf{I}\mathbf{A} = \int_0^\infty \left(\mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t} + e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\right) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\right) dt \\ &= e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\Big|_0^\infty = -\mathbf{Q} \quad . \end{aligned}$$

D.h. das Integral $\mathbf{I}$ ist die (eindeutige) Lösung $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung.

3.3.3 Symmetrie und positive Definitheit der Lösungsmatrix P

Wir *nehmen an*, dass $\mathbf{Q}$ eine symmetrische Matrix ist. Nach Transposition der Lyapunov-Gleichung erhalten wir $\mathbf{P}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}^T = -\mathbf{Q}$. Das bedeutet, dass $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^T$ dieselbe Gleichung erfüllen. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung gilt $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, d.h. die Lösungsmatrix ist symmetrisch. In diesem Fall entspricht die Lyapunov-Gleichung einem linearen Gleichungssystem für die $n(n+1)/2$ unbekannten Elemente der symmetrischen Matrix $\mathbf{P}$.

Wir untersuchen nun die positive Definitheit der Lösungsmatrix. Hierzu unterscheiden wir die Fälle $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$.

1. Fall $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ Es gilt folgendes **Lemma**: unter der Voraussetzung, dass die symmetrische Matrix $\mathbf{Q}$ positiv definit ist, gilt gleiches für die Lösungs-Matrix $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad . \tag{3.31}$$

Zum Verständnis des Lemmas: Nachdem die Matrix $\mathbf{Q}$ positiv definit ist, kann sie mit Hilfe einer regulären Matrix (n,n)-Matrix $\mathbf{C}$ folgendermaßen dargestellt bzw. zerlegt werden $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Wir bilden nun mit Hilfe eines beliebigen n-dimensionalen Vektors $\mathbf{x}_0$ und der (n,n)-Matrix $\mathbf{P}$ gemäß $\mathbf{P} := \int\limits_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}dt$ die quadratische Form $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x}_0$ und erhalten

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = \int\limits_0^\infty \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 dt = \int\limits_0^\infty \left(\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right)^T \left(\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right) dt\ .$$

Damit ergibt sich - mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|$ eines Vektors - die Ungleichung $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = \int\limits_0^\infty \left\|\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right\|^2 dt \geq 0$. Das Gleichheitszeichen wird, nachdem die Matrix $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}$ regulär ist, nur für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ angenommen, d.h. die Matrix $\mathbf{P}$ ist positiv definit.

2. Fall $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ In Analogie zum 1. Fall ist nun die symmetrische *semidefinite* Matrix $\mathbf{Q}$ mit Hilfe einer *rechteckigen* (m,n)-Matrix $\mathbf{C}$ durch $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ darstellbar, wobei der Rang der Matrix $\mathbf{C}$ kleiner als n ist[10]. Das bedeutet, $\mathbf{C}$ besitzt linear abhängige Spalten. Für die quadratische Form $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0}$ ergibt sich wiederum $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = \int\limits_0^\infty \left\|\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right\|^2 dt \geq 0$. Wir wollen nun Bedingungen für die Matrix $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}$ aufstellen, damit $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ *ausschließlich* für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ zu Null wird. Angenommen es ist $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ aber $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = 0$. Dann folgt, dass $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = 0$ für $t \geq 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das *fiktive* LZI-System mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi}$, der Eingangsgröße $\mathbf{u}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{w}$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{w} = \mathbf{C}\boldsymbol{\psi} \tag{3.32}$$

beobachtbar ist! Knapp formuliert: das Paar $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ muss beobachtbar sein[11].

