Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

SYSTEMTHEORIE AK 2

Zur Stabilität von LZI – Systemen

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber

Version vom 13. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Stabilität

1.1 Einleitung

Wir betrachten ein freies n-dimensionales lineares und zeitinvariantes System (abgekürzt LZI-System) mit der Beschreibung im Zustandsraum

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \ . \tag{1.1}$$

Seine Lösung $\mathbf{x}(t)$ kann mit Hilfe der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ angeschrieben werden:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad .$$

Man erkennt, dass die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ und damit die Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ das zeitliche Verhalten der Trajektorien des Systems prägen, da $e^{\mathbf{A}t}$ Funktionen $t^{\mu_i}e^{s_i t}$ mit $\mu_i \geq 0$ enthält.

Bei den weiteren Betrachtungen ist der Begriff der *Ruhelage* des obigen Systems essentiell und wird kurz wiederholt. Definitionsgemäß verschwindet bei einer Ruhelage $\mathbf{x}_R$ der Differentialquotient des Zustandsvektors, d.h.

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{\mathbf{x}_R} = \mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{0} \ .$$

Man erkennt, dass obiges LZI-System *immer* eine Ruhelage bei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ aufweist. Sie ist die einzige Ruhelage des Systems, falls die Systemmatrix $\mathbf{A}$ regulär ist! Im Falle einer singulären Systemmatrix existieren hingegen unendlich viele Ruhelagen. Wurde nämlich eine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ ermittelt, so ist jedes beliebige Vielfache $\alpha\mathbf{x}_R$ ebenfalls eine Ruhelage. Man spricht in dem Zusammenhang von einer Ruhezone, welche durch den Vektor $\alpha\mathbf{x}_R$ gegeben ist.

Zur Beurteilung des prinzipiellen Verhaltens der Trajektorien wird das System aus einer Ruhelage $\mathbf{x}_R$ auf einen *beliebigen* Anfangswert $\mathbf{x}_0$ ausgelenkt. Man betrachtet folgende "gutmütige" Szenarien:

- Streben die Trajektorien zur Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ zurück? Nachdem die Transitionsmatrix für endliche Werte t regulär ist, bedeutet das: Streben die Trajektorien für $t \to \infty$ zur

Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ zurück? Bildhafter ausgedrückt: Zieht der Ursprung $\mathbf{0}$ *alle* Trajektorien an? Ist das der Fall, so spricht man von einer attraktiven Ruhelage bzw. von einem asymptotisch stabilen System (1.1). Nachdem der Anfangszustand beliebig ist, kann dies nur bei einer *regulären* Systemmatrix $\mathbf{A}$ der Fall sein. D.h. es darf kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ bei Null liegen.

- Verbleiben die Trajektorien in einer beliebig kleinen Umgebung des Ruhelage, falls der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ hinreichend nah an der Ruhelage $\mathbf{x}_R$ liegt? Ist das der Fall, so spricht man von einem stabilen System (1.1).

Zur Beantwortung der ersten Frage dient der nachfolgende

Satz 1: Das LZI-System (1.1) ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn *alle* Eigenwerte s_i der Systemmatrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$$

erfüllen.

Die Beantwortung der zweiten Frage gestaltet sich aufwändiger. Hierzu dient folgender

Satz 2: Das LZI-System (1.1) ist genau dann *stabil*, wenn

1. *alle* Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichungen

$$\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0 \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

   erfüllen und

2. Eigenwerte s_k mit verschwindendem Realteil

$$\mathrm{Re}\{s_k\} = 0,$$

   welche die (sogenannte *algebraische*) Vielfachheit M_k aufweisen, M_k linear unabhängige Eigenvektoren (d.h. die sogenannte *geometrische* Vielfachheit M_k) besitzen.

Es gibt folgende alternative Möglichkeit zur Überprüfung der Stabilität. Hierbei benutzt man das sogenannte Minimalpolynom[1] der Matrix $\mathbf{A}$:

Satz 3: Das LZI-System (1.1) ist genau dann *stabil*, wenn

1. die Nullstellen s_i des *Minimalpolynoms* der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$$

   erfüllen und

2. Nullstellen s_i mit verschwindendem Realteil

$$\mathrm{Re}\{s_i\} = 0$$

   einfache Nullstellen des Minimalpolynoms sind.

Die anschließenden Überlegungen sollen Einsicht in die formulierten Sätze bringen. Sie basieren auf der Partialbruchzerlegung der sogenannten Resolventen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

[1] Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom $\psi(s)$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist das monische Polynom mit kleinstem Grad mit der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

1.2 Partialbruchzerlegung der Resolventen von A

Die Transitionsmatrix kann mit Hilfe der Laplace[2]-Transformation berechnet werden: Die Laplace-Transformierte von $e^{\mathbf{A}t}$ ist gleich der Resolventen der Matrix $\mathbf{A}$ und lautet

$$\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Obige Relation kann mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

der Matrix $\mathbf{A}$ und der zu $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ adjungierten Matrix $\mathbf{F}(s)$ umgeschrieben werden. Damit erhalten wir die Darstellung:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) \ .$$

Das *charakteristische Polynom* $\Delta(s)$ lautet

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{M_i} \qquad \text{mit} \qquad n = M_1 + M_2 + ... + M_K \quad .$$

Es besitzt i.A. K verschiedene Nullstellen s_i mit der Vielfachheit M_i. Die Nullstellen von $\Delta(s)$ sind die *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$.

Die *Adjunkte* oder *adjungierte Matrix* $\mathbf{F}(s)$ ist ein Matrix-Polynom in s vom Grad $n-1$:

$$\mathbf{F}(s) = s^{n-1}\mathbf{E} + s^{n-2}\mathbf{F}_{n-2} + s^{n-3}\mathbf{F}_{n-3} + ... + s^0\mathbf{F}_0 \quad .$$

Hierbei sind $\mathbf{F}_i$ konstante (n, n)-Matrizen, die zBsp mit Hilfe des Leverrier[3]-Algorithmus[4] *rekursiv* berechnet werden können.

Man erkennt, dass die n^2 Elemente der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ rationale Funktionen $\alpha_{ik}(s)$ der komplexen Variablen s sind

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) =: [\alpha_{ik}(s)] \quad =: \left[\frac{F_{ik}(s)}{\Delta(s)}\right] \quad \text{mit} \quad i, k = 1, , , , n \quad .$$

Für den Grad der Polynome[5] $F_{ik}(s)$ gilt

$$\deg\left\{F_{ik}(s)\right\} \leq n - 1 \quad .$$

[2] Pierre Simon de Laplace (*23.3.1749 in Baumont-en-Auge/Frankreich, +5.3.1827 in Paris)

[3] Urbain Jean Joseph Le Verrrier, genannt Urbain Leverrier (*11.3.1811 in Saint-Lô/ Frankreich, + 23.9.1877 in Paris)

[4] Siehe zBsp Felix R. Gantmacher: "*Matrizentheorie*", Kapitel 4.4., Springer-Verlag, 1986

[5] Das Polynom $F_{ik}(s)$ wird durch Bildung der sogenannten *algebraischen Komplemente* (auch Minoren genannt) der Matrix

$$s\mathbf{E} - \mathbf{A} =: [d_{ik}] \quad \text{mit} \quad i, k = 1, , , , n$$

ermittelt: Man bildet die zu einem Element d_{ik} gehörige $(n-1)$-reihige Unterderminante, die durch Streichen der i-ten Reihe und der k-ten Spalte entsteht, und multipliziert diese mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$. Dadurch ergibt sich das zugehörige algebraische Komplement (oder der zugehörige Minor) $D_{ik}(s)$. D.h. es entsteht eine

Wir betrachten die Elemente der Matrix $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$, d.h. die Quotienten $F_{ik}(s)/\Delta(s)$. Falls ein Polynom $F_{ik}(s)$ eine oder mehrere gemeinsame Nullstellen $s = s_\nu$ mit dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ hat, so kommt es zu einer Kürzung der gemeinsamen Faktoren. Besonders interessant ist der Fall, wenn *alle* n^2 Polynome $F_{ik}(s)$ *dieselben gemeinsamen* Nullstellen mit $\Delta(s)$ aufweisen! Sei das Polynom $q(s)$ der größte gemeinsame Teiler (ggT) *aller* n^2 Polynome $F_{ik}(s)$. Dann gilt

$$\mathbf{F}(s) =: q(s)\tilde{\mathbf{F}}(s)$$

und

$$\Delta(s) =: q(s)\tilde{\Delta}(s) \quad .$$

Das bedeutet, dass das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ durch $q(s)$ ohne Rest teilbar ist[6]! Man nennt das Polynom $\tilde{\Delta}(s)$ das *Minimalpolynom*[7] der Matrix $\mathbf{A}$. Man beachte: die Nullstellen des gradreduzierten Polynoms $\tilde{\Delta}(s)$ stimmen - abgesehen von ihrer Vielfachheit - mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ der Matrix $\mathbf{A}$ überein. Diese Polynome haben folgende Form:

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{K}(s-s_i)^{M_i} \qquad \text{mit} \quad n = M_1 + M_2 + ... + M_K$$

---

quadratische Matrix mit der Anordnung

$$[D_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & ... & D_{2n} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & ... & D_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} .$$

Die oben eingeführten Größen $F_{ik}(s)$ ergeben sich dann durch *Transposition* obiger Anordnung:

$$[F_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & ... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{31} & ... & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & ... & D_{n3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & ... & D_{nn} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$F_{ik}(s) := D_{ki}(s) \quad \text{mit} \quad i,k = 1,,,,n \quad .$$

[6] Dies ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) &= : \det[d_{ik}] \\ &= d_{i1}D_{i1} + d_{i2}D_{i2} + ... + d_{in}D_{in} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \\ &= d_{1k}D_{1k} + d_{2k}D_{2k} + ... + d_{1n}D_{1n} \qquad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)} \quad . \end{aligned}$$

[7] Diese Definition ist äquivalent mit der schon angegebenen Definition, dass es sich um das monische Polynom $\psi(s)$ mit kleinstem Grad und der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ handelt.

bzw.

$$\tilde{\Delta}(s) := \prod_{i=1}^{K} (s-s_i)^{\mu_i} \qquad \text{mit} \quad m = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_K$$

mit

$$m \le n \qquad \text{und} \quad \mu_i \le M_i \qquad i = 1, 2, ..., K \quad .$$

Nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren in *allen* Elementen $F_{ik}(s)/\Delta(s)$ der Resolventen $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ hat sie die reduzierte Form

$$(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s)$$

mit

$$\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = m \le n \quad \text{und} \quad \deg\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s)\right\} = m-1.$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ wird als *reduzierte adjungierte Matrix* oder *reduzierte Adjunkte* bezeichnet.

