Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

SYSTEMTHEORIE AK 1

Rekursive Ermittlung von $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ und $\mathbf{A}^i$
Eine kanonische Form von $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber

Version vom 11. April 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zeitkontinuierliche LZI-Systeme

1.1 Einführung

Wir betrachten ein freies n-dimensionales lineares zeitinvariantes System (LZI-System) mit der Beschreibung im Zustandsraum

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad ; \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \ .$$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ lautet

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}_0 \ .$$

Hierbei ist $\mathbf{\Phi}(t)$ die sogenannte Transitionsmatrix. Sie ergibt sich als Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi} \tag{1.1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ . \tag{1.2}$$

Sie kann formal als (konvergente, unendliche) Reihe

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\mathbf{A}t\right)^{\nu} =: e^{\mathbf{A}t} \tag{1.3}$$

angeschrieben werden. Nach dem Theorem von Cayley erfüllt jede quadratische (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i $(i = 1, 2, .., n)$ und dem zugehörigen charakteristischen Polynom $\Delta(s)$

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i) \tag{1.4}$$

ihre eigene charakteristische Gleichung

$$\Delta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) = \mathbf{0} = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \ . \tag{1.5}$$

Das hat zur Folge, dass $\mathbf{\Phi}(t)$ als eine *endliche* Reihe folgendermaßen

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu(t)\mathbf{A}^\nu \tag{1.6}$$

angeschrieben werden kann. Hierbei sind $\alpha_\nu(t)$ Potenzreihen in t, deren Ermittlung relativ kompliziert ist.

Es wird nun in *konstruktiver* Art ein iterativer Algorithmus - in der Fachliteratur als Putzer-Algorithmus[1] bekannt - entwickelt, bei dem n Schritte zur Ermittlung der Matrizenfunktion $\mathbf{\Phi}(t)$ benötigt werden. Das Ergebnis ist ein Ausdruck der Form

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t)\mathbf{P}_\nu.$$

Es werden lediglich die n Eigenwerte s_i $(i = 1, ..., n)$ der Matrix $\mathbf{A}$ benötigt, wobei das Auftreten mehrfacher Eigenwerte *irrelevant* für den Rechenablauf ist. Der Algorithmus kann für Systeme niedriger Ordnung leicht per Hand durchgeführt werden. Die konstanten Matrizen $\mathbf{P}_\nu$ sind einfach zu berechnende Polynome in $\mathbf{A}$ vom Grad $\nu - 1$. Es ist kennzeichnend, dass bei jeder Iteration eine gewöhnliche *skalare lineare* Differentialgleichung *erster* Ordnung gelöst wird, die jeweils als Lösung die Funktion $\varphi_\nu(t)$ ergibt.

1.2 Ermittlung der Transitionsmatrix und der Resolventen

1.2.1 Betrachtung im Zeitbereich

Ausgangspunkt nachfolgender Überlegungen ist eine Interpretation der Differentialgleichung (1.1) in Verbindung mit dem Theorem von Cayley. Offensichtlich ist die Operation "Differentiation der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ nach dem Argument t" mit der Operation "Multiplikation der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ mit der Matrix $\mathbf{A}$" (welche zusätzlich kommutativ ist) äquivalent:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\ (= \mathbf{\Phi}\mathbf{A})\ . \tag{1.7}$$

Betrachtet man ein beliebiges *Polynom* $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ in $\mathbf{A}$ und bildet man die Funktion $\mathbf{\Psi}(t)$ gemäß[2]

$$\mathbf{\Psi}(t) := \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t)\ , \tag{1.8}$$

so erfüllt $\mathbf{\Psi}(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}\ (= \mathbf{\Psi}\mathbf{A}) \tag{1.9}$$

[1] E. J. PUTZER: *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients.* The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 1, (Jan., 1966), pp. 2-7.

[2] Es gilt offensichtlich $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})$. D.h. die Matrizen $\mathbf{P}$und $\mathbf{\Phi}$ sind vertauschbar.

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Psi}(t=0) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t=0) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \ . \tag{1.10}$$

Die Operation "Differentiation der Matrix $\mathbf{\Psi}(t)$ nach dem Argument t" ist mit der Operation "Multiplikation der Matrix $\mathbf{\Psi}(t)$ mit der Matrix $\mathbf{A}$" äquivalent[3].

Die Multiplikation der Relation (1.5) mit $\mathbf{\Phi}(t)$ ergibt

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{0} \ . \tag{1.11}$$

Diese Beziehung ist der Schlüssel zur Entwicklung eines Algorithmus zur Berechnung der Transitionsmatrix!

Man definiert nun eine Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_n(t)$:

$$\mathbf{\Psi}_n(t) := (\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t). \tag{1.12}$$

Nach Einführung der (konstanten) Matrix

$$\mathbf{P}_n := (\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}),$$

sie ist ein Polynom in $\mathbf{A}$ vom Grad $n-1$ und wird mittels derEigenwerte s_i $(i = 1, 2, ..., n-1)$ gebildet, gilt

$$\mathbf{\Psi}_n(t) := \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{\Phi}(t) \tag{1.13}$$

und man erhält aus (1.11) die Darstellung

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0} \ . \tag{1.14}$$

Wäre die Transitionsmatrix bekannt, so entstünde aus ihr gemäß (1.12) die Matrix $\mathbf{\Psi}_n(t)$. Die Idee besteht darin, einen umgekehrten Weg zu beschreiten: ausgehend von der noch nicht *vorliegenden* Funktion $\mathbf{\Psi}_n(t)$ berechnet man *sukzessiv* die Transitionsmatrix. Hierzu deuten wir (1.14) mit Hilfe von (1.9) als Differentialgleichung erster Ordnung für $\mathbf{\Psi}_n(t)$

$$(\mathbf{A}-s_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n - s_n\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n = s_n\mathbf{\Psi}_n \ . \tag{1.15}$$

Die Anfangsbedingung ergibt sich aus (1.2) und (1.13) für $t = 0$:

$$\mathbf{\Psi}_n(0) = \mathbf{P}_n = (\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \ . \tag{1.16}$$

[3] Es gilt sogar die allgemeinere Beziehung

$$\frac{d^i}{dt^i}\ \mathbf{\Psi} = \mathbf{A}^i\mathbf{\Psi} \ (= \mathbf{\Psi}\mathbf{A}^i) \qquad i = 0, 1, 2, 3, ...$$

Die Lösung lautet dann

$$\mathbf{\Psi}_n(t) = e^{s_n t} \cdot \mathbf{\Psi}_n(0) = e^{s_n t} \cdot \mathbf{P}_n \ . \tag{1.17}$$

Damit ist der 1. Schritt abgeschlossen und wir betrachten (1.12)

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \ = \ \mathbf{\Psi}_n(t) \ , \tag{1.18}$$

wobei $\mathbf{\Psi}_n(t)$ gemäß (1.17) bekannt(!) ist. Analog vorgehend führen wir nun gemäß

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) := (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t)$$

eine Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_{n-1}(t)$ ein. Mit Hilfe der konstanten Matrix

$$\mathbf{P}_{n-1} := (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \tag{1.19}$$

ergibt sich

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) = \mathbf{P}_{n-1} \cdot \mathbf{\Phi}(t) \tag{1.20}$$

und wir erhalten aus (1.18) die Beziehung

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) = \mathbf{\Psi}_n(t) \ . \tag{1.21}$$

Sie entspricht aufgrund von

$$(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_{n-1}(t) - \mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} \ - \ s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} - \mathbf{\Psi}_n(t) = \mathbf{0}$$

folgender Differentialgleichung zur Bestimmung von $\mathbf{\Psi}_{n-1}(t)$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} \ = \ s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} + \mathbf{\Psi}_n \ . \tag{1.22}$$

Hierbei ist $\mathbf{\Psi}_n(t)$ eine - inzwischen bekannte - Störfunktion. Unter Beachtung von (1.20) lautet die Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Psi}_{n-1}(0) = (\mathbf{A}-s_{n-2}\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_{n-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) = \mathbf{P}_{n-1} \ . \tag{1.23}$$

Diese sukzessive Einführung von Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_i(t)$ wird bis zur Bildung der Funktion $\mathbf{\Psi}_2(t)$

$$\mathbf{\Psi}_2(t) := (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} - s_1\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}_2(t) \tag{1.24}$$

wiederholt[4]. Es liegt eine einfache Differentialgleichung für die gesuchte Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ vor:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi} \ + \ \mathbf{\Psi}_2 \qquad \text{mit} \ \ \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ .$$

[4] Man erkennt, dass bei jeder Integration im Ergebnis eine neue Exponentialfunktion $e^{s_i t}$ dazukommt.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Transitionsmatrix kann durch *sukzessives* Lösen folgender Differentialgleichungen 1. Ordnung berechnet werden:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_n = s_n\mathbf{\Psi}_n \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_n(0) = \mathbf{P}_n = \prod_{i=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.25}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-1} = s_{n-1}\mathbf{\Psi}_{n-1} + \mathbf{\Psi}_n \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_{n-1}(0) = \mathbf{P}_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-2}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.26}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_{n-2} = s_{n-2}\mathbf{\Psi}_{n-2} + \mathbf{\Psi}_{n-1} \qquad \text{mit} \ \mathbf{\Psi}_{n-2}(0) = \mathbf{P}_{n-2} = \prod_{i=1}^{n-3}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \ , \tag{1.27}$$

usw.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + \mathbf{\Psi}_3 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_2(0) = \mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \ , \tag{1.28}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Psi}_2 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ . \tag{1.29}$$

Die Berechnungsreihenfolge sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{\Psi}_n \ \rightarrow \mathbf{\Psi}_{n-1} \ \rightarrow \mathbf{\Psi}_{n-2} \ \rightarrow \ldots \rightarrow \mathbf{\Psi}_2 \ \rightarrow \mathbf{\Phi}$$

Beispiel (LZI-System 3.Ordnung)

Die vorgestellte Vorgehensweise zur Ermittlung der Transitionsmatrix wird für eine $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i $(i = 1,2,3)$ und dem charakteristischen Polynom $\Delta(s)$ demonstriert. Nach Cayley gilt:

$$\Delta(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) = (\mathbf{A}-s_3\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{0} \ .$$

Die benötigten Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_3(t)$ und $\mathbf{\Psi}_2(t)$ lauten

$$\mathbf{\Psi}_3(t) := (\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_3(0) = \mathbf{P}_3 = (\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})$$

und

$$\mathbf{\Psi}_2(t) := (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Phi}(t) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_2(0) = \mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}).$$

Sie erfüllen die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_3 = s_3\mathbf{\Psi}_3 \tag{1.30}$$

und

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + \mathbf{\Psi}_3 \ . \tag{1.31}$$

Die Transitionsmatrix ergibt sich durch Lösung von

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi} = s_1\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Psi}_2 \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \ . \tag{1.32}$$

Die Lösung von (1.30) lautet

$$\mathbf{\Psi}_3(t) = e^{s_3 t}\mathbf{P}_3. \tag{1.33}$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung (1.31)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}_2 = s_2\mathbf{\Psi}_2 + e^{s_3 t}\mathbf{P}_3$$

mit der Lösung

$$\mathbf{\Psi}_2(t) = e^{s_2 t} \cdot \left[\mathbf{P}_2 + \int\limits_0^t e^{-s_2\tau}e^{s_3\tau}\mathbf{P}_3 d\tau\right] = e^{s_2 t} \cdot \left[\mathbf{P}_2 + \int\limits_0^t e^{(s_3-s_2)\tau}d\tau \cdot \mathbf{P}_3\right]$$

bzw.

