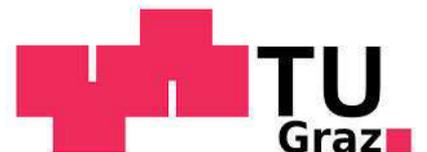


Systemtechnik



Institut für Regelungs- und
Automatisierungstechnik



(c) Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

Hinweis: Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht!* Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 11. 9. 2018

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen und Begriffe	7
1 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme	9
1.1 Einführung	9
1.2 Grundlegende Begriffe	9
1.3 Linearität	14
1.3.1 Linearisierung nichtlinearer Eingrößensysteme	17
1.4 Zeitdiskrete Systeme	21
1.5 Beispiele für dynamische Systeme	22
1.5.1 Zeitkontinuierliche Systeme	22
1.5.2 Zeitdiskrete Systeme	29
II Zeitkontinuierliche Systeme	31
2 Lineare Systeme im Zustandsraum	33
2.1 Einführung	33
2.2 Lösung der Systemgleichungen	33
2.2.1 Freie Lösung	34
2.2.2 Erzwungene Lösung	35
2.2.3 Übertragungsfunktion	36
2.3 Transitionsmatrix	36
2.4 Ruhelagen	39
2.5 Asymptotische Stabilität	41
3 Zustandstransformationen	45
3.1 Einführung	45
3.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion	46
3.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft	47
3.2 Transformation auf Diagonalform	47
3.2.1 Transformationsvorschrift	48
3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix	52
3.2.3 Komplexe Eigenwerte	53
3.2.4 Mehrfache Eigenwerte	57
3.3 Transformation auf Jordan-Form	58

3.3.1	Einführendes Beispiel	58
3.3.2	Allgemeiner Fall	65
3.3.3	Berechnung der Transitionsmatrix	68
3.3.4	Komplexe Eigenwerte	70
4	Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit	73
4.1	Einführung	73
4.2	Steuerbarkeit	73
4.2.1	Kriterium nach Kalman	74
4.2.2	Kriterium nach Hautus	76
4.3	Beobachtbarkeit	77
4.3.1	Kriterium nach Kalman	78
4.3.2	Kriterium nach Hautus	79
5	Phasenportrait für Systeme zweiter Ordnung	81
5.1	Einführung	81
5.2	A ist diagonalähnlich	81
5.2.1	Einfache Eigenwerte	81
5.2.2	Mehrfache Eigenwerte	83
5.3	A ist nicht diagonalähnlich	85
6	Lineare Übertragungssysteme	87
6.1	Einführung	87
6.2	Bedeutung von $G(s)$ im Zeitbereich	88
6.3	Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell	89
6.3.1	Erste Normalform	89
6.3.2	Zweite Normalform	92
6.3.3	Minimalrealisierung	96
6.4	Berechnung von $G(s)$ aus Differentialgleichungen höherer Ordnung	97
6.4.1	Umkehrung	97
6.5	Pole und Nullstellen	98
6.5.1	PN-Plan	100
6.6	BIBO-Stabilität	101
6.7	Das Routh-Schema	103
6.8	Frequenzgang	106
6.9	Zusammenschaltung von Übertragungssystemen	108
6.9.1	Reihenschaltung	108
6.9.2	Parallelschaltung	110
6.9.3	Rückkopplung	110
6.9.4	Allgemeine Strukturen	112
6.10	Wichtige Übertragungsglieder	114
6.10.1	Proportionalglied	114
6.10.2	Verzögerungsglied erster Ordnung	115
6.10.3	Verzögerungsglied zweiter Ordnung	116

6.10.4	Integrator	116
6.10.5	Differenzierer	116
6.10.6	Vorhaltglied	117
III	Zeitdiskrete Systeme	119
7	Zustandsraummethoden	121
7.1	Einführung	121
7.2	Lösung der Systemgleichungen	121
7.2.1	Freie Lösung	122
7.2.2	Erzwungene Lösung	123
7.2.3	Übertragungsfunktion	124
7.3	Ruhelagen	124
7.4	Asymptotische Stabilität	125
7.5	Zustandstransformationen	126
7.5.1	Transformation auf Diagonalform	126
7.5.2	Transformation auf Jordanform	127
7.6	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	129
7.6.1	Einführung	129
7.6.2	Steuerbarkeit	129
7.6.3	Beobachtbarkeit	130
8	Übertragungssysteme	131
8.1	Einführung	131
8.2	Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich	132
8.3	Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell	133
8.4	Berechnung von $G(z)$ aus Differenzgleichungen höherer Ordnung	134
8.4.1	Umkehrung	135
8.5	Pole und Nullstellen	135
8.6	BIBO-Stabilität	136
8.7	Abbauverfahren	138
8.8	Diskreter Frequenzgang	141
9	Diskretisierung zeitkontinuierlicher Systeme	143
9.1	Einführung	143
9.2	Der digitale Regelkreis	144
9.2.1	Halteglied und Abtaster	144
9.2.2	Diskrete Betrachtung des Regelkreises	145
9.3	Diskretisierung der Regelstrecke	146
9.3.1	Diskretes Zustandsmodell	146
9.3.2	z -Übertragungsfunktion	151
10	Englische Fachbegriffe	155

A	Laplace-Transformation	159
A.1	Linearität	159
A.2	Dämpfungsregel	160
A.3	Verschiebungssatz	160
A.4	Faltungsregel	160
A.5	Differentiation im Zeitbereich	161
A.6	Differentiation im Bildbereich	161
A.7	Integration im Zeitbereich	161
A.8	Anfangswertsatz	161
A.9	Endwertsatz	162
A.10	Korrespondenztabelle für reelle Funktionen	163
B	z-Transformation	165
B.1	Linearität	165
B.2	Dämpfungsregel	166
B.3	Verschiebung nach rechts	166
B.4	Verschiebung nach links	166
B.5	Faltungsregel	166
B.6	Differentiation im Bildbereich	167
B.7	Anfangswertsatz	167
B.8	EndwertsatzA.9	167
B.9	Korrespondenztabelle	168

Teil I

Grundlagen und Begriffe

Kapitel 1

Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

1.1 Einführung

Die Vorlesung „Systemtechnik“ verfolgt das Ziel, Studierenden der Studienrichtung „Elektrotechnik“ die systemtheoretischen Grundlagen der Regelungstechnik zu vermitteln. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Systembegriff, der in zahlreichen Fachdisziplinen von elementarer Bedeutung ist. Ganz allgemein versteht man unter einem System die Verbindung von interagierenden Komponenten zu einer zweckgebundenen Einheit. Im Bereich der Elektrotechnik kann dies beispielweise eine aus elektronischen Bauteilen bestehende elektrische Schaltung sein. Ein Beispiel aus der Medizin ist das kardiovaskuläre System, das aus Herz und Blutgefäßen besteht und für die Aufrechterhaltung des Blutkreislaufs verantwortlich ist.

Mit Hilfe geeigneter mathematischer Modelle kann das Verhalten von Systemen nachgebildet werden. Solche Modelle können z.B. bei technischen Systemen durch Anwendung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, wie etwa den Newtonschen Axiomen hergeleitet oder aus experimentell gewonnenen Daten abgeleitet werden. Die resultierende mathematische Beschreibung ermöglicht die Analyse und Simulation der betrachteten Systeme und bildet die Grundlage für zahlreiche Methoden der System- und Regelungstheorie.

1.2 Grundlegende Begriffe

Die Wechselwirkung eines Systems mit seiner Umgebung erfolgt mittels seiner so genannten **Eingangs- und Ausgangsgrößen**, siehe hierzu Bild 1.1. Die Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p wirken von der Umgebung auf das System ein und beeinflussen somit dessen Verhalten. Je nachdem, ob diese Beeinflussung gewollt oder ungewollt ist, spricht man von **Stell- oder Störgrößen**. Die Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_q wirken vom System auf die Umgebung ein und beeinflussen so diese. In vielen Fällen besitzen Systeme *eine* Eingangsgröße u und *eine* Aus-

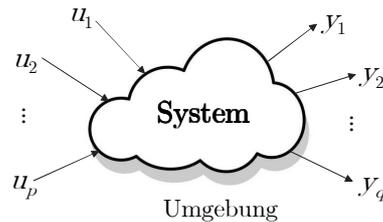


Bild 1.1: Interaktion zwischen einem System und seiner Umgebung

gangsgröße y , man nennt sie **Eingrößensysteme**¹.

Im vorliegenden Skriptum wird das zeitliche Verhalten von Systemen untersucht. Das bedeutet, dass die Eingangs- und Ausgangsgrößen Funktionen des Zeitparameters t sind.

Man nennt ein System **kausal**, wenn die Werte der Ausgangsgrößen zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 unabhängig von den zukünftigen Verläufen der Eingangsgrößen sind. Das bedeutet, dass die Werte $y_1(t_1), \dots, y_q(t_1)$ ausschließlich von den Verläufen $u_1(t), \dots, u_p(t)$ für $t \leq t_1$ abhängen. Bei realen technischen Systemen trifft dies zu, d.h. sie sind kausal.

Systeme, bei denen die Werte $y_1(t_1), \dots, y_q(t_1)$ ausschließlich von $u_1(t_1), \dots, u_p(t_1)$, also von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, werden **statische Systeme** genannt.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$y(t) = K u(t)$$

eines System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Der Parameter K sei eine (reelle) Konstante. Offensichtlich handelt es sich hier um ein statisches System. ■

Im Gegensatz dazu sind kausale **dynamische Systeme** dadurch charakterisiert, dass die Werte der Ausgangsgrößen zum Zeitpunkt t_1 nicht nur von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, sondern auch von deren Verläufen in der Vergangenheit, also für $t < t_1$.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

eines zeitkontinuierlichen Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Zur Ermittlung des Wertes der Ausgangsgröße zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 ist die Kenntnis des

¹In Anlehnung an die englische Bezeichnung „single input - single output system“ spricht man auch von **SISO-Systemen**.

Wertes der Ausgangsgröße zu einem Anfangszeitpunkt t_0 sowie der Verlauf der Eingangsgröße im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ erforderlich, was unmittelbar aus

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

ersichtlich ist. Der Anfangswert $y(t_0)$ repräsentiert gewissermaßen die gesamte „Vorgeschichte“ des Systems für $t < t_0$. ■

So genannte **Zustandsmodelle** spielen in der System- und Regelungstechnik eine besondere Rolle. Sie stellen eine einheitliche, von der Natur des Systems unabhängige, mathematische Beschreibung dar und bilden die Grundlage vieler regelungstechnischer Methoden. Für das Verständnis dieser Beschreibungsform ist der Begriff der so genannten **Zustandsgrößen** essentiell.

Wenn es möglich ist, für ein dynamisches System die Zeitfunktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ so anzugeben, dass die Werte der Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_q(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 aus den Verläufen der Eingangsgrößen $u_1(t), \dots, u_p(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ und den (konstanten) Werten $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ berechnet werden können, so bezeichnet man x_1, \dots, x_n als Zustandsgrößen des Systems.

Die natürliche Zahl n , d.h. die Anzahl der Zustandsgrößen wird auch **Systemordnung** genannt. Man beachte, dass die Wahl der Zustandsgrößen für ein gegebenes System *nicht* eindeutig ist. Vielmehr gibt es für ein und dasselbe System *unendlich viele* Möglichkeiten, die benötigten n Zustandsgrößen zu wählen. Diese Freiheiten bei der Festlegung der Zustandsgrößen werden bei zahlreichen Verfahren der System- und Regelungstechnik vorteilhaft ausgenützt.

B Wählt man im vorangegangenen Beispiel exemplarisch

$$x := 3y$$

so gilt für die Systembeschreibung

$$\frac{dx}{dt} = 3u, \quad y = \frac{1}{3}x.$$

Der Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ kann somit über die Beziehung

$$y(t) = \frac{1}{3}x(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

ermittelt werden. Offensichtlich kann $y(t)$ aus dem Verlauf von $u(\tau)$ im Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und dem Wert $x(t_0)$ eindeutig berechnet werden, d.h. x ist eine Zustandsgröße des Systems. Auf analoge Weise kann gezeigt werden, dass sich im vorliegenden Beispiel jede beliebige Wahl $x = \alpha y$ mit $\alpha \neq 0$ als Zustandsgröße qualifiziert. ■

In weiterer Folge wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Systeme eine *endliche* Ordnung n besitzen und durch gewöhnliche **Differentialgleichungen** der Form

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

sowie q algebraische Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \quad (1.2)$$

beschrieben werden können. Man sagt, dass durch (1.1) und (1.2) ein **Zustandsmodell** des betrachteten Systems gegeben ist. Der Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt t_0 , d.h. die „Vorgeschichte“ des Systems, wird durch die Anfangswerte $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ repräsentiert.

Fasst man die Zustands-, Eingangs- und Ausgangsgrößen zu Vektoren

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

zusammen, sowie die (skalarwertigen) Funktionen f_1, \dots, f_n bzw. g_1, \dots, g_q zu den Vektoren

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix},$$

so erhält man die Systembeschreibung (1.1) und (1.2) in kompakter Matrixschreibweise

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

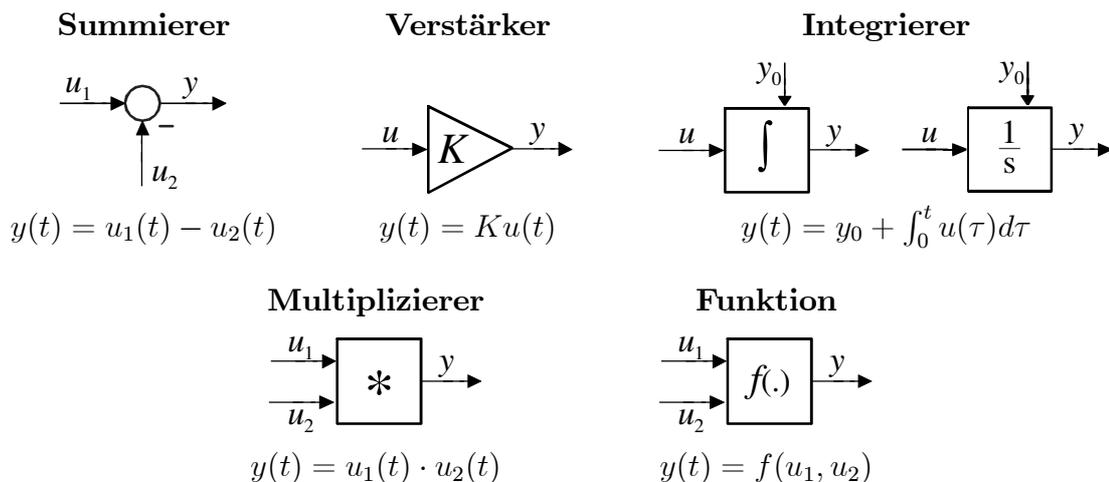
wobei für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

gilt.

Man beachte, dass die rechte Seite der Differentialgleichung (1.3) sowie die Ausgangsgleichung (1.4) nicht explizit vom Zeitparameter t abhängen. Solche Systeme nennt man **zeitinvariant**. Die Dynamik des Systems, d.h. seine Reaktion auf Eingangsgrößen und Anfangszustände ist somit *unabhängig* vom Zeitpunkt der Durchführung eines Experimentes. Das bedeutet, dass bei gleichzeitiger zeitlicher Verschiebung der Verläufe der Eingangsgrößen sowie des Anfangszustands auch die Ausgangsgröße die gleiche zeitliche Verschiebung erfährt. Der Anfangszeitpunkt kann somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu $t_0 = 0$ gesetzt werden. Hängt die rechte Seite der Differentialgleichungen und/oder die Ausgangsgleichung in (1.3) hingegen explizit vom Zeitparameter t ab, so spricht man von einem **zeitvarianten** bzw. **zeitvariablen System**.

Häufig werden so genannte **Strukturbilder** zur Visualisierung von mathematischen Modellen eingesetzt. Dabei werden mathematische Operationen, wie z.B. Integration, Multiplikation und Addition durch entsprechende Blöcke dargestellt, die gemäß der Modellbeschreibung kombiniert werden. Da auch Simulationswerkzeuge, wie z.B. Simulink² auf einer solchen „block-orientierten“ Eingabe basieren, stellen Strukturbilder oft die Grundlage für eine numerische Simulation des Systemverhaltens dar. Exemplarisch werden an dieser Stelle einige häufig verwendete Funktionsblöcke angegeben:



Aus (1.3) folgt, dass der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ prinzipiell durch Integration der rechten Seite der Differentialgleichung (1.3) ermittelt werden kann, d.h.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau. \quad (1.6)$$

Hierbei ist die Integration elementweise auf $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$ anzuwenden. Aus (1.6) kann auch der wichtige Schluss gezogen werden, dass die Zustandsvariablen³ *stetige* Funktionen der Zeit sind. In Bild 1.2 ist das zu (1.3) gehörige Strukturbild dargestellt, wobei vektorielle Größen üblicherweise durch fett gezeichnete Verbindungslinien dargestellt werden.

²www.mathworks.de

³hierbei werden (praktisch nicht realisierbare) Eingangsgrößen, die so genannte Dirac-Impulse enthalten, explizit ausgeschlossen.

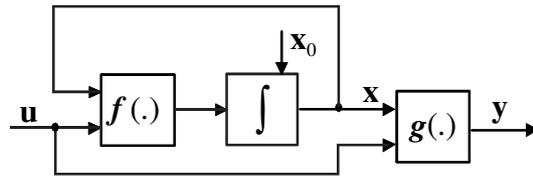


Bild 1.2: Strukturbild zu System (1.3), (1.4)

Die Lösungen $\mathbf{x}(t)$ der Systemgleichungen (1.3) hängen offensichtlich vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 und vom Verlauf der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(\tau)$ im Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ ab. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden durch

$$\mathbf{x}(t) = \Gamma \left(\begin{matrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \end{matrix} \right) \quad \text{oder kurz} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left(\begin{matrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} \end{matrix} \right) \quad (1.7)$$

symbolisiert. Systeme, deren rechte Seite ausschließlich vom Zustandsvektor \mathbf{x} abhängt, werden **autonom** genannt. Nach einer anfänglichen Anregung durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 verläuft die „Bewegung“ eines autonomen Systems ohne weitere Beeinflussung von außen. Das System ist „sich selbst überlassen“. Die Beschreibung von autonomen Systemen ergibt sich unter der Annahme von $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ aus (1.3) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left(\begin{matrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right) \quad (1.8)$$

Die Zustandsvariablen können als Koordinaten eines n -dimensionalen Koordinatensystems, dem so genannten **Zustandsraum** interpretiert werden. Im Falle $n = 2$ spricht man von der **Zustandsebene**. Die Kurve, die eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ im Zustandsraum beschreibt, wenn der Zeitparameter t variiert, wird **Bahnkurve** oder **Trajektorie** genannt. Der Richtungssinn von Trajektorien für wachsende Zeiten t wird bei der graphischen Darstellung durch Pfeile gekennzeichnet. In Bild 1.3 ist exemplarisch eine Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum dargestellt, der Anfangszustand ist durch \mathbf{x}_0 gekennzeichnet.

1.3 Linearität

Ein System (1.3) heißt **linear**, wenn es bezüglich seiner Anfangszustände \mathbf{x}_0 und seiner Eingangsgrößen \mathbf{u} dem **Superpositionsprinzip** genügt. Das bedeutet, dass die zu beliebigen Anfangszuständen und Eingangsgrößen gehörigen Lösungen (1.7) für beliebige Konstanten α

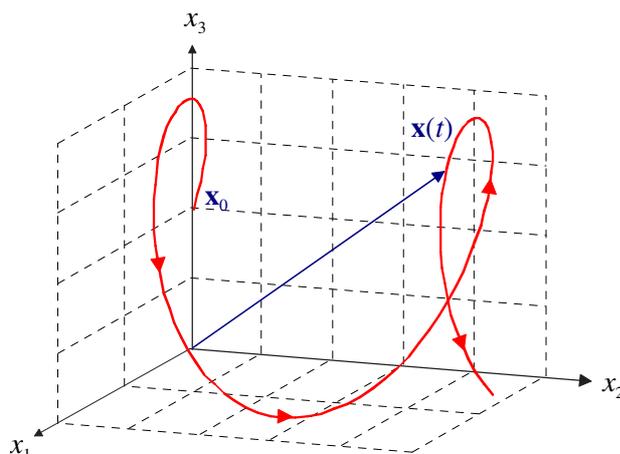


Bild 1.3: Trajektorie im dreidimensionalen Zustandsraum

und β den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \\
 \text{(ii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{x}_{0,1} + \beta \mathbf{x}_{0,2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \text{(iii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Außerdem muss gegebenenfalls die Ausgangsgleichung $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ entsprechende Eigenschaften besitzen. In Analogie zu (1.9) wird die Abhängigkeit der Ausgangsgrößen \mathbf{y} von \mathbf{x} und \mathbf{u} durch

$$\mathbf{y} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

symbolisiert. Es muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \\
 \text{(v)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \beta \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \text{(vi)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \alpha \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} + \beta \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ein System, das den Bedingungen (1.9) und / oder (1.11) *nicht* genügt, nennt man **nichtlinear**.

B Gegeben sei das autonome System

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) =: x_0.$$

Es soll untersucht werden, ob das System linear ist. Da auf das System keine Eingangsgröße wirkt, muss lediglich Bedingung (1.9,ii) überprüft werden. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x(t) = e^{-t} x_0.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Linearitätsbedingung erfüllt ist. ■

B Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - u, & x(0) &=: x_0 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung erfüllt die Bedingung (1.11) nicht, das System ist somit nichtlinear. ■

Eine große Klasse von Systemmodellen, die den Bedingungen (1.9) und (1.11) genügen, besitzt die Form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei **A**, **B**, **C** und **D** konstante Matrizen passender Dimensionen sind. Systeme der Form (1.12) repräsentieren eine wichtige Klasse von **linearen, zeitinvarianten Systemen**, die oft auch **LZI-Systeme** genannt werden. Für ein System der Ordnung n ist die **System- oder Dynamikmatrix A** eine $n \times n$ Matrix⁴, die **Eingangsmatrix B** ist eine $n \times p$ Matrix, wobei p die Zahl der Eingangsgrößen ist. Unter der Annahme von q Ausgangsgrößen ist die **Ausgangsmatrix C** eine $q \times n$ Matrix und die **Durchgriffsmatrix D** hat die Dimension $q \times p$. Im Falle eines Eingrößensystems, d.h. für $p = q = 1$ lautet die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Der **Eingangsvektor b** ist ein n -dimensionaler Spaltenvektor, der **Ausgangsvektor c^T** ein n -dimensionaler Zeilenvektor und der **Durchgriff d** eine skalare Größe. Das zu (1.13) gehörige Strukturbild ist in Bild 1.4 dargestellt.

Die Gründe, warum diese Systemklasse in der System- und Regelungstechnik eine herausragende Rolle spielt, sind vielfältig:

⁴oft wird auch die Schreibweise (n, n) -Matrix verwendet

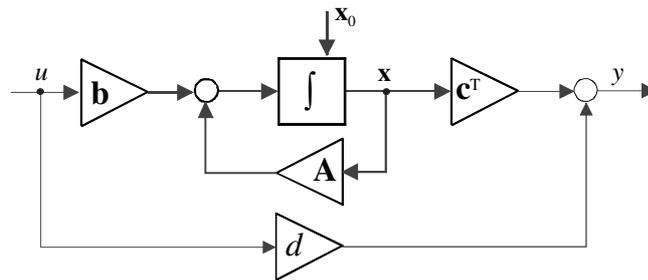


Bild 1.4: Strukturbild eines zeitkontinuierlichen Zustandsmodells der Form (1.13)

- die Systeme sind aus mathematischer Sicht „gutmütig“, d.h. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sind gesichert
- viele reale Systeme können hinreichend genau durch Systeme dieser Form beschrieben werden
- es existieren viele bewährte Verfahren, die für diese Systemklasse maßgeschneidert sind

Aus den oben genannten Gründen wird die Klasse der linearen, zeitinvarianten Systeme auch im Mittelpunkt aller weiteren Ausführungen in diesem Skriptum stehen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, können nichtlineare Systeme durch lineare Systeme approximiert werden, was in weiterer Folge die Anwendung von „linearen“ Methoden erlaubt.

1.3.1 Linearisierung nichtlinearer Eingrößensysteme

In vielen Fällen führt die mathematische Modellierung von Systemen auf nichtlineare Modelle der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (1.14)$$

$$y = g(\mathbf{x}, u). \quad (1.15)$$

Eine naheliegende Idee besteht darin, das Verhalten des nichtlinearen Systems durch ein lineares System zu approximieren. Eine solche Approximation wird im Allgemeinen nicht global, d.h. im gesamten Zustandsraum gültig sein. Eine in der Praxis bewährte Methode ist die so genannte **Linearisierung um einen Arbeitspunkt**. Ein Arbeitspunkt des nichtlinearen Systems ist hier dadurch charakterisiert, dass alle Systemgrößen, also Eingangsgröße, Zustandsgrößen und damit auch die Ausgangsgröße konstante Werte annehmen, d.h.

$$u(t) = u_R = \text{konst.}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_R = \text{konst.}$$

Das System befindet sich also in einem „Gleichgewichtszustand“, der auch **Ruhelage** genannt wird. Die konstanten Systemgrößen müssen die aus (1.14) resultierenden Bedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) \quad (1.16)$$

erfüllen, für die zugehörige Ausgangsgröße gilt dann

$$y_R = g(\mathbf{x}_R, u_R). \tag{1.17}$$

Da das Systemverhalten „in der Nähe“ des Arbeitspunktes beschrieben werden soll, ist es zweckmäßig, mit Abweichungen aus der betrachteten Ruhelage zu operieren. Aus diesem Grund setzt man

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \quad u = u_R + \Delta u, \tag{1.18}$$

wobei $\Delta\mathbf{x}$, Δu Auslenkungen aus der Ruhelage repäsentieren. Damit lautet die Systembeschreibung (1.14) nun

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u).$$

Mit dem Ziel der Linearisierung um den Arbeitspunkt wird die nichtlineare Funktion \mathbf{f} in eine Taylor-Reihe⁵ entwickelt, d.h.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{T.h.O.}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung (T.h.O.) und unter Berücksichtigung von (1.16) erhält man somit das vereinfachte System

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \tag{1.19}$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

wobei die $n \times n$ Matrix $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)$ die so genannte Jacobi⁶-Matrix ist. Für die Ausgangsgröße y folgt auf analoge Weise nach einer Taylor-Reihenentwicklung, also

$$y = g(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u) = g(\mathbf{x}_R, u_R) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{T.h.O.},$$

nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und unter Berücksichtigung von (1.17)

$$\Delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \tag{1.21}$$

⁵benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685 - 1731)

⁶benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851)

Man erkennt, dass es sich bei (1.19), (1.21) um ein lineares, zeitinvariantes System der Form (1.13) handelt, wobei

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}, \quad \mathbf{b} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}, \quad \mathbf{c}^T = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \quad \text{und} \quad d = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}$$

gilt. Dieses System approximiert das Verhalten des nichtlinearen Systems (1.14) in einer Umgebung der betrachteten Ruhelage.

B Es wird wieder das in Bild (1.8) dargestellte Pendel untersucht. Wie bereits gezeigt, lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Die Ruhelagen des (autonomen) Systems sind durch

$$x_{2,R} = 0 \quad \text{und} \quad \sin x_{1,R} = 0$$

charakterisiert. Für

$$x_{1,R} = \pm 2i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

befindet sich das Pendel in der „hängenden“ Ruhelage, während

$$x_{1,R} = \pm(2i + 1)\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

die „aufrechte“ Ruhelage beschreibt. Für die Linearisierung um diese Arbeitspunkte berechnet man die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix},$$

d.h. das linearisierte mathematische Modell lautet

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}}{dt} = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_R} \Delta \mathbf{x}.$$

Daraus folgen unmittelbar die linearisierten Systembeschreibungen

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \quad \text{„hängende“ Position} \qquad \frac{d\Delta \mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \quad \text{„aufrechte“ Position}$$

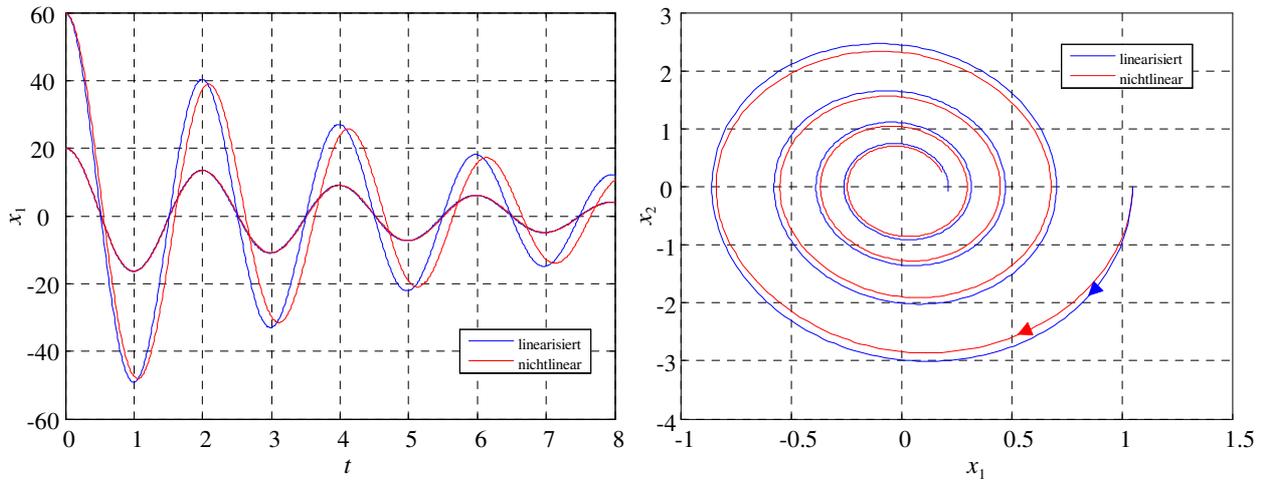


Bild 1.5: Gegenüberstellung des linearisierten Pendelmodells und des nichtlinearen Modells (rot). linkes Bild: Pendelwinkel über Zeit, rechtes Bild: Verlauf der Trajektorien

In Bild 1.5 sind die Verläufe des Pendelwinkels von nichtlinearem und linearisiertem Modell dargestellt. Als Anfangsauslenkungen wurde $x_{1,0} = 0.35$ rad ($=20^\circ$) bzw. $x_{1,0} = 1.05$ rad ($=60^\circ$) gewählt, das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Stillstand, d.h. $x_{2,0} = 0$ rad s^{-1} . ■

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -(x-2)^2 + 9u^2, \quad y = x^2 + u$$

eines Systems mit der Eingangsgröße u , der Ausgangsgröße y und der Zustandsgröße x . Ruhelagen müssen die Bedingung $(x_R - 2)^2 = 9u_R^2$ erfüllen. Für einen vorgegebenen Wert $u_R = 1$ ergeben sich somit die beiden Ruhelagen

$$x_{R,1} = 5 \quad \text{und} \quad x_{R,2} = -1.$$

Die zugehörigen Ausgangsgrößen nehmen die Werte $y_{R,1} = 26$ bzw. $y_{R,2} = 2$ an. Mit $f(x, u) = -(x-2)^2 + 9u^2$ und $g(x, u) = x^2 + u$ folgt unmittelbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 18u, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 1.$$

Für die (willkürlich gewählte) erste Ruhelage folgt somit die linearisierte Systembeschreibung

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -6\Delta x + 18\Delta u, \quad \Delta y = 10\Delta x + \Delta u.$$

1.4 Zeitdiskrete Systeme

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass die zeitlich veränderlichen Systemgrößen Funktionen des kontinuierlichen Zeitparameters $t \in \mathbb{R}$ sind. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **zeitkontinuierlichen Systemen**. Im Gegensatz dazu wird bei einem **zeitdiskreten System** die Zeitabhängigkeit von Systemgrößen durch einen ganzzahligen Index $k \in \mathbb{Z}$ charakterisiert. Die zeitlichen Verläufe der zeitabhängigen Systemgrößen werden durch Zahlenfolgen beschrieben. Der Wert der Systemgrößen wird also zu diskreten Zeitpunkten betrachtet. In vielen Fällen handelt es sich um äquidistante Zeitpunkte, d.h. der Abstand zweier aufeinanderfolgender Zeitpunkte ist konstant. Das zeitliche Verhalten von zeitdiskreten System kann mit Hilfe von **Differenzgleichungen** beschrieben werden. Begriffe, Linearität und Zeitinvarianz können vom zeitkontinuierlichen Fall geradlinig auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden. In weiterer Folge werden die Betrachtungen auf lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme, die durch Systeme von Differenzgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k \end{aligned} \quad (1.22)$$

beschrieben werden können, beschränkt. Dabei ist (u_k) die Eingangsfolge, (y_k) ist die zugehörige Ausgangsfolge und (\mathbf{x}_k) ist die (vektorielle) Zustandsfolge. Das Modell (1.22) besteht aus n linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie *einer* algebraischen Ausgangsgleichung. Weiters wird vorausgesetzt, dass durch den Index k Zeitpunkte beschrieben werden, die ganzzahligen Vielfachen einer konstanten **Diskretisierungszeit** T_d entsprechen. Die „Vorgeschichte“ des Systems wird durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 repräsentiert. Das zu (1.22) gehörige Strukturbild ist in Bild 1.6 dargestellt, wobei, in Anlehnung an

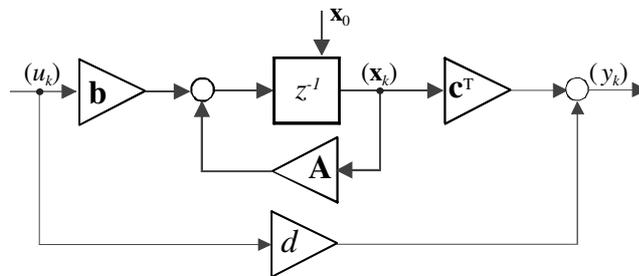
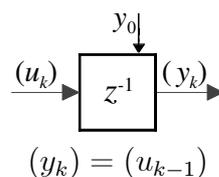


Bild 1.6: Strukturbild eines zeitdiskreten Zustandsmodells der Form (1.22)

den Verschiebungssatz der z-Transformation, der Funktionsblock

Verschiebung (nach rechts)



eine zeitliche Verschiebung der Eingangsfolge um *einen* Zeitschritt nach rechts symbolisiert.

1.5 Beispiele für dynamische Systeme

1.5.1 Zeitkontinuierliche Systeme

Elektrische Systeme

Die Herleitung von Zustandsmodellen zur Beschreibung von idealisierten elektrischen Netzwerken, bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist ziemlich geradlinig. Die Systemordnung n wird im Allgemeinen durch die Anzahl der „Energiespeicher“ bestimmt, also durch die Zahl der Kapazitäten und Induktivitäten. Es bietet sich an, als Zustandsvariablen die Spannungsabfälle an Kapazitäten und Ströme durch Induktivitäten zu wählen. Das Zustandsmodell ergibt sich dann aus der Anwendung der Kirchhoffschen⁷ Regeln.

