

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

Skript zur Lehrveranstaltung

S I G N A L T R A N S F O R M A T I O N E N

Bemerkung: Das Skript ist in deutscher Sprache verfasst.

"Ich spreche und schreibe Deutsch. Das große, weite und tiefe
Deutsch, das die Reformer nicht verstehen. Und nicht ertragen."
(Robert Menasse)

Heinico Dourdoumas, Richard Seeber, Daniel Muschick

Version vom 27. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Die Laplace-Transformation	5
1.1	Einführung	5
1.2	Sätze für das Rechnen mit der Laplace-Transformation	10
1.2.1	Ähnlichkeitssatz	11
1.2.2	Verschiebungssatz	11
1.2.3	Dämpfungssatz	14
1.2.4	Abbildung der Differentiation im Zeitbereich	14
1.2.5	Integration im Zeitbereich	16
1.2.6	Differentiation im Bildbereich	17
1.2.7	Anfangswertsatz	19
1.2.8	Endwertsatz	19
1.2.9	Multiplikation im Bildbereich (optional)	22
1.3	Rücktransformation gebrochen rationaler Funktionen	25
1.3.1	Fall 1: Das Nennerpolynom $\nu(s)$ besitzt <i>einfache</i> Nullstellen	26
1.3.2	Fall 2: Das Nennerpolynom $\nu(s)$ besitzt <i>mehrfache</i> Nullstellen	33
2	Lösung eines Systems von Differentialgleichungen	39
2.1	Eine Differentialgleichung 1. Ordnung	39
2.2	Zwei gekoppelte Differentialgleichungen	45
3	Die z-Transformation	57
3.1	Einführung	57
3.2	Sätze für das Rechnen mit der z-Transformation	67
3.2.1	1. Verschiebungssatz (Verschiebung der Originalfolge nach <i>rechts</i>) . . .	68
3.2.2	2. Verschiebungssatz (Verschiebung der Originalfolge nach <i>links</i>) . . .	70
3.2.3	Spreizen (Indexänderung) der Originalfolge (optional)	72
3.2.4	Dämpfungssatz	73
3.2.5	Differentiation im Bildbereich	74
3.2.6	Integration im Bildbereich	76
3.2.7	Anfangswertsatz	78
3.2.8	Endwertsatz	79
3.2.9	Multiplikation im Bildbereich (optional)	83
3.3	Inverse z-Transformation gebrochen rationaler Funktionen	84
3.3.1	Fall 1: Das Nennerpolynom $\bar{\nu}(z)$ besitzt <i>einfache</i> Nullstellen	86

3.3.2	Fall 2: Das Nennerpolynom $\bar{v}(z)$ besitzt <i>mehrfache</i> Nullstellen	88
4	Lösung linearer Rekursionsgleichungen	91
4.1	Skalare Rekursionsgleichung 1. Ordnung	91
4.1.1	Rekursive Ermittlung von x_i	92
4.1.2	Ermittlung einer Lösung x_i in expliziter Darstellung	93
4.2	Lösung einer Rekursionsgleichung höherer Ordnung	96
4.2.1	Rekursive Ermittlung von y_i	97
4.2.2	Explizite Darstellung von y_i für eine Rekursionsgleichung 2. Ordnung .	97
4.3	Vektorielle Rekursionsgleichung 1. Ordnung	102
4.3.1	Ermittlung der Lösung $\mathbf{x}_i$ in expliziter Darstellung	104
4.4	Äquivalenz von Rekursionsgleichungen (optional)	108
4.4.1	Der Fall $n = 2$	110
4.4.2	Der Fall $n = 3$	112
4.4.3	Verallgemeinerung der Ergebnisse (ohne Beweis)	114
5	Korrespondenztabelle	115
5.1	Kausale Funktionen $f(t)$	115
5.2	Kausale Folgen (f)	116
6	Literatur	117

Kapitel 1

Die Laplace-Transformation

1.1 Einführung

Bei der Untersuchung zeitlicher Vorgänge in elektrischen Netzwerken muss man oft gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen. Mit Hilfe der Laplace¹-Transformation kann man die Differentialgleichungen in äquivalente lineare algebraische Gleichungen überführen und im sogenannten Bildbereich lösen. Die anschließende Rücktransformation dieser Lösungen in den Zeitbereich ergibt die gesuchten Zeitfunktionen. Darüberhinaus kann durch Verwendung der Transformation das Verhalten linearer Schaltungen charakterisiert und untersucht werden. Es ist zu bemerken, dass die Laplace-Transformation mit der Fourier²-Transformation eng verwandt ist. Beide Transformationen weisen Vorteile auf, die allerdings nicht *gleichzeitig* sichergestellt werden können. Grob gesagt ist die Anwendung der Fourier-Transformation bei nachrichtentheoretischen Fragestellungen üblich, während die Anwendung der Laplace-Transformation in der Regelungstechnik bzw. Regelungstheorie gängiger ist.

Bei der Laplace-Transformation ordnet man in eindeutiger Weise einer Funktion $f(t)$ der reellen Variablen t eine Funktion $\bar{f}(s)$ der *komplexen* Variablen s zu. In vielen technischen Anwendungen ist $f(t)$ eine Zeitfunktion. Es wird *angenommen*, dass

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 \quad (1.1)$$

gilt. Solche Funktionen werden *kausal* genannt³. Das ist z.B. bei Einschaltvorgängen der Elektrotechnik bzw. bei der Berechnung von Systemgrößen in elektrischen Schaltungen mit Hilfe gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Fall⁴.

¹Pierre-Simon de Laplace (Baumont-en-Auge 1749 - Paris 1827)

²Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre 1768 - Paris 1830)

³Mit Hilfe kausaler Zeitfunktionen wird der Begriff *kausales System* eingeführt. Dieser Begriff kennzeichnet jedes physikalische System!

⁴Die Behandlung von Funktionen $f(t)$, die auch für $t < 0$ Werte ungleich Null annehmen, erfolgt mit Hilfe der sogenannten zweiseitigen Laplace-Transformation

$$\bar{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Man bildet nun das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Es wird damit eine Funktion $\bar{f}(s)$ eingeführt, die für alle Werte s , für die obiges Integral konvergiert⁵, durch

$$\bar{f}(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.2)$$

definiert ist.

Somit wird gemäß (1.2) der Funktion $f(t)$ eine Funktion $\bar{f}(s)$ im sogenannten **Bildbereich** zugeordnet. Diese Zuordnung (auch Korrespondenz genannt) zwischen **Originalfunktion** $f(t)$ und zugehöriger **Bildfunktion** $\bar{f}(s)$ wird durch

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{und} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \quad (1.3)$$

symbolisiert. Die Notation

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) \quad (1.4)$$

bedeutet, dass $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein sogenanntes Transformationspaar bilden.

Die Laplace-Transformation weist gewisse fundamentale Eigenschaften auf.