$$\mathbf{\Psi}_2(t) = e^{s_2 t} \cdot \mathbf{P}_2 \ + \ \frac{e^{s_3 t} - e^{s_2 t}}{s_3 - s_2} \cdot \mathbf{P}_3 \quad . \tag{1.34}$$

Die Transitionsmatrix ergibt sich als Lösung von (1.32) zu

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{s_1 t} \cdot \left[\mathbf{E} + \int\limits_0^t e^{-s_1\tau} \cdot \mathbf{\Psi}_2(\tau)d\tau\right] =: e^{s_1 t} \cdot [\mathbf{E} + \mathbf{I}(t)] \quad . \tag{1.35}$$

Die Auswertung des Integrals $\mathbf{I}(t)$ erfolgt mit Hilfe von (1.34):

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(t) &= \int\limits_0^t e^{-s_1\tau}\left[e^{s_2\tau} \cdot \mathbf{P}_2 + \frac{e^{s_3\tau} - e^{s_2\tau}}{s_3 - s_2} \cdot \mathbf{P}_3\right] d\tau \\
&= \int\limits_0^t e^{(s_2-s_1)\tau}d\tau \cdot \mathbf{P}_2 + \int\limits_0^t \left[e^{(s_3-s_1)\tau} - e^{(s_2-s_1)\tau}\right] \frac{1}{s_3 - s_2} d\tau \cdot \mathbf{P}_3 \\
\mathbf{I}(t) &= \frac{1}{s_2 - s_1}\left[e^{(s_2-s_1)t} - 1\right] \cdot \mathbf{P}_2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{s_3 - s_1}\left[e^{(s_3-s_1)t} - 1\right] - \frac{1}{s_2 - s_1}\left[e^{(s_2-s_1)t} - 1\right]\right] \frac{1}{s_3 - s_2} \cdot \mathbf{P}_3 \quad .
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (1.35) ein, so ergibt sich nach einigen Umrechnungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(t) &= e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} \cdot \mathbf{P}_2 \\
&\quad + \left(\frac{e^{s_3 t} - e^{s_1 t}}{s_3 - s_1} - \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}\right) \frac{1}{s_3 - s_2} \cdot \mathbf{P}_3
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(t) &= e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1} \cdot \mathbf{P}_2 \\
&\quad + \frac{(s_3 - s_2)e^{s_1 t} - (s_3 - s_1)e^{s_2 t} + (s_2 - s_1)e^{s_3 t}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_2 - s_1)} \cdot \mathbf{P}_3 \ .
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Die Transitionsmatrix besitzt demnach die Darstellung

$$\mathbf{\Phi}(t) = \varphi_1(t)\cdot\mathbf{E} + \varphi_2(t)\cdot\mathbf{P}_2 + \varphi_3(t)\cdot\mathbf{P}_3 \ ,$$

wobei die Funktionen $\varphi_i(t)$ rekursiv berechnet werden.

1.2.2 Betrachtung im Bildbereich

Wir wollen nun obiges Berechnungsschema (1.25)-(1.29) in den Bildbereich der Laplace-Transformation übersetzen. Dadurch erhalten wir eine *explizite* Darstellung der Laplace-Transformierten der Transitionsmatrix, der sogenannten Resolventen. Ferner erhalten wir unmittelbar die rekursive Vorschrift zur Berechnung der Funktionen $\varphi_i(t)$. Hierzu benutzen wir die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t\}$ einer (matrixwertigen) Funktion $\mathbf{f}(t)$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t\} = \bar{\mathbf{f}}(s) := \int_0^\infty \mathbf{f}(t)e^{-st}dt \ .$$

Durch Transformation von (1.25) erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s)$

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s) = \frac{1}{s-s_n}\mathbf{P}_n \ . \tag{1.37}$$

Aus (1.26) erhalten wir

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s) = \frac{1}{s-s_{n-1}}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{s-s_{n-1}}\bar{\mathbf{\Psi}}_n(s)$$

bzw. mit (1.37)

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s) = \frac{1}{s-s_{n-1}}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{(s-s_{n-1})\,(s-s_n)}\mathbf{P}_n \ . \tag{1.38}$$

Aus (1.27) bekommen wir

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-2}(s) = \frac{1}{s-s_{n-2}}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{1}{s-s_{n-2}}\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-1}(s)$$

bzw. mit (1.38)

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_{n-2}(s) = \frac{1}{s-s_{n-2}}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{1}{(s-s_{n-2})\,(s-s_{n-1})}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{(s-s_{n-2})\,(s-s_{n-1})\,(s-s_n)}\mathbf{P}_n \ . \tag{1.39}$$

Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Wir erhalten dann aus (1.28) die Gleichung

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_2}\bar{\mathbf{\Psi}}_3(s)$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{(s-s_2)(s-s_3)}\mathbf{P}_3 + ... + \frac{1}{(s-s_2)(s-s_3)...(s-s_n)}\mathbf{P}_n \ , \tag{1.40}$$

um letztlich aus (1.29) die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix zu erhalten:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{s-s_1}\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Phi}}(s) \;&=\; \frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}\mathbf{P}_3 + ... \\ &+ \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)...(s-s_n)}\mathbf{P}_n \;. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Obige Relation ist eine *explizite* Darstellung für die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix, der sogenannten Resolventen $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$ von $\mathbf{A}$,

$$\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\} = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} =: \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s),$$

welche mit Hilfe der Eigenwerte s_i $(i = 1, 2, ..., n)$ von $\mathbf{A}$ und der (konstanten) Matrizen $\mathbf{P}_k$

$$\mathbf{P}_k = \prod_{i=1}^{k-1}(\mathbf{A}-s_i\mathbf{E}) \qquad \text{mit} \quad k = 2, 3, ..., n \tag{1.42}$$

gebildet wird.

Wir führen folgende Abkürzungen für die benötigten Laplace-Transformierten ein:

$$\bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1}, \tag{1.43}$$

$$\bar{\varphi}_2(s) := \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \left(= \frac{1}{s-s_2}\bar{\varphi}_1(s) \right), \tag{1.44}$$

usw.

$$\bar{\varphi}_n(s) := \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)} \left(= \frac{1}{s-s_{n-1}}\bar{\varphi}_{n-1}(s) \right) \;. \tag{1.45}$$

Damit lautet die Resolvente

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{s}) = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} =: \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \bar{\varphi}_1(s)\mathbf{E} + \bar{\varphi}_2(s)\mathbf{P}_2 + ... + \; \bar{\varphi}_n(s)\mathbf{P}_n \;. \tag{1.46}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Laplace-Transformierten $\bar{\varphi}_i(s)$ und die konstanten (n, n)-Matrizen $\mathbf{P}_i$ können *rekursiv* folgendermaßen berechnet werden:

- $$\bar{\varphi}_i(s) := \frac{1}{s-s_i}\bar{\varphi}_{i-1}(s) \quad \text{für} \quad i = 2, 3, ..., n \quad \text{mit} \;\; \bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1} \tag{1.47}$$

- und[5]

$$\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_i \quad \text{für } i = 1, 2, ..., n-1 \quad \text{mit } \mathbf{P}_1 := \mathbf{E} \ . \tag{1.48}$$

Die Zeitfunktionen $\varphi_i(t)$ ergeben sich durch Rücktransformation von (1.47) *rekursiv* als Lösungen skalarer Differentialgleichungen 1. Ordnung für $i = 2, 3, ..., n$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = s_i\varphi_i + \varphi_{i-1} \quad \text{mit } \varphi_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) = e^{s_1 t}. \tag{1.49}$$

Die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ ist darstellbar durch

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot \mathbf{P}_i \ . \tag{1.50}$$

Die Ermittlung der Transitionsmatrix gemäß (1.50) ist als Putzer-Algorithmus bekannt. Die vorangegangenen Ausführungen zielen auf ein besseres Verständnis der Zusammenhänge und der Entstehung dieses Algorithmus.

Beispiel (LZI-System 3. Ordnung, Fortsetzung)

Transformiert man die Differentialgleichungen (1.30), (1.31) und (1.32) in den Bildbereich, so erhält man:

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_3(s) = \frac{1}{s-s_3}\mathbf{P}_3 \ ,$$

$$\bar{\mathbf{\Psi}}_2(s) = \frac{1}{s-s_2} \cdot \mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3} \cdot \mathbf{P}_3 \ ,$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \frac{1}{s-s_1} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_2} \cdot \mathbf{P}_2 + \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3} \cdot \mathbf{P}_3 \ .$$

Mit den Definitionen

$$\bar{\varphi}_1(s) := \frac{1}{s-s_1} \ , \tag{1.51}$$

$$\bar{\varphi}_2(s) := \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s-s_2}\bar{\varphi}_1(s) \tag{1.52}$$

und

$$\bar{\varphi}_3(s) := \frac{1}{s-s_3}\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s-s_3}\bar{\varphi}_2(s) \tag{1.53}$$

erhalten wir den Ausdruck

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = \bar{\varphi}_1(s) \cdot \mathbf{E} + \bar{\varphi}_2(s) \cdot \mathbf{P}_2 + \bar{\varphi}_3(s) \cdot \mathbf{P}_3 \ .$$

---

[5] Wertet man Relation (1.48) für $i = n$ aus, so ist die - nicht benötigte - Matrix $\mathbf{P}_{n+1}$ gleich $\Delta(\mathbf{A})$

$$\mathbf{P}_{n+1} = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_n = (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) = \Delta(\mathbf{A}) \ .$$

Sie ist nach dem Theorem von Cayley eine Nullmatrix!

Die Zeitfunktionen $\varphi_i(t)$ ergeben sich durch Rücktransformation von (1.47) *rekursiv* als Lösungen zwei skalarer Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = s_2\varphi_2 + \varphi_1 \quad \text{mit } \varphi_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) = e^{s_1 t}$$

und

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = s_3\varphi_3 + \varphi_2 \quad \text{mit } \varphi_3(0) = 0 \quad .$$

Es ergeben sich die in Gleichung (1.36) angegebenen Funktionen $\varphi_i(t)$.

Bemerkung:

Die Zeitfunktionen $\varphi_i(t)$ können auch durch Rücktransformation der Gleichungen (1.51), (1.52) und (1.53) berechnet werden. Aus (1.51) ergibt sich unmittelbar

$$\varphi_1(t) = e^{s_1 t}.$$

Die Funktion $\bar{\varphi}_2(s)$ gemäß (1.52) kann aufgrund der Beziehung

$$\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}\right) \tag{1.54}$$

folgendermaßen umgeformt werden:

$$\bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_1} = \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right). \tag{1.55}$$

Der Witz dieser Umschreibung besteht darin, dass $\bar{\varphi}_2(s)$ mit Hilfe *elementarer* Teilbrüche $\frac{1}{s-s_i}$ darfgestellt wird. Dadurch kann die Rücktransformation in den Zeitbereich *unmittelbar* erfolgen und ergibt

$$\varphi_2(t) = \frac{e^{s_2 t} - e^{s_1 t}}{s_2 - s_1}.$$

Die Funktion $\bar{\varphi}_3(s)$ gemäß (1.53) kann unter Anwendung der grundlegenden Beziehung (1.54) auf das *ermittelte* Ergebnis (1.55) umgeschrieben werden. Dadurch enthält $\bar{\varphi}_3(s)$ ausschließlich *elementare* Teilbrüche.

