Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

SYSTEMTHEORIE AK 1

Rekursive Ermittlung von $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ und $\mathbf{A}^i$
Eine kanonische Form von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$
Mathematische Ergänzugen

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber

2. Version vom 21. Januar 2021 (1. Version 11. 4. 2018)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zeitkontinuierliche LZI-Systeme

1.1 Einführung

Wir betrachten ein freies n-dimensionales lineares zeitinvariantes System (LZI-System) mit der Beschreibung im Zustandsraum $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ und dem Anfangswert $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$. Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ lautet $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}_0$. Hierbei ist $\mathbf{\Phi}(t)$ die sogenannte Transitionsmatrix. Sie ergibt sich als Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi} \tag{1.1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}\ . \tag{1.2}$$

Sie kann formal als (konvergente, unendliche) Reihe

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\mathbf{A}t\right)^{\nu} =: e^{\mathbf{A}t} \tag{1.3}$$

angeschrieben werden.

Nach dem Theorem von Cayley[1] erfüllt jede quadratische (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i $(i = 1, 2, .., n)$ und dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i) \tag{1.4}$$

ihre eigene charakteristische Gleichung

$$\Delta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) = \mathbf{0} = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})\ . \tag{1.5}$$

Das hat zur Folge, dass $\mathbf{\Phi}(t)$ als eine *endliche* Reihe

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu}(t)\mathbf{A}^{\nu} \tag{1.6}$$

[1] Arthur Cayley (*16.8.1821 Richmond, Vereinigtes Königreich, +26.1.1895 Cambridge)

angeschrieben werden kann. Hierbei sind $\alpha_\nu(t)$ Potenzreihen in t, deren Ermittlung relativ kompliziert ist.

Nachfolgend wird in *konstruktiver* Art ein iterativer Algorithmus - in der Fachliteratur als Putzer-Algorithmus[2] bekannt - entwickelt, bei dem n Schritte zur Ermittlung der Matrizenfunktion $\mathbf{\Phi}(t)$ benötigt werden. Das Ergebnis ist ein Ausdruck der Form $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t)\mathbf{P}_\nu$. Es werden lediglich die n Eigenwerte s_i $(i = 1, ..., n)$ der Matrix $\mathbf{A}$ benötigt, wobei das Auftreten mehrfacher Eigenwerte *irrelevant* für den Rechenablauf ist. Der Algorithmus kann für Systeme niedriger Ordnung leicht per Hand durchgeführt werden. Die konstanten Matrizen $\mathbf{P}_\nu$ sind einfach zu berechnende Polynome in $\mathbf{A}$ vom Grad $\nu - 1$. Es ist kennzeichnend, dass bei jeder Iteration eine gewöhnliche *skalare, lineare* Differentialgleichung *erster* Ordnung gelöst wird, die jeweils als Lösung die Funktion $\varphi_\nu(t)$ ergibt. Die anschliessenden Ausführungen zielen auf ein besseres Verständnis der Zusammenhänge und des systematischen Entstehens dieses Algorithmus .

1.2 Ermittlung der Transitionsmatrix und der Resolventen

1.2.1 Betrachtung im Zeitbereich

Ausgangspunkt nachfolgender Überlegungen ist eine Interpretation der Differentialgleichung (1.1) in Verbindung mit dem Theorem von Cayley. Bekanntlich sind die Operationen "Differentiation der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ nach dem Argument t" und "Multiplikation der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ mit der Matrix $\mathbf{A}$" (welche zusätzlich kommutativ ist) äquivalent:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{A\Phi}\ (= \mathbf{\Phi A})\ . \tag{1.7}$$

Betrachtet man ein beliebiges *Polynom* $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ in $\mathbf{A}$ und bildet man die Funktion $\mathbf{\Psi}(t)$ gemäß[3]

$$\mathbf{\Psi}(t) := \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t)\ , \tag{1.8}$$

so erfüllt $\mathbf{\Psi}(t)$ die gleiche(!) Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi} = \mathbf{A\Psi}\ (= \mathbf{\Psi A}) \tag{1.9}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Psi}(t = 0) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t = 0) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\ . \tag{1.10}$$

Das bedeutet: die Operation "Differentiation der Matrix $\mathbf{\Psi}(t)$ nach dem Argument t" ist mit der Operation "Multiplikation der Matrix $\mathbf{\Psi}(t)$ mit der Matrix $\mathbf{A}$" äquivalent[4].

[2] E. J. PUTZER: *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients.* The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 1, (Jan., 1966), pp. 2-7.

[3] Es gilt offensichtlich $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})$. D.h. die Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{\Phi}$ sind vertauschbar.

[4] Es gilt sogar die allgemeinere Beziehung $\frac{d^i}{dt^i}\ \mathbf{\Psi} = \mathbf{A}^i\mathbf{\Psi}\ (= \mathbf{\Psi A}^i) \qquad i = 0, 1, 2, 3, ...$

Die Multiplikation von rechts der Relation (1.5) mit $\mathbf{\Phi}(t)$ ergibt die Beziehung

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{0}\ , \tag{1.11}$$

die der Schlüssel zur Entwicklung eines Algorithmus zur Berechnung der Transitionsmatrix ist!

Man betrachtet nun die Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_n(t)$:

$$\mathbf{\Psi}_n(t):=(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{\Phi}(t)\ . \tag{1.12}$$

Mit Hilfe der (konstanten) Matrix

$$\mathbf{P}_n:=(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \tag{1.13}$$

- diese ist ein Polynom in $\mathbf{A}$ vom Grad $n-1$ und wird mittels der Eigenwerte s_i ($i=1,2,...,n-1$) gebildet - lautet die Hilfsfunktion

$$\mathbf{\Psi}_n(t)=\mathbf{P}_n\cdot\mathbf{\Phi}(t)\ . \tag{1.14}$$

Wäre die Transitionsmatrix bekannt, so entstünde aus ihr die Matrix $\mathbf{\Psi}_n(t)$. Die Idee besteht darin, einen umgekehrten Weg zu beschreiten: ausgehend von der *noch nicht* vorliegenden Funktion $\mathbf{\Psi}_n(t)$ berechnet man *sukzessiv* die Transitionsmatrix.

Hierzu wird in einem **1. Schritt** (1.11) mit Hilfe von $\mathbf{\Psi}_n(t)$ umgeschrieben

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_n(t)=\mathbf{0}\ . \tag{1.15}$$

Diese Beziehung deuten wir aufgrund von (1.9)

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_n(t)=\mathbf{0}\ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n-s_n\mathbf{\Psi}_n=\mathbf{0}$$

als Differentialgleichung erster Ordnung für $\mathbf{\Psi}_n(t)$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n=s_n\mathbf{\Psi}_n\ , \tag{1.16}$$

die *unmittelbar* gelöst werden kann: $\mathbf{\Psi}_n(t)=e^{s_nt}\cdot\mathbf{\Psi}_n(0)$. Der Anfangswert ergibt sich für $t=0$ aus (1.14) unter Beachtung von (1.2) zu

$$\mathbf{\Psi}_n(0)=\mathbf{P}_n=(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}). \tag{1.17}$$

Damit ist die Lösung festgelegt

$$\mathbf{\Psi}_n(t)=e^{s_nt}\cdot\mathbf{P}_n \tag{1.18}$$

und der 1. Schritt ist abgeschlossen.

In einem **2. Schritt** betrachten wir obige Beziehung (1.12)

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{\Psi}_n(t)\ , \tag{1.19}$$

wobei $\mathbf{\Psi}_n(t)$ gemäß (1.18) *bekannt*(!) ist. Analog vorgehend führen wir gemäß

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) := (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \tag{1.20}$$

eine Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_{n-1}(t)$ ein, die mit Hilfe der konstanten Matrix

$$\mathbf{P}_{n-1} := (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \tag{1.21}$$

die Darstellung

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) = \mathbf{P}_{n-1} \cdot \mathbf{\Phi}(t) \tag{1.22}$$

aufweist und erhalten aus (1.19) die Beziehung

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) = \mathbf{\Psi}_n(t) \ . \tag{1.23}$$

Diese entspricht aufgrund von

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) - \mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} - s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} - \mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0}$$

folgender Differentialgleichung zur Bestimmung von $\mathbf{\Psi}_{n-1}(t)$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} = s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} + \mathbf{\Psi}_n \ . \tag{1.24}$$

Hierbei ist $\mathbf{\Psi}_n(t)$ eine - inzwischen - bekannte Störfunktion. Unter Beachtung von (1.22) lautet die Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(0) = (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) = \mathbf{P}_{n-1} \ . \tag{1.25}$$

Nach Lösung der Differentialgleichung (1.24) ergibt sich $\mathbf{\Psi}_{n-1}(t)$ und der 2. Schritt ist abgeschlossen.

Dieses Vorgehen, d.h. die sukzessive Einführung von Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_i(t)$, wird so lange wiederholt, bis die Funktion $\mathbf{\Psi}_2(t)$ ermittelt ist[5] und damit der $(n-1)$. Schritt abgeschlossen ist.

Mit Hilfe der nun *bekannnten* Funktion $\mathbf{\Psi}_2(t)$ gilt im n. - und letzten - Schritt die Beziehung

$$\mathbf{\Psi}_2(t) := (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} - s_1\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}_2(t) \ . \tag{1.26}$$

Damit ergibt die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}_2$ mit $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}$ die gesuchte Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

[5] Man erkennt, dass bei jeder Integration im Ergebnis jeweils eine neue Exponentialfunktion $e^{s_i t}$ dazukommt.

Zusammenfassung des Algorithmus

Die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ kann durch *sukzessives* Lösen folgender einfachen Differentialgleichungen 1. Ordnung berechnet werden:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n = s_n\mathbf{\Psi}_n \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_n(0) = \mathbf{P}_n = \prod_{i=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} = s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} + \mathbf{\Psi}_n \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_{n-1}(0) = \mathbf{P}_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-2}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.28}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-2} = s_{n-2}\mathbf{\Psi}_{n-2} + \mathbf{\Psi}_{n-1} \qquad \text{mit} \ \mathbf{\Psi}_{n-2}(0) = \mathbf{P}_{n-2} = \prod_{i=1}^{n-3}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.29}$$

usw.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + \mathbf{\Psi}_3 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_2(0) = \mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \ , \tag{1.30}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Psi}_2 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ . \tag{1.31}$$

Die Berechnungsreihenfolge sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{\Psi}_n \ \rightarrow \mathbf{\Psi}_{n-1} \ \rightarrow \mathbf{\Psi}_{n-2} \ \rightarrow ... \rightarrow \mathbf{\Psi}_2 \ \rightarrow \mathbf{\Phi} \ .$$

Beispiel (LZI-System 3.Ordnung)

Die vorgestellte Vorgehensweise zur Ermittlung der Transitionsmatrix wird für eine $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i $(i = 1,2,3)$ und dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ demonstriert. Nach Cayley gilt:

$$\Delta(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) = (\mathbf{A}-s_3\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{0} \ .$$

Die benötigten Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_3(t)$ und $\mathbf{\Psi}_2(t)$ lauten

$$\mathbf{\Psi}_3(t) := (\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_3(0) = \mathbf{P}_3 = (\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})$$

und

$$\mathbf{\Psi}_2(t) := (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_2(0) = \mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \ .$$

Sie erfüllen die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_3=s_3\mathbf{\Psi}_3 \tag{1.32}$$

und

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + \mathbf{\Psi}_3 \ . \tag{1.33}$$

Die Transitionsmatrix ergibt sich durch Lösung von

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}_2 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ . \tag{1.34}$$

- Die Lösung von (1.32) lautet
$$\mathbf{\Psi}_3(t) = e^{s_3 t}\mathbf{P}_3. \tag{1.35}$$
Damit ist der 1. Schritt abgeschlossen.