Durch Partialbruchzerlegung (abgekürzt: PBZ) der Matrix $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$erhalten wir

$$(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathbf{L}_{il} \cdot \frac{1}{(s-s_i)^{l+1}} \quad .$$

Hierbei ergeben sich die konstanten (n,n)-Matrizen $\mathbf{Y}_{il}$ zu

$$\mathbf{L}_{il} = \frac{1}{l!}\frac{1}{(\mu_i-1-l)!}\lim_{s\to s_i}\left\{\left[(s-s_i)^{\mu_i}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\right]^{\mu_i-1-l}\right\} \quad .$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich dann für die Transitionsmatrix der Ausdruck

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{i=1}^{K}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathbf{L}_{il} \cdot t^l e^{s_i t} \\ &= \sum_{i=1}^{K} (\mathbf{L}_{i0} + \mathbf{L}_{i1} \cdot t + \mathbf{L}_{i2} \cdot t^2 + ... + \mathbf{L}_{i(\mu_i-1)} \cdot t^{\mu_i-1}) \cdot e^{s_i t} \quad . \end{aligned}$$

Man erkennt, dass falls $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$ mit $i = 1, ..., K$ gilt, kein "Anwachsen" von $e^{\mathbf{A}t}$ erfolgt. Insbesondere folgt, dass die Transitionsmatrix die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$$

erfüllt[8].

[8] Es ist bemerkenswert, dass die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$$

notwendig und hinreichend ist, damit die Norm der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ für $t \ge 0$ *exponentiell* abnimmt. Das bedeutet, dass zwei Konstanten $K \ge 1$ und $\lambda > 0$ exisitieren, so dass die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le Ke^{-\lambda t}\|\mathbf{x}_0\| \qquad \text{für } t \ge 0$$

erfüllt ist.

Wir nehmen nun an, dass *alle* Eigenwerte s_i die Ungleichung $\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$ erfüllen. Gilt nun für einen Eigenwert $\mathrm{Re}\{s_N\} = 0$, so erfolgt kein "Anwachsen" der Transitionsmatrix, falls dieser Eigenwert einfach auftritt, d.h. $\mathbf{L}_{Nl} = \mathbf{0}$ für $1 \leq l \leq M_{N-1}$ gilt. Aus dieser Darstellung für die Transitionsmatrix sind folgende Aussagen einsichtig:

Aussage 1: Das LZI-System (1.1) ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn *alle* Nullstellen s_i des Minimalpolynoms (und damit des charakteristischen Polynoms) der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$$

erfüllen.

Aussage 2: Das LZI-System (1.1) ist genau dann *stabil*, wenn

1) *alle* Nullstellen s_i des Minimalpolynoms der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} \leq 0$$

erfüllen und

2) Nullstellen mit verschwindendem Realteil

$$\mathrm{Re}\{s_i\} = 0$$

einfach auftreten.

Das bedeutet, dass für alle Nullstellen s_N des charakteristischen Polynoms mit verschwindendem Realteil $\mathrm{Re}\{s_N\} = 0$ *und* einer Vielfachheit $M_N > 1$ die Relation

$$\lim_{s \to s_i} \left\{ \left[(s - s_N)^{M_N} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \right]^{M_N - 1 - l} \right\} = \mathbf{0} \qquad \text{für} \;\; l = 1, 2, ..., (M_N - 1)$$

erfüllen.

1.2.1 Minimalpolynom und Eigenrichtungen von A

Es geht um das Verständnis des Satzes 2 bzw der Gültigkeit folgender

Aussage: Existieren zu einem M-fachen Eigenwert einer (n, n)-Matrix M linear unabhängige Eigenvektoren, so existiert ein Minimalpolynom $\psi(s)$ mit $\deg\{\psi(s)\} < n - M$.

Hierzu betrachten wir eine (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$. Der mathematischen Einfachheit wegen besitze sie einen zweifachen Eigenwert $s_1 = s_2 =: \lambda$ und sonst *verschiedene* Eigenwerte s_i, d.h.

$$s_1 = s_2 =: \lambda, \;\; s_3, \;\; s_4, \;\; \ldots \;, s_n \quad .$$

Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$\Delta(s) := \det\{s\mathbf{E} - \mathbf{A}\} = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i) \quad .$$

Wir untersuchen zwei Fälle:

1. Fall. Es wird *angenommen*, dass zum Eigenwert λ *zwei linear unabhängige* Eigenvektoren existieren. Demnach gelten die Beziehungen

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \;\; \text{und} \;\; (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

und
$$(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_i=\mathbf{0}\quad i=3,4,...,n\quad .$$
Hierbei sind *alle* Eigenvektoren linear unabhängig. Da die Matrizen
$$(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\ \text{ und }\ (s_k\mathbf{E}-\mathbf{A})\quad \text{für alle } i,k$$
vertauschbar sind, können obige Beziehungen als Produkt zweier quadratischer (n,n)-Matrizen kompakt angeschrieben werden
$$[(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})]\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & ... & \mathbf{p}_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\quad .$$
Da die Matrix
$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & ... & \mathbf{p}_n\end{pmatrix}$$
aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren regulär ist, folgt, dass
$$\psi(\mathbf{A}):=[(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})]=\mathbf{0}$$
gilt! Das bedeutet: es existiert ein Matrix-Polynom $\psi(\mathbf{A})$ vom Grad $(n-1)$, das gleich der Nullmatrix ist! Man beachte, dass nach dem Theorem von Cayley für *jede* Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i mit $i=1,2,..,n$ die Relation
$$\Delta(\mathbf{A}):=[(s_1\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_2\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})]=\mathbf{0}$$
mit
$$\deg\{\Delta(\mathbf{A})\}=n$$
gilt. Das bedeutet: das Polynom
$$\psi(s):=\prod_{i=2}^{n}(s-s_i)\quad \text{mit }\ \deg\{\psi(s)\}=n-1$$
ist das Minimalpolynom der Matrix $\mathbf{A}$.

2. Fall: Wir nehmen an, dass zum zweifachen Eigenwert $s_1=s_2=:\lambda$ ein einziger Eigenvektor $\mathbf{p}_1$
$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_1=\mathbf{0}$$
existiert. Dann kann ein sogenannter Hauptvektor $\mathbf{w}$ gemäß
$$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{w}=\mathbf{p}_1$$
berechnet werden, wobei die Vektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{w}$ linear unabhägig sind. Es gilt ferner
$$(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}_i=\mathbf{0}\quad i=3,4,...,n\quad .$$
Damit ist die Matrix
$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{w} & \mathbf{p}_3 & ... & \mathbf{p}_n\end{pmatrix}$$

eine reguläre Matrix und das Produkt

$$\begin{aligned} & [(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})] \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{w} & \mathbf{p}_3 & ... & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{p}_1 & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ergibt keine Nullmatrix. Das bedeutet, dass im vorliegenden Fall

$$[(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_3\mathbf{E}-\mathbf{A})(s_4\mathbf{E}-\mathbf{A})...(s_n\mathbf{E}-\mathbf{A})] \neq \mathbf{0}$$

gilt und das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ auch das Minimalpolynom der Matrix ist.

Kapitel 2

BIBO-Eigenschaft von LZI-Systemen

2.1 Einleitung

Wir betrachten ein *kausales* LZI-System mit der skalaren Eingangsgröße u, der skalaren Ausgangsgröße y, der Gewichtsfunktion g und der Beschreibung

$$y(t) = (g * u)(t) := \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau. \tag{2.1}$$

Es wird vorausgesetzt, dass es die BIBO[1]-Eigenschaft besitzt, d.h.

$$\text{für alle } u(t) \text{ mit } |u(t)| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \le Y \quad \text{für } t \ge 0 \ . \tag{2.2}$$

Hierbei ist Y eine *endliche* Konstante. Aufgrund der Linearitätseigenschaft folgt, dass *jede* betragsmäßig beschränkte Eingangsgröße eine betragsmäßig beschränkte Ausgangsgröße zur Folge hat[2].

[1]Es handelt sich um ein Akronym für "bounded input bounded output".

[2]Eine *vernünftige* - auch für nichtlineare(!) zeitinvariante Systeme - Charakterisierung der Stabilität des Eingangs-Ausgangsverhaltens eines (kausalen) Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist die folgende: Das zeitinvariante System (abgekürzt ZI-System) heißt Eingangs–Ausgangs-stabil, wenn eine Konstante(!) ρ existiert, so dass für *alle* Eingangsgrößen u mit

$$\|u\|_p := \left[\int_0^\infty |u(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \le U < \infty$$

die Ungleichung

$$\|y\|_p \le \rho \cdot \|u\|_p$$

erfüllt ist. Man sieht, dass aus der Gültigkeit obiger Relation für den Fall $p = \infty$ bei LZI-Systemen die BIBO-Eigenschaft folgt.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht für nichtlineare Systeme! Man betrachte hierzu das nichtlineare ZI-System

$$y = \operatorname{sgn}\{u\}$$

Eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft ist die absolute Integrabilität der Gewichtsfunktion:

$$\int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau \leq K < \infty \quad . \tag{2.3}$$

Dies ist einsichtig, wenn man bedenkt, dass durch die (zulässige) Wahl

$$u(\tau) = \mathtt{sgn}\,\{g(t-\tau\}$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ für $t \to \infty$ ihren Maximalwert

$$y_{\max} := \int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau$$

erreicht.

Die Gültigkeit obiger Ungleichung (2.3) bedeutet ferner, dass für *jede* (beliebig kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ ein Zeitpunkt T_ε existiert, so dass die Ungleichung

$$\int_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau \leq \varepsilon \qquad \text{für} \quad t > T_\varepsilon \tag{2.4}$$

erfüllt ist.

Eine zu (2.3) alternative (notwendige und hinreichende) Bedingung für die BIBO-Eigenschaft erhält man durch Betrachtungen im Bildbereich der Laplace-Trasnformation. Man benutzt hierzu die Laplace-Transformierte der Funktion $g(t)$, d.h. die sogenannte Übertragungsfunktion des Systems (2.1)

$$G(s) := \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \ .$$

Wir betrachten den Ausdruck $|G(s)|$. Es gilt dann folgende Ungleichung

$$|G(s)| = \left| \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |g(t)| \left| e^{-st} \right| dt. \tag{2.5}$$

Unter der Voraussetzung $\mathrm{Re}\,\{s\} \geqq 0$ ergibt sich zunächst die Aussage

$$\mathrm{Re}\,\{s\} \geqq 0 \quad \Rightarrow \left| e^{-st} \right| \leq 1 \qquad \text{für} \quad t \geq 0$$

und den Fall $p = \infty$. Das System besitzt die BIBO-Eigenschaft. Allerdings ist es unmöglich, eine von der Eingangsgröße u unabhängige(!) Konstante ρ zu finden, damit obige Ungleichung erfüllt ist.

bzw. aus (2.5) die Ungleichung

$$|G(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)|\, dt \qquad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} \geq 0 \ .$$

Es ist nun einsichtig, dass bei Vorhandensein der BIBO-Eigenschaft (2.3)

$$|G(s)| \leq K < \infty \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} \geq 0 \tag{2.6}$$

gilt. D.h. die Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt *keine Pole* in der rechten abgeschlossenen s-Ebene $\mathrm{Re}\{s\} \geqq 0$. Man kann zeigen, dass dies eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für das Vorliegen der BIBO-Eigenschaft darstellt.