1. Linearitätseigenschaft: Wie man anhand (1.2) erkennt, handelt es sich um eine *lineare* Transformation. Sie wird durch die Eigenschaften *Homogenität* und *Additivität* charakterisiert. Das bedeutet, dass ausgehend von zwei (beliebigen) Transformationspaaren

$$g(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{g}(s) \quad \text{und} \quad h(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{h}(s),$$

die Relation

$$\alpha \cdot g(t) + \beta \cdot h(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \alpha \cdot \bar{g}(s) + \beta \cdot \bar{h}(s) \quad (1.5)$$

für beliebige, i.A. komplexe(!) Konstanten α und β gilt. Aufgrund dieser Eigenschaften kann die Berechnung der Laplace-Transformierten einer komplizierten Funktion $f(t)$ entscheidend vereinfacht werden, indem man $f(t)$ als Superposition einfacher Funktionen darstellt und diese der Laplace-Transformation unterwirft!

2. Analytische Eigenschaften: Wenn das Laplace-Integral $\bar{f}(s)$ für einen Punkt $s = \beta$ konvergiert, so konvergiert⁶ es auch für alle Werte s in der (rechten) Halbebene $\operatorname{Re}\{s - \beta\} > 0$.

⁵Falls die stückweise stetige Funktion $f(t)$ einer Beschränkung

$$|f(t)| \leq M < \infty \quad \text{für} \quad t \geq t_1 \geq 0$$

genügt, so ist das Integral (1.2) für alle Werte der Variablen s mit $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ absolut konvergent. In der Technik vorkommende *reale* Funktionen unterliegen immer solch einer Beschränkung.

⁶Das Laplace-Integral ist sogar *absolut* konvergent

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-st}| dt \leq K < \infty$$

in einer rechten Halbebene. Wenn $\bar{f}(s)$ für einen Punkt $s = \delta$ absolut konvergiert, so konvergiert es absolut für alle Werte s in der Halbebene $\operatorname{Re}\{s - \delta\} > 0$.

Der Konvergenzbereich $\mathfrak{K}$ des Laplace-Integrals ist eine Halbebene $\operatorname{Re}\{s\} > \gamma$ (siehe Bild 1.1). Der Wert der (reellen) Zahl γ hängt von der Funktion $f(t)$ ab. Es ist essentiell, dass $\bar{f}(s)$ innerhalb des Konvergenzbereiches $\mathfrak{K}$ beliebig oft(!) nach s differenzierbar ist⁷. Ferner kann jeder Differentialquotient $d^k \bar{f}/ds^k$ als Laplace-Transformierte einer Funktion gedeutet werden.

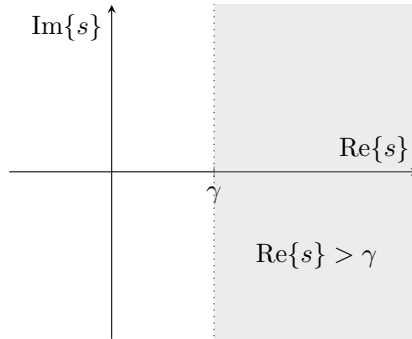


Bild 1.1: Konvergenzbereich

3. Asymptotische Eigenschaft: Das Verhalten von $\bar{f}(s)$ für "große" Werte von s ist charakteristisch: Strebt die komplexe Variable s längs irgendeines Strahles im Konvergenzbereich $\mathfrak{K}$ ins Unendliche, so strebt $\bar{f}(s)$ nach Null⁸

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{f}(s) = 0 .$$

Nachfolgend werden für einige elementare Funktionen $f(t)$ die zugehörigen Laplace-transformierten ermittelt.

[B]Beispiel: Wir betrachten die sogenannte Sprungfunktion⁹ (siehe Bild 1.2)

$$f(t) = \sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} .$$

Die zugehörige Laplace-Transformierte ergibt sich gemäß (1.2) zu

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{unter der Annahme } \operatorname{Re}\{s\} > 0 .$$

Damit erhält man die Korrespondenz

$$\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{s} . \tag{1.6}$$

■

⁷Man spricht von einer *holomorphen* oder *analytischen* Funktion $\bar{f}(s)$.

⁸Insbesondere gilt für jedes $\sigma > \gamma$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{f}(\sigma + j\omega) = 0 .$$

⁹Sie ist wichtig bei der theoretischen Behandlung von Einschwingvorgängen.

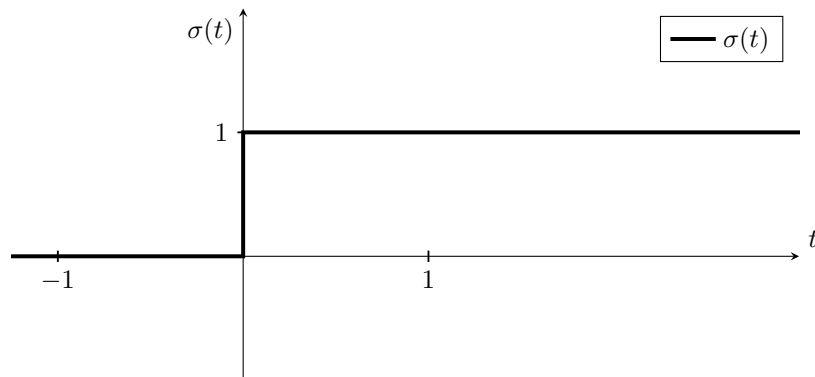


Bild 1.2: Sprungfunktion

B **Beispiel:** Zu der Exponentialfunktion (siehe Bild 1.3)

$$f(t) = e^{at} \quad \text{mit der komplexen Konstante } a$$

ergibt sich die Laplace-Transformierte

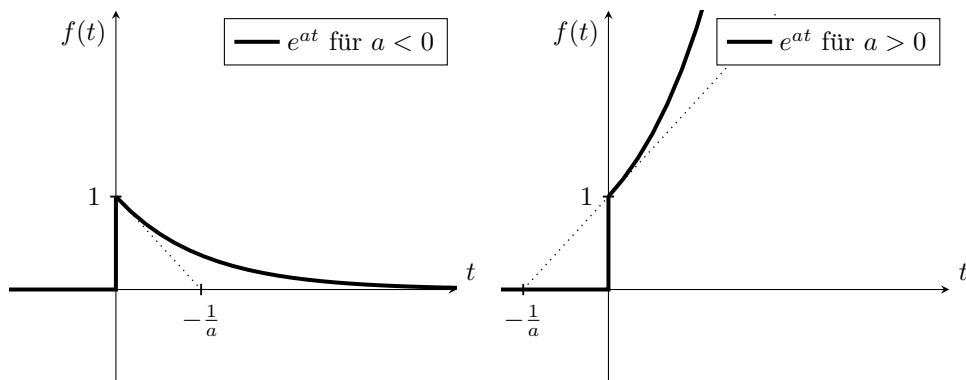


Bild 1.3: Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re}\{s-a\} > 0 \quad . \end{aligned}$$

Wir erhalten das wichtige Transformationspaar

$$e^{at} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{s-a} . \quad (1.7)$$

■

BBeispiel (Fortsetzung): Wir gehen von dem Transformationspaar

$$e^{at} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s-a}$$

aus. Das bedeutet es gilt

$$\int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}.$$

Eine Differentiation obiger Relation nach s ist aufgrund der 2. fundamentalen Eigenschaft einer Laplace-Transformierten erlaubt! Sie ergibt

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{at} (-t) e^{-st} dt = -\frac{1}{(s-a)^2}$$

bzw.

$$\int_0^\infty t e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Damit erhalten wir eine weitere Korrespondenz

$$t e^{at} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Dieser Schritt kann natürlich wiederholt werden, um weitere Korrespondenzen zu erhalten!