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_3(s) &= \frac{1}{s-s_3}\bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2} - \frac{1}{s-s_1}\right)\frac{1}{s-s_3} \\
&= \frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s-s_2}\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_1}\frac{1}{s-s_3}\right) \\
&= \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{s_3-s_2}\left(\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_2}\right) - \frac{1}{s_3-s_1}\left(\frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Obiger Ausdruck kann ebenfalls *unmittelbar* zurücktransformiert werden. Es ergibt sich zunächst

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{1}{s_3-s_2}\left(e^{s_3 t} - e^{s_2 t}\right) - \frac{1}{s_3-s_1}\left(e^{s_3 t} - e^{s_1 t}\right)\right]$$

bzw. nach einer Umordnung

$$\varphi_3(t) = \frac{(s_3-s_2)e^{s_1 t} - (s_3-s_1)e^{s_2 t} + (s_2-s_1)e^{s_3 t}}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_2-s_1)}.$$

Beispiel

Die Systemmatrix sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte sind - aufgrund der Dreiecksform der Matrix - in der Hauptdiagonale ersichtlich. Eine willkürliche(!) Indizierung ergibt:

$$s_1 = s_2 = 2, \qquad s_3 = 3 \ .$$

Das bedeutet:

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)^2(s-3).$$

Die Matrizen $\mathbf{P}_i$ lauten:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \ ,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Ermittlung von $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ erfolgt durch Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = 2\varphi_2 + e^{2t} \qquad \text{mit} \quad \varphi_2(t=0) = 0$$

und

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 3\varphi_3 + \varphi_2 \qquad \text{mit} \quad \varphi_3(t=0) = 0 \ .$$

Wir erhalten

$$\varphi_2(t) = e^{2t} \int\limits_0^t e^{-2\tau} e^{2\tau} d\tau = te^{2t}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= e^{3t} \int\limits_0^t e^{-3\tau} \tau e^{2\tau} d\tau = e^{3t} \left[-te^{-t} - (e^{-t} - 1) \right] \\ &= -(t+1)e^{2t} + e^{3t}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Transitionsmatrix

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{2t} \cdot \mathbf{E} + te^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[-(t+1)e^{2t} + e^{3t} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & -(t+1)e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Alternative Berechnung (*optional*): Es gilt:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}^{-1},$$

bzw. nach Durchführung der Matrix-Inversion

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \frac{1}{(s-2)^2(s-3)} \begin{pmatrix} (s-2)(s-3) & s-3 & 1 \\ 0 & (s-2)(s-3) & s-2 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)^2} & \frac{1}{(s-2)^2(s-3)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)(s-3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}.$$

Die Partialbruchzerlegung der Einträge obiger Matrix ergibt

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)^2} & -\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-3} \\ 0 & \frac{1}{s-2} & -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}.$$

Dieser Ausdruck bestätigt mit Hilfe der Korrespondenz

$$\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = n!\frac{1}{(s-a)^{k+1}} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

wobei a eine beliebige komplexe Konstante ist, das ermittelte Ergebnis (1.56).

Beispiel

Wir betrachten ein LZI-System 2. Ordnung mit der Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den zugehörigen Eigenwerten s_1 und s_2. Die Transitionsmatrix lautet

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(t) \cdot \mathbf{P}_i = \varphi_1(t) \cdot \mathbf{P}_1 + \varphi_2(t) \cdot \mathbf{P}_2$$

mit

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = s_2\varphi_2 + \varphi_1 \qquad , \ \varphi_2(0) = 0 \ \ , \ \ \varphi_1(t) = e^{s_1 t}$$

sowie

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} \qquad , \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \ \ .$$

Nach einer einfachen Integralauswertung ergibt sich

$$\varphi_2(t) = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \quad .$$

Damit lautet die Transitionsmatrix eines Systems zweiter Ordnung

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} \; + \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \cdot (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}). \tag{1.57}$$

Ein Umschreiben ergibt die sogenannte Sylvester-Formel[6]

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t} \cdot \frac{\mathbf{A} - s_2 \mathbf{E}}{s_1 - s_2} + \; e^{s_2 t} \cdot \frac{\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}}{s_2 - s_1} \quad .$$

Für den Fall $s_1 = s_2$ erhalten wir aus (1.57) durch Anwendung der Regel von de L´Hospital:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \lim_{s_2 \to s_1} \left\{ e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \cdot (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \right\} = e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + \lim_{s_2 \to s_1} \left\{ \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \cdot (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \right\} \\ &= e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + \lim_{s_2 \to s_1} \left\{ \frac{-t e^{s_2 t}}{-1} \cdot (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t} \cdot \mathbf{E} + t e^{s_1 t} \cdot (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \quad .$$

[6]Diese Formel wird in der Fachliteratur unter der Voraussetzung verschiedener Eigenwerte abgeleitet.

Kapitel 2

Mathematische Ergänzungen

Bei den nachfolgenden Überlegungen wird ein alternativer Zugang zur Entwicklung des rekursiven Schemas für die Berechnung der Resolvente einer Matrix $\mathbf{A}$ bzw. der Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ vorgestellt. Hierzu wird das Theorem von Cayley geeignet umformuliert.

2.1 Eine alternative Formulierung des Cayley-Theorems

Wir betrachten eine (n,n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten s_i $(i = 1, 2, .., n)$ und dem charakteristischen Polynom

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i) = a_0 s^0 + a_1 s + ... + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \ . \tag{2.1}$$

Hierbei sind die Polynomkoeffizienten mit den Polynomnullstellen (Eigenwerten) folgendermaßen miteinander verknüpft[1]:

$$-a_{n-1} = \sum s_i = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n$$

$$a_{n-2} = \sum s_i s_k = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_1 s_4 + ... + s_{n-1}s_n$$

$$-a_{n-3} = \sum s_i s_k s_l = s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + ... + s_{n-2}s_{n-1}s_n$$

usw.

$$(-1)^n a_0 = s_1 s_2 s_3 ... s_n.$$

Obige Summen werden über alle Produkte zu je 1 oder 2 oder 3 usw. der Nullstellen s_i mit *verschiedenen* Indizes erstreckt. Die Koeffizienten bzw. die Größen $(-1)^{n-i}a_i$ sind sogenannte

[1] Siehe zBsp.: L. Bieberbach, G. Bauer, "*Vorlesungen über lineare Algebra*", Erster Abschnitt, Fünftes Kapitel :Teilbarkeitsfragen sowie Dritter Abschnitt, Erstes Kapitel: Symmetrische Funktionen, Teubner Verlag Leipzig, Berlin, 1928

elementarsymmetrische Funktionen 1., 2., 3. usw. Ordnung der Nullstellen s_i. Sie sind die einfachsten Funktionen, die sich nicht ändern, wenn man die Nullstellen s_i beliebig untereinander vertauscht.

Nach dem Theorem von Cayley gilt:

$$\Delta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

bzw.

$$\Delta(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + ... + \ a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad , \tag{2.3}$$

d.h. $\Delta(s)$ gemäß (2.1) ist ein annullierendes Polynom der Matrix $\mathbf{A}$. Daraus folgt, dass die Potenz $\mathbf{A}^n$ durch eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen $[\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, ..., \ \mathbf{A}^{n-1}]$ darstellbar ist:

$$\mathbf{A}^n = -\left(a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + ... + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\right) \ .$$

Damit ist die Potenz $\mathbf{A}^m$ für *jedes* $m \geq n$ durch

$$\mathbf{A}^m = b_0\mathbf{A}^0 + b_1\mathbf{A} \ + ... + \ b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \tag{2.4}$$

gegeben. Hierbei sind b_i geeigenete Konstanten.

Wir wollen nun das Theorem von Cayley *äquivalent umschreiben*. Dies wird anschließend manche Überlegungen bzw. Berechnungen vereinfachen. Hierzu wird obiges charakteristisches Polynom $\Delta(s)$ in ein Polynom $\delta(s)$ umgeschrieben. Solch eine Umschreibung ist in der Tat immer möglich!

$$\prod_{i=1}^{n}(s - s_i) = c_0 + c_1(s - s_1) + c_2(s - s_1)(s - s_2) + ... + c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(s - s_k) + s^n.$$

Die Koeffizienten c_i sind zu bestimmmende reelle Zahlen und *eindeutige* Funktionen der Koeffizienten a_i bzw. der Nullstellen s_i des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$

$$\prod_{i=1}^{n}(s - s_i) = a_0 s^0 + a_1 s + ... + a_{n-1}s^{n-1} + s^n = \Delta(s) \ .$$

Ist solch eine äquivalente Umschreibung möglich, so gilt nach Cayley:

$$\delta(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E}{+}c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + ... + c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$$

bzw.

$$c_0 \cdot \mathbf{E} + \sum_{m=1}^{n-1} c_m \cdot \prod_{k=1}^{m}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) + \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad . \tag{2.5}$$

Damit ist die Potenz $\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n = -\left[c_0\mathbf{E}{+} \ c_1(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) + ... + \ c_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E})\right]$$

und auch jede Potenz $\mathbf{A}^m$ mit $m \geq n$ durch eine Linearkombination der Matrizen

$$\mathbf{E},\ (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}),\ (\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E}),\ \dots\ ,(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E})$$

darstellbar.

Führen wir die platzsparende Schreibweise

$$\mathbf{A}^{(N)} := \prod_{k=1}^{N}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E}) \quad \text{mit} \quad N=1,2,...,n-1 \tag{2.6}$$

ein, so lautet das Theorem von Cayley in modifizierter Form

$$\delta(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E}+\ c_1\mathbf{A}^{(1)} + c_2\mathbf{A}^{(2)} + ... +\ c_{n-1}\mathbf{A}^{(n-1)} +\ \mathbf{A}^n = \mathbf{0}\ . \tag{2.7}$$

Zum Verständnis der Modifikation des Theorems von Cayley

1. Bemerkung Wir betrachten der Einfacheit halber den Fall $n=3$, die Verallgemeinerung erfolgt dann geradlinig. In diesem Fall gilt[2] nach (2.3)

$$\Delta(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^0 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \mathbf{0}\quad . \tag{2.8}$$

Wir betrachten nun das Polynom $\delta(s)$

$$\delta(s) = c_0 s^0\ + c_1(s-s_1) + c_2(s-s_1)(s-s_2) + s^3 \tag{2.9}$$

und fordern, dass das Matrix-Polynom

$$\delta(\mathbf{A}) := c_0\mathbf{E}+\ c_1(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E}) + \mathbf{A}^3 \tag{2.10}$$

ein annullierendes Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ ist

$$\delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Hierzu formen wir die linke Seite der Gleichung (2.10) um:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{A}) &= c_0\mathbf{E}+\ c_1(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + c_2(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E}) + \mathbf{A}^3 \\ &= c_0\mathbf{E}+\ c_1(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + c_2\left[\mathbf{A}^2-(s_1+s_2)\mathbf{A}+s_1s_2\mathbf{E}\right] + \mathbf{A}^3,\end{aligned}$$

$$\delta(\mathbf{A}) = (c_0 - c_1s_1 + c_2s_1s_2)\cdot\mathbf{E}+ [c_1 - c_2(s_1+s_2)]\cdot\mathbf{A}+\ c_2\cdot\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3\ .$$

Man erkennt, dass jede Potenz von $\mathbf{A}$ mit einem Faktor versehen ist, der eine *lineare* Funktion der Koeffizienten c_i ist. Die Anzahl der im Faktor der Potenz $\mathbf{A}^k$ enthaltenen Koeffizienten c_i

[2] Ferner gelten folgende Relationen zwischen den Eigenwerten s_i der Matrix $\mathbf{A}$ und den Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms:

$$a_0 = -s_1s_2s_3, \quad a_1 = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3, \quad a_2 = -(s_1+s_2+s_3).$$

beträgt $(3-k)$ $(k=2,1,0)$. Durch Koeffizientenvergleich mit (2.8) folgen die Bestimmungsgleichungen für die Größen c_i. Hierbei führen wir den Vergleich ausgehend von der höchsten Potenz $\mathbf{A}^{n-1}$ in abfallender Reihenfolge durch. Im vorliegenden Fall bedeutet das: $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^1$ und $\mathbf{A}^0$:

$$\begin{aligned} c_2 &= a_2 \\ c_1 - c_2(s_1+s_2) &= a_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = a_1 + c_2(s_1+s_2), \\ c_0 - c_1 s_1 + c_2 s_1 s_2 &= a_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = a_0 + c_1 s_1 - c_2 s_1 s_2 \ . \end{aligned}$$

Man legt zuerst den Koeffizienten c_2 fest, anschließend bestimmt man c_1 und zuletzt c_0. Mit dieser Koeffizientenwahl ist $\delta(s)$ gemäß (2.9) ein annullierendes Polynom der Matrix $\mathbf{A}$.