B Gegeben sei das in Bild 1.7 dargestellte ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus einer Spannungsquelle, zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 , der Kapazität C und der Induktivität L . Die Eingangsgröße sei die Spannung u , die Ausgangsgröße ist der Spannungsabfall am Widerstand R_2 .

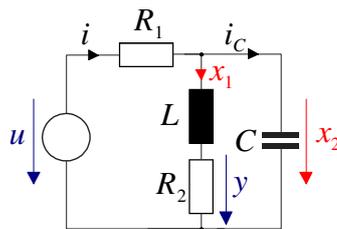


Bild 1.7: Elektrisches Netzwerk mit zwei Energiespeichern

Als Zustandsvariablen werden - wie oben erläutert - der Strom x_1 und die Spannung x_2 gewählt. Offensichtlich gilt dann

$$x_2 = L \frac{dx_1}{dt} + R_2 x_1,$$

d.h. die erste Zustandsdifferentialgleichung lautet

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_2}{L} x_1 + \frac{1}{L} x_2.$$

Weiters gilt

$$u = R_1 i + x_2,$$

wobei sich der Strom i gemäß

$$i = i_C + x_1 = C \frac{dx_2}{dt} + x_1$$

⁷benannt nach dem deutschen Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887)

errechnet. Daraus folgt

$$u = R_1 C \frac{dx_2}{dt} + R_1 x_1 + x_2,$$

und für die zweite Differentialgleichung gilt

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_1 C}x_2 + \frac{1}{R_1 C}u.$$

Die Ausgangsgleichung ist durch

$$y = R_2 x_1$$

gegeben. Zusammenfassend lautet somit das Zustandsmodell des elektrischen Systems

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R_2}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_1 C}x_2 + \frac{1}{R_1 C}u, \\ y &= R_2 x_1. \end{aligned}$$

■

Das vorangegangene Beispiel verdeutlicht, dass die Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{x} verschiedene physikalische Dimensionen besitzen können. Im Beispiel ist x_1 ein elektrischer Strom (Einheit Ampère) während x_2 eine elektrische Spannung (Einheit Volt) darstellt.

Mechanische Systeme

Bei der translatorischen Bewegung von Massen ist es zweckmäßig, deren Positionen und Geschwindigkeiten als Zustandsvariablen einzuführen. Analog dazu können bei rotatorischen Bewegungen von Massen deren Drehwinkel und Winkelgeschwindigkeiten gewählt werden.

B Gegeben sei das in Bild 1.8, links dargestellte Masse-Feder System, bestehend aus einem Körper mit der Masse m und einer Feder mit linearer Federkennlinie, charakterisiert durch die Federkonstante c . Die Position der Masse wird mit y bezeichnet, wobei $y = 0$ der Lage bei entspannter Feder entspricht. Für die Reibung zwischen Körper und Untergrund wird Coulombsche⁸ Reibung angenommen, der Reibungskoeffizient wird mit μ bezeichnet. Weiters wirkt auf den Körper eine äußere Kraft F . Die Anwendung des zweiten Newtonschen⁹ Gesetzes liefert die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -cy - \mu mg \operatorname{sign} v + F$$

wobei v die Geschwindigkeit des Körpers ist und g die Erdbeschleunigung repräsentiert. Führt man nun die Zustandsvariablen

$$x_1 = y \quad \text{und} \quad x_2 = v$$

⁸benannt nach dem französischen Physiker Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806)

⁹benannt nach dem englischen Forscher Isaac Newton (1642 - 1727)

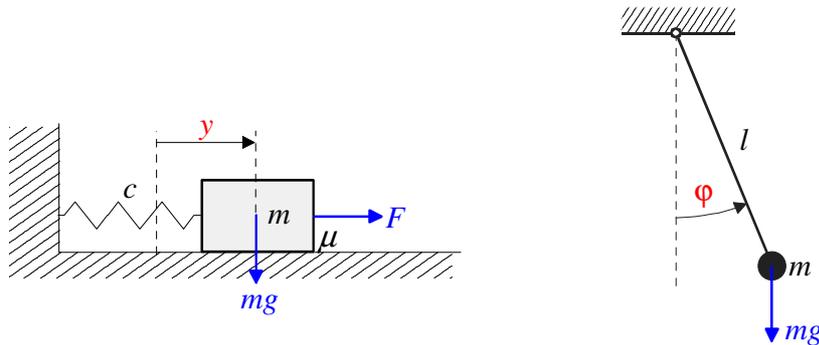


Bild 1.8: Mechanische Systeme: Masse-Feder System und Pendel

ein, so erhält man mit der Schreibweise $u := F$ die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{c}{m}x_1 - \mu g \operatorname{sign} x_2 + \frac{1}{m}u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

■

B Das mathematische Modell des in Bild 1.8, rechts dargestellten Pendels soll aufgestellt werden. Dabei wird idealisierend vorausgesetzt, dass das Pendel aus einem drehbar gelagerten, masselosen Stab der Länge l und einer punktförmigen Masse m am Stabende besteht. Das der Pendelbewegung entgegenwirkende Reibungsmoment (Lagerreibung) sei der Winkelgeschwindigkeit proportional (Proportionalitätsfaktor k). Mit Hilfe des Drallsatzes ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \varphi - k\omega \quad \text{mit } k \geq 0,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist. Führt man als Zustandsvariablen den Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit ein, d.h.

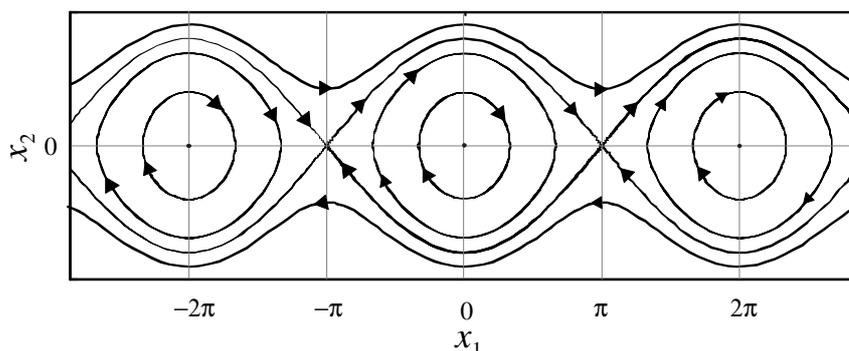
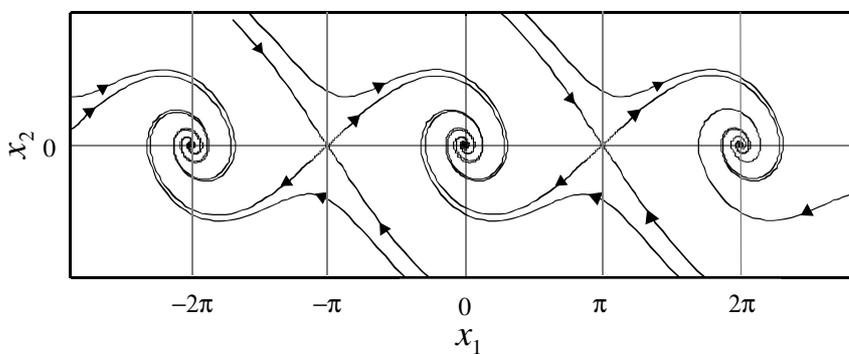
$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \omega,$$

so ergibt sich das folgende Zustandsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{ml^2}x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Die zum Pendelmodell gehörigen Trajektorien sind in Bild 1.9 für $k = 0$, d.h. für den reibungsfreien Fall, dargestellt. Die ungedämpften Pendelbewegungen sind hier deutlich zu erkennen. In Bild 1.10 sind die entsprechenden Trajektorien für $k > 0$ dargestellt.

■

Bild 1.9: Trajektorien des Pendelmodells für $k = 0$ Bild 1.10: Trajektorien des Pendelmodells für $k > 0$

Räuber-Beute Modell

Nach Volterra und Lotka kann die Räuber-Beute Beziehung zweier (hinreichend großer) Populationen mit Hilfe der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2\end{aligned}$$

mit den positiven Konstanten $a, b, c, d > 0$ beschrieben werden. Hierbei repräsentiert x_1 die „Anzahl“ der Beutetiere und x_2 stellt die „Anzahl“ der Räuber dar. Das Modell beruht auf der Annahme, dass sich ohne natürliche Feinde, d.h. für $x_2 = 0$, die Beutetiere exponentiell mit der Rate a vermehren. Umgekehrt nimmt die Population der Räuber für $x_1 = 0$ wegen Nahrungsmangels exponentiell mit der Rate c ab. Die Wechselwirkungen zwischen den beiden Populationen werden durch die Terme bx_1x_2 und dx_1x_2 charakterisiert. In Bild 1.11 sind die zeitlichen Verläufe von x_1 und x_2 für $x_1(0) = 40$ und $x_2(0) = 20$ und die Modellparameter $a = 0.5$, $b = d = 0.01$, $c = 0.8$ dargestellt. Weiters ist für die gleichen Anfangswerte der Verlauf der Trajektorie in der Zustandsebene eingezeichnet. Man erkennt, dass sich eine geschlossene Trajektorie ergibt. Das bedeutet, dass x_1 und x_2 periodische Funktionen der Zeit sind.

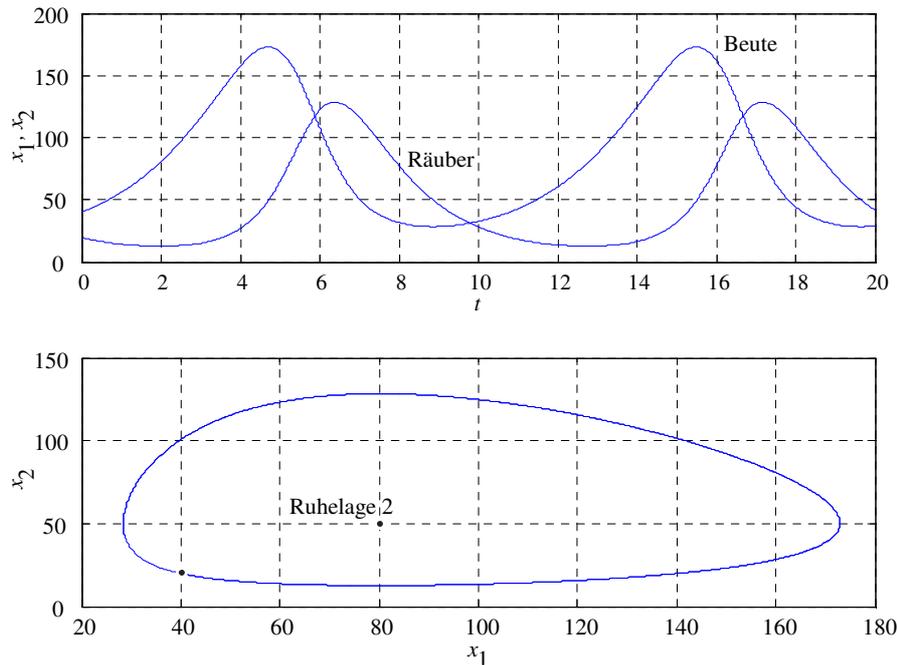


Bild 1.11: Räuber - Beute Beziehung

Weiters ist in Bild 1.11 eine so genannte Ruhelage des Systems eingezeichnet. Sie ist durch $x_{1,R}(t) = x_1(0) = \text{konst.}$ und $x_{2,R}(t) = x_2(0) = \text{konst.}$ charakterisiert. Das bedeutet, dass sich die beiden Populationen in einem Gleichgewicht befinden. Dieser spezielle Zustand ergibt sich aus den algebraischen Gleichungen

$$\frac{dx_{1,R}}{dt} = 0 = ax_{1,R} - bx_{1,R}x_{2,R} \quad \text{und} \quad \frac{dx_{2,R}}{dt} = 0 = -cx_{2,R} + dx_{1,R}x_{2,R}.$$

Die Ruhelage $x_{1,R} = x_{2,R} = 0$ stellt hier den „trivialen Fall“ dar, für die praktisch relevante Ruhelage ergibt sich

$$x_{1,R} = \frac{c}{d}, \quad x_{2,R} = \frac{a}{b}.$$

Epidemiemodell („SIR-Modell“)

Bei vielen klassischen Epidemiemodellen, wie auch bei dem hier vorgestellten Kermack-McKendrick Modell wird eine Gesamtpopulation in drei unterschiedliche Klassen eingeteilt. Die erste Klasse „S“ (=susceptibles) umfasst gesunde und infizierbare, also nicht-immune, Personen. Die zweite Klasse „I“ (=infectives) umfasst infektiöse Personen und die dritte Klasse „R“ (=removals) wird durch Personen gebildet, die (nach einer Erkrankung) dauerhaft immun sind, wie es zum Beispiel bei Kinderkrankheiten wie Masern der Fall ist. Die „Anzahl“ der Individuen in „S“ wird mit x_1 bezeichnet, zu „I“ gehören x_2 und zu „R“ gehören x_3 Personen. Es wird vorausgesetzt, dass die Gesamtpopulation konstant ist, d.h.

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = N = \text{konstant.}$$

Da Elemente der Klasse „S“ durch Ansteckung zu Elementen der Klasse „I“ werden und nach Gesundung schließlich zur Klasse „R“ gehören, spricht man auch vom SIR-Modell. Es besteht aus den drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -ax_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= ax_1x_2 - bx_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= bx_2.\end{aligned}$$

Die positive Konstante a wird Infektionsrate genannt, die positive Konstante b ist die Immunisierungsrate. Man beachte, dass sich im obigen mathematischen Modell die Tatsache widerspiegelt, dass die Gesamtpopulation konstant ist, denn es gilt

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Das Strukturbild zum mathematischen Modell ist in Bild 1.12 dargestellt. Wenn ausgehend

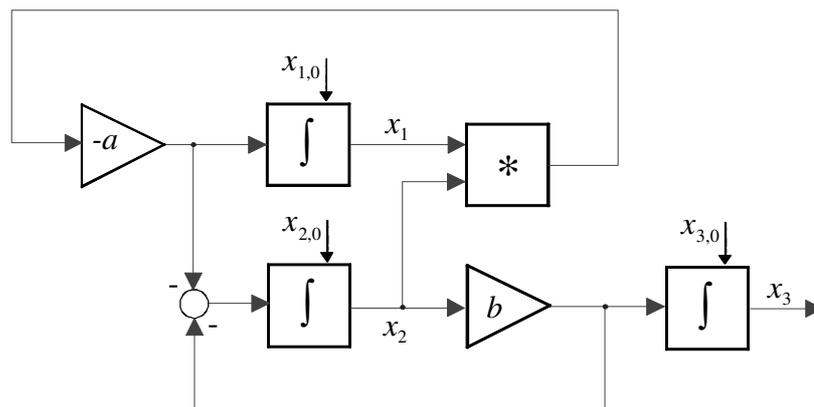


Bild 1.12: Strukturbild zum Epidemiemodell

von den Anfangswerten $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = N$ die Zahl der Infizierten, also x_2 , zunimmt, d.h.

$$\left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0} > 0,$$

so spricht man vom Ausbruch einer Epidemie. Dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn $x_1(0)$ größer als der Schwellwert

$$\rho := \frac{b}{a}$$

ist. In Bild 1.13 sind die Verläufe der Populationsgrößen dargestellt, wobei für die Gesamtpopulation $N = 1000$ gilt, die Infektionsrate a beträgt 0.002, die Immunisierungsrate b ist 2. Wie man leicht überprüfen kann, bricht für $x_1(0) = 800$ und $x_2(0) = 200$ keine Epidemie aus. Im Gegensatz dazu bricht für $N = 1000$, $a = 0.004$, $b = 0.4$ und $x_1(0) = 999$, $x_2(0) = 1$ eine Epidemie aus, was auch aus Bild 1.14 hervorgeht.

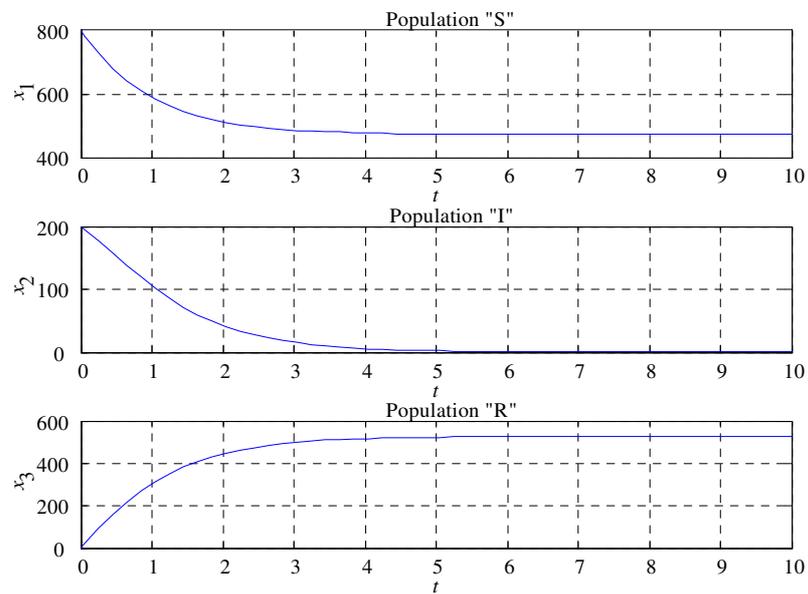


Bild 1.13: Krankheitsverlauf ohne Epidemie

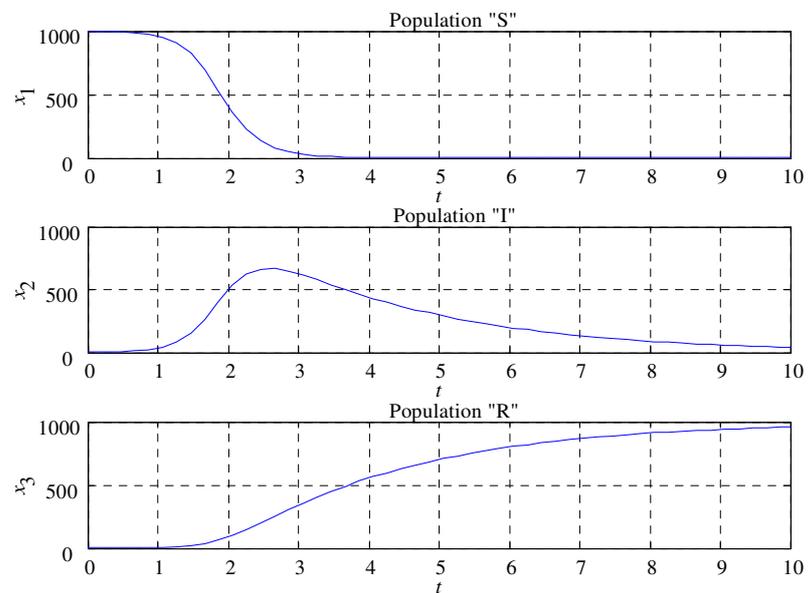


Bild 1.14: Ausbruch einer Epidemie

1.5.2 Zeitdiskrete Systeme

Verzinsung

Bei der Verzinsung eines Bankguthabens handelt es sich um einen zeitdiskreten Prozess. Bezeichnet man mit x_k das Bankguthaben im Monat k und den konstanten Zinssatz mit a (in %), so errechnen sich - unter Annahme einer monatlichen Verzinsung - die Zinsen für diesen Monat zu $a x_k$. Zahlt man im Monat k zusätzlich noch einen Betrag u_k ein, so beträgt das Guthaben im nächsten Monat

$$x_{k+1} = x_k + a x_k + u_k = (1 + a) x_k + u_k.$$

Ausgehend von einer Ersteinlage x_0 kann man über obige Differenzengleichung das Kapital in den nachfolgenden Jahren ermitteln. Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + a) x_0 + u_0, \\ x_2 &= (1 + a) x_1 + u_1 = (1 + a)^2 x_0 + (1 + a) u_0 + u_1, \\ &\vdots \\ x_k &= (1 + a) x_{k-1} + u_{k-1} = (1 + a)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (1 + a)^{k-1-i} u_i. \end{aligned}$$

Angebot, Nachfrage und Preisentwicklung

Dieses Modell beschreibt auf vereinfachte Weise die dynamische Interaktion zwischen Angebot und Nachfrage einer bestimmten Ware, wie z.B. Mais. Mit $x_{1,k}$ wird die „Menge“ der zum Zeitpunkt $t = kT_d$ zum Verkauf verfügbaren Ware bezeichnet, der (vorgebare) Preis pro Einheit beträgt u_k . Die Bereitstellung der Ware (Anbau, Ernte) nimmt die Zeitspanne T_d in Anspruch. Ein hoher Preis u_k hat ein erhöhtes Angebot zum Zeitpunkt $t = (k + 1)T_d$ zur Folge (verstärkter Maisanbau bei hohen Maispreisen), d.h.

$$x_{1,k+1} = b + a u_k,$$

wobei a und b nichtnegative Konstanten sind. Umgekehrt wird sich die Nachfrage $x_{2,k}$ gegenläufig zum Preis u_k verhalten, d.h. ein hoher Preis hat eine kleine Nachfrage zur Folge und umgekehrt. Dieser Tatsache wird durch die Relation

$$x_{2,k} = c - d u_k$$

Rechnung getragen, wobei c und d konstante Parameter sind. Die zeitliche Entwicklung des Preises, d.h. der Übergang von u_k und u_{k+1} , muss sowohl Käufer- als auch Verkäuferinteressen berücksichtigen. Eine sinnvolle Strategie zur Gestaltung des Preises besteht nun darin, die Gleichgewichtsbedingung

$$x_{1,k+1} = x_{2,k+1}$$

zu erfüllen. Das bedeutet, dass zum Zeitpunkt $t = (k + 1)T_d$ das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt, d.h. es gilt

$$b + a u_k = c - d u_{k+1}.$$

gelten. Daraus folgt unmittelbar

$$u_{k+1} = -\frac{a}{d} u_k + \frac{c-b}{d}.$$

In Bild 1.15 sind die zeitlichen Verläufe von Preis, Angebot und Nachfrage für die Parameterwerte $a = 1$, $b = 0$, $c = 150$ und $d = 2$ dargestellt. Ausgehend vom Startpreis $u_0 = 40$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 50$. Setzt man nun $a = 2.3$, so zeigt das System „instabiles“ Verhalten.

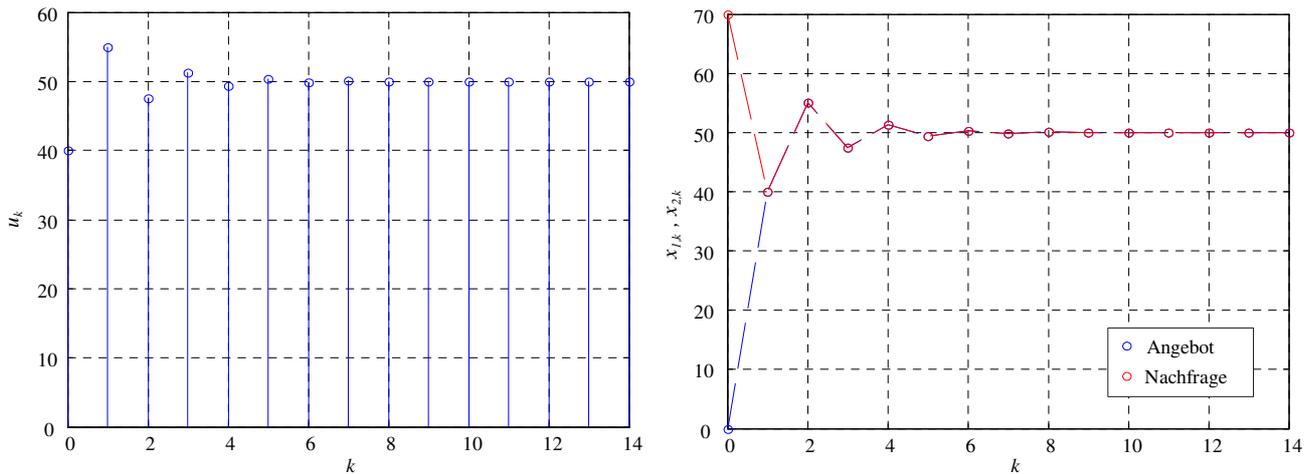


Bild 1.15: „Stabile“ Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot

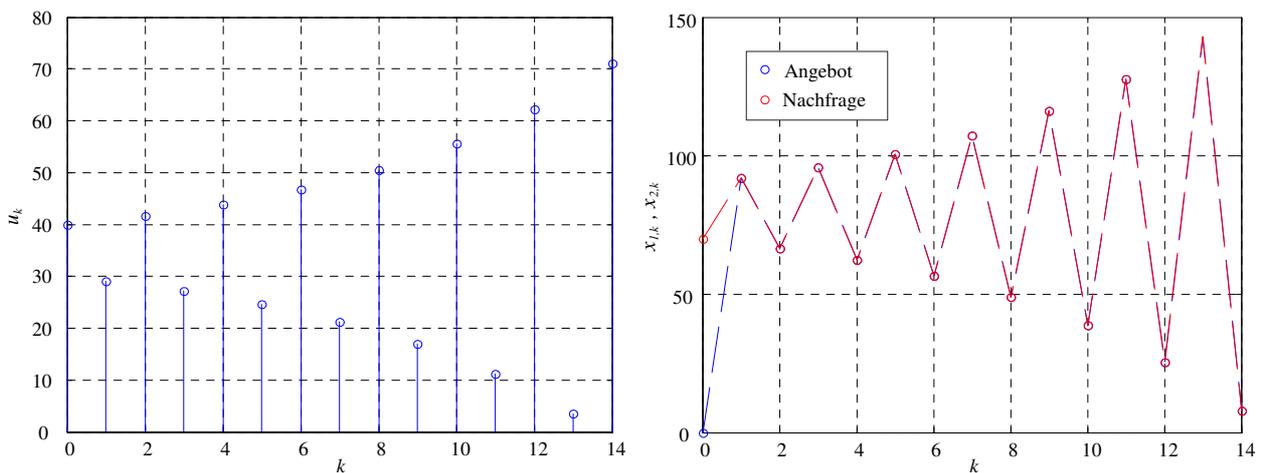


Bild 1.16: „Instabile“ Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot

Teil II

Zeitkontinuierliche Systeme

Kapitel 2

Lineare Systeme im Zustandsraum

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (2.1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (2.2)$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0 = 0)$$

analysiert. Mit \mathbf{x} wird der n -dimensionale Zustandsvektor bezeichnet, u ist die Eingangsgröße und y die Ausgangsgröße des Systems. Die Zeitinvarianz von (2.1) impliziert, dass die Systemmatrix \mathbf{A} , der Eingangsvektor \mathbf{b} , der Ausgangsvektor \mathbf{c} und der Durchgriff d konstante Größen passender Dimensionen sind.

2.2 Lösung der Systemgleichungen

Da es sich bei den Zustandsgleichungen (2.1) um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Laplace-Transformation eingesetzt werden. Wendet man (A.9) auf (2.1) an, so erhält man

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad \text{und} \quad \bar{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei \mathbf{E} die $n \times n$ -Einheitsmatrix repräsentiert. Nach einer Multiplikation mit $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ von links findet man

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u}(s). \quad (2.3)$$

Definiert man die $n \times n$ - Matrix

$$\bar{\phi}(s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \}, \quad (2.4)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes (A.8) - für die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Der Lösungsvektor $\mathbf{x}(t)$ repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (2.1) als Reaktion auf einen Anfangswert \mathbf{x}_0 und die Eingangsgröße $u(t)$. Das Systemverhalten (2.5) kann in zwei additive Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil rührt von der „Vorgeschichte“ des Systems her, also vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 , man spricht von der **freien Lösung** $\mathbf{x}_{frei}(t)$. Im Gegensatz dazu wird der zweite Anteil durch den Verlauf der Eingangsgröße $u(\tau)$ im Intervall $0 \leq \tau \leq t$ geprägt, man spricht von der **erzwungenen Lösung** $\mathbf{x}_{erzw}(t)$. Diese Erkenntnis kann man - unter Verwendung der in (1.7) eingeführten Notation - folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{x} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{frei} + \mathbf{x}_{erzw} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Aufgrund der Struktur von (2.5) ist unmittelbar einzusehen, dass auch die restlichen Eigenschaften der Linearitätsbedingung (1.9) erfüllt sind.

Die Ausgangsgröße kann mittels Relation (2.2) berechnet werden, im Bildbereich gilt mit (2.3)

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s), \quad (2.7)$$

bzw. unter Verwendung von (2.5) im Zeitbereich

$$y(t) = \mathbf{c}^T \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t). \quad (2.8)$$

Analog zu (2.5) kann die Ausgangsgröße also in einen Anteil, der vom Anfangszustand herrührt und einen Anteil, der vom Verlauf der Eingangsgröße geprägt wird, zerlegt werden. Unter Verwendung der Notation (1.10) kann man schreiben

$$y = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Wie man sich überzeugen kann, sind auch die weiteren Eigenschaften von (1.11) gegeben.

2.2.1 Freie Lösung

Unter der freien Lösung eines Systems versteht man diejenige Lösung $\mathbf{x}(t)$, die sich ergibt, wenn das System *ausschließlich* durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 angeregt wird. Somit ist hier das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.10)$$

zu untersuchen. Gemäß (2.5) gilt für die Lösung dann

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0. \quad (2.11)$$

Die Matrix $\phi(t)$ wird **Transitionsmatrix**¹ genannt, sie beschreibt den Übergang des Zustandsvektors von seinem Anfangswert zu seinem Wert zum Zeitpunkt t . Ihre Berechnung kann mit Hilfe von Formel (2.4) erfolgen, alternative Berechnungsmethoden folgen später.

B Für das autonome System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

ergibt sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix gemäß (2.4) zu

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Eine Partialbruchzerlegung und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} \\ -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors gilt somit

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \\ \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

■

2.2.2 Erzwungene Lösung

Die erzwungene Lösung oder Bewegung eines Systems ist diejenige Lösung $\mathbf{x}(t)$, die sich ergibt, wenn das System bei *verschwindendem* Anfangszustand² $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch die Eingangsgröße $u(t)$ angeregt wird. Nach (2.5) gilt unter diesen Umständen

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

¹lat. *transire* = übergehen

²man sagt: "Das System befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe"

eines linearen, zeitinvarianten Systems erster Ordnung mit der Eingangsgröße u . Mit Hilfe von (2.12) findet man mit $\phi(t) = e^{-t}$ für die erzwungene Lösung

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot u(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau.$$

Wählt man beispielsweise als Eingangsgröße einen Einheitssprung, d.h. $u(t) = \sigma(t)$, so gilt

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

■

2.2.3 Übertragungsfunktion

Für die Ausgangsgröße folgt unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ aus (2.7) im Bildbereich unmittelbar

$$\bar{y}(s) = [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s). \quad (2.13)$$

Der Ausdruck

$$G(s) := \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (2.14)$$

ist die so genannte **Übertragungsfunktion** des Systems. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems im Bildbereich.

B Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x} + 2u.$$

Für die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems gilt dann

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 8s - 3}{s^2 - 5s - 2}.$$

■

Weiterführende Informationen über die Übertragungsfunktion finden sich in Kapitel 6

2.3 Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\phi(t)$ prägt das zeitliche Verhalten von linearen Systemen, siehe (2.5). In diesem Abschnitt werden einige elementare Eigenschaften der Transitionsmatrix vorgestellt. Zunächst wird ein System erster Ordnung untersucht, die dort gefundenen Erkenntnisse werden danach auf Systeme höherer Ordnung übertragen.

B Gegeben sei das mathematische Modell eines autonomen Systems erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{mit} \quad x_0 := x(t=0),$$

wobei a eine reelle Konstante ist. Die Lösung $x(t)$ kann mit (2.11) berechnet werden, wobei

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{(s - a)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} \right\} = e^{at}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = e^{at} x_0.$$

Offensichtlich erfüllt die Transitionsmatrix im skalaren Fall ($n = 1$) die Bedingungen

$$\phi(0) = 1, \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = a\phi(t), \quad \phi^{-1}(t) = \phi(-t) \quad \text{und} \quad \phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (2.15)$$

und kann als unendliche Reihe

$$\phi(t) = e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} \quad (2.16)$$

angeschrieben werden. ■

Es wird nun gezeigt, dass die in obigem Beispiel angeführten Eigenschaften der Transitionsmatrix für den Fall $n > 1$ verallgemeinert werden können. Aus (2.11) folgt zunächst unmittelbar die Beziehung

$$\phi(0) = \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Setzt man (2.11) in (2.10) ein, so findet man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A} \phi(t) \mathbf{x}_0,$$

woraus sich - \mathbf{x}_0 ist ein *beliebiger* Anfangszustand - die Beziehung

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A} \phi(t) \quad (2.18)$$

ableiten lässt. Wie in Bild 2.1 angedeutet, gelten gemäß (2.11) für zwei beliebige Zeitpunkte $t = t_1$ und $t = t_1 + t_2$ die Beziehungen

$$\mathbf{x}(t_1) = \phi(t_1) \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_1 + t_2) \mathbf{x}_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Systemgleichungen muss auch die Beziehung

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_2) \mathbf{x}(t_1)$$

gelten, sodass sich unmittelbar die Relation

$$\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_2)\phi(t_1) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (2.19)$$

ergibt. Im Speziellen resultiert für $t_2 = -t_1$ daraus

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t), \quad (2.20)$$

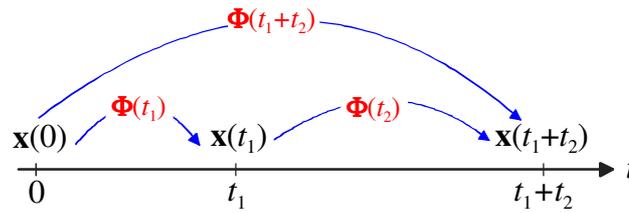


Bild 2.1: Bedeutung der Transitionsmatrix

d.h. die Transitionsmatrix ist für endliche Werte von t regulär.

Aufgrund der Analogien zwischen (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) und den Eigenschaften (2.15) der Exponentialfunktion liegt es nahe, die Transitionsmatrix $\phi(t)$ als **Matrix-Exponentialfunktion**, d.h. als matrixwertige Verallgemeinerung der skalaren Exponentialfunktion, zu interpretieren. Aus diesem Grund wird häufig die Schreibweise

$$\phi(t) := e^{\mathbf{A}t}. \quad (2.21)$$

verwendet. In Anlehnung an (2.16) wird der Reihenansatz

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!} \quad (2.22)$$

gewählt. Hierbei gilt

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \mathbf{A}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{A}^k = \prod_{i=1}^k \mathbf{A}$$

Die Differentiation nach der Zeit bestätigt, dass die Matrix-Exponentialreihe (2.22) die Beziehung (2.18) erfüllt, denn es gilt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = \mathbf{A} \phi(t)$$

Es sei angemerkt, dass (2.22) in den wenigsten Fällen dazu geeignet ist, eine *geschlossene Darstellung* der Transitionsmatrix zu ermitteln. Das folgende Beispiel stellt eine Ausnahme dar.

B Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Für die Systemmatrix \mathbf{A} gilt³

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i \geq 2,$$

³eine solche Matrix nennt man *nilpotent*.

d.h. die Transitionsmatrix ist gemäß (2.22) gegeben durch

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man überprüfen kann, erfüllt $\phi(t)$ die Bedingungen (2.17), (2.18), (2.19) und (2.20). ■

Für den Fall einer *idempotenten* Systemmatrix \mathbf{A} , d.h. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ kann mittels (2.22) eine Formel zur Berechnung der Transitionsmatrix abgeleitet werden. Es gilt

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}\frac{t^3}{3!} + \dots = \mathbf{E} + \mathbf{A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - 1 \right),$$

d.h. mit der Exponentialreihe (2.16) folgt unmittelbar

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} (e^t - 1). \quad (2.23)$$

□ Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Da die Systemmatrix idempotent ist, kann man die Transitionsmatrix mittels (2.23) berechnen und es gilt

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} (e^t - 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t & e^t - 1 \\ \frac{1}{4}(e^t - 1) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}.$$

■

2.4 Ruhelagen

Ruhelagen sind spezielle Lösungen der Systemgleichungen (2.1), die dadurch charakterisiert sind, dass für den Zustandsvektor gilt:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad (2.24)$$

Das bedeutet, dass sich das System in einem „Gleichgewichtszustand“ befindet, der auch **Ruhelage** genannt wird. In einer Ruhelage nehmen alle Systemgrößen, d.h. Eingangsgröße und Zustandsgrößen konstante Werte an, d.h. es gilt

$$\frac{d\mathbf{x}_R}{dt} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Da die Eingangsgröße konstant sein muss, d.h.

$$u(t) = u_R = \text{konst.}$$

führt die Bedingung (2.25) auf das lineare Gleichungssystem

$$-\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{b} u_R \quad (2.26)$$

zur Ermittlung der Ruhelagen. Bezeichnet man mit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ die Spalten der $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} , d.h.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

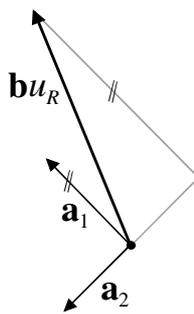
und mit $x_{1,R}, \dots, x_{n,R}$ die Komponenten der gesuchten Ruhelage \mathbf{x}_R , also

$$\mathbf{x}_R = [x_{1,R} \quad \dots \quad x_{n,R}]^T,$$

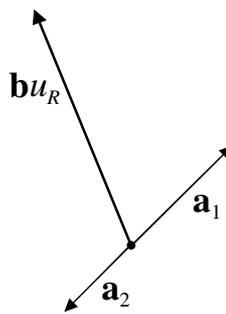
so kann (2.26) folgendermaßen dargestellt werden:

$$-(\mathbf{a}_1 x_{1,R} + \mathbf{a}_2 x_{2,R} + \dots + \mathbf{a}_n x_{n,R}) = \mathbf{b} u_R$$

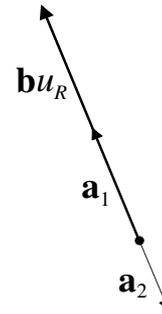
Die Ermittlung möglicher Ruhelagen reduziert sich also auf die Beantwortung der Frage, ob der Vektor $(\mathbf{b} u_R)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von \mathbf{A} dargestellt werden kann. Ist das der Fall, so gibt es mindestens eine Ruhelage, anderenfalls existiert keine Ruhelage. Eine geometrische Interpretation für $n = 2$ liefern die folgenden Abbildungen:



1 Ruhelage



keine Ruhelagen



∞ viele Ruhelagen

Über den so genannten Rang einer Matrix kann die vorliegende Problemstellung prägnant formuliert werden. Er gibt an, wieviele linear unabhängige Spalten (bzw. Zeilen) eine Matrix besitzt. Offensichtlich kann der Vektor $(\mathbf{b} u_R)$ genau dann als Linearkombination der Spalten von \mathbf{A} dargestellt werden, wenn gilt:

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R)$$

Das bedeutet, dass die $n \times (n+1)$ -Matrix, die sich durch das Hinzufügen des Vektors $(\mathbf{b} u_R)$ als zusätzliche Spalte ergibt, den gleichen Rang besitzt wie die Matrix \mathbf{A} . Dies trifft auf jeden Fall zu, wenn \mathbf{A} regulär ist, also den Höchststang, d.h. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ besitzt. Dann gibt es genau *eine* Ruhelage, nämlich

$$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} u_R$$

Im Falle einer singulären Matrix \mathbf{A} mit $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} : \mathbf{b} u_R) < n$ gibt es unendlich viele Ruhelagen, man spricht dann von einer *Ruhezone*.

Die gefundenen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

rang(\mathbf{A}) = n	rang(\mathbf{A}) < n	
$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} u_R$	rang(\mathbf{A}) = rang($\mathbf{A}:\mathbf{b} u_R$)	rang(\mathbf{A}) < rang($\mathbf{A}:\mathbf{b} u_R$)
genau <i>eine</i> Ruhelage	∞ viele Ruhelagen	keine Ruhelage

B Es sollen die Ruhelagen des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ermittelt werden. Es gilt:

$$(\mathbf{A}:\mathbf{b} u_R) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_R \end{bmatrix}$$

Für den Fall $u_R = 0$, d.h. rang(\mathbf{A}) = rang($\mathbf{A}:\mathbf{b} u_R$) = 1 gibt es unendlich viele Ruhelagen, nämlich

$$\mathbf{x}_R = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei α eine beliebige reelle Konstante ist. Für $u_R \neq 0$, also rang(\mathbf{A}) < rang($\mathbf{A}:\mathbf{b} u_R$) = 2 existiert keine Ruhelage. ■

2.5 Asymptotische Stabilität

Zur Beurteilung der so genannten **asymptotischen Stabilität** wird das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0) \quad (2.27)$$

betrachtet. Das System (2.27) wird **asymptotisch stabil** genannt, wenn für *jeden* Anfangszustand \mathbf{x}_0 die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

erfüllt ist. Das bedeutet, dass jede Trajektorie - unabhängig von ihrem Startpunkt \mathbf{x}_0 - für $t \rightarrow \infty$ in den Ursprung des Zustandsraumes einläuft.

Aus obiger Definition geht auch hervor, dass ein asymptotisch stabiles System (2.27) als einzige Ruhelage \mathbf{x}_R den Koordinatenursprung des Zustandsraumes besitzt.

Da (2.28) für jeden beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 gelten muss, folgt aus (2.11) unmittelbar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Das bedeutet, dass jedes Element der Transitionsmatrix eines asymptotisch stabilen Systems für $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Dies kann mit Hilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation überprüft werden. Dazu wird die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}.$$

betrachtet. Dabei ist $\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ das charakteristische Polynom der Matrix \mathbf{A} , das den Polynomgrad n besitzt. Die Adjunkte $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}$ ist eine Polynommatrix, deren Elemente Polynomgrade kleiner oder gleich $(n - 1)$ besitzen. Die Elemente von $\bar{\phi}(s)$ sind also gebrochen rationale Funktionen. Gemäß den Ausführungen über den Endwertsatz im Abschnitt A.9 ist (2.29) genau dann erfüllt, wenn die Nennerpolynome aller Elemente von $\bar{\phi}(s)$ Hurwitzpolynome sind.

B Gegeben sei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.30)$$

Für $\bar{\phi}(s)$ gilt dann

$$\bar{\phi}(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 3s - 10}}_{\Delta(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s + 4 & 2 \\ 3 & s - 1 \end{bmatrix}}_{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}}.$$

■

Die Nennerpolynome der Elemente von $\bar{\phi}(s)$ sind sicher Hurwitzpolynome, wenn $\Delta(s)$ ein Hurwitzpolynom ist. Hierbei handelt es sich sogar um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Da die Nullstellen von $\Delta(s)$ die Eigenwerte von \mathbf{A} sind, gilt zusammenfassend:

Das System (2.27) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} einen negativen Realteil besitzen. Eine solche Matrix nennt man auch **Hurwitzmatrix**.

B Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} aus (2.30) lauten

$$s_1 = 2 \quad \text{und} \quad s_2 = -5.$$

Das bedeutet, dass (2.30) nicht asymptotisch stabil ist, was auch den in Bild 2.2 dargestellten Trajektorien zu entnehmen ist. ■

B Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix des Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.31)$$

lautet

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + 2,$$

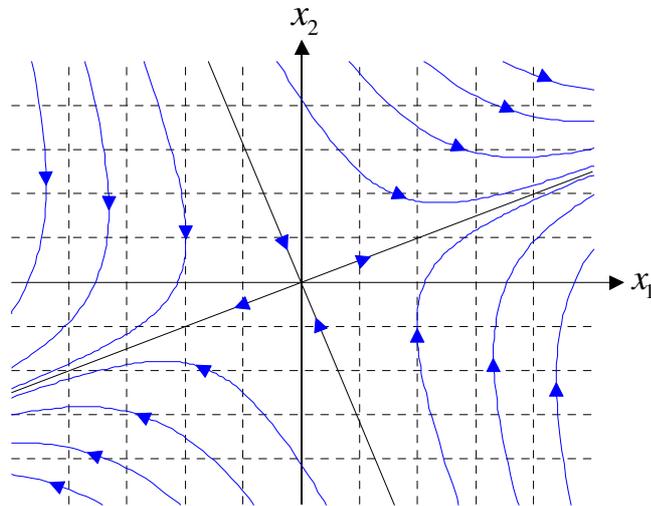


Bild 2.2: Trajektorien zu (2.30) - man spricht in diesem Zusammenhang von einem (instabilen) Sattelpunkt

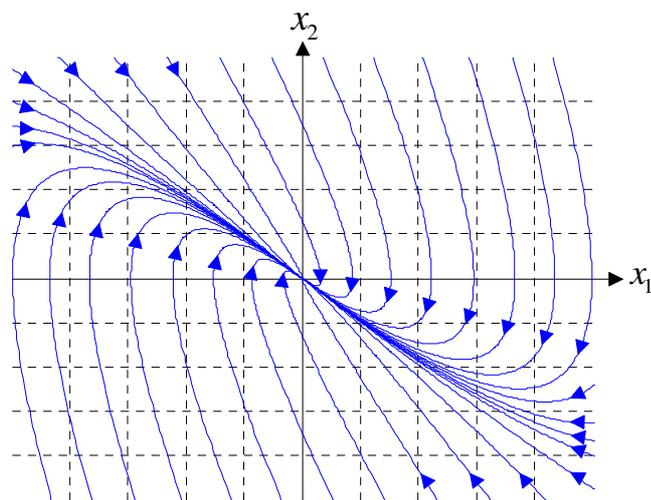


Bild 2.3: Trajektorien zu (2.31) - man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem stabilen Knoten

d.h. für die Eigenwerte gilt

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Das bedeutet, dass das System asymptotisch stabil ist. Dies wird durch die in Bild 2.3 dargestellten Trajektorien bestätigt. ■

Kapitel 3

Zustandstransformationen

3.1 Einführung

Wie bereits erwähnt wurde, ist die Wahl der Zustandsvariablen zur Beschreibung eines dynamischen Systems nicht eindeutig, d.h. für ein und dasselbe System gibt es *unendlich viele* Zustandsbeschreibungen. Der Übergang zu „geeigneten“ Zustandsvariablen kann viele Aufgabenstellungen drastisch vereinfachen.

Bei einer **linearen Zustandstransformation** sind der ursprüngliche Zustandsvektor \mathbf{x} und der transformierte Zustandsvektor \mathbf{z} über die (lineare) Relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} \quad (3.1)$$

verknüpft, wobei die konstante $n \times n$ Matrix \mathbf{T} die so genannte **Transformationsmatrix** ist. Damit die Transformation umkehrbar eindeutig ist, muss \mathbf{T} regulär sein, man spricht deshalb auch von einer **regulären Zustandstransformation**. Man beachte, dass die Transformation (3.1) einem Wechsel der Basisvektoren des n -dimensionalen Zustandsraumes entspricht, es handelt sich bei (3.1) also um eine lineare Koordinatentransformation.

Die Anwendung der Transformationsvorschrift (3.1) auf (2.1) bzw. (2.2) liefert zunächst

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u$$

und in weiterer Folge (Multiplikation mit \mathbf{T}^{-1} von links)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}} u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + d u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Das transformierte System liegt somit in der gleichen Form wie das Originalsystem (2.1) vor, wobei gilt

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}, \quad (3.3)$$

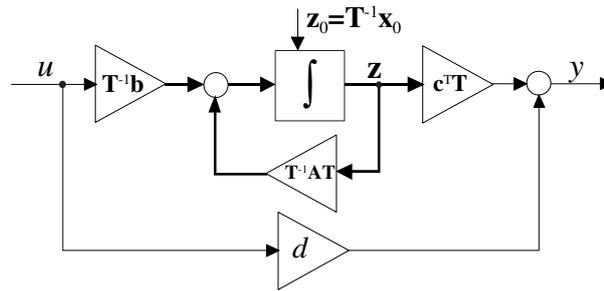


Bild 3.1: Strukturbild des transformierten Systems (3.2)

der Durchgriffsterm d bleibt durch die Transformation unverändert. Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 3.1 dargestellt.

Es zeigt sich, dass einige wesentliche Systemeigenschaften *unabhängig* von der Wahl der Zustandsvariablen sind. Man nennt solche Eigenschaften **invariant** bezüglich einer regulären Zustandstransformation. Dieses Erkenntnis ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass das transformierte System (3.2) bloß eine alternative Beschreibung des ursprünglichen Systems (2.1), (2.2) darstellt.

3.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion

Für die Übertragungsfunktion des Originalsystems gilt gemäß (2.14)

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Wird nun eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ durchgeführt, so gilt für die Übertragungsfunktion des transformierten Systems analog

$$\tilde{G}(s) = \tilde{\mathbf{c}}^T (s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} + d \stackrel{(3.3)}{=} \mathbf{c}^T \mathbf{T} (s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Unter Ausnutzung der Relation

$$(\mathbf{V}\mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^{-1}$$

für zwei beliebige reguläre $n \times n$ Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} kann für $\tilde{G}(s)$ auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \mathbf{c}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1}]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T [\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \\ &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G(s). \end{aligned}$$

Offensichtlich ändert sich also durch eine reguläre Zustandstransformation die Übertragungsfunktion *nicht*.

3.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft

Wie gezeigt wurde, wird die Stabilität eines Systems (2.1) durch die Lage der n Eigenwerte s_i der Systemmatrix \mathbf{A} geprägt. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Für das charakteristische Polynom der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ gilt analog

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

Unter Anwendung von (3.3) gilt weiter

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}). \quad (3.4)$$

Da für die Determinante des Produktes zweier $n \times n$ Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} immer

$$\det(\mathbf{V}\mathbf{W}) = \det(\mathbf{V}) \det(\mathbf{W}) \quad (3.5)$$

gilt, kann (3.4) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\tilde{\Delta}(s) = \det[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{T}] = \det \mathbf{T}^{-1} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}.$$

Aus (3.5) folgt unmittelbar

$$\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{T}) = 1,$$

d.h. es gilt

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \Delta(s). \quad (3.6)$$

Die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ besitzt also das gleiche charakteristische Polynom wie die Matrix \mathbf{A} . Das bedeutet, dass die Eigenwerte des transformierten Systems identisch mit den Eigenwerten des Originalsystems sind. Erwartungsgemäß ändert sich durch eine lineare Zustandstransformation der Stabilitätscharakter eines Systems somit *nicht*.

3.2 Transformation auf Diagonalform

Bei der Transformation in die so genannte **Diagonalform** wird das Ziel verfolgt, das Originalsystem in ein System von n entkoppelten Differentialgleichungen umzuwandeln. Das bedeutet, dass in jeder Differentialgleichung nur mehr *eine* Zustandsgröße vorkommt. Diese Zustandsvariable wird nur von der Eingangsgröße u , nicht jedoch von anderen Zustandsvariablen beeinflusst. Die Entkopplung weist erhebliche Vorzüge gegenüber der ursprünglichen Struktur des Originalsystems auf. So kann man jede der n Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Rücksicht auf die anderen Differentialgleichungen lösen. Diese Tatsache kann beispielsweise bei der Berechnung der Transitionsmatrix des Originalsystems vorteilhaft ausgenutzt werden.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -46 & 36 \\ -60 & 47 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -22 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Nach Anwendung einer Zustandstransformation der Form (3.1) mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das transformierte System

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Modell des transformierten Systems aus zwei voneinander *entkoppelten* Differentialgleichungen besteht, da die Systemmatrix eine Diagonalmatrix ist. Man sagt, dass das transformierte System in Diagonalform vorliegt. Es ist offensichtlich, dass in dieser Form beispielsweise Aussagen über die Stabilität leicht möglich sind, da die (invarianten) Eigenwerte der Dynamikmatrix in der Hauptdiagonale angeordnet sind. ■

3.2.1 Transformationsvorschrift

Gesucht ist nun ein systematischer Weg zur Ermittlung der Transformationsvorschrift (3.1), die das System (2.1) in die Diagonalform überführt. Gemäß (3.3) muss die Relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.7)$$

gelten, wobei $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix ist. Da die Eigenwerte der Dynamikmatrizen von ursprünglichem und transformiertem System identisch sind, entsprechen die Diagonalelemente von $\mathbf{\Lambda}$ den Eigenwerten s_i von \mathbf{A} , d.h.

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} = \text{diag}(s_i).$$

Multipliziert man (3.7) von links mit \mathbf{T} , so erhält man (unter Berücksichtigung von $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$)

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}. \quad (3.8)$$

Es erweist sich als sinnvoll, die Transformationsmatrix \mathbf{T} durch ihre Spalten darzustellen, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Setzt man diese Darstellung von \mathbf{T} in (3.8) ein, so erhält man

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix},$$

bzw. in ausmultiplizierter Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t}_1 & \mathbf{A}\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\mathbf{t}_1 & s_2\mathbf{t}_2 & \dots & s_n\mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Ein spaltenweiser Vergleich ergibt unmittelbar

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_i = s_i\mathbf{t}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.$$

bzw.

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{t}_i = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Man beachte, dass es sich bei (3.9) um die bekannte Eigenwertgleichung handelt, d.h. \mathbf{t}_i ist ein zum Eigenwert s_i gehöriger (Rechts-)Eigenvektor \mathbf{p}_i . Die Transformationsmatrix lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} =: \mathbf{P}. \quad (3.10)$$

Die bisherige Vorgangsweise setzt voraus, dass die Spalten von \mathbf{P} , also die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} linear unabhängig sind. Man nennt die Matrix \mathbf{A} dann **diagonalähnlich**. *Hinreichend* hierfür ist, dass \mathbf{A} lauter verschiedene, d.h. einfache Eigenwerte besitzt. Diese Eigenschaft von \mathbf{A} wird in den folgenden Abschnitten angenommen, der Fall mehrfacher Eigenwerte wird danach gesondert behandelt.

B Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} lauten $s_1 = 2$ und $s_2 = -5$, die Eigenvektoren werden mittels (3.9) berechnet, d.h.

$$\begin{aligned} s_1 = 2: \quad (s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ s_2 = -5: \quad (s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht überprüfen kann gilt

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},$$

d.h. das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Stellt man die Inverse der Matrix \mathbf{P} durch ihre Zeilen dar, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

und setzt diese Darstellung in (3.8) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

und weiter

$$\begin{bmatrix} s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \\ s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$s_i \boldsymbol{\rho}_i^T = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n,$$

d.h. $\boldsymbol{\rho}_i$ ist ein zu s_i gehöriger Links-Eigenvektor von \mathbf{A} . Das bedeutet, dass \mathbf{P} Rechts-Eigenvektoren von \mathbf{A} als Spalten besitzt und \mathbf{P}^{-1} entsprechende Links-Eigenvektoren als Zeilen. Aus der Relation

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_n \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_2 & & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{p}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad \text{wobei} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Das bedeutet, dass der Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$ normal auf alle Rechts-Eigenvektoren mit Ausnahme von \mathbf{p}_i steht. Für das System in Diagonalform gilt mit (3.11)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u, \quad (3.12)$$

$$y = [\mathbf{c}^T \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{c}^T \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}^T \mathbf{p}_n] \mathbf{z} + du.$$

Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 3.2 dargestellt. Das System besteht aus n entkoppelten

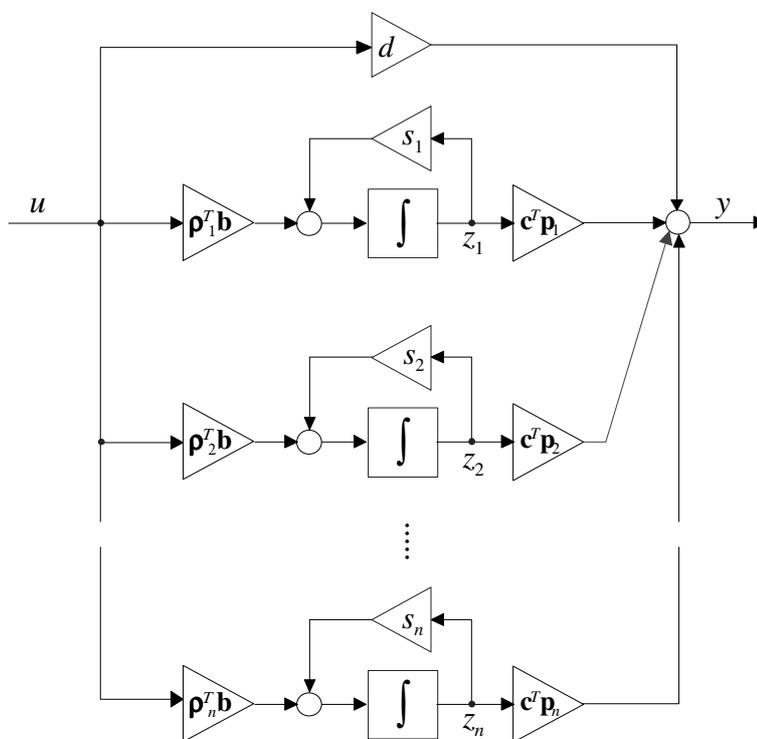


Bild 3.2: Struktur der Diagonalform

Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i z_i + \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} u \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

für die Ausgangsgleichung gilt

$$y = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i z_i + d u. \quad (3.14)$$

Wie man aus Bild 3.2 bzw. den Relationen (3.13) und (3.14) erkennt, kann der Verlauf der Zustandsvariable z_i für

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (3.15)$$

d.h. \mathbf{b} ist orthogonal zum Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$, durch die Eingangsgröße u *nicht* beeinflusst werden. Weiters leistet im Falle

$$\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i = 0, \quad (3.16)$$

d.h. \mathbf{c} ist orthogonal zum Rechts-Eigenvektor \mathbf{p}_i , die Zustandsvariable z_i *keinen* Beitrag zur Ausgangsgröße y . Tritt also (3.15) und / oder (3.16) ein, so spielt die entsprechende Zustandsvariable z_i keine Rolle für das Übertragungsverhalten des Systems. Dies manifestiert sich auch in der Übertragungsfunktion $G(s)$. Transformiert man (3.13) und (3.14) in den Bildbereich, so findet man unter Annahme verschwindender Anfangswerte

$$\bar{z}_i(s) = \frac{\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} \bar{u}(s) \quad \text{und} \quad \bar{y}(s) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \bar{z}_i(s) + d \bar{u}(s).$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} + d. \quad (3.17)$$

Nur wenn weder (3.15) noch (3.16) gilt, liefert der entsprechende Summand in obiger Formel einen Beitrag zur Übertragungsfunktion. Gibt es Summanden, die keinen Beitrag zu $G(s)$ leisten, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ kleiner ist als die Ordnung n des Zustandsmodells.

B Für die Übertragungsfunktion des in Diagonalform vorliegenden mathematischen Modells

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

findet man mit (3.17)

$$G(s) = \frac{3 \cdot 0}{s - 2} - \frac{2 \cdot 1}{s + 5} = -\frac{2}{s + 5}.$$

■

3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\tilde{\phi}(t)$ des transformierten Systems (3.12) kann mühelos ermittelt werden, da die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix ist. Unter der Annahme von $u = 0$ gilt

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i z_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$z_i(t) = e^{s_i t} z_{i,0}$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & & \\ & e^{s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{s_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}_0 = \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{z}_0. \quad (3.18)$$

Das bedeutet, dass die Transitionsmatrix des transformierten Systems ebenfalls eine Diagonalmatrix ist. Für den Zustandsvektor des Originalsystems ergibt sich unter Anwendung von (3.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{z}(t) = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{z}_0 = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (3.19)$$

d.h. für die Transitionsmatrix des Originalsystems gilt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{P}^{-1}. \quad (3.20)$$

B Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix lauten $s_1 = 2$ und $s_2 = 1$, für die Matrix der Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Für die Transitionsmatrix findet man mit (3.20)

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -3e^{2t} + 3e^t \\ 2e^{2t} - 2e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{bmatrix}.$$

Aus (3.18) ist weiters zu erkennen, dass die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{0} \quad \stackrel{(3.20)}{\Rightarrow} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{0}$$

erfüllt ist, wenn alle Eigenwerte s_i der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Dies entspricht dem bereits bekannten Kriterium für die asymptotische Stabilität. Unabhängig vom Anfangszustand streben dann alle Trajektorien des autonomen Systems asymptotisch in den Ursprung des Zustandsraumes.

3.2.3 Komplexe Eigenwerte

Besitzt die diagonalähnliche Matrix \mathbf{A} komplexe Eigenwerte, so kann die Diagonalisierung prinzipiell wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben durchgeführt werden. Wie man zeigen kann, sind die zu konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gehörigen Eigenvektoren ebenfalls konjugiert komplex. Da die Matrix \mathbf{P} somit komplexe Elemente besitzt, erhält man ein transformiertes

System, bei dem $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix mit komplexen Elementen ist und die Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ ebenfalls komplexe Elemente besitzen können. Da man üblicherweise an einer Systembeschreibung interessiert ist, bei der $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ ausschließlich reelle Elemente besitzen, muss die Transformationsvorschrift leicht modifiziert werden. Die prinzipielle Vorgangsweise wird zunächst für ein System zweiter Ordnung demonstriert und danach verallgemeinert.

Für ein System zweiter Ordnung mit dem konjugiert komplexen Eigenwertpaar

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

lautet die Dynamikmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

wobei für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

gilt. Die Transformationsvorschrift wird nun so erweitert, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems anstelle der komplexen Diagonalform (3.21) die ebenfalls sehr anschauliche und aufschlussreiche, reelle Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

annimmt. Aus $\tilde{\mathbf{A}}$ können nämlich die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte *direkt* abgelesen werden. Hierfür wird für die Transformationsmatrix (3.1) der Ansatz

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{Q} \quad (3.24)$$

gewählt, d.h. für die Dynamikmatrix des transformierten Systems gilt nach (3.3)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = (\mathbf{P} \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Q} \stackrel{(3.21)}{=} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}.$$

Die gesuchte Matrix \mathbf{Q} ist also so zu bestimmen, dass

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

erfüllt ist. Die Ermittlung von \mathbf{Q} erfolgt über die Relation

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Daraus folgen nach kurzer Rechnung die Zusammenhänge

$$q_{12} = -jq_{11} \quad \text{und} \quad q_{21} = -jq_{22},$$

d.h. die Matrix besitzt die Form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Für die Determinante von \mathbf{Q} gilt

$$\det \mathbf{Q} = 2q_{11}q_{22},$$

d.h. die Matrix ist für $q_{11} \neq 0$ und $q_{22} \neq 0$ regulär. Das bedeutet, dass prinzipiell *jede* Matrix \mathbf{Q} der Form (3.26) mit $q_{11} \neq 0$ und $q_{22} \neq 0$ die Systemmatrix in die gewünschte Form (3.25) transformiert. Es wird nun gezeigt, dass die Freiheiten bei der Wahl von \mathbf{Q} dahingehend ausgenützt werden können, dass die resultierende Transformationsmatrix (3.24)

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}\mathbf{p}_1 - jq_{22}\mathbf{p}_1^* & -jq_{11}\mathbf{p}_1 + q_{22}\mathbf{p}_1^* \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

reell und strukturell stark an die Matrix \mathbf{P} angelehnt ist. Bei der Wahl der freien Parameter q_{11} und q_{22} wird die Tatsache ausgenützt, dass für die konjugiert komplexen Vektoren die Relationen

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2j}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Im} \mathbf{p}_1$$

gelten. Wählt man nun

$$q_{11} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad q_{22} = \frac{j}{2},$$

d.h.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

so ergibt sich mit (3.27) für die reelle Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 & \operatorname{Im} \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Die modifizierte Transformationsmatrix (3.29) ist also ähnlich aufgebaut wie die Matrix \mathbf{P} . Anstelle der konjugiert komplexen Eigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 besitzt \mathbf{T} nun Real- und Imaginärteil des Vektors \mathbf{p}_1 als Spalten.

B Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} lauten

$$s_1 = -1 + j2 \quad \text{und} \quad s_2 = s_1^* = -1 - j2,$$

zugehörige Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 - j2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} -1 + j2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix (3.29) gilt somit

$$\mathbf{T} = [\operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \operatorname{Im} \mathbf{p}_1] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} u, \quad y = [4 \quad -2] \mathbf{z}.$$

■

Die beschriebene Vorgangsweise kann problemlos auf Systeme höherer Ordnung übertragen werden. Die Transformationsmatrix wird dabei nach folgendem Schema aufgebaut: Zu jedem reellen Eigenwert wird ein zugehöriger Eigenvektor als Spalte zu \mathbf{T} hinzugefügt. Bei konjugiert komplexen Eigenwertpaaren werden den obigen Ausführungen entsprechend Real- und Imaginärteil eines zugehörigen Eigenvektors als Spalten zu \mathbf{T} hinzugefügt.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & -9 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 \quad -1 \quad 0] \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} lauten

$$s_1 = -2 + j3, \quad s_2 = s_1^* = -2 - j3 \quad \text{und} \quad s_3 = 1,$$

für die zugehörigen Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 + j3 \\ -5 - j12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 - j3 \\ -5 + j12 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix gilt also

$$\mathbf{T} = [\operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \operatorname{Im} \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -5 & -12 & -1 \end{bmatrix}$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = [4 \quad -3 \quad -1] \mathbf{z}$$

■

3.2.4 Mehrfache Eigenwerte

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die $n \times n$ Matrix \mathbf{A} lauter verschiedene Eigenwerte besitzt, was *hinreichend* für die Existenz von n linear unabhängigen Eigenvektoren ist. Aber auch im Falle mehrfacher Eigenwerte kann es möglich sein, dass \mathbf{A} diagonalähnlich ist und eine Diagonalisierung durchgeführt werden kann. Die Voraussetzung hierfür ist, dass es zu jedem Eigenwert s_i mit der Vielfachheit $m_i > 1$ (man sagt: „die **algebraische Vielfachheit** beträgt m_i “) auch m_i linear unabhängige Eigenvektoren gibt (man sagt: „die **geometrische Vielfachheit** beträgt m_i “). Das bedeutet, dass die Bedingung

$$\text{rang}(\mathbf{A} - s_i \mathbf{E}) = n - m_i \quad (3.30)$$

erfüllt sein muss.

B Das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -12 \\ 5 & 16 & -20 \\ 4 & 12 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll mittels einer regulären Zustandstransformation in die Diagonalform übergeführt werden. Die Eigenwerte der Systemmatrix lauten

$$s_1 = s_2 = 1 \quad \text{und} \quad s_3 = 3.$$

Das bedeutet, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes s_1 gleich 2 beträgt. Wie man leicht überprüfen kann, ist die Bedingung (3.30) erfüllt, d.h.

$$\text{rang}(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) = 1,$$

die geometrische Vielfachheit beträgt somit ebenfalls 2. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind beispielsweise durch

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Zusammen mit dem zum Eigenwert s_3 gehörigen Eigenvektor

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

und das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Man beachte, dass die Übertragungsfunktion eines diagonalisierbaren Systems - auch bei mehrfachen Eigenwerten von \mathbf{A} - immer nur *einfache* Pole besitzt. Hat also die diagonalähnliche Matrix \mathbf{A} mehrfache Eigenwerte, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ auf jeden Fall kleiner ist als die Ordnung n des zugehörigen Zustandsmodells.

B Gegeben sei das diagonalisierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \quad -2 \quad 3 \quad 4 \quad -5] \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s+3} = \frac{s^2 - 4s - 12}{(s+1)(s-2)(s+3)}.$$

■

Ist für einen mehrfachen Eigenwert die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit, so ist eine Diagonalisierung nicht möglich. Das System kann dann in die so genannte Jordan¹-Form transformiert werden, die eine Verallgemeinerung der Diagonalform darstellt.

3.3 Transformation auf Jordan-Form

3.3.1 Einführendes Beispiel

Es soll zunächst vereinfachend angenommen werden, dass die 4×4 Matrix \mathbf{A} *einen* Eigenwert $s = \lambda$ mit der algebraischen Vielfachheit 4 besitzt, für die entsprechende geometrische Vielfachheit gilt $m = 2$. Das bedeutet, dass es nur 2 linear unabhängige Eigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 gibt, für die

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

¹benannt nach dem französischen Mathematiker Marie Ennemond Camille Jordan, (1838 -1922)

erfüllt ist. Die beschriebene Transformation auf Diagonalform ist somit nicht möglich. Ausgehend von diesen beiden Eigenvektoren werden nun 4 linear unabhängige Vektoren so konstruiert, dass eine Transformation in eine etwas allgemeinere Form, die sogenannte Jordan-Form möglich ist. Die grundlegende Idee besteht darin, zusätzlich zu den Eigenvektoren so genannte Hauptvektoren („verallgemeinerte Eigenvektoren“) zur Konstruktion der Transformationsmatrix \mathbf{T} zu verwenden.

Hauptvektoren

Ein Vektor \mathbf{u}_i wird Hauptvektor der Stufe i zum Eigenwert λ genannt, wenn er der Bedingung

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{i-1} \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

genügt. Für $i = 1$ ergibt der Eigenvektor \mathbf{u}_1 , für den

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

gilt. Für den zugehörigen Hauptvektor \mathbf{u}_2 der Stufe 2 muss

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

gelten, was über die Erfüllung der Relation

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \quad (3.35)$$

gewährleistet ist. Dieses Ergebnis verdeutlicht, dass der Vektor \mathbf{u}_1 *kein* beliebiger Eigenvektor sein kann, denn zusätzlich zu (3.33) muss auch (3.35) erfüllt werden. Der Hauptvektor muss daher geeignet angesetzt werden. Analoges gilt für Hauptvektoren höherer Stufe, z.B. muss \mathbf{u}_2 nicht nur (3.35) erfüllen, sondern auch der Relation

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_3 = \lambda\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2$$

genügen. Aus diesen Überlegungen ist zu erkennen, dass die Ermittlung der Eigen- und Hauptvektoren durchaus aufwändig sein kann und die Lösung nicht eindeutig ist. Zu jedem Eigenvektor \mathbf{u}_1 kann man somit eine Kette $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i\}$ der Länge i von linear unabhängigen Vektoren berechnen. Wie man zeigen kann, sind die zu verschiedenen Ketten gehörigen Vektoren linear unabhängig und die Summe aller Kettenlängen beträgt n . Die Ermittlung der einzelnen Kettenlängen wird anhand des einführenden Beispiels ($n = 4$, $m = 2$) nun ausführlich erläutert.