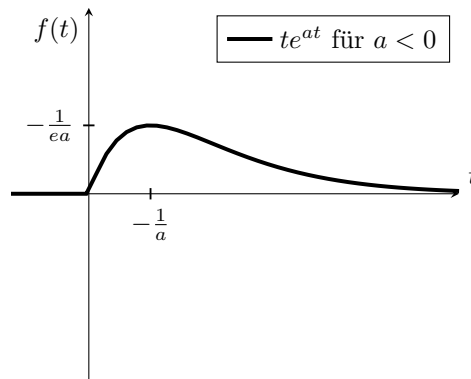


Bild 1.4: Zeitgewichtete Exponentialfunktion

■

BBeispiel: Die Laplace-Transformation trigonometrischer Funktionen wie Sinus und Cosinus erfolgt mithilfe der Korrespondenz (1.7) für die Exponentialfunktion $f(t) = e^{j\omega t}$, wobei ω eine reelle Konstante ist. Dabei wird die Euler¹⁰ zugeschriebene Formel¹¹

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

¹⁰Leonhard Euler (Basel 1707 - St. Petersburg 1783)

¹¹Setzt man den Wert $\varphi = \pi$ ein, so erhält man die Formel $e^{j\pi} + 1 = 0$. Sie enthält die fundamentalen Zahlen der Analysis e , j , π , 1 , und 0 und gehört zu den "Top Ten" der mathematischen Sätze!

ausgenutzt und man schreibt:

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t .$$

Wird $\alpha = j\omega$ in (1.7) eingesetzt, resultiert

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s - j\omega}.$$

Deutet man nun die Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ als Linearkombination zweier Funktionen

$$f(t) = e^{j\omega t} = 1 \cdot \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t =: \alpha \cdot g(t) + \beta \cdot h(t)$$

und zerlegt man $\bar{f}(s)$ gemäß

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s - j\omega} \frac{s + j\omega}{s + j\omega} = 1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

so ergeben sich unter Ausnutzung von (1.5) (d.h. der 1. fundamentalen Eigenschaft) die Korrespondenzen

$$\cos \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \sin \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad . \quad (1.8)$$

■

1.2 Sätze für das Rechnen mit der Laplace-Transformation

In den nachfolgenden Ausführungen werden Regeln formuliert, die gewisse Operationen mit Funktionen im Zeitbereich bzw. Bildbereich signifikant erleichtern. Diese Operationen kann man folgendermaßen klassifizieren:

- Lineare Substitution der Variablen im Zeit- bzw. Bildbereich. Man erhält den Ähnlichkeits-, den Verschiebungs- und den Dämpfungssatz.
- Differentiation im Zeit- bzw. Bildbereich und Integration im Zeitbereich.
- Grenzwertermittlung der Originalfunktion mithilfe des Anfangs- bzw. des Endwertsatzes.
- Multiplikation im Bildbereich.

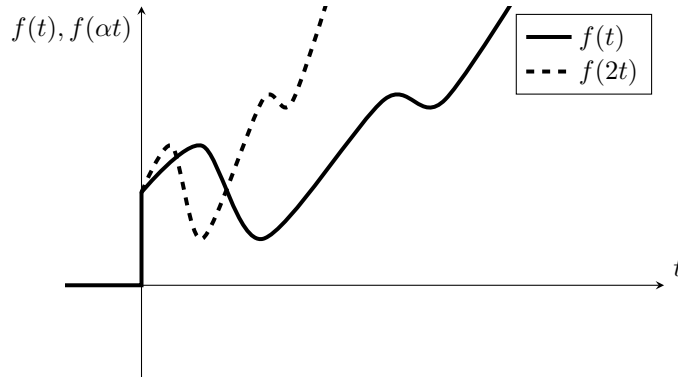


Bild 1.5: Zeitskalierung

1.2.1 Ähnlichkeitssatz

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar und α eine *positive* Konstante. Es gilt (siehe Bild 1.5)

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \bar{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad .$$

- Dies ergibt sich leicht aus (1.2) durch eine Substitution der Integrationsvariablen t

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-st} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-\frac{s}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \bar{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad .$$

1.2.2 Verschiebungssatz

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. Die Laplace-Transformierte der auf der Zeitachse um $T > 0$ (also nach rechts) verschobenen Funktion $f(t)$, d.h. der Funktion (siehe Bild 1.6)

$$h(t) := \sigma(t - T) \cdot f(t - T)$$

lautet

$$\mathcal{L}\{\sigma(t - T) \cdot f(t - T)\} = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad . \quad (1.9)$$

Man beachte, dass laut Voraussetzung die Funktion $f(t)$ für $t < 0$ verschwindet!

BBeispiel: Sei $h(t)$ die um $T > 0$ verschobene Funktion $f(t) = e^{-t}$

$$h(t) := \sigma(t - T) \cdot e^{-(t-T)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ e^{-(t-T)} & \text{für } t \geq T \end{cases} \quad .$$

Unter Zuhilfenahme von (1.7) und (1.9) erhalten wir

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t - T) \cdot e^{-(t-T)}\} = e^{-sT} \frac{1}{s + 1} \quad .$$

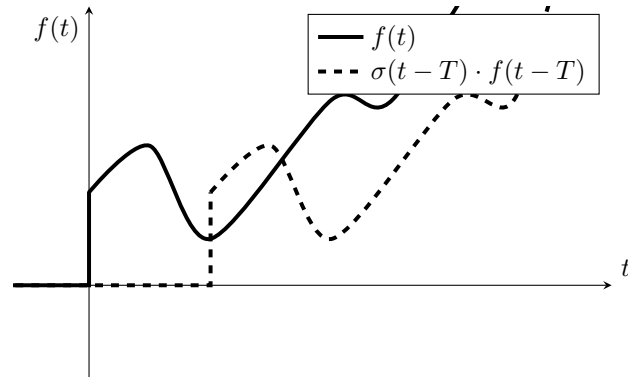


Bild 1.6: Zeitverschiebung

■

B **Beispiel:** Wir betrachten den Rechteck-Impuls (siehe Bild 1.7)

$$r_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)] \quad (1.10)$$

mit der Dauer ε . Der Flächeninhalt unterhalb dieser Funktion beträgt

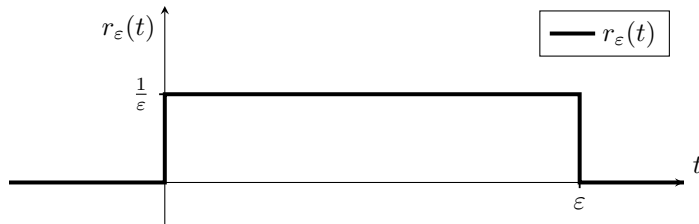


Bild 1.7: Rechteck-Impuls

$$\int_0^\infty r_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 .$$

Für die Laplace-Transformierte von $r_\varepsilon(t)$ gilt nun unter Anwendung von (1.2)

$$\bar{r}_\varepsilon(s) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{s\varepsilon} (1 - e^{-s\varepsilon}) . \quad (1.11)$$