In den nachfolgenden Ausführungen untersuchen wir das Systemverhalten bei Vorliegen der BIBO-Eigenschaft. Es wird sich zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen Eingangs- und Ausgangsgröße ein ähnliches Zeitverhalten aufweisen. Unterliegt ferner die Eingangsgröße einer verallgemeinerten Energiebeschränkung, so so gilt dies auch für die Ausgangsgröße. Unpräzise formuliert: die BIBO-Eigenschaft bewirkt, dass die Ausgangsgröße ähnliche Eigenschaften wie die Eingangsgröße besitzt.

2.2 Periodische Eingangsgrößen

Es wird angenommen, dass $u(t)$ gemäß

$$|u(t)| \ \leq 1 \qquad \text{für} \ \ t \geq 0$$

beschränkt und *periodisch* mit der Periode T ist:

$$u(t) = u(t+T) \quad \text{für} \ \ t \geq 0 \ \ . \tag{2.7}$$

Wir wollen nun zeigen, dass bei Vorhandensein der BIBO-Eigenschaft die Ausgangsgröße $y(t)$ für *hinreichend große* Werte von t die gleiche Periodizitäts-Eigenschaft aufweist. Das bedeutet

$$\lim_{t\to\infty} [y(t+T) - y(t)] = 0 \ . \tag{2.8}$$

Für die Ausgangsgröße $y(t+T)$ gilt gemäß (2.1)

$$y(t+T) = \int_0^{t+T} g(\tau) u(t+T-\tau) d\tau$$

bzw. aufgrund der periodischen Eingangsgröße nach (2.7)

$$y(t+T) = \int_0^{t+T} g(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad .$$

Dieses Integral wird wie folgt umgeformt

$$y(t+T) = \int\limits_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int\limits_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \ ,$$

$$y(t+T) =: y(t) + \Delta(t,T) \ .$$

Wir schätzen nun den Betrag des Integrals

$$\Delta(t,T) = \int\limits_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

für hinreichend große Werte t ab. Offensichtlich gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} |\Delta(t,T)| &= \left| \int\limits_t^{t+T} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int\limits_t^{t+T} |g(\tau)u(t-\tau)| \, d\tau \\ &\leq \int\limits_t^{t+T} |g(\tau)| \, d\tau \ . \end{aligned}$$

Da die BIBO-Eigenschaft d.h. die absolute Integrabilität von $g(t)$ vorausgesetzt wurde, gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+T} |g(\tau)| \, d\tau = 0 \quad .$$

Damit verschwindet für hinreichend große t-Werte das Integral $\Delta(t,T)$ und es gilt Relation (2.8). Das bedeutet für hinreichend große Werte von t dass die Ausgangsgröße $y(t)$ gegen eine periodische Funktion mit *derselben* Periode T wie die Eingangsgröße strebt.

2.3 Harmonische Eingangsgrößen, Eigenfunktionen und Frequenzgang

Es wird als Eingangsgröße die Funktion

$$u(t) = e^{pt} \quad \text{mit} \quad p = \alpha + j\beta \ \text{ und}$$

gewählt. Die Ausgangsgröße lautet

$$y(t) = \int\limits_0^t g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau = \int\limits_0^t g(\tau)e^{-p\tau}d\tau \cdot e^{pt} \quad .$$

Obiges Integral wird folgendermaßen umgeschrieben

$$y(t) = \left[\int_0^\infty g(\tau) e^{-p\tau} d\tau - \int_t^\infty g(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right] \cdot e^{pt} \quad .$$

Nach Einführung der Laplace-Transformierten der Funktion $g(t)$

$$G(s) := \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$$

lautet die Ausgangsgröße

$$y(t) = G(p) \cdot e^{pt} - e^{pt} \int_t^\infty g(\tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Der *konstante* Faktor bei der Eingangsgröße ist der Wert der Übertragungsfunktion des vorliegenden LZI-Systems an der Stelle $s = p$. Mit Hilfe der Hilfsfunktion $\tilde{y}(t)$

$$\tilde{y}(t) := -\int_t^\infty g(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau \tag{2.9}$$

erhalten wir die Darstellung der Ausgangsgröße

$$y(t) = G(p) \cdot e^{pt} + \tilde{y}(t) \ , \tag{2.10}$$

in der ein Vielfaches der Eingangsgröße des Systems $G(p) \cdot e^{pt}$ erscheint. Wir betrachten nun hinreichend große Werte von t und stellen die Frage, unter welchen Bedingungen die Ausgangsgröße durch

$$y(t) \approx G(p) \cdot e^{pt}$$

gegeben ist, oder präziser formuliert, Folgendes gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \left[y(t) - G(p) \cdot e^{pt} \right] = 0 \ . \tag{2.11}$$

Falls

$$\alpha = \mathrm{Re}\,\{p\} < 0$$

ist, so strebt die Eingangsgröße $u(t)$ exponentiell gegen null und damit strebt auch die Ausgangsgröße $y(t)$ gegen null. In diesem Fall ist (2.11) trivial erfüllt. Falls

$$\alpha = \mathrm{Re}\,\{p\} \geq 0$$

gilt, so kann das Integral

$$\tilde{y}(t) := -\int_t^\infty g(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau$$

folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\left|\int_t^\infty g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau\right| \leq \int_t^\infty |g(\tau)| \cdot e^{\alpha(t-\tau)}d\tau \leq \int_t^\infty |g(\tau)| \cdot 1d\tau.$$

Aufgrund der BIBO-Eigenschaft gilt allerdings

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau = 0$$

und damit ist (2.11) erfüllt.

Es wird nun $\alpha = 0$ gewählt. D.h. die Eingangsgröße lautet

$$u(t) = e^{j\omega t} \ . \tag{2.12}$$

Die Ausgangsgröße ergibt sich zu

$$y(t) = G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} - \int_t^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t} \ .$$

Der zweite Term in obiger Gleichung kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\left|\int_t^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t}\right| \leqq \int_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau \quad .$$

Weil das LZI-System die BIBO-Eigenschaft besitzt, gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty |g(\tau)|\, d\tau = 0 \ .$$

Damit ist die Ausgangsgröße $y(t)$ für hinreichend große Werte von t durch

$$y(t) \approx G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \tag{2.13}$$

gegeben. Sie ist ein Vielfaches der *harmonischen* Eingangsgröße $u(t)$ und ergibt sich durch Multiplikation der Eingangsgröße mit der Konstanten - dem sogenannten *Frequenzgang* - $G(j\omega)$. Für diese besonderen Eingangsgrößen - sogenannte *Eigenfunktionen* - ist Beziehung (2.13) im Zeitbereich das Analogon der Relation

$$\bar{y}(s) = G(s) \cdot \bar{u}(s) \tag{2.14}$$

im Bildbereich der Laplace-Transformation, die allerdings für beliebige Eingangsgrößen $u(t)$ gilt.

Bemerkungen

Im Fall, dass das LZI-System durch

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

beschrieben wird, ist die Gewichstfunktion durch

$$g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}$$

gegeben. Es ist nun möglich, einen expliziten Ausdruck für die Ausgangsgröße anzuschreiben. Aus

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau = \int_0^t g(\tau)e^{-p\tau}d\tau \cdot e^{pt} \quad ,$$

ergibt sich zunächst

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}e^{-p\tau}d\tau \cdot e^{pt} = \int_0^t \mathbf{c}^T e^{(\mathbf{A}-p\mathbf{E})\tau}\mathbf{b}d\tau \cdot e^{pt},$$

bzw. unter der Voraussetzung, dass p *kein* Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} e^{(\mathbf{A}-p\mathbf{E})\tau}\Big|_0^t \mathbf{b} \cdot e^{pt} \\ &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} + \mathbf{c}^T (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} \cdot e^{pt} \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c}^T (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} \cdot e^{pt} \\ &= -\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} + G(p) \cdot e^{pt}. \end{aligned}$$

Anhand dieses Ausdruckes ist ersichtlich, dass bei Vorliegen der BIBO-Eigenschaft der erste Summand $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{A}-p\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}$ für hinreichend große Werte von t verschwindet, was natürlich im Einklang mit den Ausführungen im oben aufgeführten allgemeinen Fall steht.

2.4 Eingangsgrößen mit beschränkter Energie

Man spricht von einer Eingangsgröße $u(t)$ mit beschränkter Energie im Zeitintervall $[0, \infty)$, wenn die Ungleichung

$$\left[\int_0^\infty |u(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq U < \infty \tag{2.15}$$

für eine (endliche) Konstante U erfüllt ist. Es ist bemerkenswert, dass Folgendes gilt:

Die Ausgangsgröße

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad ,$$

des (kausalen) LZI-Systems, das die BIBO-Eigenschaft besitzt, ist ebenfalls im Zeitintervall $[0, \infty)$ von beschränkter Energie! Das bedeutet, dass $y(t)$ die Ungleichung

$$\left[\int_0^\infty |y(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq Y < \infty$$

für eine (endliche) Konstante Y erfüllt.

Zum Verständnis dieser Aussage:

Hierzu wird die sogenannte Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-Ungleichung[3] herangezogen

$$\int_a^b |f(t)h(t)| \, dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |h(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{2.16}$$

Hierbei wird angenommen, dass die Funktionen $f(t)$ und $h(t)$ im Intervall $[a, b]$ quadratisch intergrierbar, d.h. von beschränkter Energie sind

$$\left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq F < \infty \quad \text{und} \quad \left[\int_a^b |h(t)|^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq H < \infty \ .$$

Wir betrachten nun die Eingangs-Ausgangs-Relation des (kausalen) LZI-Systems

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

bzw. den Betrag $|y(t)|$ der Ausgangsgröße

$$|y(t)| = \left|\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau\right| .$$

Es gilt dann

$$|y(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)| \, |u(t-\tau)| \, d\tau = \int_0^t \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}} \, |u(t-\tau)|\right] d\tau$$

bzw.