Bei Vorliegen der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{C}^T\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

[10] Beispiel hierzu:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[11] Man beachte, dass für das fiktive LZI-System (3.32) das Integral $\mathbf{W}_B := \int\limits_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}dt$ die sogenannte Beobachtbarkeits-Gram-Matrix ist. Sie erfüllt die Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{W}_B + \mathbf{W}_B\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Der analoge Ausdruck $\mathbf{W}_S := \int\limits_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}dt$ ist die sogenannte Steuerbarkeits-Gram-Matrix und erfüllt die Lyapunov-Gleichung $\mathbf{W}_S\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{W_S} = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T$.

gilt damit folgende Aussage:

$$\mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \quad \textit{sowie} \quad (\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \ . \tag{3.33}$$

Des Weiteren gelten die Aussagen

$$(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \textit{sowie} \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \tag{3.34}$$

$$\mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \ \ \textit{sowie} \ \ \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \ . \tag{3.35}$$

Anmerkung

Man beachte, dass falls eine Matrix $\mathbf{P}$ positiv definit und $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, die *berechnete* Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}$ *nicht* zwingend negativ definit ist! Hierzu folgendes einfaches Beispiel: bei der Dreiecks-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (a \ \text{ ist beliebige reelle Konstante})$$

handelt es sich offensichtlich eine Hurwitz-Matrix. Wählt man als $\mathbf{P}$ die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$, so ist diese offensichtlich positiv definit. Es ergeben sich

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \ \text{ und } \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & -2 \end{pmatrix}.$$

Die berechnete Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}$ ist für $|a| > 2$ indefinit!

3.3.4 Die Erweiterung eines Theorems von Lyapunov nach Taussky

Nach Taussky[12] gilt[13]folgendes

Theorem: es wird *vorausgesetzt*, dass die Eigenwerte α_i der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung $\alpha_i + \alpha_k \neq 0$ für $i, k = 1, ..., n$ erfüllen. Dann besitzt die Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$ für jede positiv definite symmetrische Matrix $\mathbf{Q}$ eine *eindeutige, reguläre* und symmetrische Lösungs-Matrix $\mathbf{P}$, die N positive Eigenwerte hat. Hierbei ist N gleich der Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit negativem Realteil. Demnach besitzen die restlichen $n - N$ Eigenwerte von $\mathbf{A}$ einen positiven Realteil.

[12] Olga Taussky-Todd (* 30.8.1906 in Olmütz / Österreich-Ungarn, + 7.10.1995 in Pasadena, California)

[13] Olga Taussky: *A Generalization of a Theorem of Lyapunov.* J. Soc. Indust. Math. Vol.9, No. 4, December 1961

3.3.5 Beispiel (kanonische Form von Schwarz)

Wir betrachten den Fall, dass die (n,n)-Systemmatrix $\mathbf{A}$ in der sogenannten Schwarz-Form[14]mit reellen und von null verschiedenen Parametern $\beta_i \neq 0$ ($i = 0,...,n-1$) vorliegt[15]:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \ddots & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & -\beta_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt folgender

Satz: obige Matrix $\mathbf{A}$ ist *genau dann* eine Hurwitz-Matrix, wenn alle Parameter β_i positiv sind[16], d.h. $\beta_i > 0$ für $i = 0,...,n-1$.

Dies kann elegant durch Lösung der Lyapunov-Gleichung bewiesen werden[17]. Um die Schreibarbeit gering zu halten und den Lösungsweg besser zu erkennen, untersuchen wir den Fall $n = 3$, d.h. eine $(3,3)$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} \qquad ; \; \beta_i \neq 0 \qquad i = 0,1,2 \; .$$

Die Vorgehensweise im allgemeinen Fall ist die gleiche.

Wir betrachten die Lyapunov-Gleichung in der Form $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ mit $\mathbf{C}^T\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$ und wollen bei der Stabilitätsuntersuchung die Aussage (3.34)

$$(\mathbf{C},\mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \textit{und} \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix}$$

---

[14]Zur Erinnerung: jede (n,n)-Matrix, die nichtderogatorisch ist , d.h. deren Minimalpolynom den Grad n hat, kann mittels einer regulären Transformation in diese Form gebracht werden. Zum Entstehen der Schwarz-Matrix aus Sicht der Elektrotechnik siehe zBsp H.N. Dourdoumas und R. Seeber, *Algebraische Stabilitätskriterien*. Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der TUGraz.