Obiges Ergebnis ergibt sich alternativ aufgrund der Linearität der Laplace-Transformation und des Verschiebungssatzes. Durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ (siehe 1.8) entsteht in *heuristischer*

Weise der sogenannte Dirac¹²-Impuls, auch δ -Funktion (Deltafunktion)¹³ genannt, d.h.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t). \quad (1.12)$$

Sie ist, abgesehen von der Stelle $t = 0$, überall gleich Null und besitzt einen endlichen Flächen-

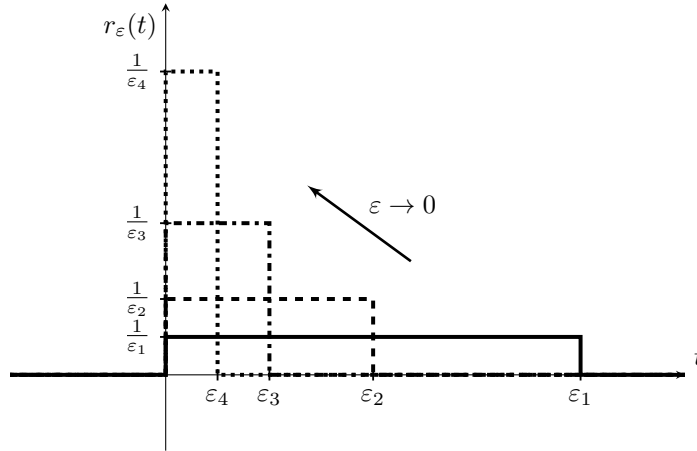


Bild 1.8: Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

inhalt! Sie ist in der Tat keine gewöhnliche Funktion. Bedenkt man, dass die komplexe Exponentialfunktion e^z als eine unendliche Reihe darstellbar ist

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

so erhält man mit $z = -s\varepsilon$ für kleine Werte von ε

$$e^{-s\varepsilon} \approx 1 - s\varepsilon$$

d.h.

$$\bar{r}_\varepsilon(s) \approx 1.$$

Führt man nun - ohne mathematische Skrupel - den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durch, so erhält man

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{r}_\varepsilon(s) = 1$$

bzw. die Korrespondenz

$$\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1. \quad (1.13)$$

■

¹²Paul Adrien Maurice Dirac (Bristol / England 1902 - Tallahassee, Florida / USA 1984)

¹³Die Darstellung der δ -Funktion als eine Funktion, die überall gleich Null ist, und für $t \rightarrow 0$ gegen Unendlich geht, während ihr Integral gleich Eins ist, ist im Sinne der klassischen Analysis nicht korrekt! Eine mathematisch fundierte Behandlung solcher *verallgemeinerter Funktionen* erfolgt im Rahmen der im Jahre 1945 geschaffenen Theorie der *Distributionen*. Siehe z.B. Heinz DOBESCH & Hannelore SULANKE: *Zeitfunktionen, Theorie und Anwendung*, Kap. 2.2.

- Satz (1.9) kann mittels (1.2) nach einer Substitution der Integrationsvariablen t hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_T^\infty f(t-T) e^{-st} dt \stackrel{\tau=t-T}{=} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+T)} d\tau \\
 &= e^{-sT} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} .
 \end{aligned}$$

1.2.3 Dämpfungssatz

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar und α eine beliebige *komplexe* Konstante. Es gilt

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = \bar{f}(s - \alpha). \quad (1.14)$$

Beispiel: Mit Hilfe von (1.14) und der Kenntnis von (1.8) können die Korrespondenzen

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad e^{\alpha t} \sin \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad (1.15)$$

müheless angegeben werden. ■

- Die Relation (1.14) ergibt sich aus (1.2):

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = \bar{f}(s - \alpha) .$$

1.2.4 Abbildung der Differentiation im Zeitbereich

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. Für die Laplace-Transformierte der Ableitung der Funktion $f(t)$ nach t gilt

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\bar{f}(s) - f(0). \quad (1.16)$$

Beispiel: Die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \cos \omega t$$

lautet gemäß (1.8)

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Für die Ableitung von $f(t)$

$$\frac{df(t)}{dt} = -\omega \sin \omega t$$

ergibt sich gemäß (1.16)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ -\omega \sin \omega t \} = s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \cos 0 = \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

bzw.

$$\mathcal{L} \{ \sin \omega t \} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad .$$

Dieses Ergebnis deckt sich erwartungsgemäß mit (1.8). ■

- Relation (1.16) kann mit Hilfe von (1.2) und unter Anwendung partieller Integration abgeleitet werden. Es ergibt sich¹⁴

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st} df = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty [-s e^{-st} f(t)] dt \\ &= s \bar{f}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Für die zweite zeitliche Ableitung von $f(t)$ ergibt sich durch analoge Anwendung von (1.16)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{df(t)}{dt} \right\} = s \mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

bzw.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = s^2 \bar{f}(s) - s f(0) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (1.17)$$

Die wiederholte Anwendung des Differentiationssatzes liefert für die n -te Ableitung von $f(t)$ die Korrespondenz¹⁵

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k f}{dt^k} \Big|_{t=0} \quad (1.18)$$

bzw.

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \circ \text{---} \bullet \quad s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k f}{dt^k} \Big|_{t=0}. \quad (1.19)$$

Im Falle verschwindender Anfangswerte für $0 \leq k \leq n-1$

$$\frac{d^k f}{dt^k} \Big|_{t=0} = 0$$

¹⁴Es wird *angenommen*, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0$$

im Konvergenzbereich des Laplace-Integrals gilt. Dies ist bei realen Anwendungen immer gegeben.

¹⁵Hierbei wird die Notation

$$\frac{d^0 f}{dt^0} \Big|_{t=0} := f(0)$$

verwendet.

vereinfacht sich obige Relation zu

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad \circ \text{---} \bullet \quad s^n \bar{f}(s), \quad (1.20)$$

d.h. die n -fache Differentiation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit s^n im Bildbereich.