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[|g(\tau)|^{\frac{1}{2}} \, |u(t-\tau)|\right] d\tau \ .$$

[3] Augustin-Louis Cauchy (*21.8.1789 in Paris, +23.5.1857 in Sceaux/Frankreich, Victor Jakovlewitsch Bunyakovsky (*16.12.1804 in Bar/Russland, *12.12.1889 in St. Petersburg/Russland), Karl Hermann Amandus Schwarz (*25.1.1843 in Hermsdorf/Schlesien, *30.11.1921 in Berlin)

Wir definieren nun zwei Funktionen f und h gemäß

$$f(\tau) := |g(\tau)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad h(\tau, t) := |g(\tau)|^{\frac{1}{2}} \, |u(t-\tau)| \ ,$$

wenden die Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-Ungleichung (2.16) an und erhalten die Ungleichung

$$|y(t)| \leq \left[\int_0^\infty |g(\tau)| \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^\infty |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|^2 \, d\tau \right] \ .$$

Unter Ausnutzung der BIBO-Eigenschaft, d.h. $\int_0^\infty |g(\tau)| \, d\tau \leq K < \infty$, ergibt sich

$$|y(t)| \leq \left[K \cdot \int_0^\infty |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|^2 \, d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$$

bzw. nach einer Quadratur

$$|y(t)|^2 \leq K \cdot \int_0^\infty |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|^2 \, d\tau \ .$$

Wir betrachten nun das Integral $\int_0^\infty |y(t)|^2 \, dt$ und erhalten die Ungleichung

$$\int_0^\infty |y(t)|^2 \, dt \leq K \cdot \int_0^\infty \left[\int_0^\infty |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|^2 \, d\tau \right] dt \ .$$

Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$\int_0^\infty |y(t)|^2 \, dt \leq K \cdot \int_0^\infty \left[\int_0^\infty |u(t-\tau)|^2 \, dt \right] \cdot |g(\tau)| \, d\tau$$

bzw. aufgrund der beschränkten Energie der Eingangsgröße (2.15) und der BIBO-Eigenschaft des Systems

$$\int_0^\infty |y(t)|^2 \, dt \leq K \cdot U \cdot \int_0^\infty |g(\tau)| \, d\tau \leq K^2 \cdot U < \infty \ .$$

Damit besitzt die Ausgangsgröße des (kausalen) LZI-Systems beschränkte Energie!

2.5 Verallgemeinerte Energiebeschränkung der Eingangsgrößen

Obiges Resultat kann mit Hilfe der sogenannten Young[4]-Faltungsungleichung verallgemeinert werden. Wir betrachten ein (kausales) LZI-System mit der skalaren Eingangsgröße u, der skalaren Ausgangsgröße y, gemäß (2.1). Wir definieren die p-Norm einer Funktion f durch

$$\|f\|_p := \left[\int_0^\infty |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{mit} \quad p \in [1, \infty) \quad .$$

Es gelte nun

$$\|g\|_q := \left[\int_0^\infty |g(t)|^q \, dt\right]^{\frac{1}{q}} \quad \leq K < \infty$$

und

$$\|u\|_p := \left[\int_0^\infty |u(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \quad \leq U < \infty \quad .$$

Ferner sei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \qquad \text{mit} \quad p, q, r \in [1, \infty) \quad .$$

Die Young-Faltungsungleichung lautet

$$\|y\|_r = \|g * u\|_r \leq \|g\|_q \cdot \|u\|_p \quad .$$

Daraus folgt

$$\text{aus} \quad q = 1 \quad \Rightarrow \quad p = r$$

bzw.

$$\|y\|_p = \|g * u\|_p \leq \|g\|_1 \cdot \|u\|_p \quad .$$

Das bedeutet: wenn das LZI-System die BIBO-Eigenschaft besitzt und die p-Norm der Eingangsgröße u beschräkt ist, so ist die p-Norm der Ausgangsgröße y ebenfalls beschränkt.

[4] William Henry Young (*20.10.1863 in London, +7.7.1942 in Lausanne/Schweiz)

Kapitel 3

Stabilität freier LZI-Systeme, lineare Matrix-Gleichungen

3.1 Einführung

Wir betrachten das freie lineare und zeitinvariante System (abgekürzt LZI-System)

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \tag{3.1}$$

mit der (n, n)-Systemmatrix $\mathbf{A}$ und dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi}$. Dieses System ist *genau dann* asymptotisch stabil, wenn $\mathbf{A}$ eine sogenannte Hurwitz[1]-Matrix ist. D.h. alle n Eigenwerte s_i von $\mathbf{A}$ weisen einen negativen Realteil auf

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0 \qquad i = 1, ..., n \ .$$

Die Überprüfung des Stabilitätsverhaltens kann mit Hilfe sogenannter Lyapunov[2]-Funktionen erfolgen: Existiert in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ des Ursprungs $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine Funktion $V(\mathbf{x})$ die positiv definit ist und deren zeitliche Ableitung dV/dt negativ definit ist, so ist das LZI-System asymptotisch stabil! Der Ansatz (es handelt sich um eine quadratishe Form in $\boldsymbol{\xi}$)

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} \ ,$$

wobei $\mathbf{P}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix[3] ist, führt mit (3.1) zu der Ableitung

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right) \boldsymbol{\xi} \ .$$

[1] Adolf Hurwitz (*26.3.1859 in Hildesheim/Deutschland, +18.11.1919 in Zürich). DMV-Mitgliedschaft 1891-1919.

[2] Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov (*6.6.1857 Yaroslavl/Russland, +3.11.1918 Odessa/Ukraine)

[3] Eine (n, n)-Matrix $\mathbf{P}$ heisst positiv definit, wenn für alle $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ die Ungleichung

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} > 0$$

erfüllt ist.

Diese ist ebenfalls eine quadratishe Form in $\boldsymbol{\xi}$. Falls die Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}$ negativ definit ist, so liegt asymptotische Stabilität vor. D.h. es muss

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$$

gelten, wobei $\mathbf{Q}$ eine symmetrische positiv definite (n,n)-Matrix ist. Die Vorgehensweise zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität ist dann folgende: Man gibt $\mathbf{Q}$ vor, löst obige Matrix-Gleichung nach $\mathbf{P}$ auf und überprüft, ob sie positiv definit ist. Der Witz dieses Vorgehens besteht darin, dass eine Stabilitätsaussage *ohne* Berechnung des charakteristischen Polynoms $\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ durch Benutzung der Systemmatrix $\mathbf{A}$ selbst erfolgt! Nach Lyapunov gilt folgender

- **Satz 1**: Das LZI-System (3.1) ist *genau dann* asymptotisch stabil, wenn zu jeder symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{Q}$ eine eindeutige, symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{P}$ als Lösung der linearen Matrix-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q} \tag{3.2}$$

existiert.

Die nachfolgenden Ausführungen dienen einerseits dem tieferen Verständnis dieses Satzes, andererseits führen sie zu weiteren Anwendungen der sogenannten Lyapunov-Gleichung (3.2).

3.2 Die Sylvester-Gleichung FX + XG = H

Die Lyapunov-Gleichung (3.2) stellt einen Speziallfal der sogenannten Sylvester[4]-Gleichung

$$\mathbf{FX} + \mathbf{XG} = \mathbf{H} \tag{3.3}$$

dar[5]. Hierbei sind $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{X}$ quadratische (n,n)-Matrizen[6]. Es stellt sich folgende Frage: Unter welchen Bedingungen für $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ besitzt die Sylvester-Gleichung bei gegebener Matrix $\mathbf{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{X}$?

Diese Frage ist im skalaren Fall

$$fx + xg = h$$

leicht zu beantworten. Für

$$f + g \neq 0 \tag{3.4}$$

erhalten wir die eindeutige Lösung

$$x = \frac{1}{f+g}h \ .$$

[4] James Joseph Sylvester (*3.9.1814 in London, +15.3.1897 in London)

[5] J. Sylvester: "*Sur l´equations en matrices px-xq*"; Comptes rendus de l´Académie des sciences, 99(2) 67-71, 115-116, 1884

[6] Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für den Fall, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{H}$ rechteckige (m,n)-Matrizen, $\mathbf{F}$ eine (m,m)-Matrix und $\mathbf{G}$ eine (n,n)-Matrix sind. Ferner gelten sie auch für den Fall komplexwertiger Matrizen. Man braucht nur die Operation "Tranposition (T)" duch die Operation "konjugierte Transposition (*)" zu ersetzen.

Bedenkt man, dass f bzw. g die Eigenwerte der $(1,1)$-Matrizen $\mathbf{F} := f$ bzw. $\mathbf{G} := g$ sind, bedeutet obige Bedingung (3.4), dass die Summe zweier Eigenwerte der Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ verschieden von null sein muss

$$f + g \neq 0 \ .$$

Es wird sich zeigen, dass im allgemeinen Fall die Summe zweier *beliebiger* Eigenwerte f_k von $\mathbf{F}$ und g_i von $\mathbf{G}$ verschieden von null sein muss

$$f_k + g_i \neq 0 \quad \text{für} \ \ i,k = 1,2,...,n.$$

3.2.1 Lösung mit Hilfe des Kronecker-Produktes

Die Gleichung (3.3) ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen für die gesuchten n^2 Elemente x_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ der Matrix $\mathbf{X} := [x_{ij}]$. Dieses Gleichungssystem hat die Form

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{h}} \ \ . \tag{3.5}$$

Der n^2-dimensionale Zeilenvektor $\hat{\mathbf{x}}^T$ wurde durch Aneinanderreihen der Zeilen der Matrix $\mathbf{X}$ gebildet:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ ... \\ \mathbf{x}_{n-1}^T \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\mathbf{x}}^T := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T & \mathbf{x}_2^T & ... & \mathbf{x}_{n-1}^T & \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}.$$

Der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{h}}$ wird in derselben Weise aus den Zeilen der Matrix $\mathbf{H}$ gebildet. In diesem Fall kann die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ vorteilhaft mit Hilfe des Kronecker[7]-Produktes[8] $\otimes$ zweier Matrizen durch

$$\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) + (\mathbf{G}^T \otimes \mathbf{E})$$

dargestellt werden.

Die Eindeutigkeit des Lösungsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ bzw. der Lösungsmatrix $\mathbf{X}$ hängt von der Regularität der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. des linearen Operators $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{X}) := \mathbf{FX} + \mathbf{XG} \tag{3.6}$$

ab. Entscheidend für eine eindeutige Lösung der linearen Gleichung (3.5) ist die Lage der Eigenwerte η_l $(l = 1,2,...,n^2)$ der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$.