[15]Es ist beachtenswert, dass β_{n-1} gleich der negativen Summe der Eigenwerte dieser Matrix ist. Dies ergibt sich leicht durch Berechnung des charaktristischen Polynoms $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ indem man die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt.

[16]Dieser folgt aus einem **Theorem** von Schwarz. Hierzu werden zunächst für $i = 1,2,...,n$ die Größen $P_i = P_{i-1} \cdot \beta_{n-i}$ mit $P_0 := 1$ eingeführt. D.h. $P_1 = \beta_{n-1}$, $P_2 = \beta_{n-1}\beta_{n-2}$, $P_3 = \beta_{n-1}\beta_{n-2}\beta_{n-3}$, ..., $P_n = \prod_{i=1}^{n-1} \beta_{n-i}$. Betrachtet man dann die Zahlenfolge $\{\; P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad ... \quad P_n \;\}$ so ist die Anzahl N der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, die einen *negativen* Realteil besitzen, gleich der Anzahl der *positiven* Werte der Zahlenfolge. Damit beträgt die Anzahl M der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, die einen *positiven* Realteil besitzen, $n - N$ und entspricht der Anzahl der *negativen* Werte der Zahlenfolge.

[17]Siehe den Aufsatz von R.E. Kalman & J. Bertram: *Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov: I Continuous-time Systems,* Trans. ASME J. Basic Engineering Series D., vol. 82, 371-393, 1960

ausnutzen. Wir wählen nun

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \end{pmatrix} =: \mathbf{e}_3^T K \quad \text{mit} \quad K \neq 0$$

Das Paar $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ ist dann beobachtbar. Dies folgt unmittelbar aus dem Hautus-Kriterium durch Aufstellen der Hautus-Beobachtbarkeits-Matrix

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ \beta_0 & s & -1 \\ 0 & \beta_1 & s + \beta_2 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix},$$

die offensichtlich - nach Streichen der 1. Zeile - den Rang 3 aufweist. Die zu lösende Lyapunov-Gleichung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 \end{pmatrix}.$$

Die Idee besteht darin, die gesuchte Lösung $\mathbf{P}$ als *Diagonalmatrix* $\mathbf{P} = \mathrm{diag}(p_1,\ p_2,\ p_3)$ anzusetzen. Nach einigen Umrechnungen ergibt sich damit für die Lyapunov-Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 - p_2\beta_0 & 0 \\ p_1 - p_2\beta_0 & 0 & p_2 - p_3\beta_1 \\ 0 & p_2 - p_3\beta_1 & -2p_3\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen die zu erfüllenden Gleichungen

$$2p_3\beta_2 = K^2, \quad p_2 - p_3\beta_1 = 0 \text{ und } \ p_1 - p_2\beta_0 = 0\ .$$

Man erkennt die *rekursive* Berechnung der Elemente der Matrix $\mathbf{P}$. Wählt man - aus kosmetischen Gründen - $K^2 = 2\beta_2^2$, so erhält man $p_3 = \beta_2$, $p_2 = \beta_2\beta_1$ und $p_1 = \beta_2\beta_1\beta_0$ bzw. die Lösung

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta_2\beta_1\beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist im Falle $\beta_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ die Diagonalmatrix $\mathbf{P}$ positiv definit. Aufgrund des o.a. Satzes (3.34) ist die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix[18].

Im allgemeinen Fall ergibt sich die Lösungsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta_{n-1}\beta_{n-2}...\beta_2\beta_1\beta_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{n-1}\beta_{n-2}...\beta_2\beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-1}\beta_{n-2}...\beta_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \beta_{n-1}\beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

[18] Des Weiteren erkennt man unmittelbar mit Hilfe des Theorems von Taussky, nach dem die Anzahl der positiven Eigenwerte p_i mit der Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit negativem Realteil übereinstimmt, die Gültigkeit des o.a. Theorems von Schwarz.