2. Bemerkung (Berechnung und Eindeutigkeit der Konstanten c_i.) Die Koeffizienten c_0 und c_{n-1} können relativ leicht berechnet werden. Es gilt

$$\delta(s_1) = c_0 + s_1^n = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad c_0 = -s_1^n. \tag{2.12}$$

Durch $(n-1)$ malige Differentiation nach s von $\Delta(s)$ bzw. $\delta(s)$ ergibt sich

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\Delta(s) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\delta(s)$$

bzw.

$$a_{n-1} = c_{n-1}.$$

D.h.

$$c_{n-1} = -(s_1 + s_2 + ... + s_n).$$

Es verbleiben die Koeffizienten c_1 bis c_{n-2} . Durch k malige Differentiation nach s von $\Delta(s)$ bzw. $\delta(s)$ ergibt sich

$$\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s) = a_k k! \ + a_{k+1}(k+1)! \cdot s + ... + \ n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\cdot s^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{ds^k}\delta(s) = c_k k! + c_{k+1}\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s-s_K) + ... + \ c_{n-1}\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s-s_K) + \ n(n-1)(n-2)...(n-k+1)s^{n-k}$$

Wir betrachten nun die Werte $\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s)$ und $\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)$ an der Stelle $s=0$ und erhalten

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\Delta(s)\right|_{s=0} = a_k k!$$

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)\right|_{s=0} = c_k k! + c_{k+1}\left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s-s_K)\right|_{s=0} + ... + \ c_{n-1}\left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s-s_K)\right|_{s=0}$$

bzw. mit Hilfe folgender Abkürzungen für die auftretenden Konstanten

$$K_{k+1} := \left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{k+1}(s-s_K)\right|_{s=0} \quad ...K_{n-1} := \left.\frac{d^k}{ds^k}\prod_{K=1}^{n-1}(s-s_K)\right|_{s=0}$$

$$\left.\frac{d^k}{ds^k}\delta(s)\right|_{s=0} = c_k k! + c_{k+1}K_{k+1} + ... + \ c_{n-1}K_{n-1}$$

bzw.

$$a_k k! = c_k k! + c_{k+1}K_{k+1} + ... + \ c_{n-1}K_{n-1}$$

$$-c_k = a_k - \frac{1}{k!}\left(c_{k+1}K_{k+1} + ... + \ c_{n-1}K_{n-1}\right).$$

Man erhält mit Hilfe obiger Beziehung ausgehend von dem "Anfangswert"

$$c_{n-1} = a_{n-1}$$

den Koeffizienten c_{n-2}, anschließend c_{n-3} usw. und letztlich c_1.

3. Bemerkung Werten wir $\delta(s_2)$ aus, so ergibt sich

$$\delta(s_2) = c_0 + c_1(s_2 - s_1) + s_2^n = 0$$

bzw. mit (2.12)

$$c_1(s_2 - s_1) = -\left(s_2^n - s_1^n\right)$$

$$c_1 = -\frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1} = -s_2^{n-1}\frac{1-\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^n}{1-\frac{s_1}{s_2}}.$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$1 + a + a^2 + ... + \ a^{N-1} = \frac{1-a^N}{1-a}$$

erhalten wir für c_1

$$c_1 = -s_2^{n-1}\left[1 + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^1 + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{n-1}\right]$$

bzw.

$$c_1 = -\sum_{i,k=0}^{n-1} s_2^i s_1^k \qquad \text{mit} \ \ i + k = n - 1. \tag{2.13}$$

Werten wir $\delta(s_3)$ aus, so ergibt sich

$$\delta(s_2) = c_0 + c_1(s_3 - s_1) + c_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) + s_3^n = 0$$

bzw. mit (2.12) und (2.13)

$$c_1(s_3 - s_1) + c_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) = -\left(s_3^n - s_1^n\right),$$

$$c_1 + c_2(s_3 - s_2) = -\frac{s_3^n - s_1^n}{s_3 - s_1},$$

$$c_2(s_3 - s_2) = -\left(\frac{s_3^n - s_1^n}{s_3 - s_1} - \frac{s_2^n - s_1^n}{s_2 - s_1}\right),$$

$$c_2(s_3 - s_2) = -\left(\sum_{i,k=0}^{n-1} s_3^i s_1^k - \sum_{i,k=0}^{n-1} s_2^i s_1^k\right) = -\sum_{i,k=0}^{n-1}\left(s_3^i - s_2^i\right) s_1^k$$

bzw.

$$c_2 = -\frac{1}{s_3 - s_2}\sum_{i,k=0}^{n-1}\left(s_3^i - s_2^i\right) s_1^k = -\sum_{i,k=0}^{n-1}\frac{s_3^i - s_2^i}{s_3 - s_2} s_1^k \quad \text{mit} \quad i + k = n - 1$$

$$c_2 = -\sum_{i,k=0}^{n-2}\left(\sum_{I,K=0}^{i-1} s_3^I s_2^K\right) s_1^k \quad \text{mit} \quad i + k = n - 1 \quad \text{sowie} \quad I + K = i - 1$$

Die wiederholte Anwendung dieser Vorgehensweise ergibt die explizite Darstellung von c_i in Abhängigkeit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es handelt sich hierbei um symmetrische Funktionen der Nullstellen. Als Beispiele seien angeführt: Für ein Polynom vom Grade $n = 2$ ergibt sich

$$c_0 = -s_1^2 \quad \text{und} \quad c_1 = -(s_1 + s_2).$$

Für ein Polynom vom Grade $n = 3$ ergibt sich

$$c_0 = -s_1^3, \qquad c_1 = -(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2), \qquad c_2 = -(s_1 + s_2 + s_3).$$

2.2 Matrizenfunktion $f(\mathbf{A})$, Resolvente von $\mathbf{A}$

Wir betrachten eine (n, n)- Matrix $\mathbf{A}$, deren charakteristisches Polynom $\Delta(s)$ die Form

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^{m}(s - s_i)^{m_i}$$

besitzt. Es sei $f(\lambda)$ eine Funktion der skalaren Variablen λ, wobei $f(\lambda)$ nicht zwingend ein Polynom ist. Es wird vorausgesetzt, dass $f(\lambda)$ auf dem Spektrum der Matrix $\mathbf{A}$ definiert ist. Das bedeutet: es existieren für alle Eigenwerte s_i die Ausdrücke

$$f(s_i) \quad \text{und} \quad \frac{df^k}{d\lambda^k}(s_i) \qquad \text{für } 1 \le k \le m_i.$$

Des Weiteren sei $p(\lambda)$ ein beliebiges Polynom in λ, das auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ mit $f(\lambda)$ übereinstimmt. Die Matrix $f(\mathbf{A})$ ist durch[3]

$$f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$$

[3] Die Bestimmung von $f(\mathbf{A})$ durch die Werte von $f(\lambda)$ auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ ist eindeutig. Anders formuliert: *alle* Funktionen $f(\lambda)$, die auf dem Spektrum von $\mathbf{A}$ übereinstimmen, bestimmen dieselbe Matrix $f(\mathbf{A})$.

definiert. Zur Erinnerung: liegt ein Polynom $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \lambda^k$ vor, so versteht man unter $p(\mathbf{A})$:

$$p(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{m} \gamma_k \mathbf{A}^k \; .$$

Wir betrachten die Resolvente

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$$

einer (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ und wollen eine Polynomdarstellung $p(\mathbf{A})$ entwickeln. Hierzu wird die Resolvente - innerhalb eines Konvergenzbereiches $|s| > r_{\mathbf{A}}$ - in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s}\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{-1} = \frac{1}{s}\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{s} + (\frac{\mathbf{A}}{s})^2 + (\frac{\mathbf{A}}{s})^3 + ...\right] \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mathbf{A}}{s})^k = \frac{\mathbf{E}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^4} + ...
\end{aligned}$$

Aufgrund des Theorems von Cayley ergibt sich dann

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \kappa_0\mathbf{E} + \kappa_1\mathbf{A}^1 + ... + \kappa_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}, \tag{2.14}$$

wobei die Koeffizienten κ_i Funktionen von s sind. Motiviert durch die modifizierte Form des Cayley-Theorems machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \beta_0\mathbf{E} + \beta_1(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + \beta_2(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E}) \\
&\quad +... + \; \beta_{n-1}(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_{n-1}\mathbf{E}),
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten β_i ebenfalls Funktionen von s sind.

Wir wollen nun die Koeffizienten β_i berechnen. Der mathematischen Einfachheit halber betrachten wir den Fall $n = 3$ und erhalten

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \beta_0\mathbf{E} + \beta_1(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) + \beta_2(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E}) \tag{2.15}$$

mit den Koeffizienten $\beta_i = \beta_i(s)$.

Wir betrachten nun ein Polynom $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \delta_0 + \delta_1(\lambda - s_1) + \delta_2(\lambda - s_1)(\lambda - s_2) \; . \tag{2.16}$$

Ferner betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{s-\lambda} = \frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s}} = \frac{1}{s}\left[1 + \frac{\lambda}{s} + (\frac{\lambda}{s})^2 + (\frac{\lambda}{s})^3 + ...\right] \\
&= \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{s^2} + \frac{\lambda^2}{s^3} + \frac{\lambda^3}{s^4} + ...
\end{aligned}$$

Wir berechnen daraufhin - der mathematischen Einfachheit halber - unter der Annahme verschiedener Eigenwerte die drei Koeffizienten δ_i in (2.16). Hierzu benutzen wir das Polynom $p(\lambda)$ und die Funktion $f(\lambda)$. Es muss dann für $i = 1, 2, 3$ gelten:

$$p(\lambda = s_i) = f(\lambda = s_i) \tag{2.17}$$

bzw.

$$\delta_0 + \delta_1(s_i - s_1) + \delta_2(s_i - s_1)(s_i - s_2) = \frac{1}{s - s_i} \quad . \tag{2.18}$$

Es folgt unmittelbar für $i = 1$

$$\delta_0 = \frac{1}{s - s_1} \; . \tag{2.19}$$

Für $i = 2$ erhalten wir die Relation

$$\delta_0 + \delta_1(s_2 - s_1) = \frac{1}{s - s_2}.$$

Unter Verwendung von (2.19) ergibt sich

$$\delta_1(s_2 - s_1) = \frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1} = \frac{s_2 - s_1}{(s - s_2)(s - s_1)} \tag{2.20}$$

bzw.

$$\delta_1 = \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)}. \tag{2.21}$$

Man beachte, dass dieses Ergebnis (2.21) auch für den Fall $s_2 = s_1$ gültig bleibt,[4]da der Koeffizient stetig in s_1 und s_2 ist. Der letzte Koeffizient δ_2 ergibt sich aus

$$\delta_0 + \delta_1(s_3 - s_1) + \delta_2(s_3 - s_1)(s_3 - s_2) = \frac{1}{s - s_3}$$

[4]Dies ergibt sich durch Anwendung der Regel von de L´Hospital oder durch nachfolgende formale Berechnung: es muss gelten

$$\left.\frac{dp}{d\lambda}\right|_{\lambda=s_2=s_1} = \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=s_2=s_1}$$

Der Differentialquotient $dp/d\lambda$ bzw. $df/d\lambda$ beträgt

$$\begin{aligned} dp/d\lambda \quad = \quad & \delta_1 + \delta_2(\lambda - s_2 + \lambda - s_1) + \\ & \delta_3\left[(\lambda - s_2)(\lambda - s_3) + (\lambda - s_1)(\lambda - s_2) + (\lambda - s_1)(\lambda - s_2)\right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{(s - \lambda)^2}.$$

Das ergibt

$$\left.\frac{dp}{d\lambda}\right|_{\lambda=s_2=s_1} = \delta_1 = \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=s_2=s_1} = \frac{1}{(s - s_1)^2}.$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\delta_2(s_3-s_1)(s_3-s_2) &= \frac{1}{s-s_3} - \frac{1}{s-s_1} - \frac{s_3-s_1}{(s-s_2)(s-s_1)} \\
&= \frac{(s_3-s_1)(s_3-s_2)}{(s-s_2)(s-s_1)(s-s_3)} \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\delta_2 = \frac{1}{(s-s_2)(s-s_1)(s-s_3)},$$

wobei dieses Ergebnis auch für den Fall mehrfacher Eigenwerte seine Gültigkeit behält[5].