1.2.5 Integration im Zeitbereich

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. Es gilt dann

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \bar{f}(s). \quad (1.21)$$

[B]Beispiel: Gegeben sei die Korrespondenz für die Sprungfunktion $\sigma(t)$

$$f(t) = \sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s}.$$

Die Laplace-Transformierte des Integrals der Sprungfunktion

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau = t$$

ergibt sich gemäß (1.21) zu

$$\mathcal{L} \{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

■

[B]Beispiel: Gegeben sei die Korrespondenz

$$f(t) = te^{-t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Die Laplace-Transformierte des Integrals von te^{-t}

$$F(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$$

ergibt sich gemäß (1.21) und nach einer Partialbruchzerlegung zu

$$\mathcal{L} \{F(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

mit der zugehörigen Originalfunktion

$$F(t) = \sigma(t) - e^{-t} - te^{-t}.$$

■

- Für den Beweis dieser Korrespondenz betrachten wir die Funktion

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

und deren Ableitung nach t

$$\frac{dF}{dt} = f(t) .$$

Offensichtlich gilt dann gemäß (1.16)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dF}{dt} \right\} = s\mathcal{L} \{F(t)\} - 0 = \mathcal{L} \{f(t)\}$$

bzw.

$$\mathcal{L} \{F(t)\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{f(t)\} .$$

1.2.6 Differentiation im Bildbereich

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. Es gilt die Relation

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = -\mathcal{L} \{t f(t)\} \quad \text{bzw.} \quad t f(t) \quad \circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \quad - \frac{d\bar{f}(s)}{ds} . \quad (1.22)$$

[B]Beispiel: Gegeben sei das Transformationspaar

$$f(t) = \sin \omega t \quad \text{und} \quad \bar{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} .$$

Mit Hilfe der Differentiation von $\bar{f}(s)$ nach s

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = -\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

ergibt sich mittels (1.22) die Korrespondenz (siehe Bild 1.9)

$$t \sin \omega t \quad \circ\!\!\!\circ\!\!\!\bullet \quad \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} . \quad (1.23)$$

■

[B]Beispiel: Zu der Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{at} \quad \text{mit der komplexen Konstante } a$$

lautet die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s - a} .$$

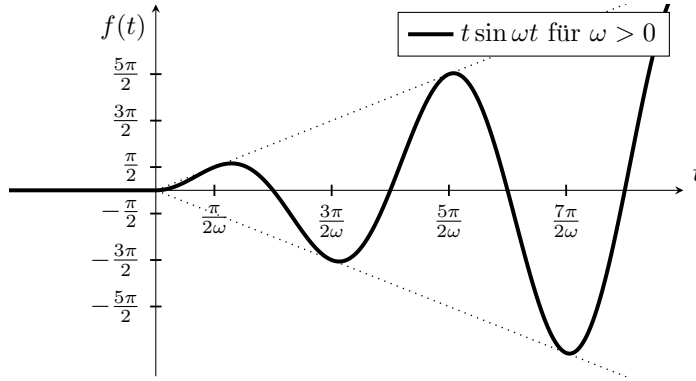


Bild 1.9: Zeitgewichtete Sinusfunktion

Es gilt dann

$$te^{at} \circ \bullet - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-a} \right) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

und wir erhalten das Transformationspaar

$$te^{at} \circ \bullet \frac{1}{(s-a)^2}. \quad (1.24)$$

Die wiederholte Anwendung des Differentiationsatzes im Bildbereich liefert unmittelbar die wichtigen Korrespondenzen

$$t^n e^{at} \circ \bullet n! \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

■

- Die Korrespondenz (1.22) kann unmittelbar aus der Relation (1.2) hergeleitet werden. Differenziert man $\bar{f}(s)$ nach s , so ergibt sich - indem man unter dem Integralzeichen differenziert -

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) (-t) e^{-st} dt = (-1) \mathcal{L} \{t f(t)\}.$$

Eine weitere Differentiation nach s führt auf die Beziehung

$$\mathcal{L} \{t^2 f(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2 \bar{f}(s)}{ds^2} \quad (1.26)$$

bzw. bei n -facher Differentiation auf

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n}.$$

1.2.7 Anfangswertsatz

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. Der Wert der Funktion $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ kann anhand von

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot \bar{f}(s)] \quad (1.27)$$

berechnet werden. Man beachte, dass $f(0)$, *ohne* Kenntnis der Funktion $f(t)$ ermittelt wird. Natürlich ist die Anwendung von (1.27) nur dann sinnvoll und zulässig, wenn dieser Anfangswert existiert!

B **Beispiel:** Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Der Wert der zugehörigen Zeitfunktion $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1.$$

Dass dieses Ergebnis korrekt ist, zeigt auch Korrespondenz (1.8)

$$\cos \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

.

■

- Die Gültigkeit des Satzes wird aus dem Differentiationssatz

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\bar{f}(s) - f(0)$$

einsichtig, indem man die komplexe Variable s nach Unendlich streben lässt. Damit ergibt sich¹⁶

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\bar{f}(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\bar{f}(s)] - f(0).$$

1.2.8 Endwertsatz

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ ein Transformationspaar. *Sofern* der Grenzwert der Funktion $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ existiert, kann er durch

$$f_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \bar{f}(s)] \quad (1.28)$$

ermittelt werden. Ähnlich wie beim Anfangswertsatz (1.27) ist die Kenntnis der Funktion $f(t)$ *nicht* nötig! Man beachte, dass die Anwendung von (1.28) nur dann sinnvoll und zulässig ist, wenn dieser Grenzwert existiert.

¹⁶Hierbei wird *vorausgesetzt*, dass der Grenzübergang unter dem Integral vorgenommen werden kann.

Folgendes **Lemma** garantiert die Existenz des Grenzwertes f_∞ für eine in technischen Anwendungen wichtige Klasse von Laplace-Transformierten $\bar{f}(s)$. Die Funktion

$$\bar{g}(s) := s \cdot \bar{f}(s)$$

sei eine gebrochen rationale Funktion in s mit reellen Koeffizienten

$$\bar{g}(s) = \frac{z(s)}{w(s)}$$

und der Eigenschaft

$$\deg \{z(s)\} \leq \deg \{w(s)\} .$$

Ferner besitzen die Polynome $z(s)$ und $w(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen¹⁷. Der Grenzwert f_∞ existiert *genau dann*, wenn das Nennerpolynom $w(s)$ *keine* Nullstellen p_i mit $\operatorname{Re} \{p_i\} \geq 0$ besitzt.

Bemerkungen: Man nennt ein Polynom, das *keine* Nullstellen p_i mit

$$\operatorname{Re} \{p_i\} \geq 0$$

besitzt, ein Hurwitz¹⁸-Polynom. Wir betrachten nun ein Polynom $w(s)$ vom Grade n mit reellen Koeffizienten

$$w(s) = w_0 + w_1 s + w_2 s^2 + \dots + w_n s^n \quad (w_n \neq 0) .$$

Zur Überprüfung der Eigenschaft

$$\operatorname{Re} \{p_i\} < 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

muss man *nicht* die n Nullstellen des Polynoms $w(s)$ bestimmen. Hierzu stehen die Kriterien¹⁹ nach Routh²⁰ bzw. Hurwitz zur Verfügung.

In nachfolgenden Fällen kann man leicht *ausschließen*, dass $w(s)$ ein Hurwitz-Polynom ist: falls die Koeffizienten w_i ($i = 0, \dots, n$) *nicht* das *gleiche* Vorzeichen besitzen oder *irgendein* Koeffizient gleich null ist, so ist $w(s)$ kein Hurwitz-Polynom! Das bedeutet: Die Bedingungen "alle Koeffizienten besitzen das gleiche Vorzeichen" und "kein Koeffizient verschwindet" sind *notwendig*, damit $w(s)$ ein Hurwitz-Polynom ist. Für Polynome deren Grad $n \leq 2$ ist, sind diese Bedingungen *notwendig und hinreichend*! Demnach sind die Polynome

$$w(s) = -5 - 33s ,$$

$$w(s) = 2 + 3s + 25s^2$$

bzw.

$$w(s) = -10 - 2s - 2s^2$$

¹⁷Man nennt solche Polynome *teilerfremd*.