Da nur 2 linear unabhängige Eigenvektoren gefunden wurden, müssen 2 Vektorketten gebildet werden. Die Summe der beiden Kettenlängen muss 4 betragen. Bei der Bestimmung der Kettenlängen müssen im vorliegenden Beispiel zwei verschiedene Fälle unterschieden werden. Während im ersten Fall beide Ketten die Länge 2 haben, gibt es im zweiten Fall eine Kette der Länge 3 und eine Kette der Länge 1.

Fall I: Hier wird davon ausgegangen, dass

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 = 0,$$

was bedeutet, dass es zu den 2 Eigenvektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{v}_1 je einen vHauptvektor \mathbf{u}_2 und \mathbf{v}_2 der Stufe 2 gibt, also

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1. \quad (3.36)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \stackrel{(3.31,3.36)}{=} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{u}_1 & \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 & \lambda\mathbf{v}_1 & \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \end{bmatrix},$$

woraus unmittelbar der Zusammenhang

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

resultiert.

Jordanblock

Eine $k \times k$ Matrix

$$\mathbf{J}_{\lambda,k} := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

wird Jordanblock zum Eigenwert λ genannt.

Das in (3.37) dargestellte Ergebnis kann unter Verwendung von Jordanblöcken auch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,2} \end{bmatrix},$$

offensichtlich entspricht die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren (geometrische Vielfachheit) der Zahl der Jordanblöcke, die Dimensionen der Jordanblöcke entspricht den Längen der Vektorketten. Die Summe der Kettenlängen entspricht der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes λ .

B (Fall I) Gegeben sei das autonome System 4. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Mittels einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ soll das System in die Jordan-Form transformiert werden.

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} können über die Relation

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{E}) = (s - 3)^4 = 0$$

ermittelt werden, sie lauten

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \lambda = 3,$$

d.h. die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ beträgt 4. Aus

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

folgt, dass die geometrische Vielfachheit 2 beträgt, zwei offensichtliche Eigenvektoren sind durch

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Wegen

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

gibt es zwei Hauptvektoren \mathbf{u}_2 und \mathbf{v}_2 der Stufe 2. Die Vektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{v}_1 werden als Linearkombination der Eigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 angesetzt, d.h.

$$\mathbf{u}_1 = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_1 = \gamma\mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \gamma + \delta \\ \gamma + \delta \\ \delta \\ \gamma + \delta \end{bmatrix},$$

wobei α , β , γ und δ geeignet zu wählende reelle Konstanten sind. Die Vektoren \mathbf{u}_2 und \mathbf{u}_1 bzw. \mathbf{v}_2 und \mathbf{v}_1 müssen nun den Relationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \gamma + \delta \\ \gamma + \delta \\ \delta \\ \gamma + \delta \end{bmatrix}$$

genügen. Eine Möglichkeit, die Vektoren \mathbf{u}_2 und \mathbf{v}_2 zu bestimmen, lautet

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix},$$

wobei \mathbf{u}_2 und \mathbf{v}_2 linear unabhängig sein müssen. Mit der Wahl $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ und $\delta = 1$ erhält man die 4 linear unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für die gesuchte Transformationsmatrix \mathbf{T} erhält man somit

$$\mathbf{T} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. für die Dynamikmatrix des transformierten Systems gilt

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{3,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{3,2} \end{bmatrix}$$

■

Fall II: Hier soll

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^2 = 1 \quad \text{und} \quad \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^3 = 0$$

gelten, d.h. es gibt einen Hauptvektor \mathbf{u}_2 der Stufe 2 und einen Hauptvektor \mathbf{u}_3 der Stufe 3., also

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \mathbf{u}_3 = \lambda \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{A} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{v}_1] \stackrel{(3.31, 3.36)}{=} [\lambda \mathbf{u}_1 \quad \lambda \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \quad \lambda \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 \quad \lambda \mathbf{v}_1],$$

woraus unmittelbar der Zusammenhang

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\lambda,1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{v}_1] \quad (3.38)$$

folgt.

B (*Fall II*) Gegeben sei das autonome System 4. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Mittels einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ soll das System in die Jordan-Form transformiert werden.

Die Eigenwerte können über die Relation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (\lambda - 3)^4 = 0$$

ermittelt werden, sie lauten

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda = 3,$$

d.h. die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ beträgt also wieder 4. Aus

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

folgt, dass die geometrische Vielfachheit 2 beträgt, zwei offensichtliche Eigenvektoren sind durch

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Wegen

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^2 = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

gibt es einen Hauptvektor \mathbf{u}_2 der Stufe 2. Der Eigenvektor \mathbf{u}_1 wird also als Linearkombination der Eigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 angesetzt, d.h.

$$\mathbf{u}_1 = \alpha \mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

wobei α und β geeignet zu wählende reelle Konstanten sind. Die Vektoren \mathbf{u}_2 und \mathbf{u}_1 müssen nun den Relationen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

woraus unmittelbar $\alpha = \beta$ folgt. Man beachte, dass \mathbf{u}_2 auch die Beziehung

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2$$

erfüllen muss, d.h. die ersten beiden Elemente von \mathbf{u}_2 müssen identisch sein, das dritte Element muss 0 sein, also

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 0 \\ \gamma - \alpha \end{bmatrix},$$

wobei γ eine geeignet zu wählende Konstante ist. Der Vektor \mathbf{u}_3 kann nun aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 0 \\ \gamma - \alpha \end{bmatrix},$$

ermittelt werden. Mit der Wahl $\alpha = 1$ und $\gamma = 0$ ergeben sich somit die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor \mathbf{v}_1 kann nun als beliebige Linearkombination der Eigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 angesetzt werden, er muss lediglich linear unabhängig zu \mathbf{u}_1 sein. Dies ist durch die Wahl

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gewährleistet. Für die gesuchte Transformationsmatrix \mathbf{T} erhält man somit

$$\mathbf{T} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{v}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. für die Dynamikmatrix des transformierten Systems gilt

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{3,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{3,1} \end{bmatrix}.$$

■

Aus den bisherigen Erkenntnissen kann nun geschlossen werden, dass bei einem System 4. Ordnung mit einem Eigenwert λ der algebraischen Vielfachheit 4 folgende Möglichkeiten bestehen.

Fall A: Die geometrische Vielfachheit beträgt 4, d.h. es gibt 4 linear unabhängige Eigenvektoren. Somit ist die Transformation auf Diagonalform möglich, es gibt also 4 Jordanblöcke, d.h.

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} J_{\lambda,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda,1} \end{bmatrix}.$$

Fall B: Die geometrische Vielfachheit beträgt 3, d.h. es gibt 3 linear unabhängige Eigenvektoren und eine Eigenvektorkette der Länge 2, es gibt somit 3 Jordanblöcke, d.h.

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\lambda,1} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & J_{\lambda,1} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} J_{\lambda,1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,2} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & J_{\lambda,1} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} J_{\lambda,1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & J_{\lambda,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,2} \end{bmatrix}.$$

Fall C: Die geometrische Vielfachheit beträgt 2, d.h. es gibt 2 linear unabhängige Eigenvektoren und eine Eigenvektorkette der Länge 1 und eine Kette der Länge 3 oder zwei Ketten der Länge 2, d.h.

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\lambda,1} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} J_{\lambda,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,3} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\lambda,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,2} \end{bmatrix}.$$

Fall D: Die geometrische Vielfachheit beträgt 1, d.h. es gibt nur 1 linear unabhängigen Eigenvektor und somit *eine* Eigenvektorkette der Länge 4. d.h. *einen* Jordanblock, also

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{J}_{\lambda,4}.$$

3.3.2 Allgemeiner Fall

Um die Transformationsmatrix zu bestimmen, muss exakt so vorgegangen werden wie im einführenden Beispiel. Zunächst werden die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} und ihre algebraischen Vielfachheiten bestimmt. Aus den zugehörigen geometrischen Vielfachheiten ergibt sich die Zahl der Jordanblöcke zu einem Eigenwert. Die Längen der Eigenvektorketten, d.h. die Dimensionen der Jordanblöcke, ergeben sich aus den im einführenden Beispiel besprochenen Rangbedingungen. Man kann zeigen, dass die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Hauptvektoren linear unabhängig sind. Somit ist gewährleistet, dass die Matrix \mathbf{T} regulär ist. Man beachte, dass in vielen Fällen die Transformationsmatrix \mathbf{T} von untergeordnetem Interesse ist, vielmehr ist man nur an der Jordan-Form $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ interessiert. Da dies *ohne* explizite Berechnung der Eigenvektorketten möglich ist, stellt die Ermittlung von \mathbf{J} im Allgemeinen kein großes Problem dar.

B Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_5 = s_5 = \lambda_2 = 3.$$

Die algebraische Vielfachheit von λ_1 beträgt 4, die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 2. Aus

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) = 4 \quad \text{und} \quad \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = 5$$

folgt, dass die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 2 beträgt, die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist 1. Das bedeutet, dass es 2 Eigenvektorketten (zwei Eigenvektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{v}_1) zu λ_1 und 1 Kette (Eigenvektor \mathbf{w}_1) zu λ_2 gibt. Aus

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^2 = 3 \quad \text{und} \quad \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^2 = 4$$

kann geschlossen werden, dass es zusätzlich zu dem Eigenvektor \mathbf{u}_1 einen Hauptvektor \mathbf{u}_2 gibt, weitere Hauptvektoren der Stufe 2 zu λ_1 gibt es nicht. Die Kette, beginnend mit \mathbf{w}_1 hat offensichtlich die Länge 2, was durch

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^3 = 4$$

bestätigt wird. Nun muss es noch einen Hauptvektor \mathbf{u}_3 geben, was durch

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})^3 = 2$$

bestätigt wird. Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2]$$

gilt dann

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{-1,3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{-1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{3,2} \end{bmatrix}$$

Ein System in Diagonalform entspricht einem System in Jordanform, wobei alle Jordanblöcke skalare Größen sind. Die allgemeine Struktur eines Systems in Jordanform stellt also eine Verallgemeinerung der bekannten Diagonalstruktur dar. Dies wird für ein System dritter Ordnung mit einem Eigenwert $s_1 = s_2 = s_3 = \lambda$ der algebraischen Vielfachheit 3 veranschaulicht. Aus obigen Ausführungen geht hervor, dass prinzipiell drei unterschiedliche Fälle zu unterscheiden sind. Im ersten Fall beträgt die geometrische Vielfachheit ebenfalls 3, d.h. es gibt 3 linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Das transformierte System liegt somit in Diagonalform vor. Die zugehörige Struktur ist in Bild 3.3 dargestellt, wobei $\boldsymbol{\rho}_1^T, \boldsymbol{\rho}_2^T, \boldsymbol{\rho}_3^T$ wieder die zugehörigen Links-Eigenvektoren bezeichnen. Im zweiten Fall beträgt die algebraische Vielfachheit 2, d.h. man erhält zwei Eigenvektorketten $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ und $\{\mathbf{v}_1\}$. Die Struktur des transformierten Systems ist in Bild 3.4 dargestellt, wobei $\{\gamma_2, \gamma_1\}$ und $\{\chi_1\}$

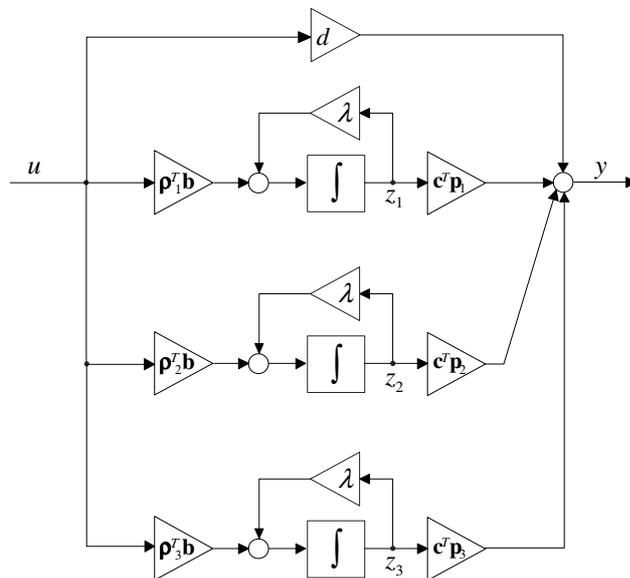


Bild 3.3: System dritter Ordnung in Diagonalform

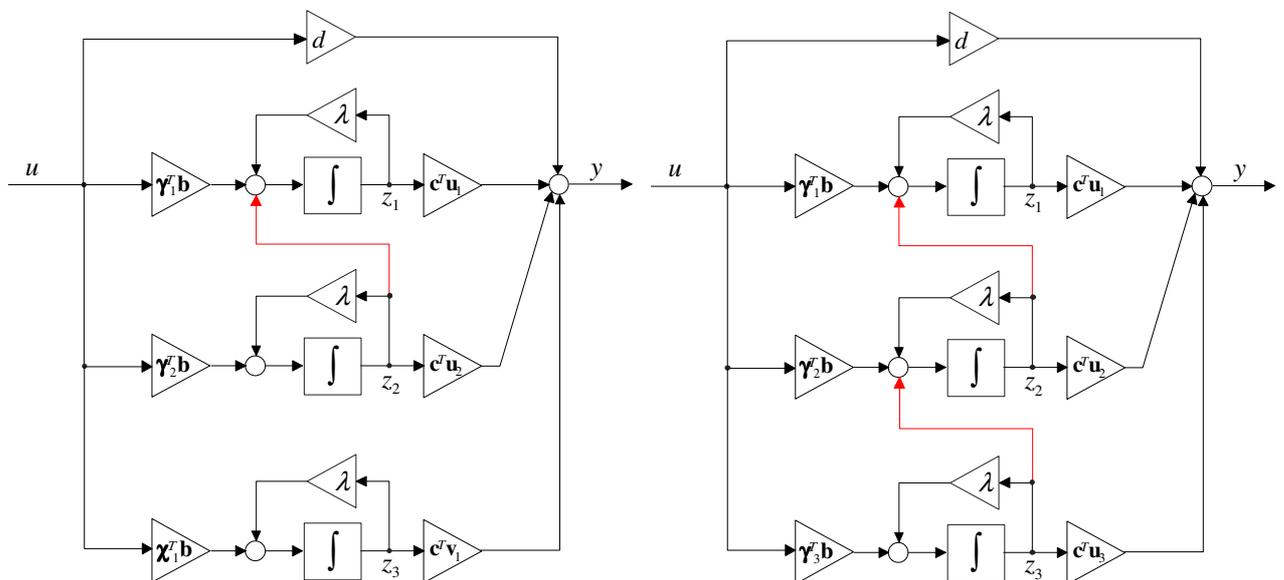


Bild 3.4: System dritter Ordnung in Jordanform (links: 2 Jordanblöcke, rechts: 1 Jordanblock)

die zugehörigen Links-Eigenvektorketten darstellen. Der geringfügige strukturelle Unterschied zur Diagonalform ist in roter Farbe eingezeichnet. Im dritten Fall beträgt die algebraische Vielfachheit nur 1, d.h. man erhält eine Eigenvektorkette $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ mit der zugehörigen Links-Eigenvektorkette $\{\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1\}$.

Besitzt ein in Jordan-Form vorliegendes System mehr als einen Jordanblock zu einem Eigenwert s_i , so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ auf jeden Fall kleiner ist als die Ordnung n des zugehörigen Zustandsmodells.

B Gegeben sei das System in Jordan-Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 4 \quad -5] \mathbf{x}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s - 9}{(s - 2)^3}.$$

■

3.3.3 Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\tilde{\phi}(t)$ des transformierten Systems kann aufgrund der Dynamikmatrix in Jordanstruktur relativ leicht ermittelt werden. Die zu den einzelnen Jordanblöcken gehörigen Teilsysteme sind voneinander entkoppelt. Unter der Annahme von $u = 0$ gilt für ein zum Jordanblock $\mathbf{J}_{\lambda,k}$ gehöriges Teilsystem

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{J}_{\lambda,k} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0). \quad (3.39)$$

Der Jordanblock kann nun in der Form

$$\mathbf{J}_{\lambda,k} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{N}} = \lambda \mathbf{E} + \mathbf{N} \quad (3.40)$$

dargestellt werden, wobei \mathbf{N} eine nilpotente Matrix ist, d.h. $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$. Für die Transitionsmatrix gilt nun

$$\tilde{\phi}_{\lambda,k}(t) = e^{(\lambda\mathbf{E}+\mathbf{N})t} = e^{\lambda\mathbf{E}t} e^{\mathbf{N}t} = e^{\lambda t} \left(\mathbf{E} + \mathbf{N}t + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{N}^{k-1} \right). \quad (3.41)$$

Setzt man nun in (3.41) die Matrix \mathbf{N} aus (3.40) ein, so erhält man unmittelbar

$$\tilde{\phi}_{\lambda,k}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^k}{k!}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ & & e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Die Transitionsmatrix $\tilde{\phi}(t)$ des (transformierten) Gesamtsystems kann nun aus den Transitionsmatrizen der Teilsysteme entsprechend zusammengesetzt werden. Die Transitionsmatrix des Originalsystems ergibt sich durch Rücktransformation zu

$$\phi(t) = \mathbf{T} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{T}^{-1}. \quad (3.43)$$

Wie man aus (3.42) erkennen kann, treten in der Transitionsmatrix nun mit Potenzen der Zeit gewichtete Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ auf.

B Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Wie bereits gezeigt wurde, lautet das auf Jordanform transformierte System

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{-1,3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{-1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{3,2} \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

Für die Transitionsmatrix $\tilde{\phi}(t)$ folgt aus (3.42) unmittelbar

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{-1,3}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\phi}_{-1,1}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\phi}_{3,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2!}e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

B Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -12 & -16 & -12 & -5 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$s_1 = -1, \quad s_{2,3} = -1 \pm j, \quad s_{4,5} = -1 \pm j.$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert s_1 lautet

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aus

$$\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = 4$$

folgt, dass es zum doppelten Eigenwert $s_2 = s_4 = \lambda_2 = -1 + j$ nur einen Eigenvektor gibt, dieser lautet

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 - j \\ 2j \\ -2 - 2j \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Da es nur einen Haupteigenvektor gibt, kann

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_2$$

gesetzt werden. Der Nebeneigenvektor \mathbf{v}_2 muss die Relation

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

erfüllen.

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1.5806 - 1.5806j \\ +2.1613 \\ -1.1613 + 1.1613j \\ -0.3226j \\ -1.6774 - 1.6774j \end{bmatrix}$$

Da die generalisierten Eigenvektoren zum Eigenwert $-1 \pm j$ konjugiert komplex zu \mathbf{v}_1 bzw. \mathbf{v}_2 sind, gilt für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \text{Re } \mathbf{v}_1 \quad \text{Im } \mathbf{v}_1 \quad \text{Re } \mathbf{v}_2 \quad \text{Im } \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1.5806 & -1.5806 \\ -1 & 1 & -1 & 2.1613 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1.1613 & 1.1613 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & -0.3226 \\ 1 & 4 & 0 & -1.6774 & -1.6774 \end{bmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{-1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{-1\pm j,4} \end{bmatrix}$$

■

Kapitel 4

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

4.1 Einführung

Wie sich in der Vorlesung „Regelungstechnik“ zeigen wird, sind die Begriffe **Steuerbarkeit** und **Beobachtbarkeit** beim Entwurf von so genannten Zustandsreglern und Zustandsbeobachtern von zentraler Bedeutung. Stark vereinfacht besagt die Steuerbarkeit eines Systems, dass über seine Eingangsgröße jede Zustandsvariable beeinflusst werden kann. Im Gegensatz dazu bedeutet die Beobachtbarkeit eines Systems, dass in seiner Ausgangsgröße Information über jede Zustandsvariable enthalten ist.

4.2 Steuerbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (4.1)$$

steuerbar, wenn durch geeignete Wahl der Eingangsgröße $u(t)$ der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ in endlicher Zeit T aus einem beliebig vorgebbaren Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ in den beliebig vorgebbaren Endzustand $\mathbf{x}(T)$ bewegt werden kann.

Man beachte, dass die Eigenschaft der Steuerbarkeit lediglich aussagt, ob ein Übergang von \mathbf{x}_0 nach $\mathbf{x}(T)$ in endlicher Zeit prinzipiell möglich ist. Wie $u(t)$ zu wählen ist und wie der zugehörige Verlauf von $\mathbf{x}(t)$ für $0 < t < T$ aussieht, bleibt offen.

Hinweis: In der einschlägigen Literatur wird mitunter zwischen der sogenannten Erreichbarkeit und der (etwas anders als hier definierten) Steuerbarkeit unterschieden. Diese - im zeitdiskreten Fall etwas spitzfindige - Unterscheidung wird durch die hier eingeführte Definition der Steuerbarkeit umgangen.

4.2.1 Kriterium nach Kalman

Der Zustand $\mathbf{x}(T)$ kann für das System (4.1) bekanntlich gemäß

$$\mathbf{x}(T) = \phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \phi(T - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

ermittelt werden. Aus (4.2) folgt daraus unmittelbar

$$\phi(T) \int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \mathbf{x}(T) - \phi(T) \mathbf{x}_0. \quad (4.3)$$

Da die Matrix $\phi(T)$ jedenfalls regulär ist, folgt aus (4.3) die Bedingung

$$\int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \underbrace{\phi(-T) \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_0}_{=:\mathbf{q}} \quad (4.4)$$

und \mathbf{q} ist ein beliebiger Vektor. Stellt man die Transitionsmatrix $\phi(-\tau)$ als Matrix-Exponentialreihe dar, d.h.

$$\phi(-\tau) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\tau + \mathbf{A}^2 \frac{\tau^2}{2!} \mp \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!}, \quad (4.5)$$

so erhält man die Beziehung

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{b} \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau = \mathbf{q}. \quad (4.6)$$

Definiert man die - bei vorgegebener Wahl von u - konstanten Größen

$$\alpha_i := \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau,$$

so lautet die Bedingung für Steuerbarkeit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathbf{A}^i \mathbf{b} = \mathbf{q}. \quad (4.7)$$

Da \mathbf{q} ein beliebiger (konstanter) Vektor ist, müssen die Vektoren \mathbf{b} , $\mathbf{A}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^3\mathbf{b}$, ... den gesamten n -dimensionalen Raum aufspannen. Das bedeutet, dass es n linear unabhängige Vektoren der Form $\mathbf{A}^i\mathbf{b}$ mit $i = 0, 1, 2, \dots$ gibt. Man kann zeigen, dass dies nur die ersten n Vektoren \mathbf{b} , $\mathbf{A}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ sein können. Nimmt man nämlich an, dass für $\delta < n$ die Bedingungen

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \delta \quad \text{und} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \delta$$

gelten, d.h. $\mathbf{A}^\delta \mathbf{b}$ ist linear abhängig, also

$$\mathbf{A}^\delta \mathbf{b} = k_0 \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b}, \quad (4.8)$$

so ist auch $\mathbf{A}^{\delta+1} \mathbf{b}$ linear abhängig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\delta+1} \mathbf{b} &= \mathbf{A} (k_0 \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b}) = k_0 \mathbf{A} \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A}^2 \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^\delta \mathbf{b} = \\ &= \tilde{k}_0 \mathbf{b} + \tilde{k}_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + \tilde{k}_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b} \end{aligned}$$

Die Steuerbarkeit ist somit gegeben, wenn die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = n \quad (4.9)$$

erfüllt ist. Hierbei handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Definiert man nun die so genannte **Steuerbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{S}_u := \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

so kann das Steuerbarkeitskriterium nach Kalman¹ prägnant formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix (4.10) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{b}) steuerbar ist.

B Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Für die Steuerbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Steuerbarkeit des Systems. ■

Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Führt man eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$ durch, so erhält man die transformierte Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}} u. \quad (4.11)$$

Die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_u &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} & \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{b}} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \stackrel{(4.11)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}_u. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\tilde{\mathbf{S}}_u$ genau dann regulär ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_u des Originalsystems regulär ist.

¹benannt nach dem ungarischen Elektrotechniker Rudolf Emil Kálmán (geboren 1930).

4.2.2 Kriterium nach Hautus

Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die Systemmatrix \mathbf{A} lauter *verschiedene* Eigenwerte besitzt. Zu jedem der n Eigenwerte s_i gibt es je einen (Rechts-) Eigenvektor \mathbf{p}_i bzw. einen Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i^T$, d.h. es gilt

$$\text{rang}(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = n - 1 \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Da die n Eigenvektoren linear unabhängig sind, kann das System (4.1) mittels der regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$, wobei $\mathbf{T} = \mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$ in die Diagonalform

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u \quad (4.13)$$

transformiert werden. Gilt für die i -te Komponente des (transformierten) Eingangsvektors

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (4.14)$$

so kann offensichtlich der Verlauf der i -ten Zustandsgröße des transformierten Systems durch u nicht beeinflusst werden und es liegt sicher kein steuerbares System vor. Gilt hingegen

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.15)$$

so lautet die Steuerbarkeitmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & \dots & s_1^{n-1} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & \dots & s_2^{n-1} \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & \dots & s_n^{n-1} \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Die Links-Eigenvektoren können ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt werden, dass $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 1$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Die Matrix $\tilde{\mathbf{S}}_u$ ist somit eine so genannte Vandermonde²-Matrix der Form

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & \dots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & & s_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & s_n & \dots & s_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Da die Eigenwerte s_1, \dots, s_n voraussetzungsgemäß voneinander verschieden sind, ist $\tilde{\mathbf{S}}_u$ regulär, System (4.1) ist somit steuerbar.

Man beachte, dass die hier für den Fall verschiedener Eigenwerte hergeleiteten Ergebnisse auch uneingeschränkt für den Fall mehrfacher Eigenwerte gelten. Für den Fall mehrfacher Eigenwerte ist (4.12) eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit des Systems. Das

²benannt nach dem französischen Mathematiker Alexandre T. Vandermonde (1735 - 1796)

bedeutet, dass zu jedem mehrfachen Eigenwert nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren darf und in weiterer Konsequenz in der Dynamikmatrix des transformierten Systems nur *ein* entsprechender Jordanblock vorkommt. Die Bedingung (4.15) bedeutet, dass das zur *letzten* Zeile eines Jordanblocks gehörige Element des (transformierten) Eingangsvektors von Null verschieden sein muss.

Zusammenfassend kann das Hautus³-Kriterium folgendermaßen formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn kein Links-Eigenvektor der Matrix \mathbf{A} auf den Eingangsvektor \mathbf{b} normal steht.

Alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums

Einer alternativen Formulierung des Kriteriums liegt die Betrachtung der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}^T \quad (4.18)$$

zugrunde, d.h. der Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$ steht normal auf die Spalten der Matrix $(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A})$, wobei $i = 1, \dots, n$. Aufgrund von (4.12) wird durch die Bedingung

$$\text{rang} \left[s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} : \mathbf{b} \right] = n \quad (4.19)$$

gewährleistet, dass der Links-Eigenvektor nicht orthogonal zu \mathbf{b} ist.

Damit lautet die alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn für jeden Eigenwert s_i der Matrix \mathbf{A} die Bedingung (4.19) erfüllt ist.

4.3 Beobachtbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (4.20)$$

beobachtbar, wenn aus der Kenntnis von $u(t)$ und $y(t)$ in einem *endlichen* Zeitintervall $[0, T]$ der unbekannte Anfangszustand \mathbf{x}_0 bestimmt werden kann.⁴

Der Verlauf der Ausgangsgröße als Reaktion auf den Anfangszustand und die Eingangsgröße lautet

$$y(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + du(t),$$

wobei $\boldsymbol{\phi}(t)$ die zu (4.20) gehörige Transitionsmatrix ist. Die von der (gegebenen) Eingangsgröße u abhängigen Anteile des Ausdruckes sind ebenso bekannt wie die Ausgangsgröße y . Stellt man die obige Gleichung entsprechend um, so erhält man

$$\mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 = \underbrace{y(t) - \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau - du(t)}_{:=\hat{y}(t)}.$$

³benannt nach dem niederländischen Mathematiker Malo Hautus (geboren 1940).

⁴Man beachte, dass dabei T prinzipiell beliebig klein gemacht werden kann.

Das bedeutet, dass aus der Relation $\mathbf{c}^T \phi(t) \mathbf{x}_0 = \hat{y}(t)$ (über ein endliche Intervall betrachtet) der Anfangszustand ermittelt werden soll. Diese Aufgabenstellung entspricht formal der Aufgabe, aus dem Verlauf der Ausgangsgröße des autonomen Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.21)$$

den Anfangszustand \mathbf{x}_0 zu ermitteln. Die Beobachtbarkeit von (4.20) kann also anhand des Systems (4.21) untersucht werden.

4.3.1 Kriterium nach Kalman

Differenziert man die Ausgangsgröße

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

nach der Zeit, so erhält man mit (4.21)

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}, \quad \dots \quad \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x},$$

bzw. in Matrixnotation

$$\begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dieses Ergebnisse besagt, dass der Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt t , also auch für $t = 0$ genau dann eindeutig ermittelt werden kann, wenn die so genannte **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{B}_y := \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

den Höchststrang besitzt. Damit lautet das Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman: Das System (4.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix (4.22) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{c}) beobachtbar ist.

B Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll auf Beobachtbarkeit untersucht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Beobachtbarkeit des Systems. ■

Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Die reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ führt auf die Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z}, \quad y = \underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T}\mathbf{z}. \quad (4.23)$$

Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix gilt dann

$$\tilde{\mathbf{B}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{(4.23)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{T} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y \mathbf{T}$$

Das bedeutet, dass $\tilde{\mathbf{B}}_y$ genau dann regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{B}_y des Originalsystems regulär ist.

4.3.2 Kriterium nach Hautus

Mit analogen Überlegungen wie bei der Steuerbarkeit kann das Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus hergeleitet werden. Es zeigt sich, dass das System (4.20) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Eigenvektor \mathbf{p}_i der Matrix \mathbf{A} normal auf den Ausgangsvektor \mathbf{c}^T steht.

Äquivalent ist die alternative Formulierung des Kriteriums nach Hautus: Das System (4.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \quad (4.24)$$

für alle Eigenwerte s_i von \mathbf{A} erfüllt ist.

Analog zur Steuerbarkeit gelten die gefundenen Ergebnisse auch hier uneingeschränkt im Falle mehrfacher Eigenwerte. Zu jedem mehrfachen Eigenwert darf nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren, d.h. in der Dynamikmatrix des transformierten Systems kommt nur *ein* entsprechender Jordanblock vor. Die Bedingung $\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \neq 0$ bedeutet, dass das zur *ersten* Spalte eines Jordanblocks gehörige Element des (transformierten) Ausgangsvektors von Null verschieden sein muss.

Kapitel 5

Phasenportrait für Systeme zweiter Ordnung

5.1 Einführung

Für Systeme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) \quad (5.1)$$

zweiter Ordnung können die Verläufe der Trajektorien in der Zustandsebene - man spricht auch vom **Phasenportrait** eines Systems - anschaulich dargestellt und klassifiziert werden.

5.2 A ist diagonalähnlich

Hier kann der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ gemäß (3.19) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0}_{=:\boldsymbol{\alpha}} = \alpha_1 e^{s_1 t} \mathbf{p}_1 + \alpha_2 e^{s_2 t} \mathbf{p}_2 \quad (5.2)$$

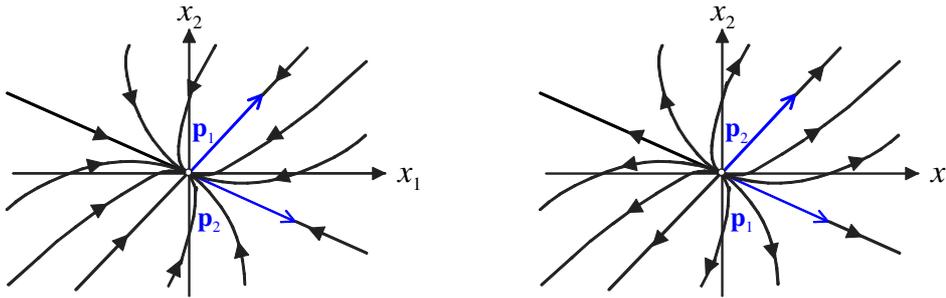
dargestellt werden. Hierbei ist $\boldsymbol{\alpha} := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$ ein konstanter Spaltenvektor. Der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ kann also zu jedem Zeitpunkt als Linearkombination der beiden linear unabhängigen Eigenvektoren dargestellt werden. Daraus können grundlegende Eigenschaften der Lösungskurven von (5.1) abgeleitet werden. Wie man aus (5.2) erkennen kann, verläuft eine Trajektorie, die auf einer Eigenrichtung startet, für alle Zeiten längs dieser.

5.2.1 Einfache Eigenwerte

Zunächst wird angenommen, dass die beiden Eigenwerte s_1 und s_2 von einander verschieden und reell sind. Hierbei sind prinzipiell fünf verschiedene Eigenwertkonfigurationen zu unterscheiden. Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen ist das Ergebnis (5.2), wobei für $n = 2$ gilt:

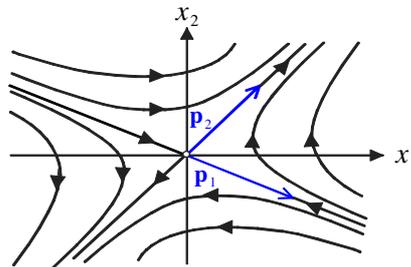
$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} \mathbf{p}_1 + \alpha_2 e^{s_2 t} \mathbf{p}_2. \quad (5.3)$$

Zu jedem Zeitpunkt t kann man $\mathbf{x}(t)$ in Komponenten bezüglich \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 zerlegen. Im Fall $s_1 < s_2 < 0$ nehmen beide Komponenten exponentiell ab, wobei die \mathbf{p}_1 -Komponente schneller gegen Null strebt. Die einzige Ruhelage \mathbf{x}_R im Ursprung nennt man dann einen **stabilen Knoten**. Umgekehrt spricht man im Fall $0 < s_1 < s_2$ von einem **instabilen Knoten**, hier nimmt die \mathbf{p}_2 -Komponente schneller zu als die \mathbf{p}_1 -Komponente. Die entsprechenden Phasenportraits sind in den beiden nachfolgenden Abbildungen dargestellt.