Damit erhalten wir für die Resolvente den Ausdruck

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s-s_1}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{(s-s_2)(s-s_1)}\cdot(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \\
&\quad + \frac{1}{(s-s_3)(s-s_2)(s-s_1)}\cdot(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) \ .
\end{aligned}$$

Es bestätigt die auf einem anderen Weg entwickelte Relation (1.41).

---

[5] Die Anwendung der Regel von de L´Hospital bzw. die formale Berechnung bestätigt dies. Der zweite Differentialquotient lautet

$$d^2p/d\lambda^2 = 2\delta_2 + \delta_3\left[(\lambda-s_2)+(\lambda-s_3)+(\lambda-s_1)+(\lambda-s_2)+(\lambda-s_1)+(\lambda-s_2)\right] \ .$$

An der Stelle $\lambda = s_1 = s_2 = s_3$ beträgt er $2\delta_2$. Damit ergibt sich aus der Forderung

$$2\delta_2 = \left.\frac{d^2 f}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=s_1} = \frac{2}{(s-s_1)^3}$$

der Wert

$$\delta_2 = \frac{1}{(s-s_1)^3} \ .$$

Kapitel 3

Zeitdiskrete LZI-Systeme

3.1 Einführung

Ausgangspunkt nachfolgender Überlegungen ist ein *zeitdiskretes* System

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{3.1}$$

mit dem n-dimensionalen Zustand $\mathbf{x}_i$, der m-dimensionalen Eingangsgröße $\mathbf{u}_i$, den konstanten Systemdaten passender Dimension $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sowie dem vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und dem Verlauf der Eingangsgröße für $i \geq 0$

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ \dots \ .$$

Das Modell (3.1) stellt eine rekursive Relation zwischen unmittelbar aufeinander folgenden Werten des Zustandsvektors dar. Deren Auswertung ergibt

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^i \left(\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}_k \right) = \mathbf{A}^i\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{i-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}_k \ . \tag{3.2}$$

Bezeichnet man mit $\bar{\mathbf{f}}(z)$ die z-Transformierte der (vektoriellen) Folge $\{\mathbf{f}_i\} := (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, ...)$

$$\tilde{\mathbf{f}}(z) := \mathcal{Z}\left\{\mathbf{f}_i\right\} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k z^{-k} \ ,$$

so erhält man für

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{A}^i$$

die z-Transformierte

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{z})^{-1} = z(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \tag{3.3}$$

Unterwerfen wir das System (3.1) der z-Transformation, so erhalten wir unter Beachtung von (3.3) die z-Transformierte des Zustandsvektors bzw. die Systembeschreibung im Bildbereich[1]:

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{z})^{-1}\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(z) \ . \tag{3.4}$$

[1] Diese Relation ist auch die z-Transformierte von (3.2).

Prägend in den Beziehungen (3.2) bzw. (3.4) sind die Größen $\mathbf{A}^i$ bzw. die Resolvente $(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$. Das Ziel ist, eine explizite Darstellung für $\mathbf{A}^i$ - ohne Bildung von Potenzen der Matrix $\mathbf{A}$ - zu ermitteln bzw. die Berechnung von $(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ in einfacher Weise zu bewerkstelligen. Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen ist die Kenntnis der vorangegangenen Kapitel für zeitkontinuierliche Systeme *nicht* notwendig.

3.2 Rekursive Ermittlung einer expliziten Darstellung von $\mathbf{A}^i$

Die Matrix $\mathbf{A}^i$ kann als Lösung $\mathbf{\Phi}_i$ der Rekursionsgleichung

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_i \quad (= \mathbf{\Phi}_i\mathbf{A}) \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E}$$

aufgefasst werden. Betrachtet man ein beliebiges Polynom $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ in $\mathbf{A}$ und bildet mit Hilfe der Funktion $\mathbf{\Phi}_i$ die Funktion $\mathbf{\Psi}_i$ gemäß

$$\mathbf{\Psi}_i := \mathbf{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{\Phi}_i \ [= \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})] \ ,$$

so gilt ebenfalls

$$\mathbf{\Psi}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}_i \ (= \mathbf{\Psi}_i\mathbf{A}) \tag{3.5}$$

und insbesondere

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}_i - k\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{\Psi}_{i+1} - k\mathbf{\Psi}_i \ ,$$

wobei k ein konstanter Parameter ist.

Bezeichnet man mit z_k die n Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$, so lautet das zugehörige charakteristische Polynom

$$\Gamma(z) := \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k). \tag{3.6}$$

Die Matrix $\Gamma(\mathbf{A})$ ist nach dem Theorem von Cayley gleich der Nullmatrix:

$$\Gamma(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n}(\mathbf{A} - z_k\mathbf{E}) = \mathbf{0} \ . \tag{3.7}$$

Nach Multiplikation obiger Gleichung (3.7) mit der Matrix $\mathbf{\Phi}_i$ erhalten wir

$$(\mathbf{A} - z_n\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0} \ . \tag{3.8}$$

Führt man nun eine Matrix-Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_i^{(n)}$ gemäß

$$\mathbf{\Psi}_i^{(n)} := (\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i \tag{3.9}$$

in (3.8) ein, so erhält man unter Beachtung von (3.5)

$$(\mathbf{A} - z_n\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}_i^{(n)} - z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} - z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = \mathbf{0} \ .$$

Das Ergebnis ist eine Rekursionsgleichung zur Berechnung von $\mathbf{\Psi}_i^{(n)}$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} = z_n\mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad\qquad i = 0, 1, 2, 3, ... \tag{3.10}$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{\Psi}_0^{(n)}$ gemäß (3.9)

$$\mathbf{\Psi}_0^{(n)} = (\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E}) \ . \tag{3.11}$$

Deren Lösung kann unmittelbar angegeschrieben werden:

$$\mathbf{\Psi}_i^{(n)} = z_n^i\mathbf{\Psi}_0^{(n)} \ .$$

Ausgehend von der Definition (3.9) führen wir nun eine weitere Hilfsfunktion

$$\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} := (\mathbf{A} - z_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i \tag{3.12}$$

ein. Unter Beachtung von (3.5) ergibt sich dann aus (3.9):

$$(\mathbf{A} - z_{n-1}\mathbf{E})\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} = \mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} - z_{n-1}\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} = \mathbf{\Psi}_i^{(n)} \ .$$

Man erhält eine rekursive Relation zur Ermittlung[2] der Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)}$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} = z_{n-1}\mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} + \ \mathbf{\Psi}_i^{(n)}. \tag{3.13}$$

Aufgrund der Definition (3.12) beträgt deren Anfangswert $\mathbf{\Psi}_0^{(n-1)}$

$$\mathbf{\Psi}_0^{(n-1)} = (\mathbf{A} - z_{n-2}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E}) \ . \tag{3.14}$$

Dieses Vorgehen - d.h. das Einführen von Hilfsfunktionen - wird bis zur Bildung der Hilfsfunktion $\mathbf{\Psi}_i^{(2)}$ wiederholt

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_i - z_1\mathbf{E}\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Psi}_i^{(2)}. \tag{3.15}$$

Beziehung (3.15) ist eine Rekursionsgleichung für die gesuchte Matrix $\mathbf{\Phi}_i$

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1\mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \tag{3.16}$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E} \ . \tag{3.17}$$

[2] Deren Lösung kann mit Hilfe von (3.2) berechnet werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Matrix $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}^i$ ergibt sich durch sukzessive Lösung folgender Rekursionsgleichungen

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n)} = z_n \mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(n)} = \prod_{k=1}^{n-1} (\mathbf{A} - z_k \mathbf{E}) \quad , \tag{3.18}$$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(n-1)} = z_{n-1} \mathbf{\Psi}_i^{(n-1)} + \mathbf{\Psi}_i^{(n)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(n-1)} = \prod_{k=1}^{n-2} (\mathbf{A} - z_k \mathbf{E}) \quad , \tag{3.19}$$

usw.

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2 \mathbf{\Psi}_i^{(2)} + \mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(2)} = (\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) \quad , \tag{3.20}$$

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1 \mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E} \ . \tag{3.21}$$

Beispiel (zeitdiskretes LZI-System 3. Ordnung) Die erwähnte Vorgehensweise wird für eine $(3,3)$-Matrix $\mathbf{A}$ mit den Eigenwerten z_k $(i = 1,2,3)$ und dem charakteristischen Polynom $\Gamma(z)$ demonstriert. Nach dem Theorem von Cayley gilt

$$\Gamma(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - z_3 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

bzw. nach Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{\Phi}_i$

$$(\mathbf{A} - z_3 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) \mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0}.$$

Die zwei benötigten Hilfsfunktionen $\mathbf{\Psi}_i^{(3)}$ und $\mathbf{\Psi}_i^{(2)}$ lauten

$$\mathbf{\Psi}_i^{(3)} := (\mathbf{A} - z_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) \mathbf{\Phi}_i \qquad \text{und} \qquad \mathbf{\Psi}_i^{(2)} := (\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) \mathbf{\Phi}_i \ .$$

Sie erfüllen die rekursiven Relationen

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(3)} = z_3 \mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(3)} = (\mathbf{A} - z_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E}) \ , \tag{3.22}$$

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2 \mathbf{\Psi}_i^{(2)} + \mathbf{\Psi}_i^{(3)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Psi}_0^{(2)} = \mathbf{A} - z_1 \mathbf{E} \tag{3.23}$$

und

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1 \mathbf{\Phi}_i + \mathbf{\Psi}_i^{(2)} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{E} \ . \tag{3.24}$$

Aus (3.22) folgt unmittelbar

$$\mathbf{\Psi}_i^{(3)} = z_3^i \mathbf{\Psi}_0^{(3)}. \tag{3.25}$$

Nach Einsetzen in (3.23)

$$\mathbf{\Psi}_{i+1}^{(2)} = z_2 \mathbf{\Psi}_i^{(2)} + z_3^i \mathbf{\Psi}_0^{(3)}$$

und unter Verwendung der allgemeinen Beziehung (3.2) erhalten wir

$$\mathbf{\Psi}_i^{(2)} = z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} \cdot \mathbf{\Psi}_k^{(3)}$$

bzw. mit (3.25)[3]

$$\mathbf{\Psi}_i^{(2)} = z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \ . \tag{3.26}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (3.24) ein, so erhält man