3.3.6 Asymptotische Stabilität diskreter LZI-Systeme

Durch Lösung einer Lyapunov-Gleichung kann die asymptotische Stabilität *diskreter* LZI-Systeme der Form

$$\boldsymbol{\xi}_{i+1} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\xi}_i \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

untersucht werden. Zur Erinnerung: asymptotische Stabilität liegt *genau dann* vor, wenn *alle* Eigenwerte z_k der (n, n)-Matrix $\mathbf{A}_d$ im Inneren des Einheitskreises (abgekürzt EHK) liegen, d.h. $|z_k| < 1$ für $k = 1, 2, ..., n$.

Unterwirft man die Matrix $\mathbf{A}_d$ einer sogenannten bilinearen Transformation

$$\mathbf{A} := (\mathbf{A}_d - \mathbf{E})(\mathbf{A}_d + \mathbf{E})^{-1}, \tag{3.36}$$

so ergeben sich die Eigenwerte w_k der Matrix $\mathbf{A}$ aus den Eigenwerten z_k der erzeugenden Matrix $\mathbf{A}_d$ gemäß der gleichen(!) bilinearen Relation

$$w_k = (z_k - 1)(z_k + 1)^{-1} \quad . \tag{3.37}$$

Der Witz dieser Transformation besteht darin, dass durch Anwendung der (konformen) Abbildung

$$w = (z - 1)(z + 1)^{-1} \tag{3.38}$$

einerseits der EHK $|z| = 1$ auf die imaginäre Achse abgebildet wird, andererseits das Innere des EHK $|z| < 1$ in die linke offene w-Ebene übergeht[19]. Damit gilt für beliebige Eigenwerte z_k

$$|z_k| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{w_k\} < 0 \qquad \text{sowie} \qquad |z_k| = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\{w_k\} = 0. \tag{3.39}$$

Die Überprüfung der Stabilität des diskreten LZI-Systems in Zustandsdarstellung ist damit zurückgeführt auf die - schon bekannte - Überprüfung der Stabilität eines fiktiven zeitkontinuierlichen LZI-Systems. Das bedeutet: asymptotische Stabilität im diskreten Fall liegt *genau dann* vor, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ nach (3.36) eine Hurwitz-Matrix ist. Letzteres kann mit Hilfe der Lyapunov-Gleichung überprüft werden.

Anmerkungen

Im allgemeinen Fall[20] liegt eine Funktion $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ vor, bei der γ und δ nicht beide zu Null werden dürfen. Unter der Voraussetzung $\gamma \neq 0$ erhalten wir zunächst

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} \frac{1}{\gamma z + \delta}. \tag{3.40}$$

Unter der weiteren Voraussetzung $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, damit obige Abblildung nicht zu einer Konstanten degeneriert, kann die Abbildung zu

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\beta}{\gamma}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} =: \frac{az + b}{z + d}$$

[19] Siehe zBsp R.C. Oldenbourg und H. Sartorius: *Dynamik selbsttätiger Regelungen,* Oldenbourg Verlag München, 1944

[20] Siehe hierzu zBsp H. Behnke und F. Sommer *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen,* (Kap. IV Konforme Abbildungen, §3), Springer-Verlag, 1962

umgeformt werden. Die Konstanten a, b und d werden nun so festgelegt, dass der EHK auf die imaginäre Achse der w-Ebene und sein Inneres auf die linke offene w-Ebene abgebildet wird. Man gibt hierzu drei gewünschte Zuordnungen vor. Betrachtet man zBsp die z-Werte $\{-j,\ 1,\ +j\}$ und fordert die zugehörigen w-Werte $\{-j,\ 0,\ +j\}$, so erhält man obige Abbildung (3.38) $w = (z-1)(z+1)^{-1}$:

$$\{-j,\ 1,\ +j\} \rightarrow \{-j,\ 0,\ +j\} \qquad \text{für} \quad w = \frac{z-1}{z+1} \ \text{ bzw. } z = \frac{1+w}{1-w}. \tag{3.41}$$