Zur Erinnerung: es gilt folgender

---

[7] Leopold Kronecker (7.12.1823 in Liegnitz/Deutschland, +29.12.1891 in Berlin)

[8] Seien $\mathbf{K} := [k_{ij}]$ eine (p,m)-Matrix und $\mathbf{G} := [g_{ij}]$ eine (q,n)-Matrix. Das Kronecker-Produkt $\mathbf{F} \otimes \mathbf{L}$ ist eine (pq,mn)-Matrix, deren (i,j)-Block die Matrix $k_{ij} \cdot \mathbf{L}$ ist:

$$\mathbf{K} \otimes \mathbf{L} := \begin{pmatrix} k_{11} \cdot \mathbf{L} & k_{12} \cdot \mathbf{L} & ... & k_{1m} \cdot \mathbf{L} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{p1} \cdot \mathbf{L} & k_{p2} \cdot \mathbf{L} & & k_{pm} \cdot \mathbf{L} \end{pmatrix}.$$

Das Kronecker-Produkt ist assoziativ und distributiv.

- **Satz 2**: Zu jedem $\hat{\mathbf{h}}$ existiert genau dann eine eindeutige Lösung $\hat{\mathbf{x}}$, wenn die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ regulär ist, d.h. wenn *kein* Eigenwert η_l verschwindet

$$\eta_l \neq 0 \qquad l = 1, ..., n^2 \ .$$

Es stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Eigenwerten η_l der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ und jenen der Matrizen $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$. Hierzu gilt folgender

- **Satz 3**: η ist genau dann ein Eigenwert von $\hat{\mathbf{H}}$, wenn η durch die Summe

$$\eta := f + g$$

mit einem Eigenwert f von $\mathbf{F}$ und einem Eigenwert g von $\mathbf{G}$ darstellbar ist[9].

Diese bemerkenswert einfache Beziehung wird mit Hilfe der Ausführungen im nachfolgenden (optionalen) Kapitel einsichtig.

Zum Verständnis des Satzes 3 (*optional*)

- Für einen Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_k$ der Matrix $\mathbf{F}$ gilt

$$\mathbf{F}\mathbf{p}_k = f_k \mathbf{p}_k \qquad k = 1, ..., n \quad .$$

Analog gilt für einen Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i^T$ der Matrix $\mathbf{G}$

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{G} = g_i \boldsymbol{\rho}_i^T \qquad i = 1, ..., n \quad .$$

Wir betrachten nun die (n, n)-Matrix, die durch das dyadische Produkt

$$\mathbf{\Gamma}_{kl} := \mathbf{p}_k \boldsymbol{\rho}_i^T$$

entsteht, und bilden gemäß (3.6) den Ausdruck $\mathfrak{L}(\mathbf{p}_k \mathbf{q}_i^T)$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{\Gamma}_{kl}) = \mathbf{F}\mathbf{\Gamma}_{kl} + \mathbf{\Gamma}_{kl}\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = f_k\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k g_i \boldsymbol{\rho}_i^T = (f_k + g_i)\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T,$$

$$\mathbf{F}\mathbf{\Gamma}_{kl} + \mathbf{\Gamma}_{kl}\mathbf{G} = (f_k + g_i)\mathbf{\Gamma}_{kl} \quad .$$

Das bedeutet, durch die Operation $\mathfrak{L}(\mathbf{\Gamma}_{kl})$ entsteht ein Vielfaches von $\mathbf{\Gamma}_{kl}$. Damit ist $(f_k + g_i)$ ein Eigenwert des Operators $\mathfrak{L}$ bzw. der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$.

[9] Alternative Formulierung: Bezeichnet man die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{G}$ mit g_i und die der Matrix $\mathbf{F}$ mit f_k, so gilt

$$\eta_l = g_i + f_k \qquad i, k = 1, ..., n \ , \quad l = i(n-1) + k$$

- Umgekehrt gilt, dass sich *alle* Eigenwerte von $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. von $\mathfrak{L}$ durch die Summen $(g_i + f_k)$ ergeben. Dies kann folgendermaßen gezeigt werden: Angenommen es gilt

$$\mathbf{FX} + \mathbf{XG} = \lambda\mathbf{X} \quad \text{mit } \mathbf{X} \neq \mathbf{0}\ .$$

Daraus folgt

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X} + \mathbf{XG} = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Nach Multiplikation mit $\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}$ von links erhalten wir

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{X} + (\mathbf{F}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E})\mathbf{XG} = \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

Durch Ausnutzung von (3.7)

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = -\mathbf{XG}$$

ergibt sich für (3.8)

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^2\mathbf{X} - \mathbf{XG}^2 = \mathbf{0}.$$

Die nochmalige Multiplikation mit $(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})$ ergibt dann in analoger Weise vorgehend

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^3\mathbf{X} + \mathbf{XG}^3 = \mathbf{0}.$$

Man erkennt leicht das allgemeine (witzige) Resultat

$$(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E})^i\mathbf{X} - \mathbf{X}(-\mathbf{G})^i = \mathbf{0},$$

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{F})^i\mathbf{X} = \mathbf{XG}^i. \tag{3.9}$$

Das Cayley-Theorem angewandt auf die Matix $\mathbf{G}$ mit dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ besagt

$$\Delta(\mathbf{G}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{G}-g_i\mathbf{E}) = \mathbf{0}\ .$$

Nutzt man nun die Eigenschaft (3.9) aus, so gilt

$$\Delta(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \Delta(\mathbf{G}) = \mathbf{0}.$$

Das bedeutet

$$\Delta(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{F}-g_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E} - \mathbf{F}\right] \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Nachdem $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ ist, muss die Matrix $\prod\limits_{i=1}^{n}\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E} - \mathbf{F}\right]$ singulär sein. D.h. für einen Eigenwert g_i gilt:

$$\det\left[(\lambda-g_i)\mathbf{E} - \mathbf{F}\right] = 0.$$

Damit gilt

$$f_k = \lambda - g_i$$

bzw. ein Eigenwert λ des Operators (3.6)

$$\mathfrak{L}(\mathbf{X}) := \mathbf{FX} + \mathbf{XG}$$

ergibt sich durch eine Summe $(f_i + g_k)$ mit $i, k = 1, 2, ..., n$.

- Es gilt, dass *alle* Eigenwerte von $\hat{\mathbf{H}}$ bzw. $\mathfrak{L}$ sich durch die Summen $(g_i + f_k)$ ergeben. Dies kann auch folgendermaßen gezeigt werden: Angenommen es gilt

$$\mathbf{FX} + \mathbf{XG} = \lambda\mathbf{X} \ , \tag{3.10}$$

wobei λ *nicht* durch eine Summe eines Eigenwertes f der Matrix $\mathbf{F}$ und eines Eigenwertes g der Matrix $\mathbf{G}$ darstellbar ist. Dann kann λ unter Verwendung von zwei Eigenwerten zB. f_I und g_K durch

$$\lambda = f_I + g_K + \gamma$$

mit

$$\gamma \neq 0$$

dargestellt werden. Für Gleichung (3.10) ergibt sich dann

$$(\mathbf{F} - f_I\mathbf{E})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{G} - g_K\mathbf{E}) = \gamma\mathbf{X}. \tag{3.11}$$

Multiplizieren wir obige Gleichung von rechts mit einem Rechtseigenvektor $\mathbf{g}$ zum Eigenwert g_K der Matrix $\mathbf{G}$, so erhalten wir

$$(\mathbf{F} - f_I\mathbf{E})\mathbf{Xg} + \mathbf{X}(\mathbf{G} - g_K\mathbf{E})\mathbf{g} = \gamma\mathbf{Xg}$$

bzw.

$$(\mathbf{F} - f_I\mathbf{E})(\mathbf{Xg}) = \gamma(\mathbf{Xg}).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall I: Es wird *angenommen* dass das Produkt $\mathbf{Xg}$ verschieden vom Nullvektor ist. Das ist zBsp der Fall, wenn die Matrix $\mathbf{G}$ lauter verschiedene Eigenwerte und damit n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

$$\mathbf{Xg} \neq \mathbf{0}.$$

Dann ist $\mathbf{Xg}$ ein Rechtseigenvektor der Matrix $\mathbf{F}$ und γ ist Eigenwert der Matrix $\mathbf{F} - f_I\mathbf{E}$, d.h.

$$\gamma = f_k - f_I \quad \text{mit} \quad K \neq k \ \text{ und } \ 1 \leq k \leq n.$$

Damit beträgt λ

$$\begin{aligned} \lambda &= f_I + g_K + \gamma = \lambda = f_I + g_K + f_k - f_I \\ &= g_K + f_k, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu der getroffenen Annahme steht.

Fall II: Es wird nun *angenommen*, dass *kein* Rechtseigenvektor $\mathbf{g}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{Xg} \neq \mathbf{0}$ existiert. Dann besitzt die Matrix $\mathbf{G}$ mindestens einen mehrfachen Eigenwert g_M. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass ein einziger mehrfacher Eigenwert g_M existiert und dieser die algebraische Vielfachheit $\rho_M \geq 2$ besitzt. Die Matrix besitzt demnach $n - \rho_M + 1$ verschiedene Eigenwerte, die zugehörigen Rechtseigenvektoren sind linear unabhängig und erfüllen die Gleichung $\mathbf{Xg} = \mathbf{0}$. Ist die geometrische Vielfachheit des mehrfachen Eigenwertes g_M gleich seiner algebraischen Vielfachheit, so existieren ρ_M linear unabhängige Eigenvektoren. Damit liegt die gleiche Situation wie im Fall I vor. Zu dem mehrfachen Eigenwert kann ein Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$:

$$(\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M = \mathbf{g}_M \qquad \text{mit} \quad (\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\mathbf{g}_M = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

ermittelt werden. Man beachte, dass Eigenvektor $\mathbf{g}_M$ und Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$ linear unabhängig sind. Multiplizieren wir obige Gleichung (3.11) von rechts mit dem Hauptvektor $\tilde{\mathbf{g}}_M$, so erhalten wir

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M+\mathbf{X}(\mathbf{G}-g_K\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M=\gamma\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M$$

bzw. mit (3.12)

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M+\mathbf{X}\mathbf{g}_M=\gamma\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M\ .$$

Aufgrund der Annahme $\mathbf{Xg}_M = \mathbf{0}$ gilt dann

$$(\mathbf{F}-f_I\mathbf{E})(\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M)=\gamma(\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M).$$

Ist das Produkt $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M \neq \mathbf{0}$, so liegt wieder der besprochene Fall I vor. Das bedeutet, dass $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M$ ein Rechtseigenvektor der Matrix $\mathbf{F}-f_I\mathbf{E}$ ist und dass γ deren Eigenwert ist. Wie im Fall I führt dies zu einem Widerspruch. Ist das Produkt $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{g}}_M = \mathbf{0}$, so wird obige Vorgehensweise wiederholt, indem man einen weiteren Hauptvektor bildet. Das geschieht anhand der rekursiven Relation (für $i = 2, 3, ..., \rho_M$)

$$(\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M^{(i)} = \tilde{\mathbf{g}}_M^{(i-1)} \qquad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{g}}_M^{(1)} = \mathbf{g}_M \quad \text{und } (\mathbf{G} - g_M\mathbf{E})\tilde{\mathbf{g}}_M^{(\rho_M)} = \mathbf{0}$$

und erzeugt eine Kette von Hauptvektoren, die aus linear unabhängigen(!) Vektoren besteht. Man nennt $\tilde{\mathbf{g}}_M^{(i)}$ einen Hauptvektor der Stufe i, wobei $\tilde{\mathbf{g}}_M^{(1)}$ der Hauptvektor der Stufe 1 der Eigenvektor $\mathbf{g}_M$ ist. Damit erzeugt man Verhältnisse wie im Fall I und kann die dortige Argumentation benutzen, um einen Widerspruch zu erzeugen. Mit anderen Worten: *jeder* Eigenwert η der Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ ergibt sich durch die Summe

$$\eta = f + g$$

der Eigenwerte f der Matrix $\mathbf{F}$ und der Eigenwerte g der Matrix $\mathbf{G}$.