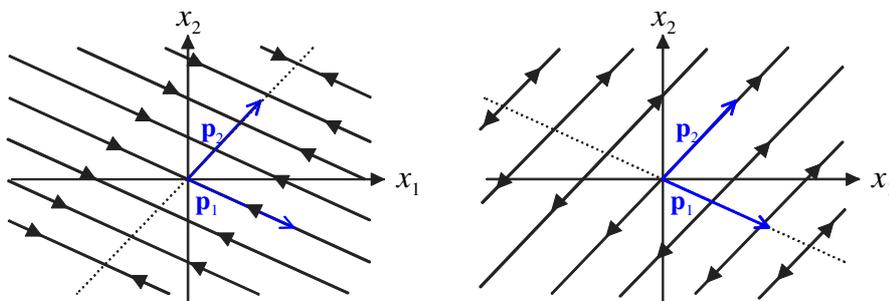
Stabiler Knotenpunkt ($s_1 < s_2 < 0$) Instabiler Knotenpunkt ($0 < s_1 < s_2$)

Wenn die \mathbf{p}_1 -Komponente abnimmt, während die \mathbf{p}_2 -Komponente zunimmt ($s_1 < 0 < s_2$) so handelt es sich um einen (instabilen) **Sattelpunkt**, wie er in der nachfolgenden Abbildung dargestellt ist.



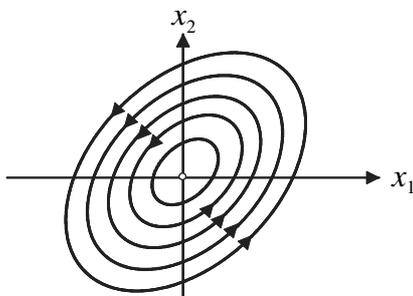
Sattelpunkt ($s_1 < 0 < s_2$)

Wenn einer der beiden Eigenwerte Null ist, dann existieren unendlich viele Ruhelagen. Die beiden möglichen Fälle sind in der folgenden Abbildung dargestellt, wobei die **Ruhezone** jeweils als strichlierte Gerade eingezeichnet ist.



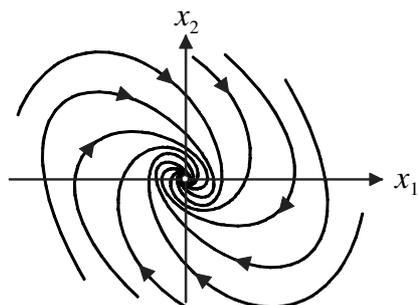
Stabile Ruhezone ($s_1 < s_2 = 0$) Instabile Ruhezone ($0 = s_1 < s_2$)

Besitzt die Dynamikmatrix ein Paar konjugiert komplexe Eigenwerte, d.h. $s_1 = s_2^*$, so existiert wieder genau *eine* Ruhelage im Ursprung der Zustandsebene. Bei verschwindenden Realteilen spricht man von einem Wirbelpunkt, wie er in der nachfolgenden Abbildung angedeutet ist.

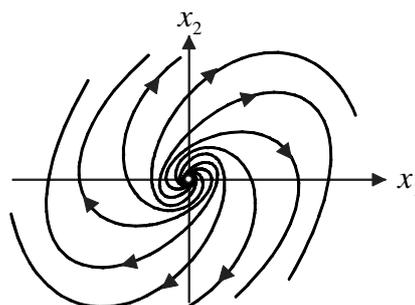


Wirbelpunkt ($s_1 = s_2^*$ und $\text{Re}s_1 = 0$)

Ist der Realteil der beiden Eigenwerte größer Null, so handelt es sich um einen **instabilen Strudelpunkt**, bei negativem Realteil um einen **stabilen Strudelpunkt**, siehe Abbildung.



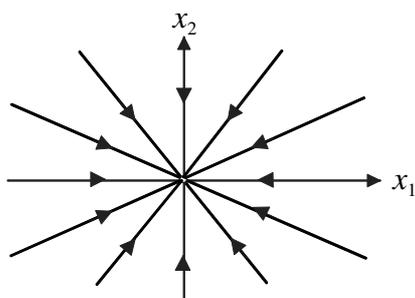
Stabiler Strudel ($s_1 = s_2^*$ und $\text{Re}\{s_1\} < 0$)



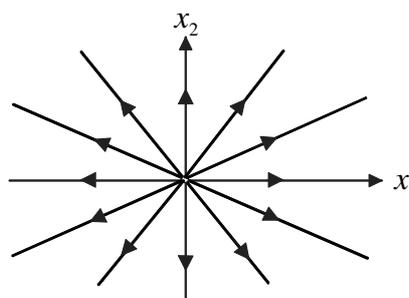
Instabiler Strudel ($s_1 = s_2^*$ und $\text{Re}\{s_1\} > 0$)

5.2.2 Mehrfache Eigenwerte

Hier sind bei einem System zweiter Ordnung genau drei Fälle zu unterscheiden, wobei wieder vorausgesetzt wird, dass es jeweils zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Auf jeden Fall sind die Eigenwerte $s_1 = s_2 = \lambda$ reell. Für $\lambda < 0$ ergibt sich der in der nachfolgenden Abbildung dargestellte **stabile Stern**, für $\lambda > 0$ ergibt sich ein **instabiler Stern**.



Stabiler Stern ($\lambda < 0$)



Instabiler Stern ($\lambda > 0$)

Wenn $s_1 = s_2 = 0$ gilt, so ist die Dynamikmatrix die Nullmatrix und *jeder* Punkt der Zustandsebene ist eine Ruhelage.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A} besitzt ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega. \quad (5.5)$$

Der qualitative Verlauf der Trajektorien kann im vorliegenden Fall besonders anschaulich ermittelt werden, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht, d.h. man setzt

$$x_1 = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad x_2 = r \sin \varphi. \quad (5.6)$$

Hierbei repräsentieren die reellwertigen Größen $r(t)$ und $\varphi(t)$ den (positiven) Radius sowie den Drehwinkel. Für die zeitlichen Ableitungen der Zustandsgrößen ergibt sich

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi. \quad (5.7)$$

Durch Einsetzen von (5.6) und (5.7) in das mathematische Modell (5.4) ergibt sich

$$\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = \sigma r \cos \varphi + \omega r \sin \varphi, \quad (5.8)$$

$$\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = -\omega r \cos \varphi + \sigma r \sin \varphi. \quad (5.9)$$

Multipliziert man (5.8) mit $(-\sin \varphi)$ und (5.9) mit $\cos \varphi$ und addiert anschließend die resultierenden Ausdrücke, so erhält man nach einer Division durch r die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega. \quad (5.10)$$

Analog erhält man nach einer Multiplikation von (5.8) mit $\cos \varphi$ bzw. von (5.9) mit $(-\sin \varphi)$ und anschließender Addition

$$\frac{dr}{dt} = \sigma r. \quad (5.11)$$

Unter Berücksichtigung des Anfangszustandes \mathbf{x}_0 , der in Polarkoordinaten durch r_0 und φ_0 charakterisiert ist, erhält man aus (5.10) und (5.11)

$$r(t) = r_0 e^{\sigma t} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \omega t. \quad (5.12)$$

Zunächst wird angenommen, dass $\omega \neq 0$ gilt. Für $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$) liegt dann ein stabiler (instabiler) Strudel vor, der für $\omega < 0$ ($\omega > 0$) in mathematisch positive (negative) Richtung durchlaufen wird. Für $\sigma = 0$ liegen Wirbelpunkte vor. Die Trajektorien sind Kreise, die für $\omega < 0$ ($\omega > 0$) in mathematisch positive (negative) Richtung durchlaufen werden. Für $\omega = 0$ besitzt die (in Diagonalform vorliegende) Systemmatrix einen doppelten reellen Eigenwert. Das bedeutet, dass $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$) zu einem stabilen (instabilen) Stern führt, für $\sigma = 0$ ist jeder Punkt der Zustandsebene eine Ruhelage. In Bild 5.1 sind zwei Fälle exemplarisch dargestellt. ■

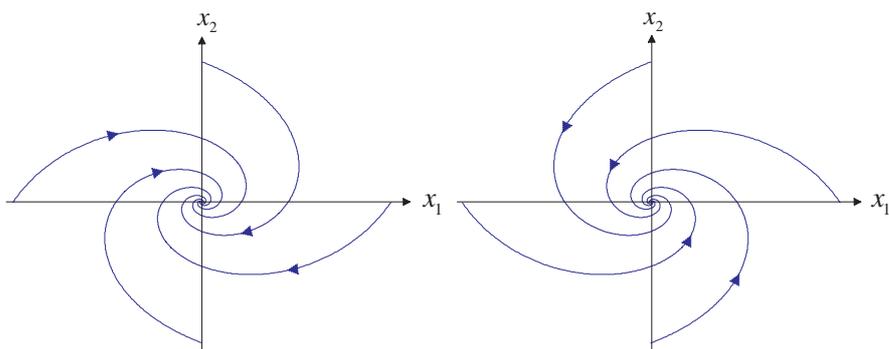


Bild 5.1: Verlauf der Trajektorien von (5.4) für $\sigma < 0$, $\omega > 0$ (linkes Bild) und $\sigma < 0$, $\omega < 0$ (rechtes Bild)

5.3 A ist nicht diagonalähnlich

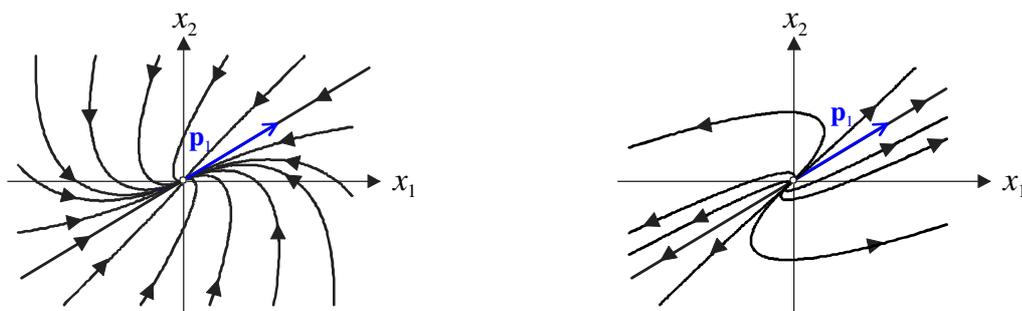
In diesem Fall besitzt die Matrix \mathbf{A} die Eigenwerte $s_1 = s_2 = \lambda$ und es gibt nur einen linear unabhängigen Eigenvektor \mathbf{p}_1 , d.h. die algebraische Vielfachheit beträgt 2, die geometrische Vielfachheit hingegen nur 1. Gemäß (3.42) und (3.43) kann dann $\mathbf{x}(t)$ folgendermaßen ermittelt werden:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0}_{=:\alpha} = (\alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}) \mathbf{u}_1 + \alpha_2 e^{\lambda t} \mathbf{u}_2. \quad (5.13)$$

Hierbei bilden $\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}_1$ und \mathbf{u}_2 eine Eigenvektorkette der Länge 2, wobei \mathbf{u}_1 bzw. \mathbf{u}_2 Eigen- bzw. Hauptvektoren sind. Wie man aus (5.13) erkennen kann, dominiert für sehr große Werte von t der Ausdruck $\alpha_2 t e^{\lambda t} \mathbf{u}_1$, d. h. die Richtung der Bahnkurve nähert sich \mathbf{u}_1 . Aus diesem Grund spricht man auch von einem **eintangentiale Knoten**, der für $\lambda < 0$ stabil und für $\lambda > 0$ instabil ist. Liegt \mathbf{x}_0 auf der durch \mathbf{u}_1 charakterisierten Eigenrichtung, d.h. $\alpha_2 = 0$, so gilt für die Trajektorie

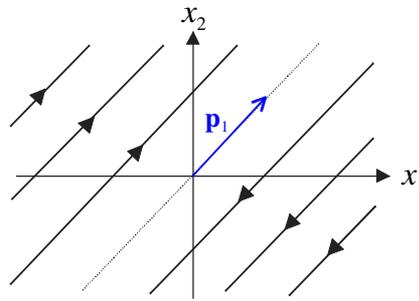
$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} \mathbf{u}_1.$$

Das bedeutet, dass - analog zum Fall einer diagonalähnlichen Matrix \mathbf{A} - Trajektorien, die auf dieser Eigenrichtung starten, für alle Zeiten auf dieser verlaufen, siehe Abbildung.



Stabiler (eintangentiale) Knoten ($\lambda < 0$) Instabiler (eintangentiale) Knoten ($\lambda > 0$)

Für den Sonderfall $\lambda = 0$ gibt es unendlich viele Ruhelagen, es ergibt sich, wie abgebildet, eine instabile Ruhezone.



Instabile Ruhezone ($\lambda = 0$)

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Dynamikmatrix \mathbf{A} besitzt die Eigenwerte

$$s_1 = s_2 = \lambda$$

und *einen* linear unabhängigen Eigenvektor

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1$$

Gemäß (3.35) findet man aus der Relation

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$$

den (nicht eindeutigen) Hauptvektor

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Somit folgt für die Trajektorien

$$\mathbf{x}(t) = (\alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei

$$\alpha_1 = x_{2,0} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = x_{1,0} - x_{2,0}.$$

Kapitel 6

Lineare Übertragungssysteme

6.1 Einführung

Die **Übertragungsfunktion** $G(s)$ beschreibt das Übertragungsverhalten von linearen, zeit-invarianten Systemen im Bildbereich. Sie ist definiert als der Quotient der Laplace-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}. \quad (6.1)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet. Im Rahmen dieses Skriptums wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion stets eine gebrochene rationale Funktion ist. Sie kann somit als Quotient zweier Polynome $\beta(s)$ und $\alpha(s)$ dargestellt werden, d.h.

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad (6.2)$$

wobei die Koeffizienten der Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade von Zähler- und Nennerpolynom der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(s) \leq \text{Grad } \alpha(s) \quad (6.3)$$

genügen, nennt man **realisierbar**, siehe auch Abschnitt 6.3. Alle praktisch relevanten Systeme erfüllen die Realisierbarkeitsbedingung. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(s) = \text{Grad } \alpha(s)$$

spricht man von einem **sprungfähigen System**. Sprunghafte Änderungen der Eingangsgröße u haben hier auch eine sprunghafte Änderung der Ausgangsgröße y zur Folge.

Für Systeme der Form (2.1), (2.2) kann die Übertragungsfunktion unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gemäß

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (6.4)$$

berechnet werden, vgl. (2.14). Aus dieser Berechnungsvorschrift kann unmittelbar gefolgert werden, dass $G(s)$ eine gebrochen rationale Funktion ist und (6.3) gilt. Man beachte, dass das System genau dann sprungfähig ist, wenn für den Durchgriff $d \neq 0$ gilt. Dann gibt es nämlich eine direkte Verbindung zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, siehe hierzu auch Bild ??.

In Strukturbildern wird eine Übertragungsfunktion $G(s)$ üblicherweise durch einen Block, wie er in Bild 6.1 dargestellt ist, repräsentiert.

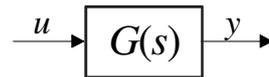


Bild 6.1: Blockdarstellung einer Übertragungsfunktion $G(s)$

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Die **Sprungantwort** des Systems, d.h. seine Reaktion auf $u(t) = \sigma(t)$ kann mittels

$$\bar{y}(s) = G(s) \bar{u}(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

berechnet werden. Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = -\frac{1/2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+2},$$

was im Zeitbereich der Funktion

$$y(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

entspricht. ■

6.2 Bedeutung von $G(s)$ im Zeitbereich

Gemäß (6.1) gilt für den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße y nach Anwendung des Faltungssatzes

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \bar{u}(s)\} = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (6.5)$$

wobei

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}. \quad (6.6)$$

Die Ausgangsgröße y entspricht also dem Integral über die gewichtete Eingangsgröße u . Aus diesem Grund nennt man $g(t)$ auch **Gewichtsfunktion**. Wählt man als Eingangsgröße des Systems einen Dirac-Impuls, also $u(t) = \delta(t)$, so gilt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \mathcal{L} \{\delta(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} = g(t),$$

die Ausgangsgröße entspricht dann $g(t)$. Deshalb wird $g(t)$ auch **Impulsantwort** des Systems genannt.

B Die Impulsantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right)$$

lautet

$$g(t) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}).$$

■

6.3 Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell

Es gibt prinzipiell unendlich viele Möglichkeiten, Zustandsmodelle anzugeben, die eine vorgegebene Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

besitzen. Solche Zustandsmodelle nennt man **Realisierungen** von $G(s)$. Eine **Minimalrealisierung** zeichnet sich ferner dadurch aus, dass die Zahl der Zustandsgrößen minimal ist. Man beachte, dass genau dann eine Realisierung von $G(s)$ existiert, wenn (6.3) erfüllt ist.

An dieser Stelle werden zwei wichtige Normalformen vorgestellt. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein so genanntes **monisches Polynom** ist, der höchstwertige Koeffizient des Nennerpolynoms ist also auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Im Falle eines sprungfähigen Systems ($m = n$) ist eine Polynomdivision durchzuführen, d.h.

$$G(s) = \beta_n + \frac{(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n) s^{n-1} + \dots + (\beta_1 - \alpha_1\beta_n) s + (\beta_0 - \alpha_0\beta_n)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}.$$

6.3.1 Erste Normalform

Die Dynamikmatrix **A** des Zustandsmodells sowie der Eingangsvektor **b** besitzen eine sehr einfache Struktur, es gilt nämlich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (6.7)$$

Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$y = \left[\beta_0 - \alpha_0\beta_n \quad \beta_1 - \alpha_1\beta_n \quad \dots \quad \dots \quad \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n \right] \mathbf{x} + \beta_n u \quad (6.8)$$

In Bild 6.2 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in erster Normalform dargestellt.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s^2 + 6s}{2s^2 + 2s + 2} = \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + s + 1} = 2 + \frac{s - 2}{s^2 + s + 1}.$$

Das zugehörige Zustandsmodell in der ersten Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

■

Besonders einfach kann die erste Normalform aufgestellt werden, wenn das betrachtete System nicht sprungfähig ist, denn dann gilt $\beta_n = 0$. Die Ausgangsgleichung (6.8) vereinfacht sich dann zu

$$y = \left[\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \dots \quad \beta_{n-1} \right] \mathbf{x}.$$

B Das zu der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{21}{3s^3 + 6s + 9} = \frac{7}{s^3 + 2s + 3}$$

gehörige Zustandsmodell in erster Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

■

Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in erster Normalform vorliegt, dann ist das System auf jeden Fall steuerbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

veranschaulicht werden. Verwendet man das Kalman-Kriterium, so besitzt die Steuerbarkeitsmatrix die ausgezeichnete Struktur

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

d.h. sie ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die erste Normalform auch **Steuerbarkeitsnormalform** genannt.

Herleitung der ersten Normalform

Zur Herleitung der ersten Normalform wird $G(s)$ in der folgenden Form dargestellt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{\underbrace{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}_{=G^*(s)}} (\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0). \quad (6.9)$$

Die erste Zustandsvariable x_1 des gesuchten Zustandsmodells wird so eingeführt, dass die Bedingung

$$G^*(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (6.10)$$

erfüllt wird, d.h.

$$s^n \bar{x}_1(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \alpha_1 s \bar{x}_1(s) + \alpha_0 \bar{x}_1(s) = \bar{u}(s)$$

Die restlichen Zustandsvariablen x_2 bis x_n werden nun so definiert

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(s) &: = s\bar{x}_1(s), \\ \bar{x}_3(s) &: = s\bar{x}_2(s) = s^2\bar{x}_1(s), \\ &\vdots \\ \bar{x}_n(s) &: = s\bar{x}_{n-1}(s) = s^{n-1}\bar{x}_1(s), \end{aligned} \quad (6.11)$$

dass die Relation

$$s^n \bar{x}_1(s) = s\bar{x}_n(s) = -\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s) \quad (6.12)$$

gilt. Im Zeitbereich können (6.11) und (6.12) folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (6.13)$$

Man beachte, dass gemäß (6.10) die Relation $\bar{x}_1(s) = G^*(s) \bar{u}(s)$ gilt und mit (6.9) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= G(s) \bar{u}(s) = G^*(s) (\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) \bar{u}(s) = \\ &= (\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) \bar{x}_1(s). \end{aligned}$$

Mit (6.11) und (6.12) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \beta_n s^n \bar{x}_1(s) + \beta_{n-1}s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \beta_1 s \bar{x}_1(s) + \beta_0 \bar{x}_1(s) \stackrel{(6.12)}{=} \\ &= \beta_n [-\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s)] + (\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0) \bar{x}_1(s) = \\ &= (\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \bar{x}_1(s) + (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \bar{x}_2(s) + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) \bar{x}_n(s) + \beta_n \bar{u}(s). \end{aligned}$$

Das bedeutet im Zeitbereich

$$y(t) = [(\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \quad (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \quad \dots \quad (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1})] \mathbf{x}(t) + \beta_n u(t), \quad (6.14)$$

d.h. (6.13) und (6.14) ergeben die erste Normalform.

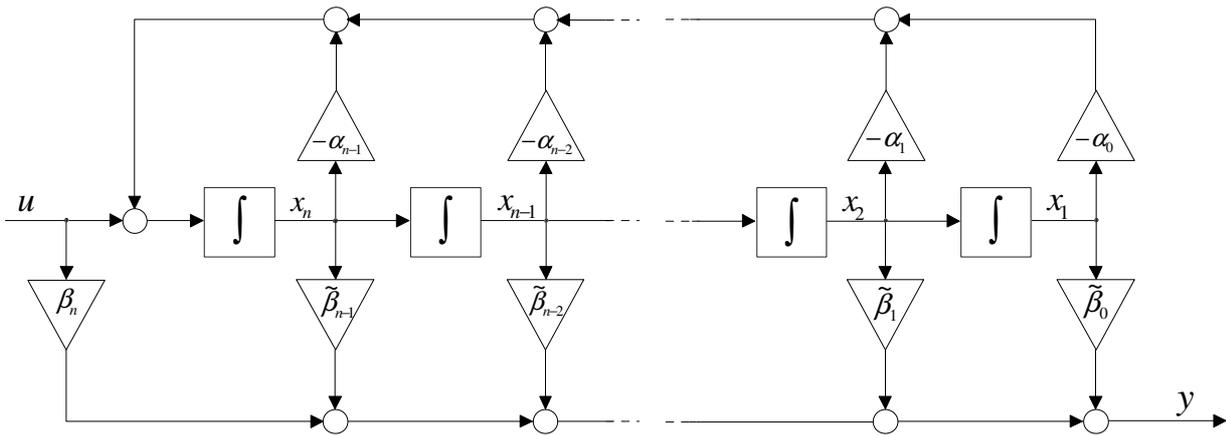


Bild 6.2: Strukturbild zur ersten Normalform, wobei $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$ gilt

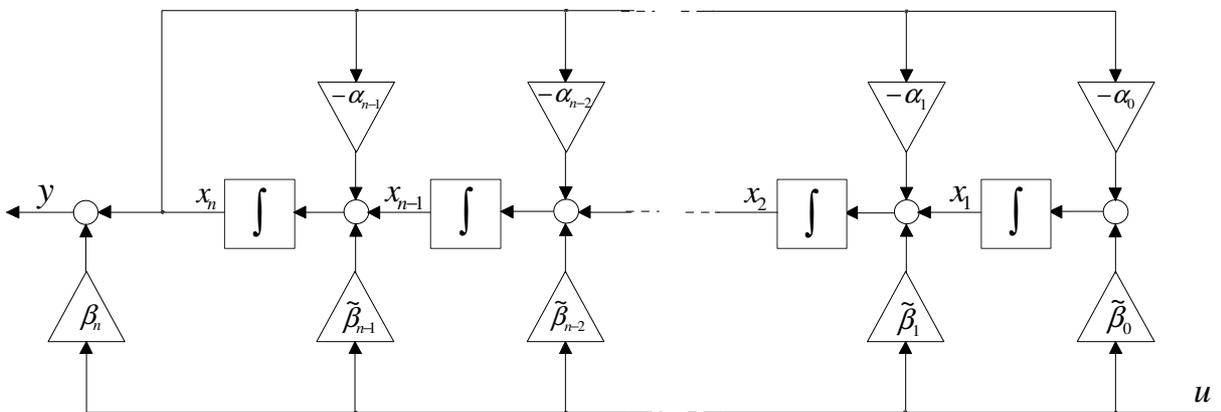


Bild 6.3: Strukturbild zur zweiten Normalform, wobei $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$ gilt

6.3.2 Zweite Normalform

Die so genannte zweite Normalform kann aus der ersten Normalform gewonnen werden, indem die Dynamikmatrix transponiert wird und die Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} miteinander vertauscht werden, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_1 \beta_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n \end{bmatrix} u \quad (6.15)$$

und

$$y = [0 \ \dots \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x} + \beta_n u. \quad (6.16)$$

In Bild 6.3 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in zweiter Normalform dargestellt.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + s + 2}.$$

Ein zugehöriges Zustandsmodell in der zweiten Normalform lautet dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}.$$

■

Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in zweiter Normalform vorliegt, dann ist das System jedenfalls beobachtbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} + \beta_n u$$

veranschaulicht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt nämlich (vgl. Steuerbarkeitsmatrix der ersten Normalform!)

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

diese ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die zweite Normalform auch **Beobachtbarkeitsnormalform** genannt.

Hinweise zur ersten und zweiten Normalformen

Der Zusammenhang zwischen erster und zweiter Normalform hat zur Folge, dass die zwei Zustandsmodelle

$$M_1: \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_1 \\ y_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d u_1 \end{cases} \quad M_2: \begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{c}u_2 \\ y_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{z} + d u_2 \end{cases}$$

die gleiche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}_1(s)}{\bar{u}_1(s)} = \frac{\bar{y}_2(s)}{\bar{u}_2(s)}$$

besitzen. Dieses Ergebnis ist leicht zu erkennen, da für die (skalare) Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G^T(s) = \mathbf{b}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}]^T \mathbf{c} + d = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d$$

gilt. Wenn man die Strukturbilder 6.2 und 6.3 miteinander vergleicht, so erkennt man, dass sich ein Strukturbild aus dem anderen ergibt, wenn man

- Eingangs- und Ausgangsgrößen vertauscht, d.h. $u \Leftrightarrow y$
- alle Pfeilrichtungen umkehrt
- Summationen und Abzweigungen vertauscht, d.h. $\bigcirc \Leftrightarrow \cdot$

Man beachte weiters, dass die Dynamikmatrizen der beiden Normalformen in so genannter **Begleitform** vorliegen. Das bedeutet, dass man die charakteristischen Polynome der Matrizen *direkt* ablesen kann. Aus den obigen Ausführungen folgt nämlich unmittelbar, dass die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

das gleiche charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

besitzen.

B Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beide Matrizen liegen in Begleitform vor, d.h. für die charakteristischen Polynome gilt

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^3 - 3s^2 - 2s + 1$$

und

$$\Delta_{\mathbf{B}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{B}) = s^4 - 5s^3 + 3s^2 - 2s + 1.$$

■

Die Normalformen können auch hilfreich sein, wenn eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung gegeben ist und ein zugehöriges Zustandsmodell benötigt wird.

B Gegeben sei die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + y = u,$$

die ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y beschreibt. Hier ist eine mögliche Wahl der Zustandsvariablen durch

$$x_1 := y, \quad x_2 := \frac{dy}{dt}, \quad x_3 := \frac{d^2y}{dt^2}$$

gegeben und das zugehörige Zustandsmodell lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \left[y(t=0) \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} \quad \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} \right]^T.$$

■

Nicht immer ist die Wahl der Zustandsvariablen so geradlinig wie im vorangegangenen Beispiel. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn in der Differentialgleichung auch Ableitungen der Eingangsgröße u auftreten.

B Gegeben sei ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Es wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

beschrieben. Eine Möglichkeit, ein Zustandsmodell zu finden, besteht darin, zuerst die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1}$$

zu berechnen und dann auf eine der Normalformen überzugehen, also im Falle der ersten Normalform

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Berechnung des Anfangszustands \mathbf{x}_0 erfolgt über den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und Ein- bzw. Ausgangsgröße. Hierzu wird die Ausgangsgleichung

$$y = -x_1 + x_2$$

benutzt. Für die zeitliche Ableitung von y gilt

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2 + u.$$

Daraus folgt durch Lösung¹ des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} - u \end{bmatrix}$$

der Zusammenhang

$$x_1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dt} + 3y - u \right) \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dt} - y - u \right),$$

d.h. der Anfangszustand lautet

$$\mathbf{x}_0 = \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dt} + 3y - u \right) \Big|_{t=0} \quad -\frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dt} - y - u \right) \Big|_{t=0} \right]^T.$$

■

6.3.3 Minimalrealisierung

Wie bereits erwähnt ist eine Minimalrealisierung eine Realisierung mit der minimalen Zahl von Zustandsgrößen, d.h. mit der kleinstmöglichen Systemordnung. Minimalrealisierungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie steuerbar *und* beobachtbar sind. Sie umfassen also ausschließlich jene „Systemanteile“, die das Eingangs- Ausgangsverhalten prägen.

B Zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3+3s^2+2s}$$

ist eine Minimalrealisierung gesucht. Um die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Realisierung zu gewährleisten, werden zunächst alle möglichen Kürzungen durchgeführt, d.h.

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{s^2+2s}.$$

Die Minimalrealisierung in erster Normalform lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

■

¹die Lösbarkeit erfordert die Eigenschaft der Beobachtbarkeit.

6.4 Berechnung von $G(s)$ aus Differentialgleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \beta_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u, \quad (6.17)$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung der Laplace-Transformation

$$(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0) \bar{y}(s) = (\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{u}(s).$$

Für $G(s)$ erhält man somit

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad (6.18)$$

die Realisierbarkeit des Systems ist gemäß (6.3) für $m \leq n$ gegeben.

B Die Beschreibung eines Systems sei in Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

gegeben. Unter Annahme verschwindender Anfangswerte liefert die Laplace-Transformation

$$\bar{y}(s) (s^2 + 2s + 1) = \bar{u}(s) (s - 1),$$

d.h. die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 1}.$$

■

6.4.1 Umkehrung

Es ist sehr einfach, aus einer gegebenen Übertragungsfunktion $G(s)$ eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung zu bestimmen. Hierzu ist lediglich zu beachten, dass die Multiplikation einer Laplace-Transformierten $\bar{f}(s)$ mit s^i der i -ten zeitlichen Ableitung von $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{f}(s) \}$ entspricht, siehe auch (A.11).

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Daraus folgt

$$(s^2 + 1) \bar{y}(s) = s\bar{u}(s),$$

was im Zeitbereich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{du}{dt}$$

führt. ■

6.5 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (6.2) die Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Gibt man $G(s)$ in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2},$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist. ■

Geht man nun von einer teilerfremden Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad \text{mit} \quad \mu(s), \nu(s) \dots \text{teilerfremd} \quad (6.19)$$

aus, so sind diejenigen Werte von s , für die $\mu(s) = 0$ gilt, die so genannten **Nullstellen** von $G(s)$. Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch $\nu(s) = 0$ charakterisiert. In der *faktorisierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad (6.20)$$

ist $s = n_i$ eine Nullstelle und $s = p_k$ eine Polstelle von $G(s)$. Tritt der Faktor $(s - n_i)$ bzw. $(s - p_k)$ mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen

Pol. Da die Koeffizienten der Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (6.20) folgt unmittelbar.

$$G(s) = 0 \quad \text{für } s = n_i \quad \text{und} \quad |G(s)| \rightarrow \infty \quad \text{für } s \rightarrow p_k \quad (6.21)$$

B Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 0.5}{s^2 + 1}$$

besitzt eine Nullstelle bei $s = 0.5$ und ein konjugiert komplexes Polpaar bei $s = \pm j$. In Bild 6.4 ist $|G(s)|$ über der komplexen s -Ebene dargestellt. Die in (6.21) angeführten Eigenschaften sind deutlich zu erkennen. ■

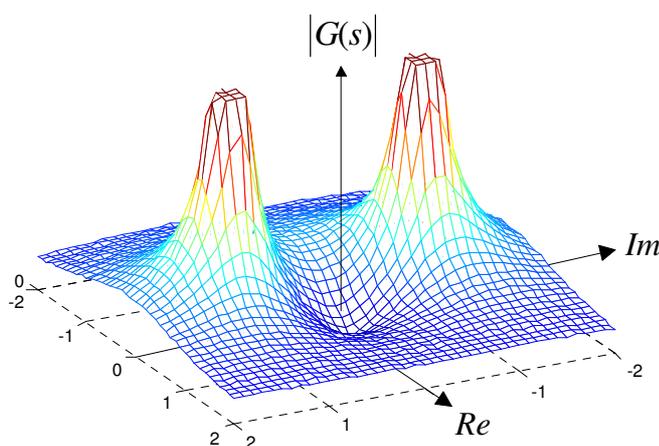


Bild 6.4: Graphische Darstellung von $|G(s)|$ über der komplexen s -Ebene zur Illustration von Pol- und Nullstellen.

B Die faktorisierte Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s + 1)^2}$$

ist gegeben durch

$$G(s) = 2 \frac{(s + 1 - j)(s + 1 + j)}{s(s + 1)(s + 1)}$$

Daraus resultiert ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar an der Stelle

$$s = -1 \pm j,$$

ein reeller Pol bei

$$s = 0$$

sowie ein doppelter Pol an der Stelle

$$s = -1.$$

■

Man beachte, dass die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} von (2.1) und die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ in enger Relation zueinander stehen. Die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

die Pole sind die Nullstellen des Nennerpolynoms der gekürzten(!) rationalen Funktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{adj} \mathbf{b} + d.$$

Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Pole von $G(s)$ eine Teilmenge der Eigenwerte von \mathbf{A} darstellen.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u. \end{aligned}$$

Die zwei Eigenwerte lauten

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Aus der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

ist zu erkennen, dass es einen Pol bei

$$s = -1$$

gibt.

■

6.5.1 PN-Plan

Die graphische Darstellung der Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene wird PN-Plan genannt. Hierbei werden Pole durch ein \mathbf{X} und Nullstellen durch ein \mathbf{O} symbolisiert.

B Gegeben sei das System

$$G(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 6s - 4}{s^5 - 4s^4 + 3s^3 + 14s^2 + 26s} = \frac{(s-2)(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 - 6s + 13)} \quad (6.22)$$

mit

$$\text{Nullstellen} \quad \{2, 1 \pm j\}$$

$$\text{Pole} \quad \{0, -1 \pm j, 3 \pm j2\}$$

Der zugehörige PN-Plan ist in Bild 6.5 zu sehen. Man beachte, dass aufgrund der Symmetrie des PN-Plans prinzipiell die Darstellung des grau hinterlegten Bereiches ausreicht.