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = z_1 \mathbf{\Phi}_i \ + \ z_2^i \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} \ + \ \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \ .$$

Unter Verwendung von (3.2) bekommen wir für $\mathbf{\Phi}_i$ eine Beziehung mit folgender Struktur:

$$\mathbf{\Phi}_i = z_1^i \cdot \mathbf{E} \ + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \rho_i^{(3)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \ . \tag{3.27}$$

Hierbei erscheinen zwei - von den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ abhängige - Funktionen $\rho_i^{(2)}$ und $\rho_i^{(3)}$. Nach Einführung von

$$\rho_i^{(1)}(z_1) := z_1^i$$

erhalten wir die Darstellung

$$\mathbf{\Phi}_i = \rho_i^{(1)} \cdot \mathbf{E} \ + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(2)} + \rho_i^{(3)} \cdot \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \ .$$

Es wird nun ein einfaches (rekursives) Bildungsgesetz von $\rho_i^{(2)}$ und $\rho_i^{(3)}$ abgeleitet. Hierzu unterwerfen wir die Rekursionsgleichungen (3.22), (3.23) und (3.24) der z-Transformation und erhalten unter Verwendung der Beziehung

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{f}_{i+1}\right\} = z\left[\tilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{f}_0\right]$$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{\Psi}}^{(3)} &= \frac{z}{z-z_3} \mathbf{\Psi}_0^{(3)} \ , \\
\tilde{\mathbf{\Psi}}^{(2)} &= \frac{z}{z-z_2} \mathbf{\Psi}_0^{(2)} \ + \ \frac{z}{(z-z_2)(z-z_3)} \mathbf{\Psi}_0^{(3)}, \\
\tilde{\mathbf{\Phi}} &= \frac{z}{z-z_1} \mathbf{E} \ + \ \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)} \mathbf{\Psi}_0^{(2)} \ + \ \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} \mathbf{\Psi}_0^{(3)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Letzte Gleichung ist die z-Transformierte einer Folge mit den Elementen $(\mathbf{\Phi}_i)$ gemäß (3.27). Damit gelten folgende Relationen:

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(1)}\right\} = \bar{\rho}^{(1)} = \frac{z}{z-z_1}, \tag{3.29}$$

[3]Die Summe $\sum\limits_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k$ beträgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^k = \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_3^{k-i+1} \cdot z_3^{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{z_2}{z_3})^{i-1-k} \cdot z_3^{i-1} \\
= \ & \frac{1-(\frac{z_2}{z_3})^i}{1-(\frac{z_2}{z_3})} \cdot z_3^{i-1} = \frac{z_3^i - z_2^i}{z_3 - z_2} \ .
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(2)}\right\} = \bar{\rho}^{(2)} = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)} \tag{3.30}$$

und

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(3)}\right\} = \bar{\rho}^{(3)} = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}. \tag{3.31}$$

Aus (3.29), (3.30) und (3.31) erhalten wir die Beziehung

$$\bar{\rho}^{(2)} = \frac{1}{z-z_2}\bar{\rho}^{(1)} \; . \tag{3.32}$$

Damit bekommen wir

$$\bar{\rho}^{(3)} = \frac{1}{z-z_3}\bar{\rho}^{(2)} \; . \tag{3.33}$$

Die Übersetzung in den Zeitbereich ergibt:

Die Funktion $\rho_i^{(1)}$ erfüllt die Rekursionsgleichung

$$\rho_{i+1}^{(1)} = z_1\rho_i^{(1)} \quad \text{mit} \quad \rho_0^{(1)} = 1$$

und lautet

$$\rho_i^{(1)} = z_1^i. \tag{3.34}$$

Aus (3.32), (3.34) und (3.33) erhalten wir

$$\rho_{i+1}^{(2)} = z_2\rho_i^{(2)} + \rho_i^{(1)} \qquad \text{mit} \;\; \rho_0^{(2)} = 0$$

und

$$\rho_{i+1}^{(3)} = z_3\rho_i^{(3)} + \rho_i^{(2)} \quad \text{mit} \;\; \rho_0^{(3)} = 0 \; .$$

3.2.1 Das diskrete Analogon des Putzer-Algorithmus

Die Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Fall erfolgt in voller Analogie zum vorangegangenen Beispiel. Durch Transformation der Rekursionsgleichungen (3.18) bis (3.21) in den Bildbereich erhalten wir folgendes Resultat:

Die Matrix $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}^i$ besitzt die Darstellung

$$\mathbf{A}^i = z_1^i \cdot \mathbf{E} + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_2 + \ldots + \; \rho_i^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}_{n-1} + \rho_i^{(n)} \cdot \mathbf{P}_n \; . \tag{3.35}$$

Die konstanten Matrizen[4] $\mathbf{P}_k$ bzw. die Funktionen $\rho_i^{(k)}$ werden rekursiv mittels

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{A} - z_k\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_k = \prod_{\mu=1}^{k}(\mathbf{A} - z_\mu\mathbf{E}) \qquad \text{mit} \;\; 1 \le k \le n-1 \quad \text{und} \;\; \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \tag{3.36}$$

bzw.

$$\rho_{i+1}^{(k)} = z_k\rho_i^{(k)} + \rho_i^{(k-1)} \qquad \text{mit} \;\; 2 \le k \le n \quad , \;\; \rho_0^{(k)} = 0 \;\; \text{und} \; \rho_i^{(1)} = z_1^i \tag{3.37}$$

berechnet. Hierbei sind z_k die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

[4] Es gilt

$$\mathbf{P}_k := \mathbf{\Psi}_0^{(k)}.$$

Beispiel

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

und besitzt das charakteristische Polynom

$$\det(z\mathbf{E}-\mathbf{A}) = 0,5 + 1,5z + z^2 = (z+1)(z+0.5) =: (z-z_1)(z-z_2).$$

Unter Beachtung von (3.35), (3.36) und (3.37) lautet $\mathbf{A}^i$

$$\mathbf{A}^i = z_1^i \cdot \mathbf{E} + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_2$$

mit

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - z_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho_{i+1}^{(2)} = z_2\rho_i^{(2)} + \rho_i^{(1)} \qquad \text{mit } \ \rho_0^{(2)} = 0 \ \text{ und } \rho_i^{(1)} = z_1^i.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \rho_i^{(2)} &= \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_1^k = \sum_{k=0}^{i-1} z_2^{i-1-k} z_1^{k-i+1} \cdot z_1^{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{z_2}{z_1})^k \cdot z_1^{i-1} \\ &= \frac{1-(\frac{z_2}{z_1})^i}{1-\frac{z_2}{z_1}} z_1^{i-1} = -2(1-0.5^i)(-1)^i \ . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i &= z_1^i \cdot \mathbf{E} + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_2 = (-1)^i \cdot \mathbf{E} - \ 2(1-0.5^i)(-1)^i \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & (-1)^i \end{bmatrix} - 2\left[(-1)^i - (-0.5)^i\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} -(-1)^i + 2(-0.5)^i & -2(-1)^i + 2(-0.5)^i \\ (-1)^i - (-0.5)^i & 2(-1)^i - (-0.5)^i \end{bmatrix} .$$

3.3 Explizite Darstellung von $(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$

Ausgangspunkt sind die Beziehungen (3.35),(3.36) und (3.37):

$$\mathbf{A}^i = z_1^i \cdot \mathbf{E} + \rho_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_2 + ... + \rho_i^{(n-1)} \cdot \mathbf{P}_{n-1} + \rho_i^{(n)} \cdot \mathbf{P}_n$$

bzw.

$$\mathbf{A}^i = z_1^i \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \rho_i^{(k)} \cdot \mathbf{P}_k \tag{3.38}$$

mit

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{A} - z_k \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_k = \prod_{\nu=1}^{k} (\mathbf{A} - z_\nu \mathbf{E}) \; ; \qquad k = 1, 2, ..., n-1 \text{ und } \; \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \tag{3.39}$$

und

$$\rho_{i+1}^{(k)} = z_k \rho_i^{(k)} + \rho_i^{(k-1)} \quad (\, 2 \leq k \leq n) \quad \text{mit} \;\; \rho_0^{(k)} = 0 \;\; \text{und} \; \rho_i^{(1)} = z_1^i \; . \tag{3.40}$$

Wir unterwerfen (3.38) der z-Transformation unter Beachtung von (3.3):

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = \mathcal{Z}\left\{ z_1^i \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \rho_i^{(k)} \cdot \mathbf{P}_k \right\} = \mathcal{Z}\left\{z_1^i\right\} \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} \cdot \mathbf{P}_k)$$

bzw.

$$z(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = z(z - z_1)^{-1} \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} \cdot \mathbf{P}_k \; . \tag{3.41}$$

Wir werten nun den Ausdruck $\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}$ mit Hilfe von (3.40) aus, und bekommen:

$$\mathcal{Z}(\left\{\rho_{i+1}^{(k)}\right\} = z_k \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k-1)}\right\} \quad ; \qquad 2 \leq k \leq n \quad \text{mit} \;\; \rho_0^{(k)} = 0 \;\; ,$$

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} = (z - z_k)^{-1} \cdot \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k-1)}\right\} = \prod_{\mu=2}^{k} (z - z_\mu)^{-1} \cdot \mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(1)}\right\}$$

bzw.

$$\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\} = \prod_{\mu=2}^{k} (z - z_\mu)^{-1} \cdot z(z - z_1)^{-1} = \prod_{\mu=1}^{k} z \frac{1}{z - z_\mu} \; . \tag{3.42}$$

Wird obiges Ergebnis in (3.41) eingesetzt, so erhalten wir für die z-Transformierte von $\mathbf{A}^i$ den Ausdruck

$$z(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = z \frac{1}{z - z_1} \cdot \mathbf{E} + z \sum_{k=2}^{n} \left(\prod_{\mu=1}^{k} \frac{1}{z - z_\mu} \cdot \mathbf{P}_k \right) . \tag{3.43}$$

Damit lautet die Resolvente von $\mathbf{A}$

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z - z_1} \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \left(\prod_{\mu=1}^{k} \frac{1}{z - z_\mu} \cdot \mathbf{P}_k \right) \tag{3.44}$$

bzw. mit (3.39)

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z - z_1} \cdot \mathbf{E} + \sum_{k=2}^{n} \left[\prod_{\mu=1}^{k} \frac{1}{z - z_\mu} \cdot \prod_{\nu=1}^{k-1} (\mathbf{A} - z_\nu \mathbf{E}) \right] . \tag{3.45}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte

$$z_1 = -1 \text{ und } z_2 = -0.5 \ .$$

Unter Beachtung von (3.44) bzw. (3.45) erhalten wir für die Resolvente

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = (z-z_1)^{-1}\cdot\mathbf{E} + \prod_{\mu=1}^{2}(z-z_\mu)^{-1}\cdot\mathbf{P}_2 \ ,$$

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = (z-z_1)^{-1}\cdot\mathbf{E} + (z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\cdot(\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) \ ,$$

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z+1}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{(z+1)(z+0.5)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Umrechnung ergibt

$$(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{z+1}\cdot\mathbf{E} + (-2)\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+0.5}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

bzw. nach Multiplikation mit z

$$z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{z}{z+1}\cdot\mathbf{E} + (-2)\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+0.5}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \ .$$

Die Rücktransformation obiger Beziehung bestätigt das anhand der Relation

$$\mathbf{A}^i = z_1^i\cdot\mathbf{E} + \rho_i^{(2)}\cdot\mathbf{P}_2$$

erhaltene Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i &= (-1)^i\cdot\mathbf{E} - 2(1-0.5^i)(-1)^i\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^i\cdot\mathbf{E} - 2\left[(-1)^i - (-0.5)^i\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Beispiel