3.2.2 Lösung der Sylvester-Gleichung mit Hilfe einer Differentialgleichung

Wir betrachten die lineare Matrix-Differentialgleichung bezüglich der quadratischen (n, n)-Matrix $\mathbf{X}(t)$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG} - \mathbf{H} \tag{3.13}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0 \ .$$

Hierbei sind $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ konstante quadratische (n,n)-Matrizen. Die Lösung $\mathbf{X}(t)$ kann aufgrund der Linearitätseigenschaft durch Superposition der Lösungen folgender Probleme ermittelt werden:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{X} \qquad \text{mit } \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0 \qquad \text{sog. } \textit{freie} \text{ Lösung} \tag{3.14}$$

und

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{X} - \mathbf{H} \qquad \text{mit } \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{0} \qquad \text{sog. } \textit{erzwungene} \text{ Lösung} \quad . \tag{3.15}$$

Zur freien Lösung: Die vorliegende Differentialgleichung (3.14) ist die Verallgemeinerung der wohlbekannten Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{\Xi}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{\Xi} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Xi}(t=0) = \mathbf{\Xi}_0 \ .$$

Bezeichnen wir mit $e^{\mathbf{F}t}$ die Transitionsmatrix, so lautet die Lösungsmatrix

$$\mathbf{\Xi}(t) = e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{\Xi}_0 .$$

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{\Psi}\mathbf{G} \quad \text{bzw. deren Transponierte} \quad \frac{d\mathbf{\Psi}^T}{dt} = \mathbf{G}^T\mathbf{\Psi}^T$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{\Psi}(t=0) = \mathbf{\Psi}_0$. Mit Hilfe der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{G}^T t} = \left(e^{\mathbf{G}t}\right)^T$ erhalten wir die Lösung

$$\mathbf{\Psi}^T(t) = e^{\mathbf{G}^T t} \cdot \mathbf{\Psi}_0^T \qquad \text{bzw.} \quad \mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Psi}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t} \ .$$

Damit ist naheliegend, für die Lösung der *freien* Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$$

den Ansatz

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t}$$

aufzustellen. Die Differentiation dieses Ausdruckes nach t ergibt

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t} \cdot \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{G}e^{\mathbf{G}t} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} \ .$$

Zur erzwungenen Lösung: Ausgehend von obigem Resultat wird im vorliegenden Fall (3.15) folgender Ansatz ("Variation der Matrix-Konstanten") gemacht:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t}.$$

Gesucht ist die Matrix $\mathbf{Z}(t)$. Nach Differentiation des Ansatzes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t}\right] &= \frac{de^{\mathbf{F}t}}{dt}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)\frac{de^{\mathbf{G}t}}{dt} \\ &= \mathbf{F}e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + e^{\mathbf{F}t}\mathbf{Z}(t)e^{\mathbf{G}t}\mathbf{G} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} + \mathbf{X}(t)\mathbf{G}\end{aligned}$$

und Einsetzen in (3.15) erhalten wir eine Differentialgleichung für $\mathbf{Z}(t)$

$$e^{\mathbf{F}t}\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt}e^{\mathbf{G}t} = -\mathbf{H}$$

bzw.

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = -e^{-\mathbf{F}t}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}t} \ .$$

Deren Lösung ergibt sich *unmittelbar* durch Integration zu

$$\mathbf{Z}(t) = -\int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}\tau}d\tau \ .$$

Durch Überlagerung der freien und erzwungenen Lösung erhalten wir die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= e^{\mathbf{F}t}\left[\mathbf{X}_0 - -\int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{-\mathbf{G}\tau}d\tau\right]e^{\mathbf{G}t} \\ &= e^{\mathbf{F}t}\mathbf{X}_0e^{\mathbf{G}t} - \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}(t-\tau)}d\tau \ .\end{aligned}$$

Nach einer Änderung der Integrationsvariablen und einer Umformung ergibt sich

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{X}_0e^{\mathbf{G}t} - \int_0^t e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}\tau}d\tau.$$

Man erkennt anhand dieses Ausdruckes, dass *falls* $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ Hurwitz-Matrizen sind, die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{F}t} = \lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{G}t} = \mathbf{0}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) =: \mathbf{X}_\infty$$

existieren. Letzterer ist durch

$$\mathbf{X}_\infty = -\int_0^\infty e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{H}e^{\mathbf{G}\tau}d\tau \qquad (3.16)$$

gegeben. Damit gilt im vorliegenden Fall

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{0} = \mathbf{F}\mathbf{X}_\infty + \mathbf{G}\mathbf{X}_\infty - \mathbf{H} \; ,$$

d.h. $\mathbf{X}_\infty$ erfüllt die algebraische Matrix-Gleichung

$$\mathbf{F}\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{G} = \mathbf{H}$$

gemäß (3.3) und ist deren eindeutige Lösung.

Bemerkungen

Zur Struktur der freien Lösung: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{G} \tag{3.17}$$

und suchen *eine mögliche* Lösung. Wir stellen - in voller Analogie zu der Vorgehensweise bei LZI-Systemen gemäß (3.1) - den Ansatz

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Gamma} e^{st} \tag{3.18}$$

auf. Hierbei müssen die konstante Matrix $\mathbf{\Gamma}$ und die skalare Konstante s noch ermittelt werden. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung (3.17) ergibt sich nach Kürzung des von null verschiedenen Faktors e^{st} folgende nichtlineare Gleichung mit den unbekannten Größen $\mathbf{\Gamma}$ und s

$$s\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{G} \; .$$

Es wird nun für $\mathbf{\Gamma}$ mit Hilfe von Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ ein Ansatz gemacht: Hierzu benutzt man Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_k$ der Matrix $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\mathbf{p}_k = f_k\mathbf{p}_k \qquad k = 1, ..., n$$

und Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$ der Matrix $\mathbf{G}$

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = g_i\boldsymbol{\rho}_i^T \qquad i = 1, ..., n \; .$$

Wählen wir $\mathbf{\Gamma}$ als das dyadische Produkt $\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T$

$$\mathbf{\Gamma} := \mathbf{\Gamma}_{ki} = \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T,$$

so lautet der Ansatz zur Lösung von (3.18)

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T e^{st}.$$

Damit erhalten wir durch Differentiation nach t und Kürzung von e^{st}

$$\begin{aligned} s\mathbf{\Gamma}_{ki} &= \mathbf{F}\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{G} = f_k\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T + \mathbf{p}_k g_i\boldsymbol{\rho}_i^T = (f_k + g_i)\,\mathbf{p}_k\boldsymbol{\rho}_i^T \\ &= (f_k + g_i)\,\mathbf{\Gamma}_{ki} \; . \end{aligned}$$

Damit kann $\mathbf{\Gamma}_{ki}$ als "Eigenmatrix" und $s = f_k + g_i$ als "Eigenwert" der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{FX} + \mathbf{XG}$$

interpretiert werden. Das zeitliche Verhalten der Lösung

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Gamma}_{ki} \cdot e^{(f_k+g_i)t} = \mathbf{p}_k \boldsymbol{\rho}_i^T \cdot e^{(f_k+g_i)t} \tag{3.19}$$

wird durch Exponentialfunktionen $e^{(f_k+g_i)t}$ charakterisiert. Wählt man als Anfangswert mit Hilfe von Eigenrichtungen von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ gemäß

$$\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{\Gamma}_{ki} = \mathbf{p}_k \boldsymbol{\rho}_i^T,$$

so besitzt die Lösung $\mathbf{X}(t)$ obige prägnante Struktur (3.19).

3.3 Die Lyapunov-Gleichung $\mathbf{A^T P}$ + $\mathbf{PA}$ = -$\mathbf{Q}$

Es wird *vorausgesetzt*, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{Q}$ quadratische (n,n)-Matrizen sind. Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen die gleichen Eigenwerte α_i. Es wird nun vorausgesetzt, dass

$$\alpha_i + \alpha_k \neq 0 \quad \text{für} \qquad i,k = 1,...,n \tag{3.20}$$

gilt. Demnach existieren *keine* Eigenwerte mit verschwindendem Realteil bzw. *keine* an der imaginären Achse gespiegelte Eigenwerte. Nach den Sätzen 1 und 2 existiert damit für *jede* Matrix $\mathbf{Q}$ eine *eindeutige* Lösung $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q} \ .$$

3.3.1 Lösung mit Hilfe des Kronecker-Produktes

Obige Lyapunov-Gleichung ist folgendem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Elemente p_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ der Matrix $\mathbf{P} := [p_{ij}]$ äquivalent:

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{q}} \quad .$$

Hierbei wird der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{p}}^T$ durch Aneinanderreihen der Zeilen der Matrix $\mathbf{P}$ gebildet:

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ ... \\ \mathbf{p}_{n-1}^T \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{p}}^T := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T & \mathbf{p}_2^T & ... & \mathbf{p}_{n-1}^T & \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} .$$

Der n^2-dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{q}}$ wird in derselben Weise aus den Zeilen der Matrix $\mathbf{Q}$ gebildet. Die Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ kann mit Hilfe des Kronecker-Produktes $\otimes$

$$\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{A}^T) + (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{E})$$

dargestellt werden.