- Im 2. Schritt liegt die Differentialgleichung (1.33) $\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + e^{s_3 t}\mathbf{P}_3$ vor, welche die Lösung
$$\mathbf{\Psi}_2(t) = e^{s_2 t}\left[\mathbf{P}_2 + \int_0^t e^{-s_2\tau}e^{s_3\tau}\mathbf{P}_3 d\tau\right] = e^{s_2 t}\left[\mathbf{P}_2 + \int_0^t e^{(s_3-s_2)\tau}d\tau\cdot\mathbf{P}_3\right]$$
bzw.
$$\mathbf{\Psi}_2(t) = e^{s_2 t}\cdot\mathbf{P}_2 \;+\; \frac{e^{s_3 t}-e^{s_2 t}}{s_3-s_2}\cdot\mathbf{P}_3 \tag{1.36}$$
besitzt.

- Die Transitionsmatrix ergibt sich im 3. Schritt durch Lösung von (1.34) zu
$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{s_1 t}\left[\mathbf{E} + \int_0^t e^{-s_1\tau}\cdot\mathbf{\Psi}_2(\tau)d\tau\right] =: e^{s_1 t}\left[\mathbf{E}+\mathbf{I}(t)\right] \quad . \tag{1.37}$$
Die Auswertung des Integrals $\mathbf{I}(t) = \int_0^t e^{-s_1\tau}\cdot\mathbf{\Psi}_2(\tau)d\tau$ erfolgt mit Hilfe von (1.36):
$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(t) &= \int_0^t e^{-s_1\tau}\left[e^{s_2\tau}\mathbf{P}_2 + \frac{e^{s_3\tau}-e^{s_2\tau}}{s_3-s_2}\mathbf{P}_3\right]d\tau \\
&= \int_0^t e^{(s_2-s_1)\tau}d\tau\cdot\mathbf{P}_2 + \int_0^t\left[e^{(s_3-s_1)\tau}-e^{(s_2-s_1)\tau}\right]\frac{1}{s_3-s_2}d\tau\cdot\mathbf{P}_3 \\
\mathbf{I}(t) &= \frac{1}{s_2-s_1}\left[e^{(s_2-s_1)t}-1\right]\mathbf{P}_2 + \\
&\quad + \left[\frac{1}{s_3-s_1}\left[e^{(s_3-s_1)t}-1\right] - \frac{1}{s_2-s_1}\left[e^{(s_2-s_1)t}-1\right]\right]\frac{1}{s_3-s_2}\mathbf{P}_3 \quad .
\end{aligned}$$
Setzt man dieses Ergebnis in (1.37) ein, so ergibt sich nach einigen Umrechnungen
$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{s_1 t}\mathbf{E} + \frac{e^{s_2 t}-e^{s_1 t}}{s_2-s_1}\mathbf{P}_2 + \left(\frac{e^{s_3 t}-e^{s_1 t}}{s_3-s_1} - \frac{e^{s_2 t}-e^{s_1 t}}{s_2-s_1}\right)\frac{1}{s_3-s_2}\mathbf{P}_3$$
bzw.
$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(t) &= e^{s_1 t}\mathbf{E} + \frac{e^{s_2 t}-e^{s_1 t}}{s_2-s_1}\mathbf{P}_2 + \\
&\quad + \frac{(s_3-s_2)e^{s_1 t}-(s_3-s_1)e^{s_2 t}+(s_2-s_1)e^{s_3 t}}{(s_3-s_2)(s_3-s_1)(s_2-s_1)}\mathbf{P}_3 \ .
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Die Transitionsmatrix weist die prägnante Darstellung $\mathbf{\Phi}(t) = \varphi_1(t)\mathbf{E}+\varphi_2(t)\mathbf{P}_2+\varphi_3(t)\mathbf{P}_3$, wobei die drei Funktionen $\varphi_i(t)$ rekursiv berechnet wurden, auf.

1.2.2 Betrachtung im Bildbereich

Wir wollen nun obiges Berechnungsschema (1.27)-(1.31) in den Bildbereich der Laplace[6]-Transformation übersetzen. Dadurch bekommen wir eine *explizite* Darstellung der Laplace-Transformierten der Transitionsmatrix, der sogenannten Resolventen. Ferner erhalten wir unmittelbar die *rekursive* Vorschrift zur Berechnung der Funktionen $\varphi_i(t)$ zur Darstellung der Transitionsmatrix gemäß $\mathbf{\Phi}(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t)\mathbf{P}_\nu$. Hierzu benutzen wir die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\left\{\mathbf{f}(t)\right\}$ einer (matrixwertigen) Funktion $\mathbf{f}(t)$ gemäß $\mathcal{L}\left\{\mathbf{f}(t)\right\} = \bar{\mathbf{f}}(s) := \int\limits_0^\infty \mathbf{f}(t)e^{-st}dt$ und erhalten die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{\Phi}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} =: \mathcal{R}(\mathbf{A},s),$$

wobei $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$ die sogenannte Resolvente der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

- Durch Transformation von (1.27) erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s)$

  $$\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s) = \frac{1}{s-s_n}\mathbf{P}_n. \tag{1.39}$$

  Damit ist der 1. Schritt abgeschlossen.

- Aus (1.28) erhalten wir zunächst $\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s) = \frac{1}{s-s_{n-1}}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{s-s_{n-1}}\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s)$ bzw. mit (1.39)

  $$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s) = \frac{1}{s-s_{n-1}}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{(s-s_{n-1})\,(s-s_n)}\mathbf{P}_n\ . \tag{1.40}$$

  Damit ist der 2. Schritt abgeschlossen.

- Aus (1.29) bekommen wir $\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-2}(s) = \frac{1}{s-s_{n-2}}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{1}{s-s_{n-2}}\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s)$ bzw. mit (1.40)

  $$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-2}(s) = \frac{1}{s-s_{n-2}}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{1}{(s-s_{n-2})\,(s-s_{n-1})}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{(s-s_{n-2})\,(s-s_{n-1})\,(s-s_n)}\mathbf{P}_n\ . \tag{1.41}$$

  Damit ist der 3. Schritt abgeschlossen.

- Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis aus (1.30) die Gleichung $\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_2}\bar{\mathbf{\Psi}}_3(s)$ bzw.

  $$\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{(s-s_2)(s-s_3)}\mathbf{P}_3 + ... + \frac{1}{(s-s_2)(s-s_3)...(s-s_n)}\mathbf{P}_n \tag{1.42}$$

  entstanden ist. Damit ist der (n-1). Schritt abgeschlossen.

[6] Pierre Simon de Laplace (*23.3.1749 in Baumont-en-Auge, Frankreich, +5.3.1827 Paris)

- Letztlich ermitteln wir aus (1.31) die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix $\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{s-s_1}\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s)$ bzw.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{\Phi}}(s) \;=\; & \frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\mathbf{P}_3 + ... \\ & + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)...(s-s_n)}\mathbf{P}_n \;.\end{aligned} \quad (1.43)$$

Obige Relation ist eine *bemerkenswerte, explizite* Darstellung für die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A}, s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ von $\mathbf{A}$, mit Hilfe der Eigenwerte s_i $(i = 1, 2, ..., n)$ von $\mathbf{A}$ und der (konstanten) Matrizen $\mathbf{P}_k$

$$\mathbf{P}_k = \prod_{i=1}^{k-1}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \qquad \text{mit} \quad k = 2, 3, ..., n \quad . \qquad (1.44)$$

Wir führen folgende Abkürzungen für die benötigten Laplace-Transformierten ein:

$$\bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1}, \qquad (1.45)$$

$$\bar{\varphi}_2(s) := \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \left[= \frac{1}{s-s_2}\bar{\varphi}_1(s)\right], \qquad (1.46)$$

usw.

$$\bar{\varphi}_n(s) := \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)} = \frac{1}{\Delta(s)} \left[= \frac{1}{s-s_n}\bar{\varphi}_{n-1}(s)\right] \quad . \qquad (1.47)$$

Damit lautet die Resolvente der Matrix $\mathbf{A}$

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{s}) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \bar{\varphi}_1(s)\mathbf{E} + \bar{\varphi}_2(s)\mathbf{P}_2 + ... + \;\bar{\varphi}_n(s)\mathbf{P}_n \;. \qquad (1.48)$$

Zusammenfassung des Algorithmus

Die Laplace-Transformierten $\bar{\varphi}_i(s)$ und die konstanten (n, n)-Matrizen $\mathbf{P}_i$ können *rekursiv* gemäß

$$\bar{\varphi}_i(s) := \frac{1}{s-s_i}\bar{\varphi}_{i-1}(s) \quad \text{für} \quad i = 2, 3, ..., n \quad \text{mit} \;\; \bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1} \qquad (1.49)$$

und[7]

$$\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_i \quad \text{für } i = 1, 2, ..., n-1 \quad \text{mit } \mathbf{P}_1 := \mathbf{E} \qquad (1.50)$$

berechnet werden

Die *Zeitfunktionen* $\varphi_i(t)$ ergeben sich durch Rücktransformation von (1.49) *rekursiv* als Lösungen skalarer Differentialgleichungen 1. Ordnung für $i = 2,\ 3,\ ...,\ n$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = s_i\varphi_i + \varphi_{i-1} \quad \text{mit } \varphi_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) = e^{s_1 t}. \qquad (1.51)$$

[7] Wertet man Relation (1.50) für $i = n$ aus, so ist die - nicht benötigte - Matrix $\mathbf{P}_{n+1}$ gleich $\Delta(\mathbf{A})$

$$\mathbf{P}_{n+1} = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_n = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) = \Delta(\mathbf{A}) \;.$$

Sie ist nach dem Theorem von Cayley eine Nullmatrix!

Die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ ist darstellbar durch

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot \mathbf{P}_i \ . \tag{1.52}$$

Die Ermittlung der Transitionsmatrix gemäß (1.50), (1.51) und (1.52) ist in der Fachliteratur als Putzer-Algorithmus bekannt.

Beispiel (LZI-System 3. Ordnung, Fortsetzung)

Transformiert man die Differentialgleichungen (1.32), (1.33) und (1.34) in den Bildbereich, so erhält man:

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_3(s) = \frac{1}{s-s_3}\mathbf{P}_3 \ , \quad \bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3}\mathbf{P}_3$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3}\mathbf{P}_3 \ .$$

Mit den Definitionen

$$\bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1} \ , \tag{1.53}$$

$$\bar{\varphi}_2(s) := \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s-s_2}\bar{\varphi}_1(s) \tag{1.54}$$

und

$$\bar{\varphi}_3(s) := \frac{1}{s-s_3}\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s-s_3}\bar{\varphi}_2(s) \tag{1.55}$$

erhalten wir den Ausdruck

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \bar{\varphi}_1(s)\mathbf{E} + \bar{\varphi}_2(s)\mathbf{P}_2 + \bar{\varphi}_3(s)\mathbf{P}_3 \ .$$

Die Zeitfunktionen $\varphi_i(t)$ ergeben sich durch Rücktransformation von (1.53), (1.54) und (1.55) *rekursiv* als Lösungen zweier skalarer Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = s_2\varphi_2 + \varphi_1 \qquad \text{mit } \varphi_2(0) = 0 \ \text{ und } \ \varphi_1(t) = e^{s_1 t}$$

und

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = s_3\varphi_3 + \varphi_2 \quad \text{mit } \varphi_3(0) = 0 \ .$$

Es ergeben sich - natürlich - die in Gleichung (1.38) angegebenen Funktionen $\varphi_i(t)$.