¹⁸Adolf Hurwitz (Hildesheim, Deutschland 1859 - Zürich 1919)

¹⁹Siehe z.B. Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS: *Regelungstechnik*; Kap. 6.2. Methoden zur Stabilitätsprüfung.

²⁰Edward John Routh (Quebec, Kanada 1831 - Cambridge, England 1907)

Hurwitz-Polynome, da sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllen, während die Polynome

$$w(s) = 1 - 2s + 3s^2 + 4s^3 + s^4 + s^5$$

bzw.

$$w(s) = 2 + 3s^2 + 4s^3 + s^4$$

keine Hurwitz-Polynome sind, da die notwendigen Bedingungen nicht erfüllt sind!

BBeispiel: Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Der Wert der zugehörigen Zeitfunktion $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ lautet

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1.$$

Dieses Ergebnis ist korrekt, da die (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen im oben angeführten Theorem für

$$\bar{g}(s) = s \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

erfüllt sind.

Dass die Auswertung des Ausdrucks

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \bar{f}(s)]$$

bei Nicht-Existenz von f_∞ falsche Ergebnisse liefert, zeigt das nächste Beispiel.

BBeispiel: Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Die Rücktransformation von $\bar{f}(s)$ ergibt

$$f(t) = e^t$$

d.h. für $t \rightarrow \infty$ besitzt diese Funktion keinen Grenzwert. Der mit Hilfe des Endwertsatzes berechnete Grenzwert ist angeblich

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s-1} = 0.$$

Man beachte, dass das Nennerpolynom $(s-1)$ eine Nullstelle bei $s = +1$ besitzt, d.h. es ist kein Hurwitz-Polynom. Somit existiert der Grenzwert f_∞ *nicht*, das ermittelte Ergebnis ist falsch, die Operation

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s-1}$$

liefert ein sinnloses Resultat.

- Die Gültigkeit des Endwertsatzes ist aus dem Differentiationssatz ersichtlich

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s\bar{f}(s) - f(0) ,$$

indem man die komplexe Variable s nach Null streben lässt²¹. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-0t} dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [s\bar{f}(s)] - f(0) \end{aligned}$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s\bar{f}(s)] .$$

1.2.9 Multiplikation im Bildbereich (optional)

Seien $f(t)$ und $\bar{f}(s)$ sowie $g(t)$ und $\bar{g}(s)$ jeweils Transformationspaare. Wir bilden das sogenannte *Faltungsintegral*²² $h(t)$ gemäß

$$h(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

und sprechen von der *Faltung* dieser beiden Funktionen. Der komplizierten Operation "Faltung" im Zeitbereich entspricht im Bildbereich eine einfache Verknüpfung: das Produkt. Es gilt

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{f}(s) \bar{g}(s) \}$$

bzw.

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) \bar{g}(s). \quad (1.29)$$

[B]Beispiel: Für den Fall, dass $g(t)$ die Sprungfunktion ist, ergibt die Abbildung des Faltungsintegrals in den Bildbereich aufgrund von

$$\bar{g}(s) = 1/s$$

die schon formulierte Integrationsregel im Zeitbereich

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} \bar{f}(s) .$$

²¹Es wird *vorausgesetzt*, dass der Grenzübergang unter dem Integral vorgenommen werden kann.

²²Dieses Integral ist wichtig bei der Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Man verwendet in der Literatur die Kurzschreibweise

$$h(t) := f(t) * g(t) = g(t) * f(t) .$$

■ **Beispiel:** Die inverse Laplace-Transformierte von

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{s^2}$$

kann mit Hilfe der Faltungsregel ermittelt werden: Stellt man $\bar{h}(s)$ als Produkt zweier identischer Funktionen $\bar{f}(s)$ und $\bar{g}(s)$ dar, d.h.

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(s) = \bar{g}(s) = \frac{1}{s},$$

so erhält man mit (1.29)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \int_0^t \sigma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t$$

d.h.

$$t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^2} \quad . \quad (1.30)$$

Man kann nun darauf aufbauend die Originalfunktion von

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{s^3}$$

ermitteln, indem man

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \bar{g}(s) = \frac{1}{s^2}$$

ansetzt und (1.29) anwendet:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \int_0^t \sigma(t-\tau) \tau d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2 ,$$

also

$$\frac{1}{2} t^2 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^3} . \quad (1.31)$$

Die wiederholte Durchführung obiger Schritte liefert die allgemeine Korrespondenz

$$\frac{1}{n!} t^n \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^{n+1}} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (1.32)$$

■ **Beispiel (Deltafunktion):** Wir betrachten das Faltungsintegral $h_\varepsilon(t)$ einer Funktion $f(t)$ mit dem bereits besprochenen Rechteck-Impuls der Dauer ε gemäß Relation (1.10)

$$r_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)] .$$

Es ergibt sich

$$h_\varepsilon(t) := \int_0^t f(t-\tau) r_\varepsilon(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t f(\tau) d\tau .$$

Die Laplace-Transformierte von $r_\varepsilon(t)$ lautet gemäß (1.11)

$$\bar{r}_\varepsilon(s) = \frac{1}{s\varepsilon} (1 - e^{-s\varepsilon}) .$$

Damit ergibt sich die Korrespondenz

$$\int_0^t f(t-\tau) r_\varepsilon(\tau) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t f(\tau) d\tau \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad \bar{f}(s) \frac{1}{s\varepsilon} (1 - e^{-s\varepsilon})$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir mit dem Transformationspaar gemäß (1.12)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(t) \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad 1$$

in *heuristischer Weise* die Beziehungen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(t) = \int_0^t f(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = f(t) \quad \text{O} \longrightarrow \bullet \quad \bar{f}(s) \cdot 1 = \bar{f}(s) .$$

Man erkennt unmittelbar die sogenannte *Ausblendeigenschaft* der Deltafunktion $\delta(t)$, die charakteristisch für sie ist:

$$f(t) = \int_0^\infty f(t-\tau) \delta(\tau) d\tau .$$

- Die Gültigkeit der Korrespondenz (1.29) wird durch folgende Ausführungen einsichtig:
Es gilt offensichtlich

$$\bar{f}(s) := \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

bzw. nach Multiplikation mit der Funktion $\bar{g}(s)$

$$\bar{f}(s) \bar{g}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} \bar{g}(s) d\tau . \quad (1.33)$$

Das Produkt $e^{-s\tau} \bar{g}(s)$ kann als Laplace-Transformierte der um $\tau > 0$ nach rechts verschobenen Funktion $g(t)$

$$e^{-s\tau} \bar{g}(s) = \int_0^\infty \sigma(t-\tau) g(t-\tau) e^{-st} dt = \int_0^\infty g(t-\tau) e^{-st} dt$$

aufgefasst werden. Damit erhalten wir für das Produkt (1.33)

$$\bar{f}(s) \bar{g}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty g(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau .$$

Unter der *Annahme*, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, erhalten wir

$$\bar{f}(s)\bar{g}(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt .$$

Daraus folgt, da die Zeitfunktionen $f(t)$ und $g(t)$ nach Voraussetzung für negative t -Werte verschwinden, die Beziehung

$$\bar{f}(s)\bar{g}(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt ,$$

die der Faltungsregel (1.29) entspricht.