Man kann allerdings *alternativ* folgende Zuordnung ansetzen $\{+j,\ -1,\ -j\} \rightarrow \{-j,\ 0,\ +j\}$. Dies liefert die Werte $a = b = 1$ und $d = -1$, d.h.

$$\{+j,\ -1,\ -j\} \rightarrow \{-j,\ 0,\ +j\} \quad \text{für} \quad w = \frac{z+1}{z-1} \ \text{ bzw. } \ z = \frac{w+1}{w-1}\ . \tag{3.42}$$

Mit anderen Worten: zur Stabilitätsüberprüfung kann alternativ zur Matrix $\mathbf{A}$ gemäß (3.36) die Matrix

$$\bar{\mathbf{A}} : = (\mathbf{A}_d + \mathbf{E})(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})^{-1} \tag{3.43}$$

- deren Inverse - herangezogen werden[21].

Der Vorteil der Benutzung von $\mathbf{A}$ gemäß (3.36) liegt bei regelungstechnischen Anwendungen mit sogenannten *Abtastsystemen*[22]. In solchen Fällen ergibt sich üblicherweise[23] die Systemmatrix $\mathbf{A}_d$ des zeitdiskreten LZI-Systems mit Hilfe der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eines zeitkontinuierlichen gemäß $\mathbf{A}_d = e^{\tilde{\mathbf{A}}T_d}$, wobei T_d die Abstastzeit (Diskretisierungszeit) ist. Damit besteht per se zwischen den Eigenwerten s_k der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und den Eigenwerten z_k der Matrix $\mathbf{A}_d$ die Beziehung $z_k = e^{s_k T_d}$. Dies steht im Einklang mit

$$\mathbf{A} = (e^{\tilde{\mathbf{A}}T_d} - \mathbf{E})(e^{\tilde{\mathbf{A}}T_d} + \mathbf{E})^{-1} = \tanh(e^{\tilde{\mathbf{A}}T_d/2}) \quad \text{bzw.} \quad w_k = \frac{z_k - 1}{z_k + 1} = \tanh(s_k \frac{T_d}{2})$$

gemäß (3.36) bzw. gemäß (3.41). Insbesondere beim Entwurf von Abtatsregelkreisen mit Frequenzkennlinien arbeitet man mit der skalierten Variante $\frac{T_d}{2} w = \frac{z-1}{z+1}$. Dadurch geht für kleine Abtastzeiten T_d, präziser formuliert für $T_d \rightarrow 0$, der Frequenzgang des zeitdiskreten Systems nahtlos in den Frequenzgang des zeitkontinuierlichen über! Damit kann zBsp das klassische Frequenzkennlinienverfahren für kontinuierliche Systeme ohne große Änderungen auf Abtastsysteme übertragen werden.

Des Weiteren sei bemerkt, dass die Abbildungsvorschrift $\frac{2}{T_d}\frac{z-1}{z+1}$ beim sogenannten *quasikontinuierlichen* Reglerentwurf eingesetzt wird. Ausgehend von einem zeitkontinuierlichen Regler mit der Übertragungsfunktion $R(s)$ erzeugt man einen zeitdiskreten Regler mit der Übertragungsfunktion $\bar{R}(z)$ durch *Approximation.* Eine Möglichkeit besteht darin die Integration einer zeitkontinuierlichen Funktion mit Hilfe der wohlbekannten Trapezregel anzunähern. Dadurch erhält man ausgehend von einem Integrierer mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{s}$

[21] Man bemerke, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ und die der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ bezüglich des Einheitskreises $|z| = 1$ gespiegelt sind.