Bemerkung Die Zeitfunktionen $\varphi_i(t)$ können natürlich klassisch durch Rücktransformation der Gleichungen (1.53), (1.54) und (1.55) in den Zeitbereich ermittelt werden. Aus (1.53) ergibt sich unmittelbar $\varphi_1(t) = e^{s_1 t}$. Die Funktion $\bar{\varphi}_2(s)$ gemäß (1.54) kann aufgrund der Beziehung

$$\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}\right) \tag{1.56}$$

zu

$$\bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right) \tag{1.57}$$

umgeformt werden. Der Witz dieser Umschreibung besteht darin, dass $\bar{\varphi}_2(s)$ mit Hilfe *elementarer* Teilbrüche $\frac{1}{s-s_i}$ dargestellt wird. Dadurch kann die Rücktransformation in den Zeitbereich *unmittelbar* erfolgen und ergibt die Zeitfunktion $\varphi_2(t) = \frac{e^{s_2 t}-e^{s_1 t}}{s_2-s_1}$. Die Funktion $\bar{\varphi}_3(s)$ gemäß (1.55) kann unter Anwendung der grundlegenden Beziehung (1.56) auf das *ermittelte* Ergebnis (1.57) umgeschrieben werden. Dadurch enthält $\bar{\varphi}_3(s)$ ausschließlich *elementare* Teilbrüche.

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_3(s) &= \frac{1}{s-s_3}\bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right)\frac{1}{s-s_3} = \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_3}\right) \\
&= \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{s_3-s_2}\left(\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_2}\right) - \frac{1}{s_3-s_1}\left(\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Obiger Ausdruck kann *unmittelbar* rücktransformiert werden und ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{s_3-s_2}\left(e^{s_3 t} - e^{s_2 t}\right) - \frac{1}{s_3-s_1}\left(e^{s_3 t} - e^{s_1 t}\right)\right] \\
&= \frac{(s_3-s_2)e^{s_1 t} - (s_3-s_1)e^{s_2 t} + (s_2-s_1)e^{s_3 t}}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_2-s_1)} .
\end{aligned}$$

Beispiel

Die Systemmatrix sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte sind - aufgrund der Dreiecksform der Matrix - in der Hauptdiagonale ersichtlich. Eine willkürliche(!) Indizierung ergibt: $s_1 = s_2 = 2$ und $s_3 = 3$. Das bedeutet: $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)^2(s-3)$.

Die konstanten Matrizen $\mathbf{P}_i$ ergeben sich zu:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} ,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Ermittlung der Funktionen $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ erfolgt durch Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = 2\varphi_2 + e^{2t} \quad \text{mit} \quad \varphi_2(t=0) = 0 \quad \textbf{und} \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = 3\varphi_3 + \varphi_2 \quad \text{mit} \quad \varphi_3(t=0) = 0 \ .$$

Wir erhalten

$$\varphi_2(t) = e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}e^{2\tau}d\tau = te^{2t} \text{ und } \varphi_3(t) = e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}\tau e^{2\tau}d\tau = e^{3t}\left[-te^{-t} - (e^{-t}-1)\right] = -(t+1)e^{2t}+e^{3t}.$$

Damit lautet die Transitionsmatrix

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{2t}\mathbf{E} + te^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[-(t+1)e^{2t}+e^{3t}\right]\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & -(t+1)e^{2t}+e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t}+e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

Alternative (klassische) Berechnung (*optional*): Es gilt:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}^{-1},$$

bzw. nach Durchführung der Matrix-Inversion

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{\Phi}}(s) &= \frac{1}{(s-2)^2(s-3)}\begin{pmatrix} (s-2)(s-3) & s-3 & 1 \\ 0 & (s-2)(s-3) & s-2 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)^2} & \frac{1}{(s-2)^2(s-3)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)(s-3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung der Einträge obiger Matrix ergibt

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)^2} & -\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-3} \\ 0 & \frac{1}{s-2} & -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}.$$

Obiger Ausdruck bestätigt unter Verwendung der Korrespondenz $\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = k!\frac{1}{(s-a)^{k+1}}$, das ermittelte Ergebnis (1.58).

Beispiel (LZI-System 2. Ordnung)

Wir betrachten ein LZI-System 2. Ordnung mit der Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den zugehörigen Eigenwerten s_1 und s_2. Die Transitionsmatrix lautet

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{2}\varphi_i(t)\mathbf{P}_i = \varphi_1(t)\mathbf{P}_1 + \varphi_2(t)\mathbf{P}_2$$

mit

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = s_2\varphi_2 + \varphi_1 \quad , \ \varphi_2(0) = 0 \ , \ \varphi_1(t) = e^{s_1 t}$$

sowie

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} \ , \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \ .$$

Nach einer einfachen Integralauswertung ergibt sich $\varphi_2(t) = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}$. Damit lautet die Transitionsmatrix eines Systems zweiter Ordnung

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t}\mathbf{E} \ + \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}). \tag{1.59}$$

Ein Umschreiben ergibt die sogenannte [8]-Formel[9]

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t}\frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_1 - s_2} + \ e^{s_2 t}\frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_2 - s_1} \quad .$$

Für den Fall $s_1 = s_2$ erhalten wir aus (1.59) durch Anwendung der Regel von de L´Hospital[10]:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \lim_{s_2 \to s_1}\left\{e^{s_1 t}\mathbf{E} + \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})\right\} = e^{s_1 t}\mathbf{E} + \lim_{s_2 \to s_1}\left\{\frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}\right\}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &= e^{s_1 t}\mathbf{E} + \lim_{s_2 \to s_1}\left\{\frac{-te^{s_2 t}}{-1}\right\}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t}\mathbf{E} + te^{s_1 t}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \quad .$$

[8] James Joseph Sylvester (*3.9.1814 in London, +15.3.1897 in London)

[9] Diese Formel wird in der Fachliteratur unter der Voraussetzung verschiedener Eigenwerte abgeleitet.

[10] Guillaume Francois Antoine, Marquis de L´Hospital (*1661 in Paris, +2.2.1704 in Paris)

Kapitel 2

Zeitdiskrete LZI-Systeme

2.1 Einführung

Ausgangspunkt nachfolgender Überlegungen ist ein *zeitdiskretes* System

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{2.1}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x}_i$, der m-dimensionalen Eingangsgröße $\mathbf{u}_i$, den konstanten Systemdaten passender Dimension $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, dem vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ sowie den Werten $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3,$ ... für $i \geq 0$. Das Modell (2.1) stellt eine rekursive Relation zwischen unmittelbar aufeinander folgenden Werten des Zustandsvektors dar. Deren Auswertung ergibt

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^i \left(\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}_k \right) = \mathbf{A}^i\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{i-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}_k \ . \tag{2.2}$$

Bezeichnet man mit $\bar{\mathbf{f}}(z) := \mathcal{Z}\{\mathbf{f}_i\} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k z^{-k}$ die z-Transformierte der (Matrix-) Folge $\{\mathbf{f}_i\} := (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, ...)$, so erhält man für $\mathbf{f}_i = \mathbf{A}^i$ die z-Transformierte

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{z})^{-1} = z(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \tag{2.3}$$

Unterwerfen wir das System (2.1) der z-Transformation, so erhalten wir unter Beachtung von (2.3) die z-Transformierte des Zustandsvektors bzw. die Systembeschreibung im Bildbereich[1]:

$$\bar{\mathbf{x}}(z) = (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{z})^{-1}\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(z) \ . \tag{2.4}$$

In den Beziehungen (2.2) bzw. (2.4) sind Potenzen $\mathbf{A}^i$ bzw. die Resolvente $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ prägende Größen. Das Ziel ist, eine *explizite* Darstellung für $\mathbf{A}^i$ - ohne Bildung von Potenzen der Matrix $\mathbf{A}$ - zu ermitteln bzw. die Berechnung der Inversen $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ in einfacher Weise zu bewerkstelligen. Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen ist die Kenntnis der vorangegangenen Kapitel für zeitkontinuierliche Systeme *nicht* notwendig.

[1] Diese Relation ist die z-Transformierte von (2.2).

2.2 Rekursive Ermittlung einer expliziten Darstellung von $\mathbf{A}^i$

Die Matrix $\mathbf{A}^i$ kann als Lösung $\mathbf{\Phi}_i$ der Rekursionsgleichung $\mathbf{\Phi}_{i+1} = \mathbf{A\Phi}_i \ \ (= \mathbf{\Phi}_i\mathbf{A})$ für $i = 0, 1, 2, ...$ mit dem Anfangswert $\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E}$ aufgefasst werden. Betrachtet man ein beliebiges Polynom $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ in $\mathbf{A}$ und bildet mit Hilfe der Funktion $\mathbf{\Phi}_i$ die Funktion $\mathbf{\Psi}_i$ gemäß $\mathbf{\Psi}_i := \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}_i \ [= \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})]$, so gilt ebenfalls

$$\mathbf{\Psi}_{i+1} = \mathbf{A\Psi}_i \ (= \mathbf{\Psi}_i\mathbf{A}) \tag{2.5}$$

und insbesondere

$$(\mathbf{A} - \kappa\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{A\Psi}_i - \kappa\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{\Psi}_{i+1} - \kappa\mathbf{\Psi}_i \ , \tag{2.6}$$

wobei κ ein konstanter Parameter ist.

Bezeichnet man mit z_k die Eigenwerte der (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$, so lautet das zugehörige charakteristische Polynom

$$\Gamma(z) := \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k). \tag{2.7}$$

Die Matrix $\Gamma(\mathbf{A})$ ist nach dem Theorem von Cayley gleich der Nullmatrix:

$$\Gamma(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n}(\mathbf{A} - z_k\mathbf{E}) = \mathbf{0} \ . \tag{2.8}$$

Nach Multiplikation obiger Gleichung (2.8) mit der Matrix $\mathbf{\Phi}_i$ erhalten wir die Beziehung

$$(\mathbf{A} - z_n\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0}, \tag{2.9}$$

die eine zentrale Funktion bei den nachfolgenden Ausführungen innehat.

- Führt man nun in (2.9) eine Matrix-Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_i^{(n)}$ gemäß

  $$\mathbf{\Psi}_i^{(n)} := (\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i \tag{2.10}$$

  ein, so erhält man unter Beachtung von (2.5)

  $$(\mathbf{A} - z_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{A\Psi}_i^{(n)} - z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} - z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{0}.$$

  Dies ist eine *Rekursionsgleichung* zur Berechnung von $\mathbf{\Psi}_i^{(n)}$

  $$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} = z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad\qquad i = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.11}$$

  mit dem Anfangswert $\mathbf{\Psi}_0^{(n)}$ gemäß (2.10)

  $$\mathbf{\Psi}_0^{(n)} = (\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E}) \ . \tag{2.12}$$

  Deren Lösung kann unmittelbar angeschrieben werden: $\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = z_n^i\mathbf{\Psi}_0^{(n)}$.

- Ausgehend von der Definition (2.10) führen wir nun eine weitere Hilfsfunktion

$$\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} := (\mathbf{A} - z_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i \tag{2.13}$$

ein. Unter Beachtung von (2.5) ergibt sich aus (2.10):

$$(\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} = \mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} - z_{n-1}\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} = \mathbf{\Psi}_i^{(n)}.$$

Man erhält demnach eine Rekursionsgleichung zur Ermittlung[2] der Matrix $\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)}$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} = z_{n-1}\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} + \mathbf{\Psi}_i^{(n)}, \tag{2.14}$$

deren Anfangswert $\mathbf{\Psi}_0^{(n-1)}$ - aufgrund der Definition (2.13) -

$$\mathbf{\Psi}_0^{(n-1)} = (\mathbf{A} - z_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E}) \tag{2.15}$$

beträgt.