1.3 Rücktransformation gebrochen rationaler Funktionen

Es wird nun das Problem untersucht, zu einer vorgegebenen Laplace-Transformierten $\bar{f}(s)$ die zugehörige Originalfunktion $f(t)$ zu ermitteln. Die übliche Vorgangsweise besteht darin, eine gegebene (komplizierte) Funktion $\bar{f}(s)$ in einfache Terme zu zerlegen

$$\bar{f}(s) = \bar{f}_1(s) + \bar{f}_2(s) + \bar{f}_3(s) + \dots + \bar{f}_N(s) ,$$

die bekannte oder leicht ermittelbare Originalfunktionen $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) haben. Aufgrund der Linearitätseigenschaft erhalten wir dann die gesuchte Rücktransformierte²³

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots + f_N(t) .$$

Für die weiteren Betrachtungen wird *vorausgesetzt*, dass $\bar{f}(s)$ eine gebrochen rationale Funktion in s ist. Sie ist demnach als Quotient zweier Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ darstellbar:

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} .$$

Es wird *angenommen*, dass $\mu(s)$ und $\nu(s)$ Polynome mit *reellen* Koeffizienten²⁴ sind und gehen davon aus, dass die Polynome teilerfremd sind, d.h. mögliche gemeinsame Nullstellen wurden bereits gekürzt²⁵. Für die Polynomgrade gilt

$$\deg \{\mu(s)\} = m \quad \text{und} \quad \deg \{\nu(s)\} = n \quad \text{mit} \quad m < n .$$

²³Wir verzichten der mathematischen Einfachheit wegen hier bewusst auf die Möglichkeit, die komplexe Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \bar{f}(s) e^{ts} ds$$

zu benutzen. Hierbei wird die Funktion $\bar{f}(s)$ längs einer in der Halbebene der absoluten Konvergenz von $\bar{f}(s)$ liegenden Parallelen zur imaginären Achse integriert.

²⁴Diese Voraussetzung ist mathematisch nicht notwendig. Sie vereinfacht allerdings manche Berechnungen und ist in technischen Anwendungen in der Regel erfüllt.

²⁵Diese Voraussetzung ist nicht notwendig. Sie vereinfacht nur die Rechnungen.

Das Nennerpolynom $\nu(s)$ von $\bar{f}(s)$ wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit (o.E.d.A.) als monisches²⁶ Polynom angesetzt und in faktorisierter Darstellung angeschrieben:

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} .$$

Hierbei sind p_i die Nullstellen des Nennerpolynoms $\nu(s)$, die sogenannten *Pole* von $\bar{f}(s)$. Man beachte: falls eine komplexe Polstelle bei $s = \alpha + j\beta$ vorliegt, ist die konjugiert komplexe Größe $s^* = \alpha - j\beta$ ebenfalls eine Polstelle! Das folgt aus der Annahme, dass das Polynom $\nu(s)$ reelle Koeffizienten besitzt. Mittels einer Partialbruchzerlegung wird nun $\bar{f}(s)$ in „einfache“ Terme zerlegt. Durch die anschließende Anwendung der fundamentalen Korrespondenz (1.25)

$$\frac{1}{n!} t^n e^{at} \circ \bullet \frac{1}{(s - a)^{n+1}} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

kann die Rücktransformation in den Zeitbereich geradlinig erfolgen! Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Folgenden zwei Fälle unterschieden.

1.3.1 Fall 1: Das Nennerpolynom $\nu(s)$ besitzt *einfache* Nullstellen

In diesem Fall kann die Partialbruchzerlegung von $\bar{f}(s)$ mit Hilfe der sogenannten *Teilbrüche*

$$\frac{c}{s - p}$$

in der Form

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i} \quad (1.34)$$

angeschrieben werden, wobei c_i und p_i i.A. komplexe Zahlen sind. Das Problem besteht darin die Konstanten c_i zu berechnen. Die Originalfunktion $f(t)$ ist dann durch

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{p_i t} \quad (1.35)$$

gegeben.

Beispiel: Für die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{d.h.} \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -2$$

²⁶Das bedeutet, dass das Polynom $\nu(s)$ die Form

$$\nu(s) = 1 \cdot s^n + K_{n-1} s^{n-1} + \dots + K_0$$

hat. Das ist *keine* Einschränkung für die Funktion $\bar{f}(s)$.

wird der Ansatz

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

gewählt. Man beachte, dass obige Relation eine Identität in s ist. D.h. sie ist für *jeden* Wert von s erfüllt! Die Ermittlung der Konstanten c_1 und c_2 kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Die rechte Seite obiger Relation wird auf gemeinsamen Nenner gebracht, d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1(s+2) + c_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(c_1 + c_2)s + (2c_1 + c_2)}{(s+1)(s+2)}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich durch Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome. Es muss gelten

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{und} \quad 2c_1 + c_2 = 0,$$

woraus

$$c_1 = -1 \quad \text{und} \quad c_2 = 2$$

folgt.

Kritik: Der Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem in den unbekannten Koeffizienten. Meistens erfolgt die Lösung folgendermaßen: es wird zunächst ein Koeffizient in Abhängigkeit der übrigen Koeffizienten ausgedrückt. In obigem Beispiel ergibt das

$$c_2 = 1 - c_1.$$

Dieser Koeffizient wird anschließend in die anderen Gleichungen eingesetzt. Dieses Vorgehen (sukzessive Elimination) wird solange wiederholt, bis eine Gleichung mit einem unbekannten Koeffizienten vorliegt. In dem berechneten Beispiel ergibt sich

$$2c_1 + 1 - c_1 = 0 \quad \implies \quad c_1 = -1.$$

Daraus kann nun der fehlende Koeffizient c_2 berechnet werden. Diese Vorgehensweise birgt die Gefahr, dass bei fehlerhafter Auflösung eines Koeffizienten als Funktion der übrigen, alle Koeffizienten falsch ermittelt werden!

Ein *alternativer* sichererer Lösungsweg besteht darin obige Identität der Zählerpolynome

$$s = c_1(s+2) + c_2(s+1)$$

für (clever) ausgewählte s -Werte auszuwerten. Daraus folgt für die schlaue Wahl

$$\begin{aligned} s &= p_1 = -1 & \Rightarrow & -1 = c_1, \\ s &= p_2 = -2 & \Rightarrow & 2 = c_2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Man beachte, dass der zweite Weg zur Bestimmung der Konstanten auch durch die Relation

$$(s+1)\bar{f}(s) = \frac{s}{s+2} = c_1 + c_2 \frac{s+1}{s+2}$$

beschrieben wird. D.h. für den Wert $s = p_1 = -1$ ergibt sich die Konstante

$$(s+1)\bar{f}(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s}{s+2}\Big|_{s=-1} = -1 = c_1.$$