Die Matrix $\mathbf{A}$ lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und besitzt die Eigenwerte

$$z_1 = -1 \ , \ z_2 = -2 \text{ und } z_3 = -2.$$

Gemäß (3.44) und (3.45) gilt für $n = 3$

$$
\begin{aligned}
(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= (z-z_1)^{-1}\cdot\mathbf{E} + \sum_{k=2}^{3}\left[\prod_{\mu=1}^{k}(z-z_\mu)^{-1}\cdot\mathbf{P}_k\right] \\
&= (z-z_1)^{-1}\cdot\mathbf{E} + \prod_{\mu=1}^{2}(z-z_\mu)^{-1}\cdot\mathbf{P}_2 + \prod_{\mu=1}^{3}(z-z_\mu)^{-1}\cdot\mathbf{P}_3\ .
\end{aligned}
$$

Die konstanten Matrizen $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ lauten:

$$
\mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}-z_1\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A}-z_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-z_2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .
$$

Die zugehörigen multiplikativen Faktoren $\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(k)}\right\}$ ergeben sich zu

$$
\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(2)}\right\} = \prod_{\mu=1}^{2}(z-z_\mu)^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)}
$$

und

$$
\mathcal{Z}\left\{\rho_i^{(3)}\right\} = \prod_{\mu=1}^{3}(z-z_\mu)^{-1} = \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2}\frac{1}{z-z_3} = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+2)}\ .
$$

Damit beträgt die Resolvente

$$
\begin{aligned}
(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{z+1}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{(z+1)(z+2)}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+2)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe folgender Korrespondenzen der z-Transformation

$$
\mathcal{Z}\left\{a^i\right\} = \frac{z}{z-a}\ ,\quad \mathcal{Z}\left\{ia^{i-1}\right\} = \frac{z}{(z-a)^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}^i\right\} = z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}
$$

und einer Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
z(z\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} &= \frac{z}{z+1}\cdot\mathbf{E} + \left(\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\right)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left[-\frac{z}{(z+2)^2}+\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}
$$

Damit besitzt $\mathbf{A}^i$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^i &= (-1)^i \cdot \mathbf{E} + \left[(-1)^i - (-2)^i\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left[(-1)^i - (-2)^i - i(-2)^{i-1}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Kapitel 4

Resolvente und Eigenrichtungen einer Matrix A

Ausgehend von der kanonischen Darstellung für die Resolvente von **A**

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) \;\;=\;\; & \frac{\mathbf{E}}{s-s_1} + \frac{\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E}}{(s-s_2)(s-s_1)} + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} + ... \\ & + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}{-}s_{n-1}\mathbf{E})}{\Delta(s)}\end{aligned}$$

werden *analytische* Ausdrücke für deren Eigenrichtungen ermittelt. Diese können manche systemtechnische Betrachtungen vereinfachen. Zunächst werden gewisse grundlegende mathematische Fakten wiederholt.

4.1 Grundlegende Fakten

Die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$ einer (n,n)-Matrix **A** ist durch

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) := (s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})}\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{4.1}$$

gegeben. Hierbei sind $\Delta(s)$ das charakteristische Polynom und $\tilde{\Delta}(s)$ das Minimalpolynom der Matrix **A**. Die Adjunkte bzw. reduzierte Adjunkte der Matrix **A** wird mit $\mathbf{F}(s)$ bzw. $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ symbolisiert.

Das charakteristische *Polynom* $\Delta(s)$ lautet

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{K}(s-s_i)^{M_i} \qquad \text{mit} \qquad n = M_1 + M_2 + ... + M_K \;\; .$$

Es besitzt i.A. K verschiedene Nullstellen s_i mit der Vielfachheit M_i. Das reduzierte charakteristische Polynom oder *Minimalpolynom* $\tilde{\Delta}(s)$ besitzt die Struktur

$$\tilde{\Delta}(s) := \prod_{i=1}^{K}(s-s_i)^{\mu_i} \qquad \text{mit} \quad m = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_K \;\; ,$$

mit

$$m \leq n \qquad \text{und} \quad \mu_i \leq M_i \qquad i = 1, 2, ..., K \quad .$$

Seine Nullstellen stimmen - abgesehen von ihrer Vielfachheit - mit jenen des charakteristischen Polynoms $\Delta(s)$ überein.

Die *Adjunkte* oder *adjungierte Matrix* $\mathbf{F}(s)$ ist ein "monisches" Matrix-Polynom in der komplexen Variablen s

$$\mathbf{F}(s) = s^{n-1}\mathbf{E} + s^{n-2}\mathbf{F}_{n-2} + s^{n-3}\mathbf{F}_{n-3} + ... + s^0\mathbf{F}_0 \quad .$$

Hierbei sind $\mathbf{F}_i$ konstante (n, n)-Matrizen, die zBsp mit Hilfe des Leverrier-Algorithmus rekursiv berechnet werden können. Man erkennt, dass die n^2 Elemente $\alpha_{ik}(s)$ der Matrix $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ gebrochen rationale Funktionen der komplexen Variablen s sind

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) =: \frac{1}{\Delta(s)}\left[\Gamma_{ik}(s)\right] =: \left[\alpha_{ik}(s)\right] \quad \text{mit} \quad i, k = 1, ..., n \quad . \tag{4.2}$$

Hierbei gilt für den Grad des Polynoms $\Gamma_{ik}(s)$

$$\deg\left\{\Gamma_{ik}(s)\right\} \leq n - 1 \quad .$$

Das Polynom $\Gamma_{ik}(s)$ in Relation (4.2) wird durch Bildung der sogenannten *algebraischen Komplemente* (auch Minoren genannt) der Matrix

$$s\mathbf{E} - \mathbf{A} =: [d_{ik}] \qquad \text{mit} \quad i, k = 1, ..., n$$

ermittelt. Hierzu bildet man die zu dem Element d_{ik} gehörige $(n-1)$-reihige Unterdeterminante. Diese ist die Determinante einer Matrix, die durch Streichen der i-ten Reihe und der k-ten Spalte von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ entsteht. Anschließend wird diese Unterdeterminante mit dem Faktor $(-1)^{i+k}$ multipliziert. Dadurch ergibt sich das zugehörige algebraische Komplement $D_{ik}(s)$. Es entsteht eine quadratische (n, n)-Matrix der Form

$$\mathbf{D} = [D_{ik}] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & ... & D_{2n} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & ... & D_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} .$$

Die eingeführten Größen $\Gamma_{ik}(s)$ ergeben sich durch *Transposition* obiger Anordnung

$$\mathbf{F} = [\Gamma_{ik}] := \mathbf{D}^T = [D_{ik}]^T = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & ... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{31} & ... & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & ... & D_{n3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} .$$

Das bedeutet:

$$\Gamma_{ik}(s) := D_{ki}(s) \quad \text{mit} \quad i, k = 1, , , , n \quad .$$

Wir betrachten die Elemente $\alpha_{ik}(s)$ der Matrix $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$, d.h. die Quotienten $\Gamma_{ik}(s)/\Delta(s)$. Natürlich kann es vorkommen, dass ein Polynom $\Gamma_{ik}(s)$ eine oder mehrere gemeinsame Nullstellen $s=s_\nu$ mit $\Delta(s)$ aufweist. Dann kommt es bei der Quotientenbildung zu einer *Kürzung* der gemeinsamen Faktoren. Interessant ist der Fall, wenn *alle* n^2 Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ *dieselben gemeinsamen* Nullstellen mit $\Delta(s)$ aufweisen! Angenommen, der größte gemeinsame Teiler (abgekürzt ggT) *aller* n^2 Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ und $\Delta(s)$ sei das monische Polynom $q(s)$. Dann gilt[1]

$$\Delta(s) =: q(s)\tilde{\Delta}(s)$$

und

$$\mathbf{F}(s) =: q(s)\tilde{\mathbf{F}}(s)\ .$$

Nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren in *allen* Elementen $\Gamma_{ik}(s)/\Delta(s)$ von $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ besitzt die Resolvente die reduzierte Form

$$(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}(s)}\tilde{\mathbf{F}}(s)$$

mit

$$\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = m \le n \quad \text{und} \quad \deg\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s)\right\} = m-1.$$

Man nennt $\tilde{\Delta}(s)$ das reduzierte charakteristische Polynom oder *Minimalpolynom*[2] der Matrix $\mathbf{A}$, während $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ als *reduzierte adjungierte Matrix* oder *reduzierte Adjunkte* bezeichnet wird.

Aus (4.1) folgen unmittelbar die Beziehungen

$$\Delta(s)\cdot(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{F}(s) \tag{4.3}$$

bzw.

$$\tilde{\Delta}(s)\cdot(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \tilde{\mathbf{F}}(s)\ . \tag{4.4}$$

Nach Multiplikation von *links* mit $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ ergeben sich aus (4.3) bzw. aus (4.4)

$$\Delta(s)\cdot\mathbf{E} = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{F}(s), \tag{4.5}$$

$$\tilde{\Delta}(s)\cdot\mathbf{E} = (s\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\tilde{\mathbf{F}}(s)\quad . \tag{4.6}$$

Werten wir (4.5) und (4.6) für $s=s_i$, d.h. für die Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$, aus, so erhalten wir - unter Beachtung von $\Delta(s_i)=\tilde{\Delta}(s_i)=0$ - die Gleichungen

$$(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{F}(s_i) = \mathbf{0}, \tag{4.7}$$

[1] Das bedeutet, dass $\Delta(s)$ durch $q(s)$ ohne Rest teilbar ist. Dies ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten:

$$\begin{aligned}\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) &=: \det[d_{ik}]\\ &= d_{i1}D_{i1}+d_{i2}D_{i2}+...+d_{in}D_{in} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}\\ &= d_{1k}D_{1k}+d_{2k}D_{2k}+...+d_{1n}D_{1n} \qquad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)}\quad .\end{aligned}$$

[2] Diese Definition ist äquivalent mit folgender Definition: Das Minimalpolynom $\psi(s)$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist das monische annullierende Polynom - d.h. das monische Polynom mit der Eigenschaft $\psi(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ - mit kleinstem Grad.

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(s_i) = \mathbf{0} \quad . \tag{4.8}$$

Da die Matrizen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und $\mathbf{F}(s)$ sowie $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s)$ vertauschbar sind, gelten die Beziehungen

$$\mathbf{F}(s_i) \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \tag{4.9}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad . \tag{4.10}$$

Daraus ist Folgendes ersichtlich:

- Genau dann, wenn der Grad des Minimalpolynoms kleiner als der des charakteristischen Polynoms ist, d.h. $\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} < \deg\{\Delta(s)\}$ gilt, ist die Adjunkte $\mathbf{F}(s)$ für zumindest einen Eigenwert s_i eine Nullmatrix[3]

$$\mathbf{F}(s_i) = \mathbf{0} \ .$$

- Führen wir die *Spaltenvektoren* $\mathbf{f}_k$ und $\tilde{\mathbf{f}}_k$ der Matrizen $\mathbf{F}(s_i)$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ein, so erhalten wir aus (4.7) bzw. aus (4.8)

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ ,$$

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1 & \tilde{\mathbf{f}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{f}}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ .$$

  Daraus folgt: *Jeder nichtverschwindende* Vektor $\mathbf{f}_k \neq \mathbf{0}$ bzw. $\tilde{\mathbf{f}}_k \neq \mathbf{0}$ ist Rechts-Eigenvektor zum Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$.