- Dieses Vorgehen - d.h. das Einführen von Hilfsfunktionen und Aufstellen von Rekursionsgleichungen zu deren Ermittlung - wird bis zur Ermittlung der Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_i^{(2)}$ wiederholt. Es gilt dann

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_i - z_1\mathbf{E}\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Psi}_i^{(2)}. \tag{2.16}$$

Beziehung (2.16) ist eine Rekursionsgleichung für die gesuchte Matrix $\mathbf{\Phi}_i$

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1\mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \tag{2.17}$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E}\ . \tag{2.18}$$

Zusammenfassung des Algorithmus

Die Matrix $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}^i$ ergibt sich durch sukzessive Lösung folgender Rekursionsgleichungen

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} = z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(n)} = \prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A} - z_k\mathbf{E}) \quad , \tag{2.19}$$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} = z_{n-1}\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} + \mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(n-1)} = \prod_{k=1}^{n-2}(\mathbf{A} - z_k\mathbf{E}) \quad , \tag{2.20}$$

usw.

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2\mathbf{\Psi}_i^{(2)} + \mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(2)} = (\mathbf{A} - z_1\mathbf{E}) \quad , \tag{2.21}$$

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1\mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E}\ . \tag{2.22}$$

[2] Deren Lösung kann mit Hilfe von (2.2) berechnet werden.

Beispiel (zeitdiskretes LZI-System 3. Ordnung) Die erwähnte Vorgehensweise wird für eine $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten z_k $(k = 1,2,3)$ und dem charakteristischen Polynom $\Gamma(z)$ demonstriert. Nach dem Theorem von Cayley gilt

$$\Gamma(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}-z_3\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

bzw. nach Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{\Phi}_i$ von rechts

$$(\mathbf{A}-z_3\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0}.$$

Die zwei benötigten Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_i^{(3)}$ und $\mathbf{\Psi}_i^{(2)}$ lauten $\mathbf{\Psi}_i^{(3)} = (\mathbf{A}-z_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i$ und $\mathbf{\Psi}_i^{(2)} = (\mathbf{A}-z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i$. Sie erfüllen die rekursiven Relationen

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(3)} = z_3\mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \;\; \mathbf{\Psi}_0^{(3)} = (\mathbf{A}-z_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) \;, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2\mathbf{\Psi}_i^{(2)} + \mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \;\; \mathbf{\Psi}_0^{(2)} = \mathbf{A}-z_1\mathbf{E} \tag{2.24}$$

und

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1\mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \qquad \text{mit} \;\; \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E} \;. \tag{2.25}$$

Aus (2.23) folgt unmittelbar

$$\mathbf{\Psi}_i^{(3)} = z_3^i\mathbf{\Psi}_0^{(3)}. \tag{2.26}$$

Nach Einsetzen in (2.24) $\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2\mathbf{\Psi}_i^{(2)} + z_3^i\mathbf{\Psi}_0^{(3)}$ und unter Verwendung der allgemeinen Beziehung (2.2) erhalten wir $\mathbf{\Psi}_i^{(2)} = z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \sum\limits_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} \cdot \mathbf{\Psi}_k^{(3)}$ bzw. mit (2.26)[3]

$$\mathbf{\Psi}_i^{(2)} = z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \;. \tag{2.27}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (2.25) ein, so erhält man

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1\mathbf{\Phi}_i \; + \; z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} \; + \; \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \;.$$

Unter Verwendung von (2.2) bekommen wir für $\mathbf{\Phi}_i$ eine Beziehung mit der Struktur:

$$\mathbf{\Phi}_i = z_1^i \cdot \mathbf{E} \; + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \rho_i^{(3)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \;. \tag{2.28}$$

[3]Die Summe $\sum\limits_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k$ beträgt:

$$\sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k = \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^{k-i+1} \cdot z_3^{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{z_2}{z_3})^{i-1-k} \cdot z_3^{i-1} = \frac{1-(\frac{z_2}{z_3})^i}{1-(\frac{z_2}{z_3})} \cdot z_3^{i-1} = \frac{z_3^i - z_2^i}{z_3 - z_2} \;.$$

Hierbei erscheinen zwei - von den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ abhängige - Größen $\rho_i^{(2)}$ und $\rho_i^{(3)}$. Nach - einer kosmetisch bedingten - Einführung der Größe $\rho_i^{(1)}(z_1) := z_1^i$ erhalten wir die Darstellung

$$\mathbf{\Phi}_i = \rho_i^{(1)} \cdot \mathbf{E} \; + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \rho_i^{(3)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \; .$$

Es wird nun ein einfaches *rekursives* Bildungsgesetz von $\rho_i^{(2)}$ und $\rho_i^{(3)}$ abgeleitet. Hierzu unterwerfen wir die Rekursionsgleichungen (2.23), (2.24) und (2.25) der z-Transformation und erhalten unter Verwendung der Beziehung $\mathcal{Z}\left\{\mathbf{f}_{i+1}\right\} = z\left[\bar{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{f}_0\right]$ folgende Gleichungen:

$$\bar{\mathbf{\Psi}}^{(3)} = \frac{z}{z - z_3}\mathbf{\Psi}_0^{(3)} \; ,$$

$$\bar{\mathbf{\Psi}}^{(2)} = \frac{z}{z - z_2}\mathbf{\Psi}_0^{(2)} \; + \; \frac{z}{(z - z_2)(z - z_3)}\mathbf{\Psi}_0^{(3)},$$

und

$$\bar{\mathbf{\Phi}} = \frac{z}{z - z_1}\mathbf{E} \; + \; \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)}\mathbf{\Psi}_0^{(2)} \; + \; \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}\mathbf{\Psi}_0^{(3)}. \tag{2.29}$$

Letzte Gleichung ist die z-Transformierte einer Folge mit den Elementen $(\mathbf{\Phi}_i)$ gemäß (2.28). Damit gelten folgende Relationen:

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(1)}\right\} = \bar{\rho}^{(1)} = \frac{z}{z - z_1}, \tag{2.30}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(2)}\right\} = \bar{\rho}^{(2)} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} \tag{2.31}$$

und

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(3)}\right\} = \bar{\rho}^{(3)} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}. \tag{2.32}$$

Aus (2.30), (2.31) und (2.32) erhalten wir die Beziehungen

$$\bar{\rho}^{(2)} = \frac{1}{z - z_2}\bar{\rho}^{(1)} \tag{2.33}$$

und

$$\bar{\rho}^{(3)} = \frac{1}{z - z_3}\bar{\rho}^{(2)} \; . \tag{2.34}$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt Folgendes:

Die Funktion $\rho_i^{(1)}$ erfüllt die Rekursionsgleichung

$$\rho_{i+1}^{(1)} = z_1 \rho_i^{(1)} \quad \text{mit} \quad \rho_0^{(1)} = 1$$

und lautet

$$\rho_i^{(1)} = z_1^i. \tag{2.35}$$

Aufgrund von (2.33), (2.35) und (2.34) gilt

$$\rho_{i+1}^{(2)} = z_2 \rho_i^{(2)} + \rho_i^{(1)} \qquad \text{mit} \;\; \rho_0^{(2)} = 0 \quad \text{und} \;\; \rho_i^{(1)} = z_1^i$$

und

$$\rho_{i+1}^{(3)} = z_3 \rho_i^{(3)} + \rho_i^{(2)} \quad \text{mit} \;\; \rho_0^{(3)} = 0 \; .$$

Diese Rekursionsgleichungen legen $\rho_i^{(2)}$ und $\rho_i^{(3)}$ fest.

2.2.1 Das diskrete Analogon des Putzer-Algorithmus

Die Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Fall erfolgt in voller Analogie zum vorangegangenen Beispiel. Durch Transformation der Rekursionsgleichungen (2.19) bis (2.22) in den Bildbereich erhalten wir folgendes Resultat:

Die Matrix $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}^i$ besitzt die Darstellung

$$\mathbf{A}^i = z_1^i\mathbf{E} + \rho_i^{(2)}\mathbf{P}_2 + ... + \rho_i^{(n-1)}\mathbf{P}_{n-1} + \rho_i^{(n)}\mathbf{P}_n \ . \tag{2.36}$$

Die konstanten Matrizen[4] $\mathbf{P}_k$ bzw. die Funktionen $\rho_i^{(k)}$ werden *rekursiv* mittels

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{A}-z_k\mathbf{E})\mathbf{P}_k = \prod_{\mu=1}^{k}(\mathbf{A}-z_\mu\mathbf{E}) \quad \text{mit } 1 \le k \le n-1 \quad \text{und } \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \tag{2.37}$$

bzw.

$$\rho_{i+1}^{(k)} = z_k\rho_i^{(k)} + \rho_i^{(k-1)} \quad \text{mit } 2 \le k \le n \quad , \ \rho_0^{(k)} = 0 \ \text{ und } \rho_i^{(1)} = z_1^i \tag{2.38}$$

berechnet. Hierbei sind z_k die - willkürlich indizierten - Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

Beispiel

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

und besitzt das charakteristische Polynom

$$\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,5 + 1,5z + z^2 = (z+1)(z+0.5) =: (z-z_1)(z-z_2).$$

Unter Beachtung von (2.36), (2.37) und (2.38) lautet $\mathbf{A}^i$

$$\mathbf{A}^i = z_1^i\mathbf{E} + \rho_i^{(2)}\mathbf{P}_2 \quad \text{mit } \mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - z_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho_{i+1}^{(2)} = z_2\rho_i^{(2)} + \rho_i^{(1)} \quad \text{mit } \rho_0^{(2)} = 0 \qquad \text{und } \rho_i^{(1)} = z_1^i.$$

Damit ergibt sich für $\rho_i^{(2)}$

$$\begin{aligned} \rho_i^{(2)} &= \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k}z_1^k = \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k}z_1^{k-i+1} \cdot z_1^{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1}(\frac{z_2}{z_1})^k \cdot z_1^{i-1} \\ &= \frac{1-(\frac{z_2}{z_1})^i}{1-\frac{z_2}{z_1}} z_1^{i-1} = -2(1-0.5^i)(-1)^i \end{aligned}$$

[4] Es gilt $\mathbf{P}_k := \mathbf{\Psi}_0^{(k)}$.

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^i &= z_1^i\mathbf{E}+\rho_i^{(2)}\mathbf{P}_2=(-1)^i\mathbf{E}-\ 2(1-0.5^i)(-1)^i\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(-1)^i & 0\\ 0 & (-1)^i\end{bmatrix}-2\left[(-1)^i-(-0.5)^i\right]\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} -(-1)^i+2(-0.5)^i & -2(-1)^i+2(-0.5)^i \\ \\ (-1)^i-(-0.5)^i & 2(-1)^i-(-0.5)^i\end{bmatrix} .$$

2.3 Explizite Darstellung der Resolventen $(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$

Ausgangspunkt sind die Beziehungen (2.36),(2.37) und (2.38):

$$\mathbf{A}^i = z_1^i\mathbf{E}+\rho_i^{(2)}\mathbf{P}_2+...+\rho_i^{(n-1)}\mathbf{P}_{n-1}+\rho_i^{(n)}\mathbf{P}_n$$

bzw.

$$\mathbf{A}^i = z_1^i\cdot\mathbf{E}+\sum_{k=2}^{n}\rho_i^{(k)}\mathbf{P}_k \tag{2.39}$$

mit

$$\mathbf{P}_{k+1}=(\mathbf{A}-z_k\mathbf{E})\mathbf{P}_k = \prod_{\nu=1}^{k}(\mathbf{A}-z_\nu\mathbf{E})\ ; \qquad k=1,2,...,n-1 \text{ und } \mathbf{P}_1=\mathbf{E} \tag{2.40}$$

sowie

$$\rho_{i+1}^{(k)}=z_k\rho_i^{(k)}+\rho_i^{(k-1)} \quad (\ 2\le k\le n) \quad \text{mit} \quad \rho_0^{(k)}=0 \ \text{ und } \rho_i^{(1)}=z_1^i\ . \tag{2.41}$$

Wir unterwerfen (2.39) der z-Transformation unter Beachtung von (2.3):

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = \mathcal{Z}\left\{z_1^i\mathbf{E}+\sum_{k=2}^{n}\rho_i^{(k)}\mathbf{P}_k\right\}=\mathcal{Z}\left\{z_1^i\right\}\mathbf{E}+\sum_{k=2}^{n}\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}\mathbf{P}_k$$

bzw.

$$z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{z}{z-z_1}\mathbf{E}+\sum_{k=2}^{n}\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}\mathbf{P}_k\ . \tag{2.42}$$

Die Auswertung des Ausdrucks $\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}$ mit Hilfe von (2.41) ergibt:

$$\mathcal{Z}(\left\{\rho_{i+1}^{(k)}\right\}=z_k\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}+\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k-1)}\right\} \quad ; \qquad 2\le k\le n \quad \text{mit} \quad \rho_0^{(k)}=0\ \ ,$$

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}=\frac{1}{z-z_k}\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k-1)}\right\}=\prod_{\mu=2}^{k}\frac{1}{z-z_\mu}\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(1)}\right\}$$

bzw.