■

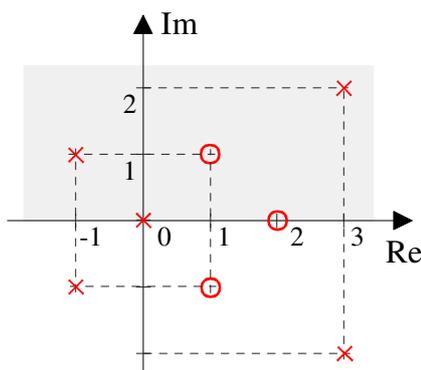


Bild 6.5: PN-Plan zu der Übertragungsfunktion (6.22)

6.6 BIBO-Stabilität

Ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output“) genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsgröße $u(t)$ mit einer beschränkten Ausgangsgröße $y(t)$ reagiert, d.h.

$$|u(t)| \leq M < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq N < \infty \quad \forall t \geq 0. \quad (6.23)$$

Mit (6.5) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \stackrel{(6.23)}{\leq} M \int_0^t |g(\tau)| d\tau.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von $|y(t)|$ für $t \rightarrow \infty$ auf, d.h. zur Erfüllung von (6.23) muss

$$M \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort absolut integrierbar sein muss, d.h.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (6.24)$$

Man beachte, dass es sich bei (6.24) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s - \kappa} \quad \text{mit} \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Impulsantwort lautet

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{\kappa t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Das Integral über den Absolutbetrag von $g(t)$, also

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{\kappa t}| dt = \int_0^{\infty} e^{\kappa t} dt$$

existiert offensichtlich nur für negative Werte von κ . Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol $s = \kappa$ in der linken offenen Halbebene der komplexen s -Ebene liegt, d.h. $\operatorname{Re}\{s\} < 0$. ■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort $g(t)$ und der Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(s)| = \left| \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-st}| dt.$$

Gilt $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$, so kann weiter geschrieben werden

$$|G(s)| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| dt.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (6.24) ist also erfüllt - der Ausdruck $|G(s)|$ für $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$ *endliche* Werte annimmt. Daraus kann mit Hilfe von (6.21) gefolgert werden, dass $G(s)$ ausschließlich Pole in der linken, offenen komplexen Halbebene besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von $G(s)$ einen negativen Realteil besitzen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (6.19) das Nennerpolynom von $G(s)$ ein Hurwitzpolynom sein muss.

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol mit nicht-negativem Realteil besitzt. ■

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)^2(s + 2)(s + 4)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von $G(s)$ einen negativen Realteil besitzen. ■

6.7 Das Routh-Schema

Die asymptotische Stabilität erfordert es, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Weiters ist ein Übertragungssystem genau dann BIBO-stabil, wenn seine Übertragungsfunktion ausschließlich Pole mit negativen Realteilen besitzen. Man beachte, dass die beiden Stabilitätskriterien die genaue Kenntnis der Lage der Eigenwerte bzw. Pole *nicht* erfordern. Vielmehr ist zu überprüfen, ob das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix bzw. das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein Hurwitzpolynom ist. Hierfür gibt es eine Reihe von Verfahren, die ohne die explizite Berechnung der Polynomnullstellen auskommen. Exemplarisch wird an dieser Stelle das so genannte **Routh-Schema**² vorgestellt, wobei auf den Beweis verzichtet wird.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zu untersuchende Polynom

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (6.25)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass $p(s)$ ein Hurwitzpolynom ist, besteht darin, dass kein Polynomkoeffizient verschwindet und alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen. Ist diese Bedingung verletzt, so ist $p(s)$ sicher kein Hurwitzpolynom. Man beachte, dass für Polynome mit Grad $p(s) \leq 2$ die angegebene Bedingung sogar *notwendig und hinreichend* ist.

B Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 2s^4 + 2s^2 + s + 1, \\ p_2(s) &= s^5 + 3s^4 - 2s^3 + s^2 + 1, \\ p_3(s) &= 5s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 7s^3 + s^2 + 9s + 1, \\ p_4(s) &= -2s^2 - 2s - 1, \\ p_5(s) &= s^2 + 4s - 3, \\ p_6(s) &= s^2 + s + 1, \\ p_7(s) &= s + 8. \end{aligned}$$

Die Polynome $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_5(s)$ erfüllen die angegebene notwendige Bedingung nicht, sie sind also keine Hurwitzpolynome. Das Polynom $p_3(s)$ erfüllt die Bedingung, der Nachweis ob es sich um ein Hurwitzpolynom handelt, erfordert allerdings weitere Schritte (siehe weiter unten). Die Polynome $p_4(s)$, $p_6(s)$ und $p_7(s)$ können direkt als Hurwitzpolynome klassifiziert werden, da sie die Bedingung erfüllen und einen Polynomgrad kleiner oder gleich 2 besitzen. ■

Zunächst werden beim Routh-Schema die Koeffizienten des Polynoms (6.25) in folgendem „Zick-Zack-Muster“ angeordnet

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & & \dots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & & \dots \end{array}, \quad (6.26)$$

²benannt nach dem englischen Mathematiker Edward Routh (1831 - 1907)

wobei bei geradem Polynomgrad n die letzte Spalte mit einem Nullelement aufgefüllt bzw. bei ungeradem Polynomgrad eine Nullspalte hinzugefügt wird.

B Für das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5,$$

ergibt sich nach (6.26)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \cdot$$

Hingegeben ergibt sich für

$$p_2(s) = 6s^5 + 7s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 10s + 11$$

die Koeffizientenanzordnung

$$\begin{array}{cccc} 6 & 8 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 11 & 0 \end{array} \cdot$$

■

Ausgehend von der 2-zeiligen Anordnung (6.26) werden weitere Zeilen nach folgendem Schema berechnet bis insgesamt $(n + 1)$ Zeilen vorliegen: Der Koeffizient in der k -ten Spalte einer neuen Zeile entspricht der zweireihigen Determinante aus den Elementen der ersten und $(k + 1)$ -ten Spalte der beiden darüberliegenden Zeilen, geteilt durch das negative erste Element der darüberliegenden Zeile. Mit Hilfe des so entstehenden **Routh-Tableaus** kann nun entschieden werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt:

Das Polynom (6.25) ist *genau dann* ein Hurwitzpolynom, wenn alle $(n + 1)$ Elemente der ersten Spalte sich von Null unterscheiden und das gleiche Vorzeichen besitzen.

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5.$$

Die oben angegebene notwendige Bedingung ist erfüllt. Ob das Polynom tatsächlich ein Hurwitzpolynom ist, kann nun mit dem Routh-Schema überprüft werden. Zunächst werden die ersten beiden Zeilen gemäß (6.26) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \cdot$$

Der oben angegebenen Berechnungsvorschrift folgend ermittelt man nun die dritte und vierte Zeile, d.h. es ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{(-2)} = 1 & \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 5}{(-2)} = 5 & \\ \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 4}{(-1)} = -6 & & \end{array} \cdot$$

Da das erste Element der vierten Zeile ein anderes Vorzeichen hat als die übrigen Elemente der ersten Spalte, ist $p(s)$ kein Hurwitzpolynom. Das Routh-Tableau muss hier also nicht vollständig berechnet werden. ■

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1.$$

Es soll mit dem Routh-Schema überprüft werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt. Zunächst werden wieder die ersten beiden Zeilen gemäß (6.26) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \cdot$$

Gemäß obiger Berechnungsvorschrift erhält man für die dritte Zeile

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{(-3)} = \frac{5}{3} & \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{(-3)} = 0 & \end{array} \cdot$$

Da das erste Element der dritten Zeile das gleiche Vorzeichen hat wie die übrigen Elemente, wird die nächste (und hier auch zugleich letzte) Zeile ermittelt und man findet

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & \\ \frac{3 \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1}{(-\frac{5}{3})} = 1 & & \end{array} \cdot$$

Alle Elemente der ersten Spalte sind von Null verschieden und haben das gleiche Vorzeichen, d.h. $p(s)$ ist ein Hurwitzpolynom. ■

Besonders von Vorteil ist der Einsatz des Routh-Schemas, wenn die Koeffizienten des zu untersuchenden Polynoms von freien Parametern abhängen.

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + Ks^2 + s + 1.$$

Es soll mit Hilfe des Routh-Schemas überprüft werden, für welche Werte des reellen Parameters K das Polynom $p(s)$ ein Hurwitzpolynom ist. Aus der Forderung, dass alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt unmittelbar die notwendige Bedingung, dass K positiv sein muss. Die ersten beiden Zeilen des Routh-Tableaus ergeben sich zu

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \end{array} \cdot$$

Für die weiteren Zeilen erhält man

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{1 \cdot 1 - K \cdot 1}{(-K)} = \frac{K-1}{K} \quad \frac{1 \cdot 0 - K \cdot 0}{(-K)} = 0$$

$$\frac{K \cdot 0 - \frac{K-1}{K} \cdot 1}{-\frac{K-1}{K}} = 1$$

Damit alle Elemente der ersten Spalte gleiches Vorzeichen besitzen, muss

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

gelten. Da K sicher positiv ist, folgt daraus unmittelbar der gesuchte Wertebereich

$$K > 1.$$

■

6.8 Frequenzgang

Der so genannte Frequenzgang beschreibt den eingeschwungenen Zustand eines linearen, zeitinvarianten Systems bei harmonischer Erregung. Dabei wird hier vorausgesetzt, dass das betrachtete System BIBO-stabil ist, d.h. seine Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt ausschließlich Pole mit negativem Realteil. Weiters wird vereinfachend vorausgesetzt, dass alle Pole von $G(s)$ *einfach* sind, die gefundenen Ergebnisse gelten allerdings auch für den allgemeinen Fall mehrfacher Pole. Als Eingangsgröße $u(t)$ wird nun die komplexe harmonische Funktion

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s - j\omega} \quad (6.27)$$

gewählt³. Für die zugehörige Ausgangsgröße $y(t)$ gilt im Bildbereich

$$\bar{y}(s) = G(s) \frac{1}{s - j\omega} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \frac{1}{s - j\omega},$$

eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = \frac{c_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

³Man beachte, dass es sich hier um ein reines Gedankenexperiment handelt.

Für den Koeffizienten c_0 findet man

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \bar{y}(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[(s - j\omega) G(s) \frac{1}{(s - j\omega)} \right] = G(j\omega),$$

d.h.

$$\bar{y}(s) = \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Für die zugehörige Zeitfunktion gilt nun

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}.$$

Für „sehr große Werte von t “, also im so genannten *eingeschwungenen Zustand* gilt

$$y(t) \approx G(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (6.28)$$

d.h. die Ausgangsgröße entspricht der mit $G(j\omega)$ gewichteten Eingangsgröße. Diese komplexe Funktion

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \quad (6.29)$$

ist der **Frequenzgang** des Systems. Salopp formuliert beschreibt er, wie sich im eingeschwungenen Zustand die Amplitude und die Phasenlage der harmonischen Eingangsgröße beim Durchlaufen des Systems verändern. Man beachte, dass die Eingangsgröße (6.27) als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion dargestellt werden kann, d.h.

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Nach (6.28) und (6.29) gilt im eingeschwungenen Zustand für die zugehörige Ausgangsgröße

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg G(j\omega))} = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \arg G(j\omega)) + j |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)).$$

Aus der Linearität des Systems kann daher unmittelbar gefolgert werden, dass im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \arg G(j\omega))$$

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg G(j\omega))$$

B Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Für eine Eingangsgröße $u(t) = 3 \sin t$ ergibt sich für den Verlauf von $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) \approx 3 |G(j)| \sin\left(t + \arg G(j)\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$



Für jeden Wert von ω ergibt sich also eine komplexe Zahl $G(j\omega)$. Die graphische Darstellung dieser komplexen Zahlen in der komplexen Ebene als Funktion von ω wird **Frequenzgangs-Ortskurve**, **Nyquist-Ortskurve**⁴ oder kurz **Ortskurve** genannt. In den so genannten **Frequenzkennlinien** werden jeweils Betrag und Phase von $G(j\omega)$ über ω dargestellt, man spricht in diesem Zusammenhang auch von den **Bode**⁵-**Diagrammen**.

6.9 Zusammenschaltung von Übertragungssystemen

Die Übertragungsfunktion eines aus mehreren Übertragungssystemen rückwirkungsfrei(!) zusammengesetzten Gesamtsystems kann durch Anwendung der folgenden „Rechenregeln für Übertragungsfunktionen“ systematisch ermittelt werden.

6.9.1 Reihenschaltung

Für die in Bild 6.6 dargestellte Serienschaltung zweier Systeme mit den Übertragungsfunktionen $A(s)$ und $B(s)$ gilt

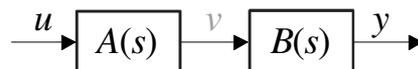


Bild 6.6: Reihenschaltung von Übertragungssystemen

$$\bar{y}(s) = B(s) \bar{v}(s) = B(s) A(s) \bar{u}(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s) B(s). \quad (6.30)$$

Die Übertragungsfunktion einer Serienschaltung entspricht also dem *Produkt* der einzelnen Übertragungsfunktionen. Man beachte, dass $G(s)$ ausschließlich Pole bzw. Nullstellen besitzt, die auch Pole bzw. Nullstellen von $A(s)$ und/oder $B(s)$ sind.

B Aus der Serienschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s) B(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

⁴benannt nach dem (in Schweden geborenen) amerikanischen Physiker Harry Nyquist (1889-1976).

⁵benannt nach dem amerikanischen Wissenschaftler Hendrik Wade Bode (1905-1982).

Die Pole von $G(s)$ liegen bei $s_1 = 0$ und $s_2 = -1$, die Nullstelle bei $s = -2$. ■

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass eine „Stabilisierung“ mittels einer Serienschaltung nicht möglich ist.

▣ Gegeben sei ein instabiles⁶ System mit der Übertragungsfunktion

$$B(s) = \frac{1}{s - 5}.$$

Mit der Wahl

$$A(s) = \frac{s - 5}{s + 1}$$

gelingt es, ein BIBO-stabiles Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s)B(s) = \frac{(s - 5)}{(s + 1)} \frac{1}{(s - 5)} = \frac{1}{s + 1}$$

zu erzeugen. Der „instabile“ Pol von $B(s)$ wird durch eine entsprechende Nullstelle von $A(s)$ kompensiert, man spricht von einer „**instabilen Kürzung**“. In der Realität muss allerdings davon ausgegangen werden, dass das Signal v mit einer Störung überlagert ist, was in Bild 6.7 durch eine Störgröße d angedeutet ist. Damit gilt

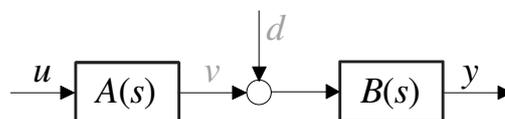


Bild 6.7: Zur Serienschaltung von Systemen

$$\bar{y}(s) = B(s) [\bar{v}(s) + \bar{d}(s)] = B(s) A(s) \bar{u}(s) + B(s) \bar{d}(s).$$

Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen Störung und Ausgangsgröße durch die instabile Übertragungsfunktion $B(s)$ beschrieben wird, das Gesamtsystem ist somit praktisch unbrauchbar. Diese Problematik tritt auch bei der numerischen Simulation der Serienschaltung auf. Aufgrund der numerischen Darstellung von Zahlen mit endlicher Genauigkeit ist die Größe v mit einem Fehler überlagert, der als Störung d interpretiert werden kann. ■

Das obige Beispiel veranschaulicht, dass instabile Kürzungen *unter keinen Umständen* durchgeführt werden dürfen. Ein weiterer Grund hierfür besteht darin, dass Übertragungsfunktionen stets nur Modelle der Realität darstellen und daher immer mit Unsicherheiten behaftet sind. *Exakte* Kürzungen sind somit grundsätzlich nicht möglich.

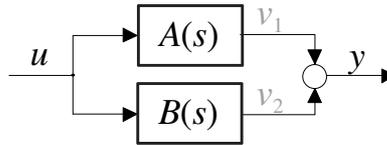


Bild 6.8: Parallelschaltung von Übertragungssystemen

6.9.2 Parallelschaltung

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ der in Bild 6.8 dargestellten Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen $A(s)$ und $B(s)$ kann mit Hilfe der Zusammenhänge

$$\bar{v}_1(s) = A(s) \bar{u}(s) \quad \text{und} \quad \bar{v}_2(s) = B(s) \bar{u}(s)$$

sowie

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{u}(s) + B(s) \bar{u}(s)$$

ermittelt werden, es gilt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = A(s) + B(s). \quad (6.31)$$

Die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung entspricht also der *Summe* der einzelnen Übertragungsfunktionen. Man beachte, dass $G(s)$ ausschließlich Pole besitzt, die auch Pole von $A(s)$ und/oder $B(s)$ sind.

B Aus der Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s) + B(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+1)}.$$

Die Übertragungsfunktion besitzt Pole bei $s = 0$ und $s = -1$ sowie Nullstellen bei $s = -2 + \sqrt{2}$ und $s = -2 - \sqrt{2}$. ■

6.9.3 Rückkopplung

Die in Bild 6.9 dargestellte rückgekoppelte Struktur spielt vor allem in der Regelungstechnik eine bedeutende Rolle.

Es gilt

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{v}(s) \quad \text{und} \quad \bar{v}(s) = \bar{u}(s) - B(s) \bar{y}(s),$$

⁶unter einem instabilen System verstehen wir hier ein System, das nicht BIBO-stabil ist.

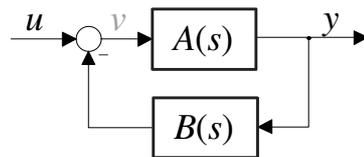


Bild 6.9: Rückgekoppelte Struktur

d.h.

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{u}(s) - A(s) B(s) \bar{y}(s).$$

Daraus folgt die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}. \quad (6.32)$$

Als Hilfestellung für die Ermittlung der Übertragungsfunktion von rückgekoppelten Strukturen kann die Merkregel

$$G_{\text{gesamt}} = \frac{G_{\text{Vorwärtszweig}}}{1 + G_{\text{Schleife}}} \quad (6.33)$$

dienen, siehe hierzu auch Bild 6.10.



Bild 6.10: Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion rückgekoppelter Systeme

B Aus der Zusammenschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{1}{s}$$

gemäß Bild 6.9 ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)^2}.$$

Bemerkenswert ist, dass die Pole $s_{1,2} = -1$ von $G(s)$ weder Pole von $A(s)$ noch von $B(s)$ sind. Diese Möglichkeit, die Pole des „geschlossenen Kreises“ zu beeinflussen, wird in der Regelungstechnik beim Entwurf von Regelgesetzen ausgenutzt. ■

6.9.4 Allgemeine Strukturen

Ein Algorithmus zu Berechnung der Übertragungsfunktion von komplexen Zusammenschaltungen von Übertragungssystemen ist die so genannte Mason-Formel⁷, siehe z.B. [3]. Durch geschickte Anwendung der bereits eingeführten Rechenregeln für Übertragungsfunktionen (Serien-, Parallelschaltung und Rückkopplung) können komplizierte Strukturen auch ohne den etwas schwerfälligen Algorithmus von Mason problemlos aufgelöst werden.

B Die Übertragungsfunktion des in Bild 6.11 dargestellten Systems soll ermittelt werden. Es

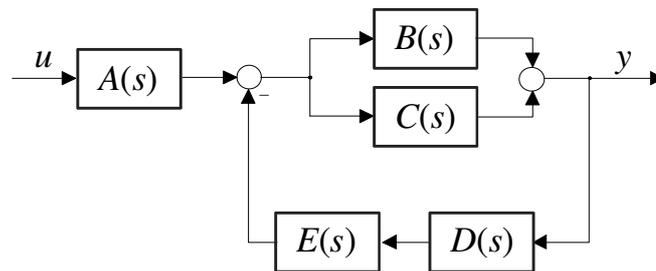


Bild 6.11: Zusammenschaltung mehrerer Übertragungsfunktionen

handelt sich um die Reihenschaltung der Übertragungsfunktion $A(s)$ und einer Rückkopplung mit

$$G_{\text{Vorwärtszweig}} = B(s) + C(s) \quad \text{und} \quad G_{\text{Schleife}} = [B(s) + C(s)] D(s) E(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s) \frac{B(s) + C(s)}{1 + [B(s) + C(s)] D(s) E(s)}.$$

■

Bei der Ermittlung der Übertragungsfunktion eines komplexen Systems aus den Übertragungsfunktionen der Teilsysteme ist unbedingt darauf zu achten, dass die Teilsysteme rückwirkungs-frei gekoppelt sind. Im folgenden Beispiel wird diese Problematik illustriert.

B Gegeben sei das in Bild 6.12 dargestellte Netzwerk, bestehend aus idealen Bauelementen. Die Eingangsgröße des Systems ist die Spannung u , die Ausgangsgröße ist die Spannung y . Diese Schaltung kann als Serienschaltung zweier RC-Tiefpass-Schaltungen interpretiert werden. Für den RC-Tiefpass erster Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $x = x_1$ gilt

$$u = Ri + x = RC \frac{dx}{dt} + x$$

⁷benannt nach dem amerikanischen Ingenieur Samuel Jefferson Mason (1921 - 1974)

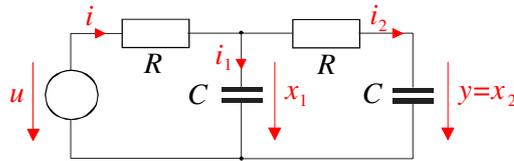


Bild 6.12: Netzwerk, bestehend aus zwei RC-Tiefpass-Schaltungen erster Ordnung

und es kann die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

ermittelt werden. Die Anwendung der Relation (6.30) über die Serienschaltung zweier Übertragungssysteme liefert dann die (vermeintliche) Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 6.12, nämlich

$$H(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = G(s)G(s) = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}. \quad (6.34)$$

Zur Kontrolle wird nun die Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 6.12 direkt berechnet. Es gilt

$$x_1 = Ri_2 + x_2 = RC \frac{dx_2}{dt} + x_2$$

sowie

$$u = Ri + x_1 = RC \frac{dx_1}{dt} + RC \frac{dx_2}{dt} + x_1.$$

Aus diesen beiden Relationen ergibt sich das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$T(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{2}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s\frac{3}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (6.34), so erkennt man, dass

$$T(s) \neq H(s),$$

d.h. die Formel (6.30) darf hier offenbar nicht angewandt werden! Der Grund hierfür liegt darin, dass (6.34) impliziert, dass zwei unbelastete(!) RC-Tiefpassschaltungen in Serie geschaltet sind. Dies trifft aber bei der betrachteten Schaltung *nicht* zu. Wird zur „Entkopplung“ der beiden Tiefpass-Schaltungen ein Spannungsfolger (Impedanzwandler) eingesetzt, wie in Bild 6.13 dargestellt, so ist die vorausgesetzte Rückwirkungsfreiheit gegeben und es gilt

$$T(s) = H(s).$$

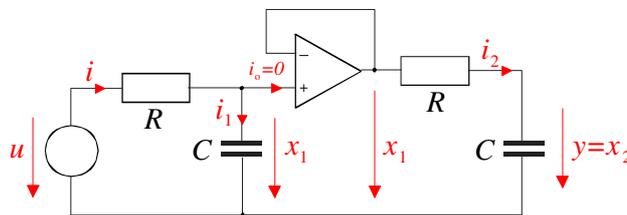


Bild 6.13: Modifikation des Schaltung durch Einbau eines Spannungsfolgers

6.10 Wichtige Übertragungsglieder

An dieser Stelle werden einige wichtige Übertragungsglieder vorgestellt. In den Blöcken, welche die einzelnen Übertragungssysteme in Strukturbildern repräsentieren, werden oft auch die zugehörigen Sprungantworten graphisch angedeutet.

6.10.1 Proportionalglied

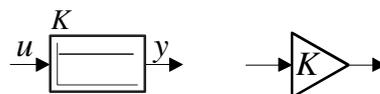
Beim Proportionalglied (**P-Glied**) ist die Ausgangsgröße y proportional zur Eingangsgröße u , d.h.

$$y(t) = K u(t) \quad (6.35)$$

Den (reellen) Proportionalitätsfaktor K bezeichnet man auch als Verstärkung oder Verstärkungsfaktor. Aus (6.35) folgt unmittelbar die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) = K. \quad (6.36)$$

In Strukturbildern repräsentieren üblicherweise die folgenden Symbole ein Proportionalglied:



Wie bereits erwähnt, ist im linken Block die Sprungantwort des P-Gliedes angedeutet.

6.10.2 Verzögerungsglied erster Ordnung

Das Übertragungsverhalten eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (**VZ₁-G**lied oder **PT₁-G**lied) mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y wird durch die Differentialgleichung

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (6.37)$$

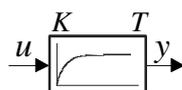
beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter T die so genannte Zeitkonstante des Systems und K ist der Verstärkungsfaktor. Die Anwendung der Laplace-Transformation liefert die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}. \quad (6.38)$$

Für die Sprungantwort eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung gilt

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (6.39)$$

siehe auch Bild 6.14. Daher werden solche Systeme üblicherweise durch folgendes Symbol dargestellt:



Aus Bild 6.14 geht auch hervor, dass zum Zeitpunkt $t = T$ der Wert der Sprungantwort ca. 63% des stationären Endwertes $h_\infty = K$ beträgt. Weiters kann aus dem dargestellten Verlauf von $h(t)$ die Zeitkonstante T als derjenige Zeitpunkt abgelesen werden, bei dem die rot eingezeichnete Tangente an $h(t)$ den Wert $h_\infty = K$ annimmt, d.h. es gilt

$$T = \frac{K}{\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0}}.$$

In der Praxis wird häufig auf die Faustformel zurückgegriffen, die besagt, dass der stationäre

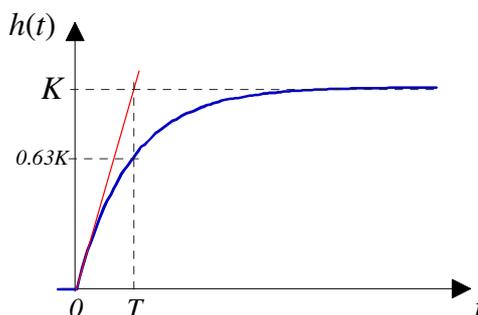


Bild 6.14: Sprungantwort eines PT₁ Elementes mit der Zeitkonstante T

Endwert h_∞ für $t \geq 5T$ erreicht ist. Durch Einsetzen in (6.39) erkennt man, dass der durch diese Faustformel entstehende Fehler kleiner als 1% von h_∞ ist.

6.10.3 Verzögerungsglied zweiter Ordnung

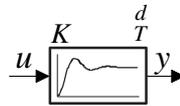
Verzögerungsglieder zweiter Ordnung (**VZ₂-Glied** oder **PT₂-Glied**) werden durch die Differentialgleichung

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2dT \frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (6.40)$$

beschrieben. Hierbei sind die positiven Parameter d und T der Dämpfungsfaktor und die Zeitkonstante, K ist der Verstärkungsfaktor. Aus obiger Differentialgleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + (sT)^2}. \quad (6.41)$$

Für $d < 1$ besitzt $G(s)$ ein konjugiert komplexes Polpaar, was zu dem im Block



angedeuteten „oszillierenden“ Verlauf der Sprungantwort führt. Für $d \geq 1$ besitzt $G(s)$ zwei reelle Pole und kann somit als Reihenschaltung zweier Verzögerungsglieder erster Ordnung interpretiert werden.

6.10.4 Integrator

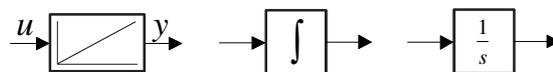
Der Integrator (**I-Glied**) wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = u \quad (6.42)$$

beschrieben, für die zugehörige Übertragungsfunktion gilt

$$G(s) = \frac{1}{s}. \quad (6.43)$$

Folgende Symbole



werden in Strukturbildern für den Integrator verwendet, wobei im linken Block die Rampe als Sprungantwort des Systems dargestellt ist

6.10.5 Differenzierer

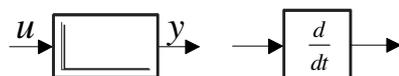
Ein idealer Differenzierer (**D-Glied**) bildet die zeitliche Ableitung des Eingangssignales, d.h.

$$y = \frac{du}{dt}, \quad (6.44)$$

für die (nicht realisierbare) Übertragungsfunktion folgt

$$G(s) = s. \quad (6.45)$$

Üblicherweise werden in Strukturbildern die Symbole



verwendet, wobei im linken Block der Dirac-Impuls als Sprungantwort des Systems angedeutet ist.

6.10.6 Vorhalteglied

Das dynamische Verhalten des realen Differenzierers (**DT₁-Glieder**), auch Vorhalteglied bezeichnet, wird durch die Differentialgleichung

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{du}{dt} \quad (6.46)$$

beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter T die Zeitkonstante. Für die Übertragungsfunktion des Systems ergibt sich

$$G(s) = \frac{s}{1 + sT}. \quad (6.47)$$

Beim DT₁-Glieder handelt es sich also um ein D-Glieder mit Verzögerungsverhalten erster Ordnung. Seine Sprungantwort lautet

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

sie ist in Bild 6.15 graphisch dargestellt. Wie man leicht überprüfen kann, gilt unabhängig von

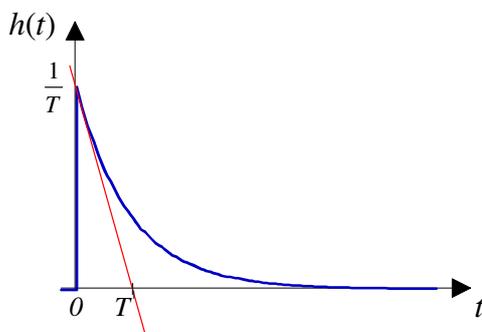


Bild 6.15: Sprungantwort DT₁-Glieder

T die Relation $\int_0^{\infty} h(t) dt = 1$. Daraus kann man folgern, dass für $T \rightarrow 0$ die Sprungantwort $h(t)$ dem Dirac-Impuls $\delta(t)$ entspricht, das DT₁-Glieder geht dann in einen idealen Differenzierer über.

Teil III

Zeitdiskrete Systeme

Kapitel 7

Zustandsraummethoden

7.1 Einführung

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zeitdiskrete lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme, die durch n Differenzgleichungen erster Ordnung der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \quad (7.1)$$

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k. \quad (7.2)$$

beschrieben werden können. Es handelt sich hierbei um ein System mit der Eingangsfolge $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ und der Ausgangsfolge $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$. Mit der Folge $(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$, deren Elemente n -dimensionale Spaltenvektoren sind, wird der zeitliche Verlauf des Zustandsvektors bezeichnet, der Anfangszustand des Systems wird durch \mathbf{x}_0 symbolisiert. Die quadratische Matrix¹ \mathbf{A}_d ist die System- oder Dynamikmatrix, \mathbf{b}_d ist der Eingangsvektor, \mathbf{c}_d ist der Ausgangsvektor und d_d der (skalare) Durchgriffsterm. Es wird weiters vorausgesetzt, dass dem zeitdiskreten System eine konstante (positive) Diskretisierungszeit T_d zugrunde liegt, d.h. einem Wert des (ganzahligen) Zeitindex k entspricht der Zeitpunkt $t = k T_d$.

7.2 Lösung der Systemgleichungen

Im Vergleich zu Differentialgleichungssystemen ist die Lösung von Systemen von Differenzgleichungen einfacher, da hier die Lösungsvorschrift bereits enthalten ist. Ausgehend vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 können bei gegebenem Verlauf der Eingangsgröße (u_k) die Werte des Zustandsvektors zu den diskreten Zeitpunkten $t = k T_d$ für $k = 1, 2, \dots$ durch wiederholtes Einsetzen in (7.1) ermittelt werden, d. h.

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad \mathbf{x}_0 \dots \text{Anfangszustand} \\ k = 1 : & \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_d u_0 \\ k = 2 : & \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_d u_1 = \mathbf{A}_d^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{b}_d u_1 \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \\ \text{allgemein:} & \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-i} \mathbf{b}_d u_i \end{aligned} \quad (7.3)$$

¹Der Index d soll verdeutlichen, dass es sich hierbei um Systemdaten eines zeitdiskreten Systems handelt.

Diese Vorgangsweise erlaubt die numerische Berechnung der Elemente der Folge (\mathbf{x}_k) und in weiterer Folge der Ausgangsfolge (y_k) mittels (7.2).

Eine *geschlossene* Lösung kann mit Hilfe der z -Transformation ermittelt werden. Wendet man diese auf (7.1) an, so erhält man

$$z \tilde{\mathbf{x}}(z) - z \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{b}_d \tilde{u}(z)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = \mathfrak{Z} \{(\mathbf{x}_k)\} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(z) = \mathfrak{Z} \{(u_k)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} z \mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d \tilde{u}(z). \quad (7.4)$$

Wie aus (7.3) bzw. (7.4) zu erkennen ist, setzt sich - analog zum zeitkontinuierlichen Fall - die Lösung (7.3) aus dem freien und dem erzwungenen Anteil additiv zusammen. Die Erfüllung der Linearitätsbedingungen kann leicht überprüft werden.

Definiert man die $n \times n$ - Matrix

$$\tilde{\phi}_d(z) := z (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \quad \text{d.h.} \quad (\phi_{d,k}) = \mathfrak{Z}^{-1} \{z (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\} \stackrel{(7.3)}{=} (\mathbf{A}_d^k), \quad (7.5)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes (B.9) der z -Transformation - für die Lösung

$$\mathbf{x}_k = \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i. \quad (7.6)$$

Für die Elemente der Ausgangsgröße (y_k) gilt dann gemäß (7.2)

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}_d^T \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i + d_d u_k. \quad (7.7)$$

7.2.1 Freie Lösung

Die freie Lösung ist diejenige Lösung, die sich ergibt, wenn das System ausschließlich durch den Anfangszustand \mathbf{x}_0 angeregt wird, d.h. man betrachtet das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k.$$

Für den Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt $t = kT_d$ gilt

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 \stackrel{(7.6)}{=} \phi_{d,k} \mathbf{x}_0. \quad (7.8)$$

Die Matrix $\phi_{d,k}$ beschreibt somit den Zusammenhang des Zustandsvektors \mathbf{x}_k mit dem Anfangszustand \mathbf{x}_0 . In Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall wird $\phi_{d,k}$ als Transitionsmatrix

bezeichnet. Sie besitzt aufgrund ihrer Struktur für $k, i \geq 0$ selbstverständlich die Eigenschaften

$$\phi_{d,0} = \mathbf{E}, \quad \phi_{d,k+1} = \mathbf{A}_d \phi_{d,k} \quad \text{und} \quad \phi_{d,k+i} = \phi_{d,k} \phi_{d,i}. \quad (7.9)$$

Unter Annahme einer regulären Matrix \mathbf{A}_d folgt weiters

$$\phi_{d,k}^{-1} = \phi_{d,-k}. \quad (7.10)$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Nach (7.8) gilt für die freie Lösung

$$\mathbf{x}_k = \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}_0.$$

Für die z-Transformierte der Transitionsmatrix findet man

$$\tilde{\phi}_d(z) = z(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} = z \begin{bmatrix} z + 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & z + 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z + 0.8)} \begin{bmatrix} z + 0.4 & -0.2 \\ -0.8 & z + 0.4 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt dann durch Rücktransformation die „kompakte“ Darstellung

$$\phi_{d,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_{d,k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-0.8)^k & \frac{1}{4}(-0.8)^k \\ (-0.8)^k & \frac{1}{2}(-0.8)^k \end{bmatrix} \quad \text{für } k \geq 1$$

der Transitionsmatrix. ■

7.2.2 Erzwungene Lösung

Bei der erzwungenen Lösung wird das System bei verschwindendem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch die Eingangsgröße (u_k) angeregt, es gilt

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i, \quad (7.11)$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$x_{k+1} = 0.5x_k + u_k$$

mit dem Anfangszustand $x_0 = 0$. Aus (7.11) folgt für die Elemente der Folge (x_k) unmittelbar

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} 0.5^{k-1-i} u_i \quad \text{für } k \geq 1.$$

7.2.3 Übertragungsfunktion

Setzt man in (7.4) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, so gilt

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d \tilde{u}(z)$$

und man erhält für die z-Transformierte der Ausgangsfolge

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\{(y_k)\} = [\mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d] \tilde{u}(z). \quad (7.12)$$

Die gebrochen rationale Funktion

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d \quad (7.13)$$

ist die so genannte **z-Übertragungsfunktion** des zeitdiskreten Modells (7.1), (7.2).