Beispielhaft sei hier der Fall einer $(2,2)$-Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

angeführt. Es ergibt sich für $\hat{\mathbf{H}}$:

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{11}+a_{22} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{11}+a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} .$$

3.3.2 Integral-Darstellung der Lösungsmatrix P

Es wird nun *angenommen*, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist. Die Lösung $\mathbf{P}$ kann dann mit Hilfe des folgenden uneigentlichen Integrals dargestellt werden:

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt \quad . \tag{3.21}$$

Das Ergebnis ist aufgrund der vorangegangenen Ausführungen über die Sylvester-Gleichung, bzw. der Relation (3.16) unmittelbar angebbar[10].

3.3.3 Symmetrie der Lösungsmatrix P

Wir nehmen nun an, dass $\mathbf{Q}$ eine symmetrische Matrix ist. Nach Transposition der Lyapunov-Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}^T = -\mathbf{Q} \; .$$

Das bedeutet, dass $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^T$ dieselbe Gleichung erfüllen. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung gilt

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T,$$

[10] Die Richtigkeit der Relation (3.21) kann ansonsten leicht nachvollzogen werden:

Das Integral $\mathbf{I} := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt$ wohldefiniert, da $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist. Wir bilden nun $\mathfrak{L}(\mathbf{I})$ gemäß (3.6):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathbf{I}) &= \mathbf{A}^T \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt + \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt\mathbf{A} = \int_0^\infty \left(\mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t} + e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\right) dt = e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\Big|_0^\infty = -\mathbf{Q} \quad . \end{aligned}$$

D.h. das Integral $\mathbf{I}$ ist die (eindeutige) Lösung $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung: $\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt$.

d.h. die Lösungsmatrix ist symmetrisch. In diesem Fall entspricht die Lyapunov-Gleichung einem linearen Gleichungssystem für die $n(n+1)/2$ unbekannten Elemente der Matrix $\mathbf{P}$.

3.3.4 Positive Definitheit der Lösungsmatrix P

Der Fall $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$: Es gilt folgendes **Lemma**: Unter der Voraussetzung, dass die symmetrische Matrix $\mathbf{Q}$ positiv definit ist, ist die Lösungs-Matrix $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung ebenfalls positiv definit

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad . \tag{3.22}$$

Zum Verständnis obiger Aussage: Nachdem $\mathbf{Q}$ positiv definit ist, kann sie mit Hilfe einer regulären Matrix (n,n)-Matrix $\mathbf{C}$ folgendermaßen dargestellt bzw. zerlegt werden

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C} \quad .$$

Wir bilden nun mit Hilfe eines beliebigen n-dimensionalen Vektors $\mathbf{x}_0$ und der (n,n)-Matrix $\mathbf{P}$ gemäß

$$\mathbf{P} := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}dt = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}dt$$

die quadratische Form $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x}_0$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} &= \mathbf{x}_0^T\left(\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}dt\right)\mathbf{x}_0 = \int_0^\infty \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 dt \\ &= \int_0^\infty \left(\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right)^T\left(\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right)dt \quad .\end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe der Norm $\|\cdot\|$ eines Vektors die Ungleichung

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = \int_0^\infty \left\|\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right\|^2 dt \;\geq 0 \;.$$

Das Gleichheitszeichen wird - nachdem die Matrix $\mathbf{C}\; e^{\mathbf{A}t}$ regulär ist - nur für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ angenommen, d.h. die Matrix $\mathbf{P}$ ist positiv definit.

Der Fall $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$: In Analogie zu obigem Fall wird die semidefinite Matrix $\mathbf{Q}$ mit Hilfe einer rechteckigen (m,n)-Matrix $\mathbf{C}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$$

zerlegt, wobei der Rang der Matrix $\mathbf{C}$ kleiner als n ist[11]. Das bedeutet, $\mathbf{C}$ besitzt linear abhängige Spalten. Für die quadratische Form $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0}$ ergibt sich wiederum

$$\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = \int_0^\infty \left\|\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right\|^2 dt \ \geq 0\ .$$

Wir wollen nun Bedingungen für die Matrix $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}$ aufstellen, damit $\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ *ausschließlich* für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ zu Null wird. Angenommen es ist $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ aber $\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x_0} = 0$. Dann folgt, dass

$$\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = 0 \quad \text{für} \ \ t \geq 0$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das *fiktive* LZI-System mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\xi}$, der Eingangsgröße $\mathbf{u}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{w}$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\boldsymbol{\psi} \tag{3.24}$$

beobachtbar ist. Knapp formuliert: $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ muss beobachtbar sein[12].

Bei Vorliegen der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} \qquad \text{mit } \mathbf{C}^T\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

gilt damit folgende Aussage:

$$\mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \quad \textit{und} \quad (\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} > \mathbf{0}\ . \tag{3.25}$$

Des Weiteren gelten die Aussagen

$$(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \textit{und} \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \tag{3.26}$$

$$\mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix} \ \ \textit{und} \ \ \mathbf{P} > \mathbf{0} \ \ \Rightarrow \ \ (\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar}\ . \tag{3.27}$$

---

[11] Beispiel hierzu:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[12] Man beachte, dass für das fiktive LZI-System (3.23), (3.24) das Integral

$$\mathbf{W}_B := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^Tt}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}dt$$

die sogenannte Beobachtbarkeits-Gram-Matrix ist. Sie erfüllt die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}_B + \mathbf{W}_B\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}\ .$$

Der analoge Ausdruck

$$\mathbf{W}_S := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^Tt}dt$$

ist die sogenannte Steuerbarkeits-Gram-Matrix und kann durch Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{W}_S\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{W_S} = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

ermittelt werden.

3.3.5 Eine Erweiterung des Satzes von Lyapunov

Nach Taussky[13] gilt[14]folgender

- **Satz 4**: Es wird vorausgesetzt, dass die Eigenwerte α_i der Matrix $\mathbf{A}$ die Ungleichung (3.20)

  $$\alpha_i + \alpha_k \neq 0 \qquad i, k = 1, ..., n$$

  erfüllen. Dann exisitiert für jede positiv definite symmetrische Matrix $\mathbf{Q}$ eine *eindeutige reguläre* symmetrische Lösungs-Matrix $\mathbf{P}$ der Lyapunov-Gleichung

  $$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q},$$

  die N positive Eigenwerte besitzt. Hierbei ist N gleich der Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit negativem Realteil. Demnach besitzen die restlichen $n - N$ Eigenwerte von $\mathbf{A}$ einen positiven Realteil.

3.3.6 Beispiel (kanonische Form von Schwarz)

Wir betrachten den Fall, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in der sogenannten Schwarz-Form[15]

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \ddots & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & -\beta_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

---

[13] Olga Taussky (* 30.8.1906 in Olmütz / Österreich-Ungarn, + 7.10.1995 in Pasadena, California)

[14] Olga Taussky: "*A Generalization of a Theorem of Lyapunov*". J. Soc. Indust. Math. Vol.9, No. 4, December 1961

[15] Zur Erinnerung: jede (n, n)-Matrix, die nichtderogatorisch ist , d.h. deren Minimalpolynom den Grad n hat, kann mittels einer regulären Transformation in diese Form gebracht werden.

Zum Entstehen der Schwarz-Matrix aus Sicht der Elektrotechnik, siehe zBsp : H. Dourdoumas und R. Seeber, "*Algebraische Stabilitätskriterien*", Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der TUGraz, Version 19.1.2018 mit den reellen Parametern β_i vorliegt[16]. Wir setzen ferner voraus, dass *alle* Parameter β_i *verschieden* von Null sind, d.h.

$$\beta_i \neq 0 \qquad \text{für } \; i = 0, ..., n-1 \quad .$$

Obige Matrix ist genau dann eine Hurwitz-Matrix, wenn alle Parameter β_i positiv sind[17]

$$\beta_i > 0 \qquad\qquad i = 0, ..., n-1 \; .$$

Dies kann elegant durch Lösung der Lyapunov-Gleichung bewiesen werden[18]. Um die Schreibarbeit gering zu halten und den Lösungsweg besser zu verstehen, betrachten wir der Einfachheit halber den Fall $n = 3$, d.h. eine $(3,3)$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} \qquad ; \; \beta_i \neq 0 \qquad i = 0, 1, 2 \quad .$$

Die Vorgehensweise im allgemeinen Fall ist die gleiche.

Wir betrachten die Lyapunov-Gleichung in der Form

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} \qquad \text{mit } \mathbf{C}^T\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

und wollen bei der Stabilitätsuntersuchung die Aussage (3.26)

$$(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \text{ beobachtbar} \quad \textit{und} \quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist eine Hurwitz-Matrix}$$

---

[16] Es ist beachtenswert, dass β_{n-1} gleich der negativen Summe der Eigenwerte dieser Matrix ist. Dies ergibt sich durch Betrachtung der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und Berechnung deren Determinante durch Enwicklung nach der letzten Spalte

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & ... & 0 & 0 \\ \beta_0 & s & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \ddots & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \ddots & s & -1 \\ 0 & 0 & ... & \beta_{n-2} & s + \beta_{n-1} \end{vmatrix} = (s + \beta_{n-1}) \begin{vmatrix} s & -1 & ... & 0 \\ \beta_0 & s & \ddots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \ddots & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \ddots & s \end{vmatrix} + ...$$

[17] Dieses folgt aus einem **Theorem** von Schwarz: Hierzu werden zunächst die Größen

$$P_1 := \beta_{n-1},\, P_2 := \beta_{n-1} \cdot \beta_{n-2},\; P_3 := \beta_{n-1} \cdot \beta_{n-2} \cdot \beta_{n-3},\, ...,\, P_n := \beta_{n-1} \cdot \beta_{n-2} \cdot \beta_{n-3} \cdot \; ... \cdot \beta_0$$

bzw. für $i = 1, 2, ..., n$

$$P_i = P_{i-1} \cdot \beta_{n-i} \quad \text{mit} \quad P_0 := 1$$

eingeführt. Betrachtet man dann die Zahlenfolge P_1 ; P_2 ; P_3 ; ... P_n , so ist die Anzahl N der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, die einen *negativen* Realteil besitzen, gleich der Anzahl der *positiven* Werte der Zahlenfolge. Damit beträgt die Anzahl M der Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, die einen *positiven* Realteil besitzen, $n - N$ und entspricht der Anzahl der *negativen* Werte der Zahlenfolge.