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} = \prod_{\mu=2}^{k} \frac{1}{z-z_\mu}\frac{z}{z-z_1} = \prod_{\mu=1}^{k} \frac{z}{z-z_\mu} \ . \tag{2.43}$$

Wird obiges Ergebnis in (2.42) eingesetzt, so erhalten wir für die z-Transformierte von $\mathbf{A}^i$ den Ausdruck

$$z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = z\frac{1}{z-z_1}\mathbf{E} + z\sum_{k=2}^{n}\left(\prod_{\mu=1}^{k}\frac{1}{z-z_\mu}\mathbf{P}_k\right) . \tag{2.44}$$

Damit lautet die Resolvente von $\mathbf{A}$

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n}\left(\prod_{\mu=1}^{k}\frac{1}{z-z_\mu}\mathbf{P}_k\right) \tag{2.45}$$

und wir erhalten mit (2.40) die *explizite* Darstellung

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n}\left[\prod_{\mu=1}^{k}\frac{1}{z-z_\mu}\cdot\prod_{\nu=1}^{k-1}(\mathbf{A}-z_\nu\mathbf{E})\right] . \tag{2.46}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte $z_1 = -1$ und $z_2 = -0.5$.

Unter Beachtung von (2.45) bzw. (2.46) erhalten wir für die Resolvente

$$\begin{aligned}(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{z-z_1}\mathbf{E} + \prod_{\mu=1}^{2}\frac{1}{z-z_\mu}\mathbf{P}_2 = \frac{1}{z-z_1}\mathbf{E} + \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2}(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{z+1}\mathbf{E} + \frac{1}{(z+1)(z+0.5)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Nach einer einfachen Umrechnung und einer Multiplikation mit z erhalten wir

$$z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{z}{z+1}\mathbf{E} + (-2)\left(\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+0.5}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} .$$

Die Rücktransformation obiger Beziehung ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^i &= (-1)^i\mathbf{E} - 2(1-0.5^i)(-1)^i\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^i\mathbf{E} - 2\left[(-1)^i - (-0.5)^i\right]\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und bestätigt das anhand der Relation $\mathbf{A}^i = z_1^i\mathbf{E} + \rho_i^{(2)}\mathbf{P}_2$ erhaltene Ergebnis.

Beispiel

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte $z_1 = -1$, $z_2 = -2$ und $z_3 = -2$. Gemäß (2.45) und (2.46) gilt für $n = 3$

$$\begin{aligned} (z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= (z-z_1)^{-1}\mathbf{E} + \sum_{k=2}^{3}\left[\prod_{\mu=1}^{k}(z-z_\mu)^{-1}\mathbf{P}_k\right] \\ &= (z-z_1)^{-1}\mathbf{E} + \prod_{\mu=1}^{2}(z-z_\mu)^{-1}\mathbf{P}_2 + \prod_{\mu=1}^{3}(z-z_\mu)^{-1}\mathbf{P}_3 \, . \end{aligned}$$

Die konstanten Matrizen $\mathbf{P}_2$ bzw. $\mathbf{P}_3$ lauten:

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A}-z_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die zugehörigen multiplikativen Faktoren $\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}$ ergeben sich zu

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(2)}\right\} = \prod_{\mu=1}^{2}(z-z_\mu)^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

und

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(3)}\right\} = \prod_{\mu=1}^{3}(z-z_\mu)^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2}\frac{1}{z-z_3} = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2} .$$

Damit beträgt die Resolvente

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z+1}\mathbf{E} + \frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nach einer Partialbruchzerlegung und Multipilkation mit z

$$\begin{aligned} z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{z}{z+1}\mathbf{E} + \left(\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}\right)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \left[-\frac{z}{(z+2)^2} + \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man mit Hilfe der Korrespondenzen der z-Transformation

$$\mathcal{Z}\left\{a^i\right\} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad \mathcal{Z}\left\{ia^{i-1}\right\} = \frac{z}{(z-a)^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$$

für die Potenz $\mathbf{A}^i$ die Darstellung

$$\mathbf{A}^i = (-1)^i\mathbf{E} + \left[(-1)^i - (-2)^i\right] \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \left[(-1)^i - (-2)^i - i(-2)^{i-1}\right] \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 3

Mathematische Ergänzungen

Bei den nachfolgenden Ausführungen wird ein alternativer Zugang zur Entwicklung des rekursiven Schemas für die Berechnung der Resolvente einer Matrix **A** vorgestellt. Hierzu wird das Theorem von Cayley geeignet umformuliert.

3.1 Eine alternative Formulierung des Cayley-Theorems

Wir betrachten eine (n, n)-Matrix **A** mit den Eigenwerten s_i $(i = 1, 2, .., n)$ und dem charakteristischen Polynom

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i) = a_0 s^0 + a_1 s + ... + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \ . \tag{3.1}$$

Hierbei gilt folgender *bemerkenswerter* Zusammenhang: die Polynomkoeffizienten a_i sind mit den Polynomnullstellen (Eigenwerten) s_i miteinander verknüpft[1]:

$$-a_{n-1} = \sum s_i = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n$$

$$a_{n-2} = \sum s_i s_k = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_1 s_4 + ... + s_{n-1}s_n$$

$$-a_{n-3} = \sum s_i s_k s_l = s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + ... + s_{n-2}s_{n-1}s_n$$

usw.

$$(-1)^n a_0 = s_1 s_2 s_3 ... s_n.$$

Obige Summen werden über *alle* Produkte zu je 1 oder 2 oder 3 usw. der Nullstellen s_i mit *verschiedenen* Indizes erstreckt. Die Koeffizienten bzw. die Größen $(-1)^{n-i}a_i$ sind sogenannte

[1] Siehe zBsp.: L. BIEBERBACH, G. BAUER: *Vorlesungen über lineare Algebra*, (Erster Abschnitt, fünftes Kapitel : Teilbarkeitsfragen sowie Dritter Abschnitt, erstes Kapitel: Symmetrische Funktionen), Teubner Verlag Leipzig, Berlin, 1928

elementarsymmetrische Funktionen 1., 2., 3. usw. Ordnung der Nullstellen s_i. Sie sind die einfachsten Funktionen, die sich nicht ändern, wenn man die Nullstellen s_i beliebig untereinander vertauscht.

Nach dem - wunderschönen - Theorem von Cayley erfüllt die Matrix $\mathbf{A}$ ihre eigene charaktristische Gleichung:

$$\Delta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

bzw.

$$\Delta(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + ... + \ a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad , \tag{3.3}$$

d.h. $\Delta(s)$ gemäß (3.1) ist ein *annullierendes* Polynom der Matrix $\mathbf{A}$. Daraus folgt, dass die Potenz $\mathbf{A}^n$ durch eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen $[\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, ..., \ \mathbf{A}^{n-1}]$ darstellbar ist: $\mathbf{A}^n = -(a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + ... + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1})$. Damit ist die Potenz $\mathbf{A}^m$ für *jedes* $m \geq n$ durch

$$\mathbf{A}^m = b_0\mathbf{A}^0 + b_1\mathbf{A} \ + ... + \ b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \tag{3.4}$$

gegeben! Hierbei sind b_i geeignete Konstanten.

Wir wollen nun das Theorem von Cayley *äquivalent umschreiben*. Dies wird manche anschließende Überlegungen bzw. Berechnungen vereinfachen. Hierzu wird obiges charakteristische Polynom $\Delta(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)$ in ein Polynom $\delta(s)$ umgeschrieben:

$$\prod_{i=1}^{n}(s - s_i) = c_0 + c_1(s - s_1) + c_2(s - s_1)(s - s_2) + ... + c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(s - s_k) + s^n =: \delta(s).$$

Solch eine Umschreibung ist in der Tat immer möglich! Die Koeffizienten c_i sind - noch zu bestimmmende - reelle Zahlen und *eindeutige* Funktionen der Koeffizienten a_i bzw. der Nullstellen s_i des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$.

Ist solch eine äquivalente Umschreibung möglich, so gilt nach Cayley:

$$\delta(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E}+c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + ... + c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$$

bzw.

$$c_0 \cdot \mathbf{E} + \sum_{m=1}^{n-1} c_m \cdot \prod_{k=1}^{m}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) + \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad . \tag{3.5}$$

Damit ist die Potenz $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n = -\left[c_0\mathbf{E}+ \ c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + ... + \ c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E})\right]$$

und auch *jede* Potenz $\mathbf{A}^m$ mit $m \geq n$ durch eine Linearkombination der Matrizen

$$\mathbf{E}, \ \ (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}), \ \ (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}), \ ... \ , \ (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A} - s_{n-1}\mathbf{E})$$

darstellbar. Führen wir die platzsparende Schreibweise

$$\mathbf{A}^{(N)} := \prod_{k=1}^{N} (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}) \quad \text{mit} \quad N = 1, 2, ..., n-1 \tag{3.6}$$

ein, so lautet das Theorem von Cayley in modifizierter Form

$$\delta(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A}^{(1)} + c_2\mathbf{A}^{(2)} + ... + c_{n-1}\mathbf{A}^{(n-1)} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \ . \tag{3.7}$$

Bemerkungen zum modifizierten Cayley-Theorem

1. Bemerkung (Berechnung und Eindeutigkeit der Konstanten c_i) Wir betrachten der Einfacheit halber den Fall $n = 3$ und durchleuchten Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der Polynome $\delta(s)$ und $\Delta(s)$. Die Verallgemeinerung erfolgt dann geradlinig. Im Fall $n = 3$ gilt[2] nach (3.3)

$$\Delta(s) = a_0 s^0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3 \quad \text{bzw.} \quad \Delta(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \mathbf{0} \ . \tag{3.8}$$

Wir betrachten nun das Polynom $\delta(s)$

$$\delta(s) = c_0 s^0 + c_1(s - s_1) + c_2(s - s_1)(s - s_2) + s^3 \tag{3.9}$$

und fordern, dass das Matrix-Polynom

$$\delta(\mathbf{A}) := c_0\mathbf{E} + c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + \mathbf{A}^3 \tag{3.10}$$

ein annullierendes Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ ist

$$\delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

Nach einer Umformung der rechten Seite der Gleichung (3.10)

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{A}) &= c_0\mathbf{E} + c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2\left[\mathbf{A}^2 - (s_1 + s_2)\mathbf{A} + s_1 s_2\mathbf{E}\right] + \mathbf{A}^3 \\ &= (c_0 - c_1 s_1 + c_2 s_1 s_2)\mathbf{E} + \left[c_1 - c_2(s_1 + s_2)\right]\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 \end{aligned}$$

erkennt man, dass jede Potenz von $\mathbf{A}$ mit einem Faktor versehen ist, der eine *lineare* Funktion der Koeffizienten c_i ist. Die Anzahl der im Faktor der Potenz $\mathbf{A}^k$ enthaltenen Koeffizienten c_i beträgt $(3 - k)$ (mit $k = 2, 1, 0$). Durch Koeffizientenvergleich mit (3.8) folgen die Bestimmungsgleichungen für die Größen c_i. Hierbei führen wir den Vergleich ausgehend von der höchsten Potenz $\mathbf{A}^{n-1}$ in abfallender Reihenfolge, d.h. $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^0$ durch und erhalten:

$$c_2 = a_2$$

[2] Ferner gelten folgende Relationen zwischen den Eigenwerten s_i der Matrix $\mathbf{A}$ und den Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms:

$$a_0 = -s_1 s_2 s_3, \quad a_1 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \quad a_2 = -(s_1 + s_2 + s_3).$$

$$c_1 - c_2(s_1 + s_2) = a_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = a_1 + c_2(s_1 + s_2),$$
$$c_0 - c_1 s_1 + c_2 s_1 s_2 = a_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = a_0 + c_1 s_1 - c_2 s_1 s_2 \; .$$

Zuerst ist der Koeffizient c_2 festgelegt, anschließend legt man c_1 und zuletzt c_0 fest. Mit dieser Koeffizientenwahl ist $\delta(s)$ gemäß (3.9) ein annullierendes Polynom der Matrix $\mathbf{A}$. Obige drei Bestimmungsgleichungen lauten in Matrix-Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(s_1 + s_2) & 1 & 0 \\ s_1 s_2 & -s_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

und man erkennt sofort - aufgrund der Dreiecksstruktur - die Eindeutigkeit der Lösung!