- Führen wir die *Zeilenvektoren* $\boldsymbol{\beta}_k^T$ und $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k^T$ der Matrizen $\mathbf{F}(s_i)$ und $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ein, so erhalten wir aus (4.9) bzw. aus (4.10)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \dots \\ \boldsymbol{\beta}_n^T \end{pmatrix} \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2^T \\ \dots \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_n^T \end{pmatrix} \cdot (s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad .$$

  Das bedeutet: *Jeder nichtverschwindende* Vektor $\boldsymbol{\beta}_k^T \neq \mathbf{0}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k^T \neq \mathbf{0}$ ist Links-Eigenvektor zum Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$.

[3] Die reduzierte Adjunkte $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)$ ist per se verschieden von Null: $\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \neq \mathbf{0}$.

Beispiel Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist ablesbar, da $\mathbf{A}$ eine Dreiecksform aufweist:

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)^3(s-1).$$

Daraus folgt für die Resolvente

$$\begin{aligned}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{F}(s) \\ &= \frac{1}{(s-2)^3(s-1)} \begin{pmatrix} (s-2)^2(s-1) & -(s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Anhand der Adjunkte

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} (s-2)^2(s-1) & -(s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^2(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2(s-1) & \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^3 \end{pmatrix}$$

ist ersichtlich, dass $(s-2)$ der größte gemeinsame Teiler der Polynome $\Gamma_{ik}(s)$ und $\Delta(s)$ ist. Damit besitzt das Minimalpolynom $\tilde{\Delta}(s)$ den Grad 3:

$$\deg\left\{\tilde{\Delta}(s)\right\} = 3 < 4 = \deg\{\Delta(s)\},$$

$$\tilde{\Delta}(s) = (s-2)^2(s-1) \quad .$$

Die reduzierte Adjunkte ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = \begin{pmatrix} (s-2)(s-1) & -(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für den dreifachen Eigenwert $s = 2$ die Eigenrichtungs-Matrix

$$\tilde{\mathbf{F}}(s=2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. es existieren ein einziger (linear unabhängiger) Rechts-Eigenvektor

$$\tilde{\mathbf{f}}_2^T := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \ \text{ beliebig reell})$$

und ein einziger (linear unabhängiger) Links-Eigenvektor

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^T := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (k \ \text{ beliebig reell}).$$

Für den Eigenwert $s = 1$ ergibt sich die Eigenrichtungs-Matrix

$$\tilde{\mathbf{F}}(s=1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

mit einem einzigen linear unabhängigen Rechts-Eigenvektor

$$\tilde{\mathbf{f}}_4^T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \ \text{ beliebig reell})$$

und mit einem einzigen linear unabhängigen Links-Eigenvektor

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_4^T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad (k \ \text{ beliebig reell}).$$

4.2 Analytischer Ausdruck der Eigenrichtungen von A

Zur Erinnerung: die Resolvente besitzt unter Benutzung des charakteristischen Polynoms $\Delta(s) = \prod_{\mu=1}^{n}(s - s_\mu)$ die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) \quad = \quad & \frac{\mathbf{E}}{s - s_1} + \frac{\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E}}{(s-s_2)(s-s_1)} + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} + ... \\ & + \frac{(\mathbf{A}{-}s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}{-}s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}{-}s_{n-1}\mathbf{E})}{\Delta(s)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - s_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{i-1} \frac{\mathbf{A}{-}s_\mu\mathbf{E}}{s - s_\mu}. \tag{4.11}$$

Mit Hilfe der üblichen Abkürzungen

$$\bar{\varphi}_i(s) = \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} \qquad \text{für } i = 1, 2, ..., n \ , \tag{4.12}$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = \prod_{k=1}^{i}(\mathbf{A}{-}s_k\mathbf{E}) = (\mathbf{A}{-}s_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_i \qquad (i = 1, 2, ..., n-1) \ ; \quad \text{mit } \mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \tag{4.13}$$

lautet die Adjunkte

$$\mathbf{F}(s) = \Delta(s) \cdot (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta(s)\bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \ .$$

Durch Einführen der Hilfsfunktionen

$$d_i(s) := \Delta(s)\bar{\varphi}_i(s) \tag{4.14}$$

und unter Heranziehen von (4.12) für $i = 1, 2, ..., n-1$

$$d_i(s) = \prod_{\mu=1}^{n}(s - s_\mu) \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} = \prod_{\mu=i+1}^{n} (s - s_\mu) \tag{4.15}$$

und

$$d_n(s) = 1 \tag{4.16}$$

erhalten wir für die Adjunkte die Darstellung

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^{n} d_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \ . \tag{4.17}$$

Daraus ergibt sich für die Matrix $\mathbf{F}(s_k)$ der Eigenrichtungen zum Eigenwert s_k die *explizite* Darstellung

$$\mathbf{F}(s_k) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^{n-1} (\mathbf{A} - s_\mu \mathbf{E}) \ . \tag{4.18}$$

Beispiel (LZI-System 3. Ordnung)

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ sei eine $(3,3)$-Matrix mit den Eigenwerten s_1, s_2 und s_3. Die konstanten $(3,3)$-Matrizen $\mathbf{P}_i$ betragen:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \ .$$

Die Funktionen $\bar{\varphi}_i(s)$ ergeben sich zu

$$\bar{\varphi}_1(s) = \frac{1}{s - s_1}, \quad \bar{\varphi}_2(s) = \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)} \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_3(s) = \frac{1}{(s - s_3)(s - s_2)(s - s_1)} \ .$$

Damit lautet die Resolvente

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \ ,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) \ &= \ \frac{1}{s - s_1} \cdot \mathbf{E} \ + \ \frac{1}{(s - s_2)(s - s_1)} \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &\quad + \frac{1}{(s - s_3)(s - s_2)(s - s_1)} \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Die zugehörige Adjunkte ergibt sich unmittelbar zu

$$\mathbf{F}(s) = (s - s_3)(s - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \; + (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \; . \tag{4.20}$$

Zur Ermittlung von Links- bzw. Rechtseigenvektoren bilden wir

$$\mathbf{F}(s = s_1) \;\; \text{bzw.} \;\; \mathbf{F}(s = s_2) \;\; \text{bzw.} \;\; \mathbf{F}(s = s_3).$$

Es genügt einen Ausdruck $\mathbf{F}(s = s_k)$, zBsp. $\mathbf{F}(s = s_3)$, zu ermitteln. Aufgrund der beliebigen Indizierung der Eigenwerte erhalten wir daraus die restlichen Ausdrücke. Es ergeben sich - natürlich in Übereinstimmung mit (4.18) - nach einer einfachen Umrechnung

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s_3) &= (s_3 - s_3)(s_3 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_3 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \; + \; (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\
&= (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \; .
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Eigenrichtungen zum Eigenwert s_2 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s_2) &= (s_2 - s_3)(s_2 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_2 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) + (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\
&= (\mathbf{A} - s_3\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})
\end{aligned}$$

und die zum Eigenwert s_1 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s_1) &= (s_1 - s_3)(s_1 - s_2) \cdot \mathbf{E} + (s_1 - s_3) \cdot (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \; + \; (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\
&= (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_3\mathbf{E}).
\end{aligned}$$

Beispiel

Die Systemmatrix sei in Dreieckstruktur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Deren charakteristisches Polynom ist damit ablesbar und lautet:

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s - 2)^2(s - 3).$$

Die (willkürliche) Indizierung der Eigenwerte sei: $s_1 = s_2 = 2$ und $s_3 = 3$. Die $(3,3)$-Matrizen $\mathbf{P}_i$ lauten:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \;\; ,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A} - s_1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{P}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich für die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$:

$$\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s) = \frac{1}{s-2} \cdot \mathbf{E} \; + \; \frac{1}{(s-2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \; \frac{1}{(s-2)^2\,(s-3)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit lautet die Adjunkte

$$\mathbf{F}(s) = (s-3)(s-2) \cdot \mathbf{E} + (s-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; + \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. nach durchgeführter Zusammenfassung:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} (s-3)(s-2) & (s-3) & 1 \\ 0 & (s-3)(s-2) & (s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenrichtungsmatrizen lauten:

- für den Eigenwert $s_3 = 3$

$$\mathbf{F}(s=3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- für den zweifachen Eigenwert $s_1 = s_2 = 2$

$$\mathbf{F}(s=2) \; = \; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix besitzt zwei linear unabhängige Eigenrichtungen.

Kapitel 5

Änderung der Struktur der Übertragungsfunktion

Wir betrachten ein n-dimensionales LZI-System mit der Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \; .$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)\mathbf{b}$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion einen kleineren Grad als die Systemordnung n besitzt. Solch ein Effekt hat einen Verlust der Steuerbarkeit und/oder der Beobachtbarkeit zur Folge! Die Übertragungsfunktion lautet unter Benutzung der kanonischen Darstellung für die Resolvente $\mathcal{R}(\mathbf{A},\, s)$

$$G(s) = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i \;\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_i \;\mathbf{b} \; .$$

Unter Verwendung von (4.13) für $\mathbf{P}_i$ und (4.12) für $\bar{\varphi}_i(s)$ erhalten wir

$$G(s) = \frac{1}{s - s_1}\mathbf{c}^T\mathbf{b} + \sum_{i=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} \cdot \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{c}^T(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) \;\mathbf{b} \quad . \tag{5.1}$$

Wir betrachten hierzu das n-te Element obiger Summe in (5.1)

$$\prod_{\mu=1}^{n} \frac{1}{s - s_\mu} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{c}^T(\mathbf{A} - s_k\mathbf{E})\mathbf{b}$$

und führen die Abkürzung δ für diese Größe

$$\delta := \mathbf{c}^T \left[\prod_{k=1}^{n-1} (\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}) \right] \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{F}(s_n) \cdot \mathbf{b}$$

ein. Wir stellen uns die Frage, wann δ gleich Null wird: Man erkennt aufgrund des Cayley-Theorems

$$\prod_{k=1}^{n}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E}) = \mathbf{0} = \prod_{k=1}^{n-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) = \mathbf{F}(s_n) \cdot (\mathbf{A}-s_n\mathbf{E}) \ ,$$

dass der Vektor

$$\mathbf{l}^T := \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{F}(s_n)$$

Links-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert s_n ist, während der Vektor

$$\mathbf{r} := \mathbf{F}(s_n) \cdot \mathbf{b}$$

Rechts-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert s_n ist! Das bedeutet, dass falls ein Links-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ senkrecht auf $\mathbf{b}$ steht

$$\mathbf{l}^T\mathbf{b} = 0,$$

d.h. das System nicht steuerbar ist und/oder ein Rechts-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ senkrecht auf $\mathbf{c}$ steht

$$\mathbf{c}^T\mathbf{r} = 0,$$

d.h. das System nicht beobachtbar ist, zwangsläufig eine Reduktion des Grades der Übertragungsfunktion erfolgt.

Man erkennt, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ kleiner ist als die Systemordnung n, wenn

- $\mathbf{c}^T$ ein Links-Eigenvektor von $\mathbf{A}$ und/oder
- $\mathbf{b}$ ein Rechts-Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist und/oder
- das Produkt $\prod_{k=1}^{i-1}(\mathbf{A}-s_k\mathbf{E})$ verschwindet[1].

Damit ist das System entweder *nicht* steuerbar und/oder *nicht* beobachtbar.

[1] Das bedeutet, dass das Minimalpolynom der (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ den Grad m mit $m < n$ hat.

Kapitel 6

Literatur

- **Otto FÖLLINGER**: *Laplace-, Fourier-, und z-Transformation.* 2007, Hüthig Verlag
- **Herbert FREEMAN**: *Discrete-Time Systems (An Introduction to the Theory).* 1965, J. Wiley
- **Felix R. GANTMACHER**: *Matrizentheorie.* 1986, Springer Verlag
- **Konrad KNOPP**: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* 1947, Springer Verlag