[22] Hierzu siehe zBsp Felix Gausch, Anton Hofer, Kurt Schlacher: *Digitale Regelkreise,* (Kap. 5), R. Oldenbourg Verlag, 1991

[23] Hierbei betrachtet man die Sprungantwort $h(t)$ des zeitkontinuierlichen bzw. h_i des zeitdiskreten Systems und fordert: $h_i = h(iT_d)$ für $i = 0, 1, 2, ...$

einen zeitdiskreten approximativen Integrierer mit der z-Übertragungsfunktion $\frac{T_d}{2}\frac{z+1}{z-1}$. Die Reglerübertragungsfunktion $\bar{R}(z)$ erhält man dann gemäß $\bar{R}(z) := R\left(s = \frac{2}{T_d}\frac{z-1}{z+1}\right)$. Diese klassische Vorgehensweise ist in der Fachliteratur als Tustin[24]-Methode[25] bekannt.

3.3.7 Ergänzungen

Stabilitätsrand

Hierbei geht es darum zu überprüfen, ob die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in der linken offenen s-Ebene liegen und einen *Mindestabstand* (sogenannten *Stabilitätsrand*) σ von der imaginären Achse aufweisen. Sei $\mathbf{A}$ eine reelle (n, n)-Matrix mit den Eigenwerten α_k, ferner sei σ eine reelle Konstante. Wir bilden eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ gemäß $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \sigma\mathbf{E}$. Die Eigenwerte $\tilde{\alpha}_k$ von $\tilde{\mathbf{A}}$ lauten $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k + \sigma$ und damit gilt

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\alpha}_k\} = \mathrm{Re}\{\alpha_k\} + \sigma \ .$$

Wir betrachten nun die Lyapunov-Gleichung $\tilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q}$ bzw.

$$(\mathbf{A} + \sigma\mathbf{E})^T\mathbf{P} + (\mathbf{A} + \sigma\mathbf{E})\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + 2\sigma\mathbf{E}\mathbf{P} = -\mathbf{Q},$$

wobei $\mathbf{Q}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Es gilt: genau dann, wenn $\mathbf{P}$ positiv definit ist, ist die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Hurwitz-Matrix. Das heißt $\mathrm{Re}\{\tilde{\alpha}_k\} = \mathrm{Re}\{\alpha_k\} + \sigma < 0$ bzw.

$$\mathrm{Re}\{\alpha_k\} < -\sigma \ .$$

Ist σ eine *nichtnegative* Konstante, so liegen die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in der linken offenen s-Ebene und weisen den Mindestabstand σ von der imaginären Achse auf.

Berechnung der 2-Norm der Gewichts- bzw. der Übertragungsmatrix

Wir betrachten ein asymptotisch stabiles, steuerbares und beobachtbares LZI-System mit der Zustandsraumdarstellung

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad\qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \ , \tag{3.44}$$

der Gewichtsmatrix $\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ sowie der zugehörigen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

[24] Arnold Tustin (*16.7.1899 in Ponteland / England, +9.1.1994 Amersham / England).

[25] Die Ausdruck $\frac{2}{T_d}\frac{z-1}{z+1}$ erscheint -natürlich in einer anderer Schreibweise - in A. Tustin: *A method of analysing the behaviour of linear systems in terms of time series.* Journal of the Institution of Electrical Engineers, 94, 1947.