Im *allgemeinen Fall* können die Koeffizienten c_0 und c_{n-1} relativ leicht berechnet werden. Es gilt

$$\delta(s_1) = c_0 + s_1^n = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad c_0 = -s_1^n. \tag{3.12}$$

Durch $(n-1)$-malige Differentiation nach s von $\Delta(s)$ bzw. $\delta(s)$ ergibt sich $\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\Delta(s) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\delta(s)$ bzw.

$$a_{n-1} = c_{n-1} \quad \text{d.h.} \qquad c_{n-1} = -(s_1 + s_2 + ... + s_n).$$

Es verbleiben die Koeffizienten c_1 bis c_{n-2} . Durch k-malige Differentiation nach s von $\Delta(s)$ bzw. $\delta(s)$ ergibt sich

$$\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s) = a_k k! \; + a_{k+1}(k+1)! \cdot s + ... + \; n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \cdot s^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{ds^k}\delta(s) = c_k k! + c_{k+1}\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s - s_K) + ... + \; c_{n-1}\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s - s_K) + \; n(n-1)(n-2)...(n-k+1)s^{n-k}$$

Wir betrachten nun die Werte $\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s)$ bzw. $\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)$ an der Stelle $s = 0$ und erhalten

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s)\right|_{s=0} = a_k k!$$

bzw.

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)\right|_{s=0} = c_k k! + c_{k+1}\left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s - s_K)\right|_{s=0} + ... + \; c_{n-1}\left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s - s_K)\right|_{s=0} .$$

Mit Hilfe folgender Abkürzungen für die auftretenden Konstanten

$$K_{k+1} := \left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s - s_K)\right|_{s=0} \quad ... \quad K_{n-1} := \left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s - s_K)\right|_{s=0}$$

erhalten wir

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)\right|_{s=0} = c_k k! + c_{k+1}K_{k+1} + ... + \; c_{n-1}K_{n-1},$$

$$a_k k! = c_k k! + c_{k+1}K_{k+1} + ... + \; c_{n-1}K_{n-1} \qquad \Rightarrow \; - c_k = a_k - \frac{1}{k!}\left(c_{k+1}K_{k+1} + ... + \; c_{n-1}K_{n-1}\right) \; .$$

Mit Hilfe obiger Beziehung berechnet man ausgehend von dem "Anfangswert" $c_{n-1} = a_{n-1}$ *rekursiv* den Koeffizienten c_{n-2}, anschließend c_{n-3} usw. und letztlich c_1.

2. Bemerkung (Abhängigkeit der Konstanten c_i von den Nullstellen s_i) Hierzu werden die Gleichungen $\delta(s_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ sukzessiv betrachtet. Nachdem gemäß (3.12) $c_0 = -s_1^n$ gilt, beginnen wir mit $\delta(s_2) = 0$ und erhalten c_1. Anschließend erhalten wir c_2 aufgrund von $\delta(s_3) = 0$ usw.

- Werten wir $\delta(s_2)$ aus, so ergibt sich

$$\delta(s_2) = c_0 + c_1(s_2 - s_1) + s_2^n = 0$$

bzw. mit (3.12)

$$c_1(s_2 - s_1) = -\left(s_2^n - s_1^n\right) \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1} = -s_2^{n-1}\frac{1 - \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^n}{1 - \frac{s_1}{s_2}}.$$

Mit Hilfe der Beziehung $1 + a + a^2 + ... + a^{N-1} = \frac{1-a^N}{1-a}$ erhalten wir für c_1

$$c_1 = -s_2^{n-1}\left[1 + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^1 + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{n-1}\right]$$

bzw.

$$c_1 = -\sum_{i,k=0}^{n-1} s_2^i s_1^k \qquad mit\ i + k = n - 1. \tag{3.13}$$

- Werten wir $\delta(s_3)$ aus, so ergibt sich

$$\delta(s_2) = c_0 + c_1(s_3 - s_1) + c_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) + s_3^n = 0$$

bzw. mit (3.12) und (3.13)

$$c_1(s_3 - s_1) + c_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) = -\left(s_3^n - s_1^n\right) \ \Rightarrow\ c_1 + c_2(s_3 - s_2) = -\frac{s_3^n - s_1^n}{s_3 - s_1},$$

$$c_2(s_3 - s_2) = -\left(\frac{s_3^n - s_1^n}{s_3 - s_1} - \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1}\right) = -\left(\sum_{i,k=0}^{n-1} s_3^i s_1^k - \sum_{i,k=0}^{n-1} s_2^i s_1^k\right) = -\sum_{i,k=0}^{n-1}\left(s_3^i - s_2^i\right)s_1^k$$

bzw.

$$c_2 = -\frac{1}{s_3 - s_2}\sum_{i,k=0}^{n-1}\left(s_3^i - s_2^i\right)s_1^k = -\sum_{i,k=0}^{n-1}\frac{s_3^i - s_2^i}{s_3 - s_2}s_1^k \quad \text{mit} \quad i + k = n - 1$$

$$c_2 = -\sum_{i,k=0}^{n-2}\left(\sum_{I,K=0}^{i-1} s_3^I s_2^K\right) s_1^k \quad \text{mit} \quad i + k = n - 1 \quad \text{sowie} \quad I + K = i - 1$$

Die wiederholte Anwendung dieser Vorgehensweise ergibt die explizite Darstellung von c_i in Abhängigkeit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es handelt sich hierbei um symmetrische Funktionen der Nullstellen. Als Beispiele seien angeführt:

$$\text{Polynomgrad } n = 2: \qquad c_0 = -s_1^2 \quad \text{und} \quad c_1 = -(s_1 + s_2).$$

bzw.

$$\text{Polynomgrad } n = 3: \quad c_0 = -s_1^3, \quad c_1 = -(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2), \quad c_2 = -(s_1 + s_2 + s_3).$$

3.2 Matrizenfunktion $f(\mathbf{A})$, Resolvente von $\mathbf{A}$

Wir betrachten eine (n, n)- Matrix $\mathbf{A}$, deren charakteristisches Polynom $\Delta(s)$ die Form $\Delta(s) = \prod_{i=1}^{m}(s - s_i)^{m_i}$ besitzt. Es sei $f(\lambda)$ eine Funktion der skalaren Variablen λ, wobei $f(\lambda)$ nicht zwingend ein Polynom ist. Es wird nun *vorausgesetzt*, dass $f(\lambda)$ auf dem Spektrum der Matrix $\mathbf{A}$ definiert ist. Das bedeutet: es existieren für *alle* Eigenwerte s_i die Ausdrücke $f(s_i)$ und $\frac{df^k}{d\lambda^k}(s_i)$ für $1 \leq k \leq m_i$. Des Weiteren sei $p(\lambda)$ ein beliebiges *Polynom* in λ, das auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ mit der Funktion $f(\lambda)$ übereinstimmt. Die Matrix $f(\mathbf{A})$ ist durch

$$f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$$

definiert[3]. Zur Erinnerung: liegt das Polynom $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \lambda^k$ vor, so versteht man unter $p(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \mathbf{A}^k$.

Wir betrachten die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ einer (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ und wollen eine *Polynomdarstellung* $p(\mathbf{A})$ entwickeln. Hierzu wird die Resolvente - innerhalb eines Konvergenzbereiches $|s| > r_{\mathbf{A}}$ - in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s}\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{s} + (\frac{\mathbf{A}}{s})^2 + (\frac{\mathbf{A}}{s})^3 + ...\right] \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mathbf{A}}{s})^k = \frac{\mathbf{E}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^4} + ... \quad .
\end{aligned}$$

Aufgrund des Theorems von Cayley ergibt sich dann

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \kappa_0\mathbf{E} + \kappa_1\mathbf{A}^1 + ... + \kappa_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}, \tag{3.14}$$

wobei die Koeffizienten κ_i Funktionen von s sind. Angeregt durch die modifizierte Form des Cayley-Theorems machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \beta_0\mathbf{E} + \beta_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + \beta_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + \\
&\quad + ... + \beta_{n-1}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A} - s_{n-1}\mathbf{E}),
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten β_i ebenfalls Funktionen von s sind. Wir wollen nun die Koeffizienten β_i ermitteln.

Der mathematischen Einfachheit halber betrachten wir den Fall $n = 3$ und erhalten

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \beta_0\mathbf{E} + \beta_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + \beta_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \tag{3.15}$$

mit den Koeffizienten $\beta_i = \beta_i(s)$. Wir betrachten nun ein Polynom $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \delta_0 + \delta_1(\lambda - s_1) + \delta_2(\lambda - s_1)(\lambda - s_2) \tag{3.16}$$

[3] Die Bestimmung von $f(\mathbf{A})$ durch die Werte von $f(\lambda)$ auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ ist eindeutig. Anders formuliert: *alle* Funktionen $f(\lambda)$, die auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ übereinstimmen, bestimmen dieselbe Matrix $f(\mathbf{A})$.

sowie die Funktion

$$f(\lambda) = \frac{1}{s-\lambda} = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s}} = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{\lambda}{s} + (\frac{\lambda}{s})^2 + ...\right] = \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{s^2} + \frac{\lambda^2}{s^3} + \frac{\lambda^3}{s^4} + ... \quad .$$

Wir berechnen - der mathematischen Einfachheit halber - unter der Annahme verschiedener Eigenwerte die drei Koeffizienten δ_i in (3.16). Hierzu benutzen wir das Polynom $p(\lambda)$ und die Funktion $f(\lambda)$. Es muss dann für $i = 1, 2, 3$ gelten:

$$p(\lambda = s_i) = f(\lambda = s_i) \tag{3.17}$$

bzw.

$$\delta_0 + \delta_1(s_i - s_1) + \delta_2(s_i - s_1)(s_i - s_2) = \frac{1}{s - s_i} \quad . \tag{3.18}$$

Es folgt unmittelbar für $i = 1$

$$\delta_0 = \frac{1}{s - s_1} \ . \tag{3.19}$$

Für $i = 2$ erhalten wir die Relation

$$\delta_0 + \delta_1(s_2 - s_1) = \frac{1}{s - s_2}$$

aus der sich - unter Verwendung von (3.19) -

$$\delta_1(s_2 - s_1) = \frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1} = \frac{s_2 - s_1}{(s - s_2)(s - s_1)}$$

bzw.