[18] Siehe den Aufsatz aus dem Jahr 1960 von R.E. Kalman & J. Bertram: *Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov.*

ausnutzen. Wir wählen nun

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad K \neq 0$$

Das System $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ ist dann beobachtbar. Dies folgt unmittelbar aus dem Hautus-Kriterium durch Aufstellen der Hautus-Beobachtbarkeits-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ \beta_0 & s & -1 \\ 0 & \beta_1 & s + \beta_2 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix},$$

die den Rang 3 aufweist. Die zu lösende Lyapunov-Gleichung lautet dann:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 \end{pmatrix}.$$

Die Idee besteht darin, die gesuchte Lösung $\mathbf{P}$ als *Diagonalmatrix*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

anzusetzen! Nach einigen Umrechnungen ergibt sich für die Lyapunov-Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 - p_2\beta_0 & 0 \\ p_1 - p_2\beta_0 & 0 & p_2 - p_3\beta_1 \\ 0 & p_2 - p_3\beta_1 & -2p_3\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen die zu erfüllenden Gleichungen

$$2p_3\beta_2 = K^2 ,$$

$$p_2 - p_3\beta_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_2 = p_3\beta_1$$

und

$$p_1 - p_2\beta_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad p_1 = p_2\beta_0 \quad .$$

Man erkennt die *rekursive* Berechnung der Elemente der Matrix $\mathbf{P}$. Wählt man - aus kosmetischen Gründen -

$$K^2 = 2\beta_2^2 ,$$

so erhält man

$$p_3 = \beta_2, \qquad p_2 = \beta_2\beta_1 \quad \text{und} \quad p_3 = \beta_2\beta_1\beta_0 \quad .$$

Damit ist im Falle $\beta_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ die Diagonalmatrix $\mathbf{P}$ positiv definit! Aufgrund des o.a. Satzes (3.26) ist die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix. Des Weiteren erkennt man unmittelbar mit Hilfe des Satzes von Taussky, welcher besagt, dass die Anzahl der positiven Eigenwerte p_i gleich der Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit negativem Realteil ist, die Gültigkeit des o.a. allgemeinen Theorems von Schwarz.

3.3.7 Ergänzungen

Stabilitätsrand

$\mathbf{A}$ sei eine reelle (n,n)-Matrix mit den Eigenwerten α_k. Sei ferner σ eine reelle Konstante. Wir bilden eine Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ gemäß

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \sigma \mathbf{E} \quad .$$

Die Eigenwerte $\tilde{\alpha}_k$ von $\tilde{\mathbf{A}}$ lauten

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k + \sigma$$

und damit gilt

$$\mathrm{Re}\,\{\tilde{\alpha}_k\} = \mathrm{Re}\,\{\alpha_k\} + \sigma \quad .$$

Wir betrachten nun die Lyapunov-Gleichung

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q}$$

bzw.

$$(\mathbf{A} + \sigma\mathbf{E})^T \mathbf{P} + (\mathbf{A} + \sigma\mathbf{E})\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + 2\sigma\mathbf{E}\mathbf{P} = -\mathbf{Q},$$

wobei $\mathbf{Q}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Es gilt: genau dann, wenn $\mathbf{P}$ positiv definit ist, ist die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Hurwitz-Matrix. Das heißt

$$\mathrm{Re}\,\{\tilde{\alpha}_k\} = \mathrm{Re}\,\{\alpha_k\} + \sigma < 0$$

bzw.

$$\mathrm{Re}\,\{\alpha_k\} < -\sigma \ .$$

Ist σ eine *nichtnegative* Konstante, kann man mit Hilfe dieser Vorgehensweise überprüfen, ob die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in der linken offenen s-Ebene liegen und einen Mindestabstand (einen sogenannter Stabilitätsrand) σ von der imaginären Achse aufweisen.

Asymptotische Stabilität zeitdiskreter LZI-Systeme

Durch Lösung einer Lyapunov-Gleichung kann ebenfalls die asymptotische Stabilität *zeitdiskreter* LZI-Systeme der Form

$$\boldsymbol{\xi}_{i+1} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\xi}_i \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

untersucht werden. Zur Erinnerung: Asymptotische Stabilität liegt *genau dann* vor, wenn *alle* Eigenwerte z_k der (n,n)-Matrix $\mathbf{A}_d$ im Inneren des Einheitskreises liegen:

$$|z_k| < 1 \qquad k = 1, 2, ..., n \qquad .$$

Unterwirft man die Matrix $\mathbf{A}_d$ einer bilinearen Transformation

$$\mathbf{A} := (\mathbf{A}_d + \mathbf{E})(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})^{-1}, \tag{3.28}$$

so ergeben sich die Eigenwerte α_k der Matrix $\mathbf{A}$ aus den Eigenwerten z_k der erzeugenden Matrix $\mathbf{A}_d$ gemäß der gleichen(!) bilinearen Relation

$$\alpha_k = (z_k + 1)(z_k - 1)^{-1} \quad .$$

Es gilt ferner für beliebige komplexe(!) Eigenwerte z_k

$$|z_k| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{\alpha_k\} < 0 \qquad \text{sowie} \qquad |z_k| = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\{\alpha_k\} = 0.$$

Das bedeutet, asymptotische Stabilität im zeitdiskreten Fall liegt *genau dann* vor, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ nach (3.28) eine Hurwitz-Matrix ist. Letzteres kann mit Hilfe der Lyapunov-Gleichung überprüft werden.

Norm-Berechnung

Wir betrachten ein aymptotisch stabiles, kausales, steuerbares und beobachtbares LZI-System in der Zustandsraumdarstellung

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad\qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} \tag{3.29}$$

mit der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \qquad (t \geq 0) \tag{3.30}$$

und der zugehörigen Laplace-Transformierten, der Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \; .$$

Die L_2-Norm[19] der Gewichtsmatrix $\mathbf{g}$ bzw. der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ lauten[20]

$$\|\mathbf{g}\|_2 := \left[\int_0^\infty \mathtt{Spur}\left\{\mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)\right\} dt\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

[19] Im Falle von Einfachsystemen mit der skalaren Gewichtsfunktion $g(t)$ und der skalaren Übertragungsfunktion $G(s)$ vereinfachen sich die Beziehungen zu

$$\|g\|_2 = \left[\int_0^\infty g^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

bzw.

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(j\omega)^2\right| d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

[20] Diese Norm kann aufgefasst werden als ein Maß für die stationäre Kovarianzmatrix der Ausgangsgröße $\mathbf{y}$, wenn die Eingangsgröße $\mathbf{u}$ ein sogenanntes weisses Rauschen ist.

bzw.

$$\|\mathbf{G}\|_2 := \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{Spur}\left\{ \mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega) \right\} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{3.32}$$

Aufgrund des Satzes[21] von Plancherel[22] gilt[23]

$$\|\mathbf{g}\|_2 = \|\mathbf{G}\|_2 \quad . \tag{3.33}$$

Damit ergibt sich aus (3.30), (3.31) und (3.33)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}\|_2^2 &= \int_0^\infty \mathtt{Spur}\left\{ \mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t) \right\} dt = \mathtt{Spur} \in \left\{ \int_0^\infty \mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)dt \right\} \\ &= \mathtt{Spur}\left\{ \int_0^\infty \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\ dt \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\|\mathbf{G}\|_2^2 = \mathtt{Spur}\left\{ \mathbf{B}^T \cdot \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\ dt \cdot \mathbf{B} \right\}. \tag{3.34}$$

Letzte Relation kann mit Hilfe von

$$\mathbf{P} := \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\ e^{\mathbf{A}t}dt$$

zu

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left[\mathtt{Spur}\left\{ \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

umgeschrieben werden. Hierbei ist $\mathbf{P}$ die (eindeutige, positiv definite) Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C} \ .$$

Beweis des Lyapunov-Satzes (*optional*)

Wir betrachten drei (reelle) Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$. Hierbei werden

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$$

sowie die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

[21] Dieser Satz wird in den Ingenieurwissenschaften zu Unrecht als Satz von Parseval zitiert.

[22] Michel Plancherel (*16.1.1885 in Bussy/Schweiz, +4.3.1967 in Zürich/Schweiz).

[23] Michel Plancherel: "*Contribution à l ´études de la représentation d ´une fonction arbitraire par les intégrales définies*", Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 30(1), 289 - 335, 1910

vorausgesetzt. Daraus folgt, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist.

Der Beweis für diese Aussage erfolgt nun unter Verwendung von konjugiert komplexen[24] Eigenwerten α, $\bar{\alpha}$ und zugehörigen Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{w}$, $\bar{\mathbf{w}}$ der Matrix $\mathbf{A}$. Es gilt definitionsgemäß

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}$$

bzw. nach Transposition der zweiten Beziehung

$$\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{A}^T = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}^T \quad .$$

Wir multiplizieren die Lyapunov-Gleichung von links mit $\bar{\mathbf{w}}^T$ und von rechts mit $\mathbf{w}$ und erhalten

$$\bar{\mathbf{w}}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{w} = -\bar{\mathbf{w}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w} \quad .$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich für die linke Seite obiger Relation

$$\bar{\alpha}\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} + \bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\alpha\mathbf{w} = (\alpha + \bar{\alpha})\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} = 2\,\mathrm{Re}\,\{\alpha\}\,\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} \quad .$$

Damit gilt

$$2\,\mathrm{Re}\,\{\alpha\}\,\bar{\mathbf{w}}^T\mathbf{P}\mathbf{w} = -\bar{\mathbf{w}}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w} < 0 \ .$$

Nachdem $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ positiv definit sind, folgt die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\,\{\alpha\} < 0 \quad .$$

Anmerkung

Man beachte, dass falls eine Matrix $\mathbf{P}$ positiv definit und $\mathbf{A}$ eine Hurwitz-Matrix ist, d.h.

$$\mathbf{P} > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,\{s_i(\mathbf{A})\} < 0 \quad \forall\ i \quad ,$$

die berechnete Matrix $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ *nicht* zwingend negativ definit ist!

Hierzu folgendes einfaches Beispiel:

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine Hurwitz-Matrix. Sie besitzt offensichtlich das charakteristische Polynom

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s+1)^2 \ .$$

Die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

ist offensichtlich positiv definit. Es ergeben sich

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[24] Die Betrachtung reeller Eigenwerte erfolgt ganz analog.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} = \mathbf{A}^T\mathbf{E} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

und damit die Matrix

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix},$$

die für $a > 2$ indefinit ist!

Kapitel 4

Literatur

- Felix R. GANTMACHER: *Matrizentheorie.* (s. Kap. 8 Matrizengleichungen); Springer Verlag, 1986.
- Mathukumalli VIDYASAGAR: *Nonlinear Systems Analysis.* (s. Sec. 5.4); Prentice-Hall, 2. Auflage 1993.
- John C. DOYLE, Bruce A. FRANCIS und Allen R. TANNENBAUM: *Feedback Control Theory.*(s. Chapter 2); Macmillan Publishing Company 1992