Die L_2-Norm[26] der Gewichtsmatrix $\mathbf{g}$ bzw. der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ lauten[27]

$$\|\mathbf{g}\|_2 := \left[\int_0^\infty \mathtt{Spur}\left\{\mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)\right\} dt\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.45}$$

bzw.

$$\|\mathbf{G}\|_2 := \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{Spur}\left\{\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)\right\} d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{3.46}$$

Aufgrund des Satzes[28] von Plancherel[29] gilt[30]

$$\|\mathbf{g}\|_2 = \|\mathbf{G}\|_2 \quad . \tag{3.47}$$

Damit ergibt sich

$$\|\mathbf{G}\|_2^2 = \int_0^\infty \mathtt{Spur}\left\{\mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)\right\} dt = \mathtt{Spur}\left\{\int_0^\infty \mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)dt\right\} = \mathtt{Spur}\left\{\int_0^\infty \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\ dt\right\}$$

bzw.

$$\|\mathbf{G}\|_2^2 = \mathtt{Spur}\left\{\mathbf{B}^T \cdot \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\ dt \cdot \mathbf{B}\right\}. \tag{3.48}$$

Letzte Relation kann mit Hilfe von $\mathbf{P} := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\ e^{\mathbf{A}t}dt$ zu

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left[\mathtt{Spur}\left\{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.49}$$

umgeschrieben werden. Hierbei ist $\mathbf{P}$ die (eindeutige, positiv definite) Lösung der Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$.

---

[26] Im Falle von Einfachsystemen mit der skalaren Gewichtsfunktion $g(t)$ und der (skalaren) Übertragungsfunktion $G(s)$ vereinfachen sich die Beziehungen zu $\|g\|_2 = \left[\int_0^\infty g^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\|\mathbf{G}\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(j\omega)^2\right| d\omega\right]^{\frac{1}{2}}$.

[27] Diese Norm kann aufgefasst werden als ein Maß für die stationäre Kovarianzmatrix der Ausgangsgröße $\mathbf{y}$, wenn die Eingangsgröße $\mathbf{u}$ ein sogenanntes weisses Rauschen ist.

[28] Dieser Satz wird in den Ingenieurwissenschaften üblicherweise als Satz von Parseval zitiert.

[29] Michel Plancherel (*16.1.1885 in Bussy/Schweiz, +4.3.1967 in Zürich/Schweiz).

[30] Michel Plancherel: *Contribution à l ´études de la représentation d ´une fonction arbitraire par les intégrales définies*. Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 30(1), 289 - 335, 1910

Ein Beweis des Lyapunov-Theorems

Wir betrachten drei (reelle) Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$. Hierbei werden $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ sowie die Gültigkeit der Gleichung $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ vorausgesetzt. Nach Lyapunov gilt, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt unter Verwendung von konjugiert komplexen[31] Eigenwerten α, $\bar{\alpha}$ und zugehörigen Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{w}$, $\bar{\mathbf{w}}$ der Matrix $\mathbf{A}$. Es gilt definitionsgemäß $\mathbf{A}\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}$ und $\mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}$ bzw. nach Transposition der zweiten Beziehung $\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{A}^T = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}^T$. Wir multiplizieren die Lyapunov-Gleichung von links mit $\bar{\mathbf{w}}^T$ und von rechts mit $\mathbf{w}$ und erhalten $\bar{\mathbf{w}}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{w} = -\bar{\mathbf{w}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w}$. Nach Ausmultiplikation ergibt sich für die linke Seite dieser Relation

$$\bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} + \bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\alpha\mathbf{w} = (\alpha + \bar{\alpha})\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\alpha\right\}\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} \quad .$$

Damit gilt

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\alpha\right\}\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} = -\bar{\mathbf{w}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w} < 0 \ .$$

Nachdem $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ positiv definit sind, folgt die Ungleichung $\mathrm{Re}\left\{\alpha\right\} < 0$.

[31] Die Betrachtung reeller Eigenwerte erfolgt ganz analog.

Kapitel 4

Grundlegende Literatur

- Felix R. GANTMACHER: *Matrizentheorie*. Springer Verlag, 1986.
- Wolfgang HAHN: *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov.* Springer Verlag, 1959 **und** *Stability of Motion.* Springer Verlag, 1967
- Mathukumalli VIDYASAGAR: *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice-Hall, 2. Auflage 1993.