$$\delta_1 = \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)}. \tag{3.20}$$

ergibt. Man beachte, dass dieses Ergebnis (3.20) auch für den Fall $s_2 = s_1$ gültig bleibt[4], da der Koeffizient stetig in s_1 und s_2 ist. Für $i = 3$ ergibt sich der letzte Koeffizient δ_2 aus

$$\delta_0 + \delta_1(s_3 - s_1) + \delta_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) = \frac{1}{s - s_3}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \delta_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) &= \frac{1}{s - s_3} - \frac{1}{s - s_1} - \frac{s_3 - s_1}{(s - s_2)(s - s_1)} \\ &= \frac{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}{(s - s_2)(s - s_1)(s - s_3)} \ . \end{aligned}$$

[4] Dies erkennt man durch Anwendung der Regel von de L´Hospital oder durch nachfolgende formale Berechnung: es muss gelten $\frac{dp}{d\lambda}\Big|_{\lambda=s_2=s_1} = \frac{df}{d\lambda}\Big|_{\lambda=s_2=s_1}$. Der Differentialquotient $dp/d\lambda$ bzw. $df/d\lambda$ beträgt

$$dp/d\lambda = \delta_1 + \delta_2(\lambda - s_2 + \lambda - s_1) + \delta_3\left[(\lambda - s_2)(\lambda - s_3) + (\lambda - s_1)(\lambda - s_2) + (\lambda - s_1)(\lambda - s_2)\right]$$

bzw. $\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$. Das ergibt

$$\frac{dp}{d\lambda}\Big|_{\lambda=s_2=s_1} = \delta_1 = \frac{df}{d\lambda}\Big|_{\lambda=s_2=s_1} = \frac{1}{(s - s_1)^2}.$$

Daraus folgt

$$\delta_2 = \frac{1}{(s-s_2)(s-s_1)(s-s_3)},$$

wobei dieses Ergebnis auch für den Fall mehrfacher Eigenwerte seine Gültigkeit behält[5].

Damit erhalten wir für die Resolvente den Ausdruck

$$\begin{aligned}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s-s_1}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\cdot(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + \\ &\quad + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\cdot(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})\ .\end{aligned}$$

Es bestätigt die auf einem anderen Weg entwickelte Relation (1.43).

3.3 Resolvente und Eigenrichtungen einer Matrix A

Ausgehend von der kanonischen Darstellung für die Resolvente von $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{A},\,s) &= \frac{\mathbf{E}}{s-s_1} + \frac{\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}}{(s-s_2)(s-s_1)} + \frac{(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} + ... \\ &\quad + \frac{(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})}{\Delta(s)}\end{aligned}$$

werden *analytische* Ausdrücke für deren Eigenrichtungen ermittelt. Diese können manche systemtechnische Betrachtungen vereinfachen. Zunächst werden gewisse grundlegende mathematische Fakten wiederholt.

3.3.1 Grundlegende Fakten

Die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\,s)$ einer (n,n)-Matrix $\mathbf{A}$ ist durch

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\,s) := (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})}\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{3.21}$$

gegeben. Hierbei sind $\Delta(s)$ das charakteristische Polynom und $\tilde{\Delta}(s)$ das Minimalpolynom der Matrix $\mathbf{A}$. Die Adjunkte bzw. reduzierte Adjunkte der Matrix $\mathbf{A}$ wird mit $\mathbf{F}(s)$ bzw. $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ symbolisiert.

---

[5] Die Anwendung der Regel von de L´Hospital bzw. die formale Berechnung bestätigt dies. Der zweite Differentialquotient lautet

$$d^2p/d\lambda^2 = 2\delta_2 + \delta_3\left[(\lambda-s_2)+(\lambda-s_3)+(\lambda-s_1)+(\lambda-s_2)+(\lambda-s_1)+(\lambda-s_2)\right]\ .$$

An der Stelle $\lambda = s_1 = s_2 = s_3$ beträgt er $2\delta_2$. Damit ergibt sich aus der Forderung $2\delta_2 = \left.\frac{d^2f}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=s_1} = \frac{2}{(s-s_1)^3}$ der Wert

$$\delta_2 = \frac{1}{(s-s_1)^3}\ .$$

Das *charakteristische Polynom* $\Delta(s)$ lautet

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{M_i} \qquad \text{mit dem Grad } n = M_1 + M_2 + ... + M_K \quad .$$

Es besitzt i.A. K verschiedene Nullstellen s_i mit der Vielfachheit M_i. Das reduzierte charakteristische Polynom oder *Minimalpolynom* $\tilde{\Delta}(s)$ besitzt die Struktur

$$\tilde{\Delta}(s) := \prod_{i=1}^{K}(s - s_i)^{\mu_i} \;\text{ mit dem Grad }\; m = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_K, \;\text{ sowie } m \leq n \;\text{ und }\; \mu_i \leq M_i \quad .$$

Seine Nullstellen stimmen - abgesehen von ihrer Vielfachheit - mit jenen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ überein.

Die *Adjunkte* oder *adjungierte Matrix* $\mathbf{F}(s)$ ist ein "monisches" Matrix-Polynom in der komplexen Variablen s

$$\mathbf{F}(s) = s^{n-1}\mathbf{E} + s^{n-2}\mathbf{F}_{n-2} + s^{n-3}\mathbf{F}_{n-3} + ... + s^0\mathbf{F}_0 \quad .$$

Hierbei sind $\mathbf{F}_i$ konstante (n, n)-Matrizen, die zBsp mit Hilfe des Leverrier-Algorithmus rekursiv berechnet werden können. Man erkennt, dass die n^2 Elemente $\alpha_{ik}(s)$ der Matrix $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ gebrochen rationale Funktionen der komplexen Variablen s sind

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) =: \frac{1}{\Delta(s)}\left[\Gamma_{ik}(s)\right] =: \left[\alpha_{ik}(s)\right] \quad \text{mit} \quad i, k = 1, ..., n \quad . \tag{3.22}$$

Hierbei gilt für den Grad des Polynoms $\Gamma_{ik}(s)$: $\deg\{\Gamma_{ik}(s)\} \leq n - 1$. Das in Relation (3.22) erscheinende Polynom $\Gamma_{ik}(s)$ wird durch Bildung der sogenannten *algebraischen Komplemente* (auch Minoren genannt) der Matrix $s\mathbf{E} - \mathbf{A} =: [d_{ik}]$ mit $i, k = 1, ..., n$ ermittelt. Hierzu bildet man die zu dem Element d_{ik} gehörige $(n-1)$-reihige Unterdeterminante. Diese ist die Determinante einer Matrix, die durch Streichen der i-ten Reihe und der k-ten Spalte von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ entsteht. Anschließend wird diese Unterdeterminante mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ multipliziert. Dadurch ergibt sich das zugehörige algebraische Komplement $D_{ik}(s)$. Es entsteht eine quadratische (n, n)-Matrix der Form

$$\mathbf{D} = [D_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & ... & D_{2n} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & ... & D_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} .$$

Die eingeführten Größen $\Gamma_{ik}(s)$ ergeben sich durch *Transposition* obiger Anordnung

$$\mathbf{F} = [\Gamma_{ik}] := \mathbf{D}^T = [D_{ik}]^T = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & ... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{31} & ... & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & ... & D_{n3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} \quad .$$

Das bedeutet: $\Gamma_{ik}(s) := D_{ki}(s)$ mit $i, k = 1,,,, n$.

Wir betrachten nun die Elemente $\alpha_{ik}(s)$ der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, d.h. die Quotienten $\Gamma_{ik}(s)/\Delta(s)$. Natürlich kann es vorkommen, dass ein Polynom $\Gamma_{ik}(s)$ eine oder mehrere gemeinsame Nullstellen $s = s_\nu$ mit $\Delta(s)$ aufweist. Dann kommt es bei der Quotientenbildung zu einer *Kürzung* der gemeinsamen Faktoren. Interessant ist der Fall, wenn *alle* n^2 Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ *dieselben gemeinsamen* Nullstellen mit $\Delta(s)$ aufweisen! Angenommen, der größte gemeinsame Teiler (abgekürzt ggT) *aller* n^2 Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ und $\Delta(s)$ sei das monische Polynom $q(s)$. Dann gilt[6] $\Delta(s) =: q(s)\tilde{\Delta}(s)$ und $\mathbf{F}(s) =: q(s)\tilde{\mathbf{F}}(s)$. Nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren in *allen* Elementen $\Gamma_{ik}(s)/\Delta(s)$ von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ besitzt die Resolvente die reduzierte Form $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s)$ mit $\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = m \leq n$ und $\deg\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s)\right\} = m - 1$. Man nennt $\tilde{\Delta}(s)$ das reduzierte charakteristische Polynom oder *Minimalpolynom*[7] der Matrix $\mathbf{A}$, während $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ als *reduzierte adjungierte Matrix* oder *reduzierte Adjunkte* bezeichnet wird.

Aus der Definition (3.21) folgen unmittelbar die Beziehungen

$$\Delta(s) \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{F}(s) \tag{3.23}$$

bzw.

$$\tilde{\Delta}(s) \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \tilde{\mathbf{F}}(s) \ . \tag{3.24}$$

Nach Multiplikation von *links* mit $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ergeben sich aus (3.23) bzw. aus (3.24)

$$\Delta(s) \cdot \mathbf{E} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{F}(s), \tag{3.25}$$

$$\tilde{\Delta}(s) \cdot \mathbf{E} = (s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(s) \quad . \tag{3.26}$$

Werten wir die Gleichungen (3.25) und (3.26) für $s = s_i$, d.h. für die Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$, aus, so erhalten wir - unter Beachtung von $\Delta(s_i) = \tilde{\Delta}(s_i) = 0$ - die Gleichungen

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{F}(s_i) = \mathbf{0}, \tag{3.27}$$

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(s_i) = \mathbf{0} \quad . \tag{3.28}$$

Da die Matrizen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und $\mathbf{F}(s)$ sowie $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ *vertauschbar* sind, gelten die Beziehungen

$$\mathbf{F}(s_i) \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \tag{3.29}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad . \tag{3.30}$$

Daraus ist Folgendes ersichtlich:

---

[6] Das bedeutet, dass $\Delta(s)$ durch $q(s)$ ohne Rest teilbar ist. Dies ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= :\det[d_{ik}] \\ &= d_{i1}D_{i1} + d_{i2}D_{i2} + ... + d_{in}D_{in} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \\ &= d_{1k}D_{1k} + d_{2k}D_{2k} + ... + d_{1n}D_{1n} \qquad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)} \quad . \end{aligned}$$

[7] Diese Definition ist äquivalent mit folgender Definition: Das Minimalpolynom $\psi(s)$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist das monische annullierende Polynom - d.h. das monische Polynom mit der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ - mit kleinstem Grad.

- Genau dann, wenn der Grad des Minimalpolynoms kleiner als der des charakteristischen Polynoms ist, d.h. $\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} < \deg\{\Delta(s)\}$ gilt, ist die Adjunkte $\mathbf{F}(s)$ für zumindest einen Eigenwert s_i eine Nullmatrix[8] $\mathbf{F}(s_i) = \mathbf{0}$.

- Führen wir die *Spaltenvektoren* $\mathbf{f}_k$ und $\tilde{\mathbf{f}}_k$ der Matrizen $\mathbf{F}(s_i)$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ein, so erhalten wir aus (3.27) bzw. aus (3.28)

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & ... & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\ ,$$

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1 & \tilde{\mathbf{f}}_2 & ... & \tilde{\mathbf{f}}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}\ .$$

  Daraus folgt: *Jeder nichtverschwindende* Vektor $\mathbf{f}_k \neq \mathbf{0}$ bzw. $\tilde{\mathbf{f}}_k \neq \mathbf{0}$ ist *Rechts-Eigenvektor* zum Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$.