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Mit Hilfe von (7.13) findet man

$$G(z) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z + 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{z^2 + 0.5z} = \frac{z-1}{z(z+0.5)}.$$

■

7.3 Ruhelagen

Die Ruhelagen von (7.1) können über die Bedingung

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad (7.14)$$

ermittelt werden. Für die „konstante“ Eingangsfolge, d.h.

$$(u_k) = (u_R, u_R, \dots) \quad \text{d.h.} \quad u_k = u_R = \text{konst.}$$

erhält man die Relation

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_d u_R,$$

woraus sich das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) \mathbf{x}_R = -\mathbf{b}_d u_R$$

ergibt. Wenn die Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ regulär ist, also den Höchstrang besitzt, gibt es genau eine Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = -(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}_d u_R. \quad (7.15)$$

Anderenfalls gilt analog zum zeitkontinuierlichen Fall

$\text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) = \text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}; \mathbf{b} \ u_R)$	$\text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) < \text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}; \mathbf{b} \ u_R)$
∞ viele Ruhelagen	keine Ruhelage

Man beachte, dass die Eigenwerte λ_i der Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ mit den Eigenwerten z_i der Matrix \mathbf{A}_d über die Relation

$$\lambda_i = z_i - 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n$$

in Verbindung stehen. Das bedeutet, dass die Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ genau dann singulär ist, wenn \mathbf{A}_d einen Eigenwert an der Stelle $z = 1$ besitzt.

7.4 Asymptotische Stabilität

Man nennt das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k \quad (7.16)$$

asymptotisch stabil, wenn für *jeden beliebigen* Anfangszustand \mathbf{x}_0 die Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad (7.17)$$

erfüllt ist. Aus dieser Definition kann gefolgert werden, dass ein asymptotisch stabiles System genau *eine* Ruhelage im Ursprung des Zustandsraumes besitzt. Aus (7.17) folgt weiters, dass die Transitionsmatrix (7.5) der Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{d,k} = \mathbf{0} \quad (7.18)$$

genügen muss, d.h. *jedes* Element der Matrix verschwindet für $t \rightarrow \infty$. Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall kann mit Hilfe des Endwertsatzes der z-Transformation gefolgert werden, dass dies genau dann der Fall ist, wenn *alle* Eigenwerte von \mathbf{A}_d betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Das System (7.16) ist somit genau dann asymptotisch stabil, wenn das charakteristische Polynom von \mathbf{A}_d ein **Einheitskreispolynom** ist.

B Gegeben sei das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

Da die Dynamikmatrix \mathbf{A}_d in Begleitform vorliegt, kann ihr charakteristisches Polynom direkt abgelesen werden, d.h.

$$\Delta(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d) = z^3 + 0.5z^2 + 0.5z = z(z^2 + 0.5z + 0.5).$$

Die Nullstellen des Polynoms liegen bei

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{1}{4} \left(-1 \pm j\sqrt{7} \right)$$

Aufgrund

$$|z_1| = 0 \quad \text{und} \quad |z_2| = |z_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

liegen alle Eigenwerte im Einheitskreis, das System ist somit asymptotisch stabil. ■

7.5 Zustandstransformationen

Zustandstransformationen können auf dieselbe Weise wie im zeitkontinuierlichen Fall durchgeführt werden, d.h. der Zustandsvektor \mathbf{x}_k des Originalsystems (7.1) steht mit dem Zustandsvektor \mathbf{v}_k des transformierten Systems in der Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{T} \mathbf{v}_k. \quad (7.19)$$

Dabei wird die quadratische Matrix \mathbf{T} als regulär vorausgesetzt. Setzt man (7.19) in (7.1) und (7.2) ein, so erhält man die Beschreibung

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{T} \mathbf{v}_k + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}_d u_k, \quad (7.20)$$

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{T} \mathbf{v}_k + d_d u_k. \quad (7.21)$$

für das transformierte System.

7.5.1 Transformation auf Diagonalform

Für die Transformation auf Diagonalform wird wie im zeitkontinuierlichen Fall vorausgesetzt, dass die Matrix \mathbf{A}_d diagonalähnlich ist. Das bedeutet, dass auch n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ zu den n Eigenwerten z_1, \dots, z_n der Matrix \mathbf{A}_d existieren. Sind die n Eigenwerte voneinander verschieden, so trifft dies auf jeden Fall zu. Wählt man nun

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} = \left[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n \right],$$

so liegt die transformierte Systembeschreibung (7.20) in der Diagonalform vor. Da die Zeilen von \mathbf{P}^{-1} die zu den Eigenwerten gehörigen Links-Eigenvektoren sind, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix},$$

gilt für das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} &= \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \mathbf{v}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}_d \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b}_d \end{bmatrix} u_k, \\ y_k &= \left[\mathbf{c}_d^T \mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_d^T \mathbf{p}_n \right] \mathbf{z}_k + d_d u_k. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Alle Überlegungen, die für zeitkontinuierliche Systeme angestellt wurden, können also unverändert auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden.

Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix des in Diagonalform vorliegenden Systems (7.22) kann mühelos ermittelt werden. Es gilt offensichtlich

$$\hat{\phi}_{d,0} = \mathbf{E}, \quad \hat{\phi}_{d,k} = \begin{bmatrix} z_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} z_1^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n^k \end{bmatrix} = \text{diag}(z_i^k) \quad \text{für } k > 0 \quad (7.23)$$

Durch Rücktransformation kann nun die Transitionsmatrix des Originalsystems ermittelt werden, es gilt

$$\phi_{d,k} = \mathbf{P} \text{diag}(z_i^k) \mathbf{P}^{-1}. \quad (7.24)$$

Man erkennt, dass die Elemente der Transitionsmatrix $\phi_{d,k}$ Linearkombinationen von Potenzen z_i^k der Eigenwerte von \mathbf{A}_d sind.

7.5.2 Transformation auf Jordanform

Existieren weniger als n linear unabhängige Eigenvektoren, so kann nicht auf Diagonalform, sondern nur auf die allgemeinere Jordanform transformiert werden. Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren entspricht der Zahl der Jordanblöcke in der Dynamikmatrix des transformierten Systems. Die Dimensionen der Jordanblöcke entsprechen den Längen der zugehörigen Eigenvektorketten.

Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\hat{\phi}_{d,k}$ des transformierten Systems kann aus der Dynamikmatrix in Jordanstruktur relativ leicht ermittelt werden. Die zu den einzelnen Jordanblöcken gehörigen Teilsysteme sind voneinander entkoppelt. Für ein zum Jordanblock $\mathbf{J}_{\lambda,m}$ gehöriges Teilsystem

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{J}_{\lambda,m} \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{v}_k \quad (7.25)$$

findet man die Lösung

$$\mathbf{v}_k = \hat{\phi}_{d,k} \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \binom{k}{0} \lambda^k & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{m-1} \lambda^{k-m+1} \\ 0 & \binom{k}{0} \lambda^k & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-2} \lambda^{k-m+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \binom{k}{0} \lambda^k & \binom{k}{1} \lambda^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{k}{0} \lambda^k \end{bmatrix} \mathbf{v}_0, \quad (7.26)$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}.$$

Die Transitionsmatrix $\tilde{\phi}_{d,k}$ des (transformierten) Gesamtsystems kann nun aus den Transitionsmatrizen der Teilsysteme entsprechend zusammengesetzt werden. Die Transitionsmatrix $\phi_{d,k}$ des Originalsystems ergibt sich durch Rücktransformation zu

$$\phi_{d,k} = \mathbf{T} \tilde{\phi}_{d,k} \mathbf{T}^{-1}. \quad (7.27)$$

B Gegeben sei das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k,$$

das in Jordanform vorliegt. Unter Anwendung von (7.26) findet man für die Transitionsmatrix

$$\phi_{d,k} = \begin{bmatrix} 0.5^k & k 0.5^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!} 0.5^{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0.5^k & k 0.5^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^k & k 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

Genauso wie im zeitkontinuierlichen Fall treten - im Gegensatz zu einer diagonalähnlichen Dynamikmatrix - mit der Zeit, d.h. hier mit dem Index k , gewichtete Linearkombinationen der Potenzen z_i^k der Eigenwerte von \mathbf{A}_d auf. ■

7.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

7.6.1 Einführung

Man nennt das System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k \end{aligned} \quad (7.28)$$

steuerbar, wenn es möglich ist, durch geeignete Wahl der Eingangsgröße den beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in endlicher Zeit $t = N T_d$ in einen beliebigen Endzustand \mathbf{x}_N zu überführen.

Man nennt das System **beobachtbar**, wenn aus der Kenntnis von Eingangs- und Ausgangsgröße in einem endlichen Zeitintervall der unbekannte Anfangszustand \mathbf{x}_0 ermittelt werden kann.

7.6.2 Steuerbarkeit

Kriterium nach Kalman

Aus (7.3) folgt

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i,$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i = \underbrace{\mathbf{x}_N - \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0}_{:=\mathbf{q}},$$

wobei \mathbf{q} ein Vektor ist, der sich aus den beliebig vorgegebenen Werten \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_N errechnet. Jeder Vektor \mathbf{q} muss also als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{b}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d, \dots, \mathbf{A}_d^{N-1} \mathbf{b}_d$ dargestellt werden können. Mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 4.2 kann gefolgert werden, dass dies genau dann möglich ist, wenn die Vektoren $\mathbf{b}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d, \dots, \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{b}_d$ linear unabhängig sind. Aus den obigen Überlegungen folgt weiters, dass der Übergang zwischen zwei *beliebigen* Zuständen in der minimalen Zeit $t = n T_d$ abgeschlossen werden kann.

Das System (7.28) ist also genau dann steuerbar, wenn die (diskrete) Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_{d,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{b}_d \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$ steuerbar ist.

Kriterium nach Hautus

Völlig analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (7.28) genau dann steuerbar ist, wenn kein Linkseigenvektor von \mathbf{A}_d orthogonal zu \mathbf{b}_d ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte z_i der Matrix \mathbf{A}_d die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}_d & \mathbf{b}_d \end{bmatrix} = n \quad (7.30)$$

erfüllt ist.

7.6.3 Beobachtbarkeit

Kriterium nach Kalman

Für die Elemente der Ausgangsfolge gilt

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_0 + d_d u_0 \\
 y_1 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_0 + d_d u_1 \\
 y_2 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_1 + d_d u_2 \\
 &\vdots \\
 y_{n-1} &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-2} \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-3} \mathbf{b}_d u_1 + \dots + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_{n-1} + d_d u_n
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_d u_0 \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_0 + d_d u_1 \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_1 + d_d u_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-2} \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-3} \mathbf{b}_d u_1 + \dots + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_{n-1} + d_d u_n \end{bmatrix}.$$

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn obiges Gleichungssystem bezüglich \mathbf{x}_0 eindeutig lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die (diskrete) Beobachtbarkeitmatrix

$$\mathbf{B}_{d,y} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

regulär ist. Man sagt auch, dass das Paar $(\mathbf{A}_d, \mathbf{c}_d)$ beobachtbar ist.

Kriterium nach Hautus

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (7.28) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Rechtseigenvektor von \mathbf{A}_d orthogonal zu \mathbf{c}_d^T ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte z_i der Matrix \mathbf{A}_d die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}_d \end{bmatrix} = n \quad (7.32)$$

erfüllt ist.

Kapitel 8

Übertragungssysteme

8.1 Einführung

Die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ beschreibt das Übertragungsverhalten von zeitdiskreten linearen, zeitinvarianten Systemen. Sie ist definiert als der Quotient der z-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)}. \quad (8.1)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt $k = 0$ in Ruhe befindet. Im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen handelt es sich bei der z-Übertragungsfunktion stets um eine gebrochen rationale Funktion, d.h. $G(z)$ kann als Quotient zweier Polynome in der Form

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}, \quad (8.2)$$

dargestellt werden, wobei die Polynomkoeffizienten von $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(z) \leq \text{Grad } \alpha(z) \quad (8.3)$$

genügen, werden als realisierbar bzw. **kausal** bezeichnet. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(z) = \text{Grad } \alpha(z)$$

spricht man von einem sprunghfähigen System.

Für Systeme der Form (7.1), (7.2) kann die z-Übertragungsfunktion unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gemäß (7.13) mit der Formel

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d \quad (8.4)$$

berechnet werden.

8.2 Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich

Gemäß (8.1) gilt für den Verlauf der Ausgangsfolge nach Anwendung des Faltungssatzes (B.9)

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z) \tilde{u}(z)\} = (g_k) * (u_k) = \left(\sum_{i=0}^k g_{k-i} u_i \right), \quad (8.5)$$

wobei

$$(g_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z)\}. \quad (8.6)$$

Der Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k entspricht also einer gewichteten Summe der Eingangsfolgenelemente bis zu diesem Zeitpunkt. Aus diesem Grund nennt man (g_k) auch **Gewichtsfolge**. Wählt man als Eingangsgröße nun einen zeitdiskreten Impuls, also

$$(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{u}(z) = 1$$

so gilt

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z)\} = (g_k),$$

weshalb (g_k) auch Impulsantwort des Systems genannt wird.

Besitzt die Impulsantwort eines Systems nur endlich viele, von Null verschiedene Elemente, so spricht man von einem **FIR-System**¹. Die Übertragungsfunktion eines FIR-Systems ist durch ein Nennerpolynom der Form $\alpha(z) = z^n$ charakterisiert. Im Gegensatz dazu werden Systeme, deren Impulsantworten unendliche viele, von Null verschiedene Elemente besitzen, auch **IIR-Systeme**² genannt.

B Gegeben sei die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 0.5}{z^3} = z^{-1} - 0.5z^{-3}.$$

Hierbei handelt es sich um ein FIR-System, die zugehörige Impulsantwort lautet

$$(g_k) = (0, 1, 0, -0.5, 0, 0, \dots).$$

Im Gegensatz dazu repräsentiert

$$G(z) = \frac{z}{z - 0.1}$$

ein IIR-System mit der Impulsantwort

$$(g_k) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots) = (0.1^k).$$

¹engl.: *finite impulse response*

²engl.: *infinite impulse response*

8.3 Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell

Da der Zusammenhang (8.4) zwischen der z -Übertragungsfunktion und dem Zustandsmodell (7.1), (7.2) exakt dem zeitkontinuierlichem Fall entspricht, können alle Überlegungen unverändert übernommen werden. Das bedeutet, dass zu einer z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta_n z^n + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

in bekannter Weise die Realisierungen in erster Normalform bzw. zweiter Normalform angegeben werden können.

B Gegeben sei die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + 1.2z + 0.2}.$$

Die zugehörige Realisierung in erster Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -1.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k,$$

das entsprechende Strukturbild ist in Bild 8.1 dargestellt. ■

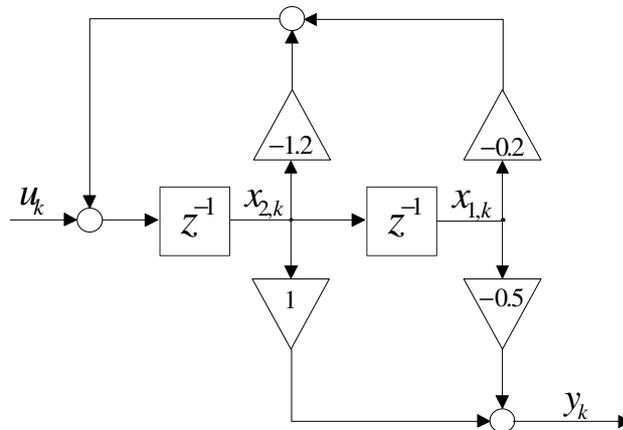


Bild 8.1: Strukturbild eines zeitdiskreten Modells in erster Normalform

B Gegeben sei die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 + 0.9z + 0.1}{z^2 - 0.1z + 0.1} = 1 + \frac{z}{z^2 - 0.1z + 0.1}.$$

Die entsprechende Realisierung in zweiter Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$

8.4 Berechnung von $G(z)$ aus Differenzgleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße (u_k) und der Ausgangsgröße (y_k) in Form einer Differenzgleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = \beta_m u_{k+m} + \beta_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + \beta_1 u_{k+1} + \beta_0 u_k,$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung des Verschiebungssatzes der z-Transformation

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}.$$

Die Kausalität ist gemäß (8.3) für $m \leq n$ gegeben.

B Gegeben sei die Differenzgleichung

$$y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k.$$

Die entsprechende z-Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z + 1}.$$

■

Oft sind Differenzgleichungen so angeschrieben, dass man den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k aus *vergangenen* Werten der Ausgangsgröße und dem Verlauf der Eingangsfolge berechnen kann. Die Ermittlung der zugehörigen z-Übertragungsfunktion kann natürlich analog erfolgen.

B Gegeben sei die Differenzgleichung

$$y_k = y_{k-1} - y_{k-2} + u_{k-1} - u_{k-2}.$$

Die Anwendung der z-Transformation liefert

$$\tilde{y}(z) = z^{-1}\tilde{y}(z) - z^{-2}\tilde{y}(z) + z^{-1}\tilde{u}(z) - z^{-2}\tilde{u}(z).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z - 1}{z^2 - z + 1},$$

das System besitzt also die gleiche z-Übertragungsfunktion wie im vorangegangenen Beispiel.

■

B Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_k = y_{k-1} + u_{k+1}.$$

Hierbei handelt es sich offenbar um ein nicht-kausales System, denn zur Ermittlung der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k wird der *zukünftige* Wert der Eingangsgröße benötigt. Dies manifestiert sich in der z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^2}{z-1},$$

durch die Verletzung der Kausalitätsbedingung (8.3). ■

8.4.1 Umkehrung

Die Ermittlung einer Differenzengleichung aus einer z -Übertragungsfunktion beruht ebenso auf der Anwendung des Verschiebungssatzes.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z + 0.2}{z^2 + 0.1z + 0.15}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{y}(z) (z^2 + 0.1z + 0.15) = \tilde{u}(z) (z + 0.2),$$

woraus sich die Differenzengleichung

$$y_{k+2} + 0.1y_{k+1} + 0.15y_k = u_{k+1} + 0.2u_k$$

ergibt. ■

8.5 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (8.2) die Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{z + 0.1}{z^2 + 0.3z + 0.02}.$$

Gibt man $G(z)$ in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{z + 0.1}{(z + 0.1)(z + 0.2)} = \frac{1}{z + 0.2}$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist. ■

Geht man nun von einer aus teilerfremden Polynomen gebildeten, d.h. nicht weiter kürzbaren, Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)} \quad \text{mit} \quad \mu(z), \nu(z) \dots \text{teilerfremd} \quad (8.7)$$

aus, so sind diejenigen Werte von z , für die $\mu(z) = 0$ gilt, die so genannten **Nullstellen** von $G(z)$. Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch $\nu(z) = 0$ charakterisiert. In der *faktorierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)} \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad (8.8)$$

ist $z = n_i$ eine Nullstelle und $z = p_k$ eine Polstelle von $G(z)$. Tritt der Faktor $(z - n_i)$ bzw. $(z - p_k)$ mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen Pol. Da die Koeffizienten der Polynome $\mu(z)$ und $\nu(z)$ reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (8.8) folgt unmittelbar

$$G(z) = 0 \quad \text{für} \quad z = n_i \quad \text{und} \quad |G(z)| \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad z \rightarrow p_k. \quad (8.9)$$

8.6 BIBO-Stabilität

Ein zeitdiskretes lineares, zeitinvariantes System mit der z -Übertragungsfunktion $G(z)$ wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output“) genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsfolge mit einer beschränkten Ausgangsfolge reagiert. Unter einer beschränkten Folge versteht man in diesem Kontext eine Folge, deren Elemente betragsmäßig beschränkt sind. Somit muss bei BIBO-Stabilität

$$|u_k| \leq M < \infty \quad \Rightarrow \quad |y_k| \leq N < \infty \quad \forall k \geq 0. \quad (8.10)$$

gelten. Mit (8.5) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y_k| = \left| \sum_{i=0}^k g_{k-i} u_i \right| \leq \sum_{i=0}^k |g_{k-i}| |u_i| \stackrel{(8.10)}{\leq} M \sum_{i=0}^k |g_{k-i}| = M \sum_{i=0}^k |g_i|.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von $|y_k|$ für $k \rightarrow \infty$ auf, d.h. zur Erfüllung von (8.10) muss

$$M \sum_{i=0}^{\infty} |g_i| \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort (g_k) absolut summierbar sein muss, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty. \quad (8.11)$$

Man beachte, dass es sich bei (8.11) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

B Gegeben sei die z -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{z - \tau} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{R},$$

mit der zugehörigen Impulsantwort

$$(g_k) = (\tau^k).$$

Die Summe über den Absolutbetrag der Elemente von (g_k) , also

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\tau^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\tau|^k$$

existiert offensichtlich nur für Werte von τ , die betragsmäßig kleiner als eins sind. Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol $z = \tau$ einen Betrag besitzt, der kleiner als eins ist. ■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort (g_k) und der z -Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(z) = \mathfrak{Z}\{(g_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| |z^{-k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| |z|^{-k}$$

Gilt $|z| \geq 1$, so kann weiter geschrieben werden

$$|G(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (8.11) ist also erfüllt - der Ausdruck $|G(z)|$ für $|z| \geq 1$ *endliche* Werte annimmt. Daraus kann gefolgert werden, dass $G(z)$ ausschließlich Pole *im Inneren des Einheitskreises* besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von $G(z)$ im Einheitskreis liegen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (8.7) das Nennerpolynom von $G(z)$ ein Einheitskreispolynom sein muss.

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z + 0.1}{z(z - 0.2)(z + 1)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol besitzt, der nicht im Einheitskreis liegt. ■

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 1}{(z + 0.1)^2(z - 0.5)(z + 0.9)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von $G(z)$ im Einheitskreis liegen. ■

8.7 Abbauverfahren

Die asymptotische Stabilität erfordert es, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix im Einheitskreis liegen. Weiters ist ein zeitdiskretes Übertragungssystem genau dann BIBO-stabil, wenn seine Übertragungsfunktion ausschließlich Pole besitzt, die betragsmäßig kleiner als 1 sind. Man beachte, dass die beiden Stabilitätskriterien die Kenntnis der Lage der Eigenwerte bzw. Pole *nicht* erfordern. Vielmehr reicht es aus, zu überprüfen, ob das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix bzw. das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein Einheitskreispolynom ist. Hierfür gibt es eine Reihe von Verfahren, die ohne die explizite Berechnung der Polynomnullstellen auskommen. Exemplarisch wird an dieser Stelle das so genannte **Abbauverfahren** vorgestellt, wobei auf den Beweis verzichtet wird.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zu untersuchende Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (8.12)$$

Notwendige Bedingungen dafür, dass $p(z)$ ein Einheitskreispolynom ist, lauten³:

$$(1) \left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad (2) \operatorname{sign}(p(1)) = \operatorname{sign}(a_n), \quad (3) \operatorname{sign}((-1)^n p(-1)) = \operatorname{sign}(a_n) \quad (8.13)$$

Man beachte, dass für Polynome mit $\operatorname{Grad} p(z) \leq 2$ die angegebenen Bedingungen sogar *notwendig und hinreichend* sind.

³Mit "sign" wird die Vorzeichenfunktion bezeichnet.

B Die folgenden Polynom sind zu untersuchen.

	(1)	(2)	(3)
$p_1(z) = z^2 + \frac{1}{2}$	✓	✓	✓
$p_2(z) = \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{3}{4}$	×		
$p_3(z) = -z^5 - 2z^4 + \frac{1}{2}$	✓	✓	×
$p_4(z) = 3z^5 + \frac{1}{4}z^4 + z^3 - \frac{1}{2}z^2 + 2z - 3$	×		
$p_5(z) = z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}$	✓	✓	✓

Die Polynome $p_2(z)$, $p_3(z)$, $p_4(z)$ erfüllen die angegebenen notwendigen Bedingungen nicht, sie sind also keine Einheitskreispolynome. Das Polynom $p_5(z)$ erfüllt die Bedingungen, der Nachweis ob es sich um ein Einheitskreispolynom handelt, erfordert allerdings weitere Schritte (siehe unten). Das Polynom $p_1(z)$ kann direkt als Einheitskreispolynome klassifiziert werden, da es die Bedingungen erfüllt und einen Polynomgrad von zwei besitzt. ■

Das Abbauverfahren basiert auf der Erkenntnis, dass das Polynom (8.12) genau dann ein Einheitskreispolynom ist, wenn

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad (8.14)$$

und das „abgebaute“ Polynom

$$p_a(z) = \frac{1}{z} \left[p(z) - \frac{a_0}{a_n} z^n p(z^{-1}) \right] \quad (8.15)$$

ein Einheitskreispolynom ist. Durch wiederholten „Polynomabbau“ und Anwendung der obigen Bedingungen gelangt man zu einem Rechenschema, das dem Routh-Schema sehr ähnlich ist. Zunächst wird ausgehend von (8.12) das Polynom $p_a(z)$ ermittelt, es gilt

$$\begin{aligned} p_a(z) &= \frac{1}{z} \left[a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 - \frac{a_0}{a_n} (a_n + a_{n-1} z + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n) \right] = \\ &= \underbrace{\left(a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right)}_{\gamma_{n-1}} z^{n-1} + \underbrace{\left(a_{n-1} - \frac{a_0}{a_n} a_1 \right)}_{\gamma_{n-2}} z^{n-2} + \dots + \underbrace{\left(a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right)}_{\gamma_0}. \end{aligned}$$

Mit jedem Abbau-Schritt reduziert sich also der Polynomgrad um eins. Die erforderlichen Berechnungsschritte können in tabellarischer Form durchgeführt werden. Hierfür werden die Koeffizienten von $p(s)$ in der ersten Zeile nach *steigenden* Potenzen angeschrieben, in der zweiten Zeile folgen ebendiese Koeffizienten nach *fallenden* Potenzen, d.h.

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \end{array} .$$

Ausgehend davon wird folgendermaßen ein weiteres *Zeilenpaar* gebildet: Die Koeffizienten γ_0 bis γ_{n-1} des abgebauten Polynoms werden nach der exakt gleichen Berechnungsvorschrift wie beim Routh-Schema ermittelt⁴ und als dritte Zeile zur Tabelle hinzugefügt. Die vierte Zeile entspricht wieder der gestürzten dritten Zeile, d.h.

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} & & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 & & \end{array} .$$

Die beschriebene Berechnungsvorschrift wird nun analog solange fortgesetzt, bis die Tabelle $2n$ Zeilen bzw. n Zeilenpaare besitzt, d.h.

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} & & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \varphi_0 & \varphi_1 & & & & \\ \varphi_1 & \varphi_0 & & & & \end{array} .$$

Das Polynom (8.12) ist somit *genau dann* ein Einheitskreispolynom, wenn gemäß (8.14) die Bedingungen $\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1$, $\left| \frac{\gamma_0}{\gamma_{n-1}} \right| < 1$, \dots , $\left| \frac{\varphi_0}{\varphi_1} \right| < 1$ erfüllt sind.

B Es ist zu überprüfen, ob

$$p(z) = z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}$$

ein Einheitskreispolynom ist.

Für die ersten beiden Zeilen der Tabelle gilt

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Da $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$ wird das Schema fortgesetzt und die dritte Zeile berechnet; die vierte Zeile entspricht der gestürzten dritten Zeile, d.h.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 0}{-1} = -\frac{1}{8} & \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{4}}{-1} = \frac{1}{4} & \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 1}{-1} = \frac{3}{4} & \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \end{array}$$

⁴Der Koeffizient in der k -ten Spalte der neuen Zeile entspricht der zweireihigen Determinante aus den Elementen der ersten und $(k+1)$ -ten Spalte der beiden darüberliegenden Zeilen, geteilt durch das negative erste Element der darüberliegenden Zeile.

Da $\left| \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} \right| = \frac{1}{6} < 1$ wird das Schema fortgesetzt und man findet für die fünfte bzw. sechste Zeile

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\
 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \\
 \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \\
 \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{7}{24} & \frac{\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{35}{48} & & \\
 \frac{35}{48} & \frac{7}{24} & &
 \end{array}$$

Da auch die Bedingung $\left| \frac{\frac{7}{24}}{\frac{35}{48}} \right| = \frac{14}{35} < 1$ erfüllt ist, handelt es sich bei $p(z)$ um ein Einheitskreispolynom. ■

8.8 Diskreter Frequenzgang

Auch für zeitdiskrete Systeme kann ein Frequenzgang definiert werden. Es wird ein BIBO-stabiles System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ betrachtet, d.h. alle Pole von $G(z)$ liegen im Einheitskreis. Als Eingangsgröße wird nun die harmonische Folge

$$(u_k) = (e^{j\omega k T_d}) \quad \text{○—●} \quad \tilde{u}(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega T_d}} \quad (8.16)$$

gewählt. Für die z-Transformierte der Ausgangsfolge (y_k) gilt

$$\tilde{y}(z) = G(z) \frac{z}{z - e^{j\omega T_d}},$$

d.h.

$$\frac{\tilde{y}(z)}{z} = G(z) \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{l=1}^n (z - p_l)} \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}}.$$

Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{\tilde{y}(z)}{z} = \frac{c_0}{z - e^{j\omega T_d}} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}.$$

Für den Koeffizienten c_0 findet man

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega T_d}} (z - e^{j\omega T_d}) \frac{\tilde{y}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega T_d}} \left[(z - e^{j\omega T_d}) G(z) \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}} \right] = G(e^{j\omega T_d}),$$

d.h.

$$\tilde{y}(z) = \frac{G(e^{j\omega T_d}) z}{z - e^{j\omega T_d}} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - p_i}.$$

Für die Elemente der zugehörigen Folge (y_k) gilt wegen $|p_i| < 1$ also

$$y_k = G(e^{j\omega T_d}) e^{j\omega k T_d} + \sum_{i=1}^n c_i p_i^k.$$

Für „sehr große Werte von k “, also im *eingeschwungenen Zustand* gilt somit

$$y_k \approx G(e^{j\omega T_d}) e^{j\omega k T_d}, \quad (8.17)$$

d.h. die Ausgangsfolge entspricht der mit $G(e^{j\omega T_d})$ gewichteten Eingangsfolge. Diese komplexe Funktion

$$G(e^{j\omega T_d}) = |G(e^{j\omega T_d})| e^{j \arg G(e^{j\omega T_d})} \quad (8.18)$$

ist der **diskrete Frequenzgang** des Systems. Da die Begriffe „Phasenverschiebung“ und „Amplitude“ für Folgen keinen Sinn ergeben, werden den harmonischen Folgen so genannte *Trägerschwingungen* zugeordnet, d.h.

Folge $(e^{j\omega k T_d})$	Trägerschwingung $e^{j\omega t}$
Folge $(G(e^{j\omega T_d}) e^{j(\omega k T_d + \arg G(e^{j\omega T_d}))})$	Trägerschwingung $ G(e^{j\omega T_d}) e^{j(\omega t + \arg G(e^{j\omega T_d}))}$

Damit die Zuordnung zwischen Folge und Trägerschwingung eindeutig ist, muss die Bedingung

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_d} \quad (8.19)$$

erfüllt sein.

B Gegeben sei ein zeitdiskretes System ($T_d = 0.1$) mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.2}.$$

Als Eingangsgröße wird die Folge

$$(u_k) = (\sin k T_d)$$

gewählt. Im eingeschwungenen Zustand gilt aufgrund von

$$G(e^{0.1j}) = \frac{1}{e^j - 0.2} \approx 1.24 e^{-j0.125}$$

für die zugehörige Ausgangsfolge

$$(y_k) = (1.24 \sin(k T_d - 0.125)).$$

■

Kapitel 9

Diskretisierung zeitkontinuierlicher Systeme

9.1 Einführung

Bei den bisherigen Ausführungen wurde stillschweigend angenommen, dass die betrachteten Systeme von Natur aus zeitdiskreten Charakter besitzen. Diese Annahme ist jedoch nicht immer gerechtfertigt, da zeitdiskret betrachteten Systemen häufig zeitkontinuierliche Prozesse zugrunde liegen. Ein Beispiel hierfür ist ein so genannter **digitaler Regelkreis**, in dem zur Regelung eines zeitkontinuierlichen Prozesses ein Rechner (Steuergerät, Computer,...) als Regler eingesetzt wird, siehe Bild 9.1.

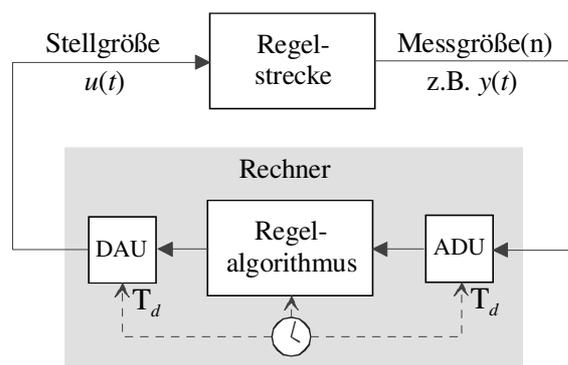


Bild 9.1: Digitaler Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und „digitalem Regler“.

9.2 Der digitale Regelkreis

Das Verhalten des zeitkontinuierlichen Systems („Regelstrecke“) kann mittels der skalaren Stellgröße $u(t)$ gezielt beeinflusst werden. Auf Basis geeigneter Messgrößen¹ wird bewertet, inwieweit das tatsächliche Verhalten der Regelstrecke der Wunschvorstellung entspricht. Daraus werden schließlich durch das Regelgesetz („Regelalgorithmus“) entsprechende Stellgriffe abgeleitet.