- Führen wir die *Zeilenvektoren* $\boldsymbol{\beta}_k^T$ und $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k^T$ der Matrizen $\mathbf{F}(s_i)$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ein, so erhalten wir aus (3.29) bzw. aus (3.30)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ ... \\ \boldsymbol{\beta}_n^T \end{pmatrix} \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2^T \\ ... \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n^T \end{pmatrix} \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad .$$

  Das bedeutet: *Jeder nichtverschwindende* Vektor $\boldsymbol{\beta}_k^T \neq \mathbf{0}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k^T \neq \mathbf{0}$ ist *Links-Eigenvektor* zum Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$.

Beispiel Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist ablesbar, da $\mathbf{A}$ eine Dreiecksform aufweist:

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)^3(s-1).$$

[8] Die reduzierte Adjunkte $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ist per se verschieden von Null: $\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \neq \mathbf{0}$.

Daraus folgt für die Resolvente

$$
\begin{aligned}
(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) \\
&= \frac{1}{(s-2)^3(s-1)} \begin{pmatrix} (s-2)^2(s-1) & -(s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Anhand der Adjunkte

$$
\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} (s-2)^2(s-1) & -(s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2(s-1) & \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^3 \end{pmatrix}
$$

ist ersichtlich, dass $(s-2)$ der größte gemeinsame Teiler der Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ und $\Delta(s)$ ist. Damit besitzt das Minimalpolynom $\tilde{\Delta}(s)$ den Grad 3:

$$
\tilde{\Delta}(s) = (s-2)^2(s-1) \quad \text{mit} \quad \deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = 3 < 4 = \deg\{\Delta(s)\} .
$$

Die reduzierte Adjunkte ergibt sich dann zu

$$
\tilde{\mathbf{F}}(s) = \begin{pmatrix} (s-2)(s-1) & -(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix} .
$$

Hieraus folgt für den dreifachen Eigenwert $s = 2$ die Eigenrichtungs-Matrix

$$
\tilde{\mathbf{F}}(s=2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

d.h. es existieren ein einziger (linear unabhängiger) Rechts-Eigenvektor

$$
\tilde{\mathbf{f}}_2^T := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ beliebig reell})
$$

sowie ein einziger (linear unabhängiger) Links-Eigenvektor

$$
\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ beliebig reell}).
$$

Für den Eigenwert $s = 1$ ergibt sich die Eigenrichtungs-Matrix

$$
\tilde{\mathbf{F}}(s=1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
$$

mit einem einzigen linear unabhängigen Rechts-Eigenvektor

$$\tilde{\mathbf{f}}_4^T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ beliebig reell})$$

und einem einzigen linear unabhängigen Links-Eigenvektor

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_4^T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \text{ beliebig reell}).$$

3.3.2 Analytischer Ausdruck der Eigenrichtungen von A

Zur Erinnerung: die Resolvente besitzt unter Benutzung des charakteristischen Polynoms $\Delta(s) = \prod\limits_{\mu=1}^{n} (s - s_\mu)$ die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) \;=\; & \frac{\mathbf{E}}{s - s_1} + \frac{\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E}}{(s - s_2)(s - s_1)} + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} + ... \\ & + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}{-}s_{n-1}\mathbf{E})}{\Delta(s)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - s_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{i-1} \frac{\mathbf{A}{-}s_\mu\mathbf{E}}{s - s_\mu}. \tag{3.31}$$

Mit Hilfe der üblichen Abkürzungen

$$\bar{\varphi}_i(s) = \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} \qquad \text{für } i = 1, 2, ..., n \;, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = \prod_{k=1}^{i} (\mathbf{A}{-}s_k\mathbf{E}) = (\mathbf{A}{-}s_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_i \qquad (i = 1, 2, ..., n - 1) \;; \quad \text{mit } \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \tag{3.33}$$

lautet die Adjunkte

$$\mathbf{F}(s) = \Delta(s) \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta(s)\bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \;.$$

Durch Einführen der Hilfsfunktionen $d_i(s) := \Delta(s)\bar{\varphi}_i(s)$ und Beachtung von (3.32)

$$\begin{aligned} d_i(s) \;&=\; \prod_{\mu=1}^{n} (s - s_\mu) \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} = \prod_{\mu=i+1}^{n} (s - s_\mu) \text{ für } i = 1, 2, ..., n - 1 \\ \text{sowie } d_n(s) \;&=\; 1 \end{aligned}$$

erhalten wir für die Adjunkte die Darstellung $\mathbf{F}(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(s) \cdot \mathbf{P}_i$. Daraus ergibt sich für die Matrix $\mathbf{F}(s_k)$ der Eigenrichtungen zum Eigenwert s_k die *explizite* Darstellung

$$\mathbf{F}(s_k) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^{n-1} (\mathbf{A}{-}s_\mu\mathbf{E}) \;. \tag{3.34}$$

Beispiel (LZI-System 3. Ordnung)

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ sei eine $(3,3)$-Matrix mit den Eigenwerten s_1, s_2 und s_3. Die konstanten $(3,3)$-Matrizen $\mathbf{P}_i$ betragen:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \ .$$

Die Funktionen $\bar{\varphi}_i(s)$ ergeben sich zu

$$\bar{\varphi}_1(s) = \frac{1}{s - s_1}, \quad \bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)} \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_3(s) = \frac{1}{(s - s_3)(s - s_2)(s - s_1)} \ .$$

Damit lautet die Resolvente

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \ ,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) &= \frac{1}{s - s_1} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)} \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + \\ &\quad + \frac{1}{(s - s_3)(s - s_2)(s - s_1)} \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \ . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Die zugehörige Adjunkte ergibt sich unmittelbar zu

$$\mathbf{F}(s) = (s - s_3)(s - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \ . \tag{3.36}$$

Zur Ermittlung von Links- bzw. Rechtseigenvektoren betrachten wir

$$\mathbf{F}(s = s_1) \ \text{ bzw. } \ \mathbf{F}(s = s_2) \ \text{ bzw. } \ \mathbf{F}(s = s_3).$$

Es genügt, *einen* Ausdruck $\mathbf{F}(s = s_k)$, zBsp. $\mathbf{F}(s = s_3)$, zu ermitteln. Aufgrund der beliebigen Indizierung der Eigenwerte erhalten wir daraus die restlichen Ausdrücke. Es ergeben sich - natürlich in Übereinstimmung mit (3.34) - nach einer einfachen Umrechnung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s_3) &= (s_3 - s_3)(s_3 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_3 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &= (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \ . \end{aligned}$$

Daraus folgen die Eigenrichtungen zum Eigenwert s_2:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s_2) &= (s_2 - s_3)(s_2 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_2 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &= (\mathbf{A} - s_3\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \end{aligned}$$

und die zum Eigenwert s_1:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s_1) &= (s_1 - s_3)(s_1 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_1 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &= (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_3\mathbf{E}). \end{aligned}$$

Beispiel

Die Systemmatrix sei in Dreieckstruktur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Deren charakteristisches Polynom ist damit ablesbar und lautet: $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)^2(s-3)$. Die (willkürliche) Indizierung der Eigenwerte sei: $s_1 = s_2 = 2$ und $s_3 = 3$. Die $(3,3)$-Matrizen $\mathbf{P}_i$ lauten:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \quad ,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Es ergibt sich für die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$:

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \frac{1}{s-2}\mathbf{E} \;+\; \frac{1}{(s-2)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(s-2)^2\,(s-3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Damit lautet die Adjunkte

$$\mathbf{F}(s) = (s-3)(s-2)\mathbf{E} + (s-3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. nach durchgeführter Zusammenfassung:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} (s-3)(s-2) & (s-3) & 1 \\ 0 & (s-3)(s-2) & (s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Eigenrichtungsmatrizen lauten:

- für den Eigenwert $s_3 = 3$

$$\mathbf{F}(s=3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- für den zweifachen Eigenwert $s_1 = s_2 = 2$

$$\mathbf{F}(s=2) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix besitzt zwei linear unabhängige Eigenrichtungen.

3.3.3 Strukturelle Änderungen der Übertragungsfunktion G(s)

Wir betrachten ein n-dimensionales LZI-System mit der Beschreibung $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ und der Übertragungsfunktion $G(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)\mathbf{b}$.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion einen kleineren Grad als die Systemordnung n besitzt. Solch ein Effekt hat einen Verlust der Steuerbarkeit und/oder der Beobachtbarkeit zur Folge!

Die Übertragungsfunktion lautet unter Benutzung der kanonischen Darstellung für die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$

$$G(s) = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s)\cdot\mathbf{P}_i\ \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s)\cdot\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_i\ \mathbf{b}\ .$$

Unter Verwendung von (3.33) für $\mathbf{P}_i$ und (3.32) für $\bar{\varphi}_i(s)$ erhalten wir

$$G(s) = \frac{1}{s - s_1}\mathbf{c}^T\mathbf{b} + \sum_{i=2}^{n}\prod_{\mu=1}^{i}\frac{1}{s - s_\mu}\cdot\mathbf{c}^T\prod_{k=1}^{i-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})\ \mathbf{b}\ . \tag{3.37}$$

Wir betrachten hierzu das n-te Element obiger Summe in (3.37)

$$\prod_{\mu=1}^{n}\frac{1}{s - s_\mu}\cdot\mathbf{c}^T\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})\mathbf{b}$$

und führen die Abkürzung δ

$$\delta := \mathbf{c}^T\left[\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})\right]\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{F}(s_n)\cdot\mathbf{b}$$

ein. Wir stellen uns die Frage, wann δ gleich Null wird: man erkennt aufgrund des Cayley-Theorems und (3.34)

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \prod_{k=1}^{n}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E}) = \prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})\cdot(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\\ &= \mathbf{F}(s_n)\cdot(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\cdot\mathbf{F}(s_n),\end{aligned}$$

dass der Vektor $\mathbf{l}^T := \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{F}(s_n)$ ein *Links-Eigenvektor*, während der Vektor $\mathbf{r} := \mathbf{F}(s_n)\cdot\mathbf{b}$ ein *Rechts-Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert s_n ist! Das bedeutet: falls ein Links-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ senkrecht auf $\mathbf{b}$ steht $\mathbf{l}^T\mathbf{b}=0$, d.h. das System ist nicht steuerbar, und/oder falls ein Rechts-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ senkrecht auf $\mathbf{c}$ steht $\mathbf{c}^T\mathbf{r}=0$, d.h. das System ist nicht beobachtbar, zwangsläufig eine Reduktion des Grades der Übertragungsfunktion erfolgt.

Man erkennt, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ kleiner ist als die Systemordnung n, wenn

- $\mathbf{c}^T$ ein Links-Eigenvektor von $\mathbf{A}$ und/oder

- **b** ein Rechts-Eigenvektor von **A** ist und/oder
- das Produkt $\prod_{k=1}^{i-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})$ verschwindet[9].

Damit ist das System entweder *nicht* steuerbar und/oder *nicht* beobachtbar.

[9] Das bedeutet, dass das Minimalpolynom der (n,n)-Matrix **A** den Grad m mit $m < n$ hat.

Kapitel 4

Grundlegende Literatur

- **Otto FÖLLINGER**: *Laplace-, Fourier-, und z-Transformation.* 2007, Hüthig Verlag
- **Herbert FREEMAN**: *Discrete-Time Systems (An Introduction to the Theory).* 1965, J. Wiley
- **Felix R. GANTMACHER**: *Matrizentheorie.* 1986, Springer Verlag
- **Konrad KNOPP**: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* 1947, Springer Verlag