9.2.1 Halteglied und Abtaster

Es wird davon ausgegangen, dass dem Rechner die Messgrößen zu den äquidistanten Zeitpunkten

$$t = kT_d \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

zugeführt werden, wobei T_d die (positive) konstante Diskretisierungs- oder **Abtastzeit** ist. Dies erfordert die Umwandlung der analogen Messgrößen in eine geeignete digitale Form mit Hilfe von Analog-Digital-Umsetzern („ADU“). Bei den nachfolgenden Ausführungen wird angenommen, dass diese Umwandlung durch idealisierte Analog-Digital-Umsetzer, auch **Abtaster** genannt, ohne Zeitverzug und fehlerfrei durchgeführt wird. Wird beispielsweise die (skalare) Ausgangsgröße $y(t)$ der Regelstrecke gemessen, so generiert der Abtaster daraus eine Zahlenfolge $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ gemäß $y_k = y(kT_d)$, wie in Bild 9.2 dargestellt. Aus den Ele-

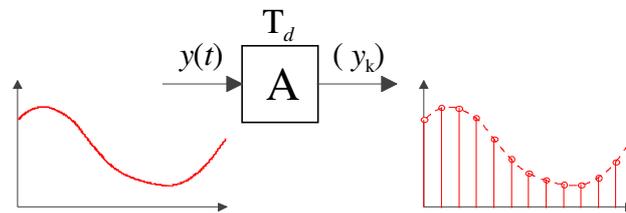


Bild 9.2: Funktionsprinzip des Abtasters

menten dieser Zahlenfolge wird im Regelgesetz, einem (vom Regelungstechniker entworfenen) Algorithmus, eine Folge von Stellgrößenwerten $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ generiert. Dabei wird angenommen, dass die hierfür benötigte Rechenzeit deutlich kleiner ist als die Abtastzeit und daher vernachlässigt werden kann. Das zeitdiskrete Regelgesetz besitzt also im vorliegenden Fall die Eingangsgröße (y_k) und die Ausgangsgröße (u_k) .

Aus den Stellgrößenwerten u_k wird mit Hilfe eines Digital-Analog-Umsetzers eine Funktion $u(t)$ generiert. Im vorliegenden Fall wird hierfür ein unendlich schneller, fehlerfreier Umsetzer eingesetzt, der aus (u_k) eine so genannte äquidistante Treppenfunktion, d.h.

$$u(t) = u_k \quad \text{für} \quad kT_d \leq t < (k+1)T_d \quad (9.2)$$

erzeugt. Einen solcherart idealisierten Digital-Analog-Umsetzer nennt man auch **Halteglied**, siehe Bild 9.3.

¹Wird die Ausgangsgröße $y(t)$ zurückgeführt, so spricht man von einer **Ausgangsrückführung**. Man spricht von einer **Zustandsrückführung**, wenn die Zustandsgrößen zurückgeführt werden.

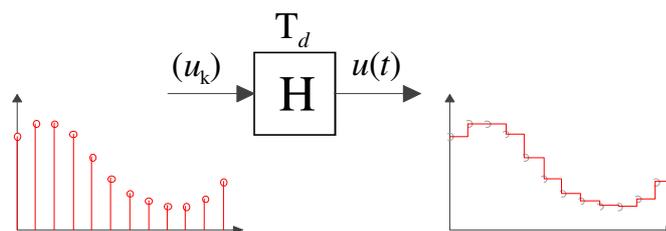


Bild 9.3: Funktionsprinzip des Haltegliedes

9.2.2 Diskrete Betrachtung des Regelkreises

Offensichtlich repräsentiert der in Bild 9.1 dargestellte Regelkreis die Zusammenschaltung des zeitdiskreten Regelgesetzes mit der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Die Schnittstellen zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Welt sind Abtaster und Halteglied.

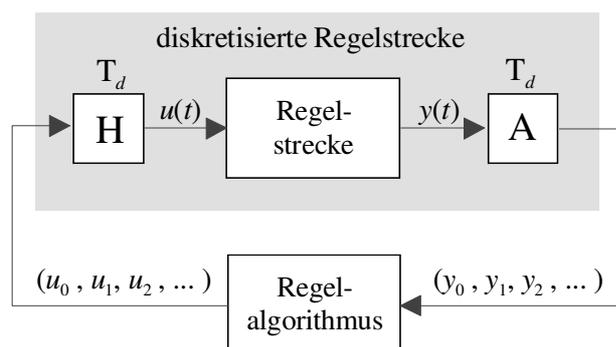


Bild 9.4: Zeitdiskrete Betrachtung des Regelkreises

Der digitale Regelkreis kann aber auch als rein zeitdiskretes System betrachtet werden. Dazu werden, wie in Bild 9.4 veranschaulicht, Abtaster und Halteglied der Regelstrecke zugeschlagen, die somit als zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße (u_k) und der Ausgangsgröße (y_k) interpretiert werden kann. Der Regelkreis besteht somit aus zwei zeitdiskreten Systemen, nämlich dem Regelalgorithmus und der „diskretisierten Regelstrecke“, siehe Bild 9.4. Man beachte, dass aus dieser Darstellung die Systemgrößen der zeitkontinuierlichen Regelstrecke zu den Abtastzeitpunkten (9.1) *exakt* bestimmt werden können, eine Ermittlung der Verläufe *zwischen* den Abtastzeitpunkten ist jedoch *nicht* möglich. Aus diesem Grund ist dafür zu sorgen, dass die Abtastzeit T_d hinreichend klein gewählt wird, d.h. die Zustandsgrößen ändern sich über eine Abtastperiode nur unwesentlich.

9.3 Diskretisierung der Regelstrecke

Die zeitkontinuierliche Regelstrecke wird als lineares, zeitinvariantes System vorausgesetzt, dessen dynamisches Verhalten durch ein Zustandsmodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (9.3)$$

beziehungsweise durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \quad (9.4)$$

beschrieben werden kann. In den nachfolgenden Abschnitten werden Methoden zur Diskretisierung von zeitkontinuierlichen Streckenmodellen hergeleitet. Zunächst wird ein zeitdiskretes Zustandsmodell abgeleitet, danach wird eine entsprechende z-Übertragungsfunktion ermittelt.

9.3.1 Diskretes Zustandsmodell

Gesucht ist ein zeitdiskretes Zustandsmodell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \quad y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k, \quad (9.5)$$

dessen Zustände zu den Abtastzeitpunkten (9.1) exakt denen des zeitkontinuierlichen Systems (9.3) bei treppenförmiger Eingangsgröße u gemäß (9.2) entsprechen, siehe Bild 9.5. Dazu

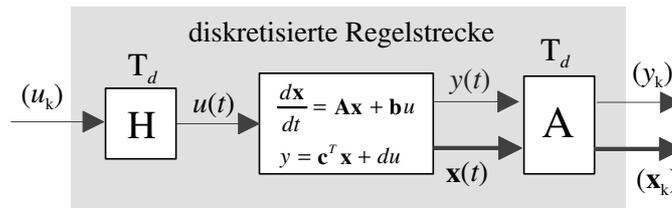


Bild 9.5: Ermittlung eines zeitdiskreten Streckenmodells

wird zunächst der Wert des Zustandsvektors zum Zeit $t = kT_d$ berechnet, es gilt die bekannte Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_d) = \phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau, \quad (9.6)$$

wobei $\phi(t)$ die zu (9.3) gehörige Transitionsmatrix repräsentiert. Analog dazu gilt zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_d$ für den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(kT_d + T_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (9.7)$$

Unter Ausnutzung der bekannten Eigenschaft

$$\phi(kT_d + T_d) = \phi(T_d)\phi(kT_d) = \phi(kT_d)\phi(T_d),$$

der Transitionsmatrix und durch Aufteilung des Integrationsintervalls in zwei Teile kann (9.7) in die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \left(\phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right) + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

gebracht werden. Durch Vergleich mit (9.6) erkennt man, dass der Klammerausdruck in obigem Ergebnis genau \mathbf{x}_k entspricht, d.h.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (9.8)$$

Von der Eingangsgröße u weiß man, dass sie zwischen zwei Abtastzeitpunkten konstant ist, siehe (9.2). Damit vereinfacht sich (9.8) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u_k d\tau = \\ &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} d\tau u_k. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Mit der Substitution

$$\sigma = kT_d + T_d - \tau$$

lautet die Berechnungsvorschrift für \mathbf{x}_{k+1} nun

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k - \int_{T_d}^0 \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k. \quad (9.10)$$

Damit sind die gesuchten Zustandsdifferenzgleichungen gefunden. Für den Wert der Ausgangsgröße y zum Zeitpunkt $t = kT_d$ gilt offensichtlich

$$y_k = y(kT_d) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k. \quad (9.11)$$

Damit hat man das gesuchte zeitdiskrete Zustandsmodell der Form (9.5) gefunden, es gilt

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\phi(T_d)}_{=\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_k + \underbrace{\int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma}_{=\mathbf{b}_d} u_k, \quad y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k. \quad (9.12)$$

B Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

einer Regelstrecke. Die zugehörige Transitionsmatrix lautet

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt aus (9.12) für die Systemmatrix des diskreten Modells

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

für den Eingangsvektor gilt

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix}.$$

Das zeitdiskrete Streckenmodell lautet somit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + 2 u_k.$$

■

Stabilität der diskretisierten Strecke

Es wird nun untersucht, wie die Eigenwerte z_i der Dynamikmatrix $\phi(T_d)$ des diskretisierten Modells mit den Eigenwerten s_i von \mathbf{A} zusammenhängen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Matrix $\phi(T_d)$ als Funktion von \mathbf{A} dargestellt werden kann:

$$\phi(T_d) = \mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots$$

Multipliziert man $\phi(T_d)$ von rechts mit einem zum Eigenwert s_i gehörigen Eigenvektor \mathbf{p}_i von \mathbf{A} , so findet man

$$\begin{aligned} \phi(T_d) \mathbf{p}_i &= \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = \\ &= \left(\mathbf{p}_i + \mathbf{A} \mathbf{p}_i T_d + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \mathbf{p}_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \stackrel{\mathbf{A} \mathbf{p}_i = s_i \mathbf{p}_i}{=} \\ &= \left(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i s_i T_d + \mathbf{A} \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) = \dots = \\ &= \left(1 + s_i T_d + s_i^2 \frac{T_d^2}{2!} + s_i^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = e^{s_i T_d} \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass für die Eigenwerte z_i von $\phi(T_d)$

$$z_i = e^{s_i T_d} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.13)$$

gilt und die zugehörigen Eigenvektoren den Eigenvektoren \mathbf{p}_i von \mathbf{A} entsprechen.

Aus (9.13) kann gefolgert werden, dass aus einem asymptotisch stabilen zeitkontinuierlichen System (9.3) stets auch ein asymptotisch stabiles zeitdiskretes System (9.12) hervorgeht, denn aus $\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$ folgt unmittelbar $|z_i| = |e^{s_i T_d}| < 1$.

B Fortsetzung. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

des zeitkontinuierlichen Modells der Regelstrecke aus dem vorangegangenen Beispiel liegen bei

$$s_1 = s_2 = 0.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix des zugehörigen zeitdiskreten Systems

$$\mathbf{A}_d = \phi(T_d) = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

liegen gemäß (9.13) bei

$$z_1 = z_2 = 1.$$

■

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der diskretisierten Strecke

Es wird vorausgesetzt, dass die zeitkontinuierliche Strecke (9.3) steuerbar und beobachtbar ist. Man kann nun zeigen, dass das zugehörige zeitdiskrete System (9.12) genau dann steuerbar und beobachtbar ist, wenn verschiedene Eigenwerte des kontinuierlichen Systems auch verschiedene Eigenwerte des diskreten Systems zur Folge haben, d.h.

$$e^{s_i T_d} \neq e^{s_k T_d} \quad \text{für} \quad s_i \neq s_k \quad (9.14)$$

Man beachte, dass aus verschiedenen Eigenwerten s_i, s_k von \mathbf{A} nur dann gleiche Eigenwerte $z_i = e^{s_i T_d}, z_k = e^{s_k T_d}$ von \mathbf{A}_d werden können, wenn die Bedingung $\operatorname{Re} s_i = \operatorname{Re} s_k$ erfüllt ist, d.h.

$$s_i = \sigma + j\omega_i \quad \text{und} \quad s_k = \sigma + j\omega_k \quad \text{mit} \quad \omega_i \neq \omega_k.$$

Für die zugehörigen Eigenwerte von \mathbf{A}_d gilt dann

$$z_i = e^{s_i T_d} = e^{\sigma T_d} e^{j\omega_i T_d} \quad \text{und} \quad z_k = e^{s_k T_d} = e^{\sigma T_d} e^{j\omega_k T_d}.$$

Um (9.14) zu erfüllen, muss also

$$(\omega_i - \omega_k) T_d \neq \pm q 2\pi \quad \text{mit} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

gelten, d.h. die Diskretisierungszeit muss der Bedingung

$$T_d \neq \frac{\pm q 2\pi}{(\omega_i - \omega_k)} \quad \text{mit} \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (9.15)$$

genügen. Eine Diskretisierungszeit, die (9.15) *nicht* erfüllt, wird oft „pathologisch“ genannt.

B Gegeben sei das Zustandsmodell der zeitkontinuierlichen Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}.$$

Wählt man die „pathologische“ Diskretisierungszeit

$$T_d = \pi,$$

dann gehen die Eigenwerte $s_{1,2} = -1 \pm j$ der Matrix \mathbf{A} in die Eigenwerte $z_{1,2} = -0.0432$ der Matrix \mathbf{A}_d über. Das zeitdiskrete System verliert aufgrund der unglücklichen Wahl von T_d die Eigenschaften der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit. ■

Der Verlust von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit offenbart sich bei der Transformation des diskretisierten Systems auf Jordan-Form. Da das zeitkontinuierliche System als steuerbar und beobachtbar vorausgesetzt wurde, besitzt seine Diagonal- bzw. Jordan-Form zu jedem Eigenwert genau *ein* Diagonalelement bzw. *einen* Jordanblock. Zu jedem dieser Diagonalelemente bzw. Jordanblöcke existieren entsprechende Diagonalelemente bzw. Jordanblöcke des zugehörigen diskretisierten Systems. Wird nun „pathologisch“ abgetastet, so besitzt das diskrete System zu einem Eigenwert mehr als ein Diagonalelement bzw. einen Jordanblock, was - wie in Abschnitt 4 erläutert - zum Verlust von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit führt.

B Gegeben sei das zeitkontinuierliche Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 + j2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - j2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Wählt man die „pathologische“ Diskretisierungszeit

$$T_d = \frac{\pi}{2},$$

so lautet das zugehörige zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -4.8105 & 0 & 0 \\ 0 & -4.8105 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1407 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k,$$

dh. die Eigenwerte $s_{1,2} = 1 \pm j2$, $s_3 = 2$ der Matrix \mathbf{A} gehen über in die Eigenwerte $z_{1,2} = 4.8105$, $z_3 = 23.1407$ der Matrix \mathbf{A}_d . Die Systemmatrix des diskretisierten Systems besitzt also zwei Diagonalelemente zu einem Eigenwert. ■

9.3.2 z-Übertragungsfunktion

Es ist die z-Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} \quad (9.16)$$

der in Bild 9.6 dargestellten Anordnung bei gegebener Übertragungsfunktion $P(s)$ gesucht. Dabei macht man sich die Tatsache zunutze, dass die $P_d(z)$ die z-Transformierte der Impul-

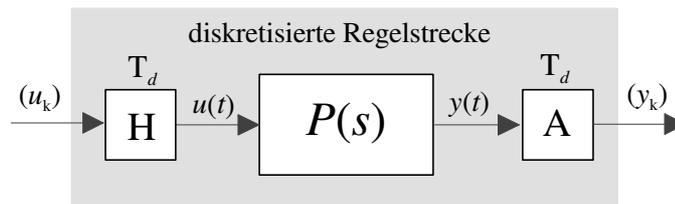


Bild 9.6: Ermittlung der z-Übertragungsfunktion $P_d(z)$

santwort des zeitdiskreten Systems ist. Wählt man also

$$(u_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{u}(z) = 1, \quad (9.17)$$

dann generiert das Halteglied daraus

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_d) \quad \text{d.h.} \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_d}. \quad (9.18)$$

Für die Ausgangsgröße $y(t)$ der zeitkontinuierlichen Regelstrecke gilt dann

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\bar{u}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}.$$

Die Folge (y_k) ergibt sich durch Abtastung von $y(t)$, d.h. für die Elemente der Folge gilt

$$y_k = y(t = kT_d) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}\Bigg|_{t=kT_d}.$$

Die z-Transformierte der Folge (y_k) lautet

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\{(y_k)\} = \mathfrak{Z}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}\Bigg|_{t=kT_d}\right)\right\}. \quad (9.19)$$

Dieser etwas unübersichtliche Ausdruck in (9.19) wird üblicherweise folgendermaßen

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\} = \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\} \quad (9.20)$$

abgekürzt, d.h. die Operation $\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\{y(s)\}$ repräsentiert folgende Rechenschritte:

$$\bar{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \xrightarrow{\text{Abtastung}} (y_k) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \tilde{y}(z).$$

Da die Multiplikation mit e^{-sT_d} im Bildbereich der Verschiebung im Zeitbereich um einen Abtastschritt nach rechts entspricht, kann (9.20) auch in der Form

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}$$

angeschrieben werden. Aufgrund der Wahl der Eingangsfolge (9.17) gilt somit für die gesuchte z -Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}. \quad (9.21)$$

Eine mögliche Realisierung von $P_d(z)$ ist natürlich durch (9.12) gegeben.

Man beachte, dass das Ergebnis (9.21) auch durch eine sehr einfache Überlegung gewonnen werden kann. Wählt man nämlich als Eingang für das in Bild 9.6 System die Folge

$$(u_k) = (\sigma_k) = (1, 1, 1, \dots),$$

so gilt $u(t) = \sigma(t)$ und $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}$. Für die z -Transformierte der Ausgangsfolge (y_k) gilt somit

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} \stackrel{!}{=} P_d(z)\frac{z}{z-1}$$

Daraus resultiert unmittelbar (9.21).

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Gemäß (9.21) gilt dann

$$\begin{aligned} P_d(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) = \frac{z-1}{z}(\mathfrak{Z}\{(1)\} - \mathfrak{Z}\{(e^{-kT_d})\}) = \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_d}}\right) = \frac{1-e^{-T_d}}{z-e^{-T_d}}. \end{aligned}$$

■

Die Pole der Streckenübertragungsfunktion (9.4) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von \mathbf{A} und die Pole von (9.21) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von $\phi(T_d)$. Solange keine „pathologische“ Diskretisierungszeit gewählt wird, entspricht der Nennergrad von $P_d(z)$ dem Nennergrad von $P(s)$. Daraus folgt unmittelbar, dass die Pole z_i von $P_d(z)$ über die Relation (9.13) aus den Polen s_i von $P(s)$ hervorgehen. Aus einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion $P(s)$ ergibt sich somit durch die Diskretisierung stets auch eine BIBO-stabile Übertragungsfunktion $P_d(z)$.

B Fortsetzung. Im vorigen Beispiel geht der Pol $s = -1$ der Übertragungsfunktion $P(s)$ durch die Diskretisierung in einen Pol $z = e^{-T_d}$ der Übertragungsfunktion $P_d(z)$ über. ■

Kapitel 10

Englische Fachbegriffe

Anfangswertsatz	initial value theorem
Anfangszustand	initial state
asymptotisch stabil	asymptotically stable
asymptotische Stabilität	asymptotic stability
autonom	autonomous
Begleitform	companion form
beobachtbar	observable
Beobachtbarkeit	observability
Bebachtbarkeitsnormalform	observable-form realization, observable canonical form
BIBO Stabilität	BIBO stability
Determinante	determinant
Diagonalform	diagonal form
Differentialgleichung	differential equation
Dirac Impuls	Dirac delta function
Durchgriffsterm	direct transmission term
Eigenwert	eigenvalue
Eigenvektor	eigenvector
Eingrößensystem	single input - single output system
Einheitskreis	unit circle
Einheitsmatrix	identity matrix
Einheitssprung	unit step
Endwertsatz	final value theorem
Erreichbarkeit	reachability
Faltung	convolution
Faltungsintegral	convolution integral
Faltungssumme	convolution sum
Frequenzgang	frequency response
Impuls	impulse
instabil	unstable
Jordan-Form	Jordan canonical form

Jordanblock	Jordan block
Koeffizient	coefficient
konjugiert komplex	conjugate complex
Knotenpunkt	node
stabil	nodal sink, stable node
instabil	nodal source, unstable node
kürzen	to cancel
Kürzung	cancellation
Laplace Transformation	Laplace transform
linear, zeitinvariant (LZI)	linear, time-invariant (LTI)
linear unabhängig	linearly independent
Linearisierung	linearization
Lösung, freie	zero-input response
erzwungene	zero-state response
Matrix	matrix, <i>pl.</i> matrices
adjungierte	adjoint matrix
diagonale	diagonal matrix
Hurwitz-	Hurwitz matrix
in Begleitform	companion matrix
inverse	inverse matrix
quadratische	square matrix
reguläre	nonsingular matrix
schiefsymmetrische	skew symmetric matrix
singuläre	singular matrix
symmetrische	symmetric matrix
transponierte	transpose matrix, transposed matrix
Minimalrealisierung	minimal realization
Nenner	denominator
Normalform	canonical form
Nullstelle	zero
Parallelschaltung	parallel connection
Phasenportrait	phase portrait
PN plan	pole-zero map
Pol, Polstelle	pole
Polynom	polynomial
charakteristisches	characteristic polynomial
Hurwitz-	Hurwitz polynomial
monisches	monic polynomial
Nenner-	denominator polynomial
Zähler-	numerator polynomial
Rang	rank
realisierbar	proper
Reihenschaltung	series connection
Routh Schema	Routh test

Rückkopplung	feedback
Ruhelage	equilibrium point
Sattelpunkt	saddle point
Sprungantwort	step response
sprungfähig	biproper
Sprungfunktion	step function
Stabilität	stability
asymptotische	asymptotic stability
BIBO	BIBO stability
steuerbar	controllable
Steuerbarkeit	controllability
Steuerbarkeitsmatrix	controllability matrix
Steuerbarkeitsnormalform	controllable-form realization, controllable canonical form
Systemordnung	system order
teilerfremd	coprime
Trajektorie	trajectory
Transitionsmatrix	state transition matrix
Übertragungsfunktion	transfer function
Vektor	vector
Spalten-	column vector
Zeilen-	row vector
Vielfachheit	multiplicity
Wirbelpunkt	spiral point
stabil	spiral sink
instabil	spiral source
Zähler	numerator
zeitdiskret	discrete-time
zeitinvariant	time-invariant
zeitvariant	time-variant
Zustandsebene	state plane
-modell	state model
-raum	state space
-variable	state variable
-transformation	state transformation
-vektor	state vector

Anhang A

Laplace-Transformation

Die (einseitige) **Laplace-Transformation** ordnet einer Zeitfunktion $f(t)$ über die Berechnungsvorschrift

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.1})$$

eine Funktion $\bar{f}(s)$ der komplexen Variable s zu. Dabei wird an dieser Stelle vereinfachend angenommen, dass $f(t)$ für negative Werte des Parameters t verschwindet, d.h.

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Weiters wird vorausgesetzt, dass $f(t)$ auf jedem endlichen Zeitintervall stückweise stetig ist und - für geeignet gewählte reelle Konstanten M und γ - der Ungleichung

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (\text{A.2})$$

genügt. Dann ist das Integral (A.1) für alle s mit $\text{Re}\{s\} > \gamma$ absolut konvergent¹, man spricht auch vom Existenzbereich von $\bar{f}(s)$. Jeder transformierbaren Funktion $f(t)$ im **Zeitbereich** wird durch (A.1) eine Funktion $\bar{f}(s)$ im **Bildbereich** zugeordnet. Diese Korrespondenz zwischen der **Originalfunktion** $f(t)$ und der zugehörigen **Bildfunktion** $\bar{f}(s)$ wird durch

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{und} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \quad (\text{A.3})$$

bzw. durch das „Hantelsymbol“

$$f(t) \circ \bullet \bar{f}(s) \quad (\text{A.4})$$

symbolisiert.

A.1 Linearität

Die Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (\text{A.5})$$

für beliebige komplexe Konstanten α_1 und α_2 .

¹das Laplace-Integral ist also in einer rechten Halbebene absolut konvergent. In den meisten Fällen kann die Funktion $\bar{f}(s)$ in die gesamte komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden.

A.2 Dämpfungsregel

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{\alpha t}\} = \bar{f}(s - \alpha), \quad (\text{A.6})$$

wobei α eine beliebige komplexe Konstante ist.

A.3 Verschiebungssatz

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Für die Laplace-Transformierte der auf der Zeitachse um $\tau > 0$ (nach rechts) verschobenen Funktion $f(t - \tau)$ gilt

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (\text{A.7})$$

Man beachte hierzu auch die Darstellung in Bild A.1, die nochmals verdeutlichen soll, dass die verschobene Funktion $f(t - \tau)$ für $t < \tau$ identisch Null ist.

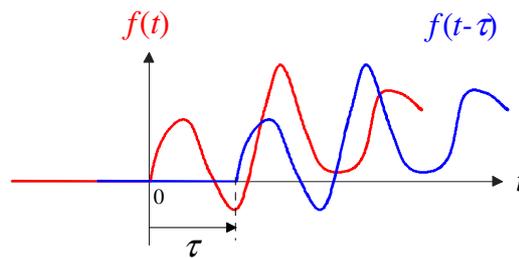


Bild A.1: zur Illustration des Verschiebungssatzes

A.4 Faltungsregel

Gegeben seien zwei Zeitfunktionen mit den zugehörigen Laplace-Transformierten, also $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $\bar{g}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Es gilt dann

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.8})$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von der Faltung der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ und verwendet häufig die Kurzschreibweise

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

A.5 Differentiation im Zeitbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Für die Laplace-Transformierte der zeitlichen Ableitung von $f(t)$ gilt dann

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = s\bar{f}(s) - f(0). \quad (\text{A.9})$$

Eine wiederholte Anwendung des Differentiationssatzes liefert für die n -te Ableitung von $f(t)$ die Korrespondenz

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \left. \frac{d^i f}{dt^i} \right|_{t=0}. \quad (\text{A.10})$$

Man beachte, dass sich im Falle verschwindender Anfangswerte obige Relation zu

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \bar{f}(s) \quad (\text{A.11})$$

vereinfacht. Eine n -fache Differentiation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Bildbereich mit s^n .

A.6 Differentiation im Bildbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann die Relation

$$-\mathcal{L} \{t f(t)\} = \frac{d\bar{f}(s)}{ds}. \quad (\text{A.12})$$

Eine n -fache Differentiation nach s führt auf das Ergebnis

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n}. \quad (\text{A.13})$$

A.7 Integration im Zeitbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \bar{f}(s). \quad (\text{A.14})$$

A.8 Anfangswertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$. Der Wert der Zeitfunktion $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ kann mit Hilfe des Anfangswertsatzes

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s) \quad (\text{A.15})$$

berechnet werden.

A.9 Endwertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$. Der Wert der Zeitfunktion $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ kann mit Hilfe des Endwertsatzes

$$f_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s) \quad (\text{A.16})$$

ermittelt werden. Man beachte, dass die Anwendung von (A.16) nur dann zulässig ist, wenn der Grenzwert von $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ existiert. Dies kann ebenfalls im Bildbereich überprüft werden. Ist die Funktion $\bar{g}(s) = s \bar{f}(s)$ eine gebrochen rationale Funktion, d.h.

$$\bar{g}(s) = \frac{\kappa(s)}{\lambda(s)},$$

wobei $\kappa(s)$ und $\lambda(s)$ teilerfremde (gekürzte) Polynome sind, so existiert f_∞ genau dann, wenn das Polynom $\lambda(s)$ ausschließlich Nullstellen mit negativem Realteil besitzt. Ein solches Polynom wird auch **Hurwitzpolynom**² genannt.

²benannt nach dem deutschen Mathematiker Adolf Hurwitz (1859-1919)

A.10 Korrespondenztabelle für reelle Funktionen

$f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\bar{f}(s)$
$\delta(t)$		1
$\sigma(t)$		$\frac{1}{s}$
t		$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \geq 0$		$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$		$\frac{1}{s - \alpha}$
$te^{\alpha t}$		$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}, n \geq 0$		$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$		$\frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$		$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$		$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Anhang B

z-Transformation

Die (einseitige) **z-Transformation** ordnet einer Zahlenfolge (f_k) über die Berechnungsvorschrift

$$\tilde{f}(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad (\text{B.1})$$

eine Funktion $\tilde{f}(z)$ der komplexen Variable z zu. Dabei wird an dieser Stelle vereinfachend angenommen, dass die Folgeelemente von (f_k) für negative Werte von k verschwinden, d.h.

$$f_k = 0 \quad \text{für } k < 0.$$

Für Zahlenfolgen (f_k) , deren Elemente - für geeignet gewählte reelle Konstanten M und γ - der Ungleichung

$$|f_k| \leq M \gamma^k$$

genügen, konvergiert die Summe (B.1) im Gebiet $|z| > \gamma$. Jeder transformierbaren Folge $(f_k) = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ wird somit durch (B.1) eine Funktion $\tilde{f}(z)$ im **Bildbereich** zugeordnet. Diese Korrespondenz wird durch

$$\tilde{f}(z) = \mathfrak{Z}\{(f_k)\} \quad \text{und} \quad (f_k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{\tilde{f}(z)\} \quad (\text{B.2})$$

bzw. durch das „Hantelsymbol“

$$(f_k) \circ \bullet \tilde{f}(z) \quad (\text{B.3})$$

symbolisiert¹.

B.1 Linearität

Die z-Transformation ist eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathfrak{Z}\{\alpha_1 (f_{1,k}) + \alpha_2 (f_{2,k})\} = \alpha_1 \mathfrak{Z}\{(f_{1,k})\} + \alpha_2 \mathfrak{Z}\{(f_{2,k})\} \quad (\text{B.4})$$

für beliebige komplexe Konstanten α_1 und α_2 .

¹Häufig wird auch die Schreibweise $\tilde{f}(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\}$ und $(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\tilde{f}(z)\}$ verwendet.

B.2 Dämpfungsregel

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger z-Transformierter $\tilde{f}(z)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}\{(\alpha^k f_k)\} = \tilde{f}\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad (\text{B.5})$$

wobei α eine beliebige komplexe Konstante ist.

B.3 Verschiebung nach rechts

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Die z-Transformierte der um $n > 0$ Schritte (nach rechts) verschobenen Folge (f_{k-n}) lautet

$$\mathfrak{Z}\{(f_{k-n})\} = z^{-n} \tilde{f}(z). \quad (\text{B.6})$$

Man beachte, dass die Elemente der verschobenen Folge für $k < n$ identisch Null sind.

B.4 Verschiebung nach links

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Die z-Transformierte der um $n > 0$ Schritte (nach links) verschobenen Folge (f_{k+n}) lautet

$$\mathfrak{Z}\{(f_{k+n})\} = z^n \tilde{f}(z) - z^n \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i}. \quad (\text{B.7})$$

Sind alle Elemente der Folge (f_k) für $k < n$ identisch Null, so vereinfacht sich (B.7) zu

$$\mathfrak{Z}\{(f_{k+n})\} = z^n \tilde{f}(z). \quad (\text{B.8})$$

B.5 Faltungsregel

Gegeben seien zwei Zahlenfolgen mit den zugehörigen z-Transformierten $\tilde{f}(z) = \mathfrak{Z}\{(f_k)\}$ und $\tilde{g}(z) = \mathfrak{Z}\{(g_k)\}$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}^{-1}\{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)\} = \left(\sum_{i=0}^k f_{k-i}g_i\right) = \left(\sum_{i=0}^k g_{k-i}f_i\right). \quad (\text{B.9})$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von der Faltung der Folgen (f_k) und (g_k) und verwendet die Kurzschreibweise

$$\mathfrak{Z}^{-1}\{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)\} = (f_k) * (g_k) = (g_k) * (f_k).$$

B.6 Differentiation im Bildbereich

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}\{(k f_k)\} = -z \frac{d\tilde{f}(z)}{dz}. \quad (\text{B.10})$$

B.7 Anfangswertsatz

Gegeben sei die z-Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge $(f_k) = (f_0, f_1, f_2, \dots)$. Das Element f_0 kann mit Hilfe des Anfangswertsatzes

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) \quad (\text{B.11})$$

berechnet werden.

B.8 Endwertsatz A.9

Gegeben sei die z-Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge (f_k) . Das Folgeelement f_k für $k \rightarrow \infty$ kann mit Hilfe des Endwertsatzes

$$f_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \tilde{f}(z) \quad (\text{B.12})$$

ermittelt werden. Man beachte, dass die Anwendung von (B.12) nur dann zulässig ist, wenn der Grenzwert f_∞ existiert. Dies kann ebenfalls im Bildbereich überprüft werden. Ist die Funktion $\tilde{g}(z) = (z - 1) \tilde{f}(z)$ eine gebrochen rationale Funktion, d.h.

$$\tilde{g}(z) = \frac{\kappa(z)}{\lambda(z)},$$

wobei $\kappa(z)$ und $\lambda(z)$ teilerfremde (gekürzte) Polynome sind, so existiert f_∞ genau dann, wenn das Polynom $\lambda(z)$ ausschließlich Nullstellen besitzt, die betragsmäßig kleiner als 1 sind. Das bedeutet, dass alle Nullstellen von $\lambda(z)$ im Einheitskreis der komplexen z-Ebene liegen. Ein solches Polynom wird auch **Einheitskreispolynom** oder **Schurpolynom** genannt.

B.9 Korrespondenztabelle

(f_k)	$\circ \rightarrow \bullet$	$\tilde{f}(z)$
$(\delta_k) = (1, 0, \dots)$		1
$(\sigma_k) = (1, 1, \dots)$		$\frac{z}{z-1}$
(k)		$\frac{z}{(z-1)^2}$
(k^2)		$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
(α^k)		$\frac{z}{z-\alpha}$
$(k\alpha^k)$		$\frac{z\alpha}{(z-\alpha)^2}$
$(k^2\alpha^k)$		$\frac{z(z+\alpha)\alpha}{(z-\alpha)^3}$
$(\cos \omega k T_d)$		$\frac{z(z - \cos \omega T_d)}{z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1}$
$(\sin \omega k T_d)$		$\frac{z \sin \omega T_d}{z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1}$
$(\alpha^k \cos \omega k T_d)$		$\frac{z(z - \alpha \cos \omega T_d)}{z^2 - 2z\alpha \cos \omega T_d + \alpha^2}$
$(\alpha^k \sin \omega k T_d)$		$\frac{z\alpha \sin \omega T_d}{z^2 - 2z\alpha \cos \omega T_d + \alpha^2}$
$(k \cos \omega k T_d)$		$\frac{z[(z^2 + 1) \cos \omega T_d - 2z]}{(z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1)^2}$
$(k \sin \omega k T_d)$		$\frac{z(z^2 - 1) \sin \omega T_d}{(z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1)^2}$

Literatur

- [1] ACKERMANN J.: Abtastregelung, 3. Auflage, Springer Verlag, 1988
- [2] CHEN C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993
- [3] CHEN C.T.: Linear System Theory and Design, Saunders College Publishing, 1984
- [4] FÖLLINGER _ O.: Regelungstechnik, 6.Auflage, Hüthig Verlag, 1990
- [5] FÖLLINGER _ O.: Lineare Abtastsysteme, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1990
- [6] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004
- [7] KAILATH T.: Linear Systems, Prentice Hall, 1980
- [8] LANDGRAF C., SCHNEIDER G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer Verlag, 1970
- [9] LUNZE J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001