Analog ergibt sich aus

$$(s+2)\bar{f}(s) = \frac{s}{s+1} = c_1 \frac{s+2}{s+1} + c_2$$

für den Wert $s = p_2 = -2$ die Konstante

$$c_2 = (s+2)\bar{f}(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s}{s+1}\Big|_{s=-2} = 2.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\bar{f}(s)$ lautet somit

$$\bar{f}(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

und unter Anwendung von (1.7) findet man die zugehörige Zeitfunktion

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

■

Die Erkenntnisse aus der Berechnung der Konstanten bei obigem Beispiel können unmittelbar auf den **allgemeinen Fall** (1.34)

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-p_i}$$

übertragen werden. Die Konstanten c_i ergeben sich aus

$$c_i = (s-p_i)\bar{f}(s)\Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (1.36)$$

Bemerkungen zu den Koeffizienten c_i :

- Man beachte, dass bei der Bildung des Produktes $(s-p_i)\bar{f}(s)$ der Faktor $(s-p_i)$ gekürzt wird!

$$(s-p_i)\bar{f}(s) = (s-p_i) \frac{\mu(s)}{\prod_{k=1}^n (s-p_k)} = \frac{\mu(s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s-p_k)}.$$

Damit beträgt die Konstante c_i

$$c_i = (s-p_i)\bar{f}(s)\Big|_{s=p_i} = \frac{\mu(p_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i-p_k)}. \quad (1.37)$$

- In Relation (1.37) erscheint im Nenner das Produkt

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i-p_k).$$

Dieses kann auch folgendermaßen berechnet werden: differenziert man das Nennerpolynom von $\bar{f}(s)$

$$\nu(s) := \prod_{k=1}^n (s - p_k)$$

nach s , so ergibt sich zunächst - nach einfacher Umformung des Produktes -

$$\frac{d}{ds}\nu(s) = \frac{d}{ds} \prod_{k=1}^n (s - p_k) = \frac{d}{ds} \left[(s - p_i) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s - p_k) \right],$$

bzw. durch Anwendung der Produktregel

$$\frac{d}{ds}\nu(s) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s - p_k) + (s - p_i) \cdot \frac{d}{ds} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s - p_k).$$

Damit lautet der Differentialquotient an der Stelle $s = p_i$

$$\left. \frac{d}{ds}\nu(s) \right|_{s=p_i} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i - p_k).$$

Damit haben wir zur Berechnung der Konstanten c_i folgende *Alternative* zu Formel (1.36)

$$c_i = \frac{\mu(s)}{\left. \frac{d}{ds}\nu(s) \right|_{s=p_i}}. \quad (1.38)$$

- Anhand der Bestimmungsgleichung (1.36) erkennt man, dass *falls* bei $s = p_k$ auch eine Nullstelle des Zählerpolynoms $\mu(s)$ vorliegt,

$$\mu(s = p_k) = 0$$

gilt. Damit ist korrekterweise(!) der entsprechende Koeffizient in der Partialbruchzerlegung auch gleich Null

$$c_k = 0.$$

Demnach ist es nicht nötig, *vor* einer Partialbruchzerlegung von $\bar{f}(s)$

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$$

zu überprüfen, ob die Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ teilerfremd sind.

- Wenn p_i eine komplexe Polstelle ist, so ist der konjugiert komplexe Wert p_i^* ebenfalls eine Polstelle von $\bar{f}(s)$. Das bedeutet es existiert eine Polstelle $p_k = p_i^*$ mit der zugehörigen Konstanten c_k , die konjugiert komplex zu c_i ist:

$$c_k = (s - p_k) \bar{f}(s) \Big|_{s=p_k} = (s - p_i^*) \bar{f}(s) \Big|_{s=p_i^*} = \left[(s - p_i) \bar{f}(s) \Big|_{s=p_i} \right]^* = c_i^*. \quad (1.39)$$

- Der Anteil S_i eines *einfachen* konjugiert komplexen Polpaares

$$(p_i, p_i^*) =: (\alpha + j\beta, \alpha - j\beta)$$

an der Funktion $\bar{f}(s)$ lautet

$$S_i := \frac{c_i}{s - p_i} + \frac{c_i^*}{s - p_i^*}$$

bzw.

$$S_i = \frac{s(c_i + c_i^*) - (c_i p_i^* + c_i^* p_i)}{s^2 - s(p_i + p_i^*) + p_i p_i^*} =: \frac{sb_1 + b_0}{s^2 + sa_1 + a_0}. \quad (1.40)$$

Hierbei sind die Konstanten a_i und b_i folgende *reelle* Zahlen:

$$a_1 = -(p_i + p_i^*) = 2 \operatorname{Re} \{p_i\} = 2\alpha, \quad (1.41)$$

$$a_0 = p_i p_i^* = [\operatorname{Re} \{p_i\}]^2 + [\operatorname{Im} \{p_i\}]^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (1.42)$$

bzw.

$$b_1 = c_i + c_i^* = 2 \operatorname{Re} \{c_i\} \quad (1.43)$$

$$b_0 = -(c_i p_i^* + c_i^* p_i) = -2 \operatorname{Re} \{c_i p_i^*\}. \quad (1.44)$$

Beispiel: Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s(s - j)(s + j)} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = 0, \quad p_2 = j, \quad p_3 = -j.$$

Für die Partialbruchzerlegung lautet der Ansatz

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - j} + \frac{c_3}{s + j}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass nach (1.39)

$$c_3 = c_2^*$$

gilt. Unter Anwendung von (1.36) ergeben sich die Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &= \left. \frac{1}{s^2 + 1} \right|_{s=0} = 1, \\ c_2 &= \left. \frac{1}{s(s + j)} \right|_{s=j} = \frac{1}{j(2j)} = -\frac{1}{2}, \\ c_3 &= c_2^* = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beachte: Die Koeffizienten c_2 und c_3 sind im vorliegenden Beispiel reellwertig. Das bedeutet, dass aus dem Vorliegen eines komplexen Polpaares *nicht zwingend* folgt, dass die zugehörigen Partialbruchkoeffizienten ebenfalls komplexwertig sind!

Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-j} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+j}$$

und weiter

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) - \frac{1}{2} e^{jt} - \frac{1}{2} e^{-jt} = \sigma(t) - \operatorname{Re} \{ e^{jt} \} \\ &= \sigma(t) - \cos t . \end{aligned}$$

■

B **Beispiel:** Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = -1, \quad p_2 = j, \quad p_3 = -j.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-j} + \frac{c_3}{s+j}$$

und unter Anwendung von (1.36) ergeben sich

$$\begin{aligned} c_1 &= \left. \frac{1}{s^2+1} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2}, \\ c_2 &= \left. \frac{1}{(s+1)(s+j)} \right|_{s=j} = \frac{1}{(j+1)(2j)} = -\frac{1}{4}(1+j) \quad \text{und} \\ c_3 &= c_2^* = -\frac{1}{4}(1-j) . \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4} (1+j) \frac{1}{s-j} - \frac{1}{4} (1-j) \frac{1}{s+j},$$

die elementar rücktransformiert werden kann:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{4} (1+j) e^{jt} - \frac{1}{4} (1-j) e^{-jt} .$$

Dieser reellwertige(!) Ausdruck wird nun umgeformt. Es ergibt sich zunächst²⁷

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (1+j) e^{jt} \}$$

²⁷Hierbei benutzt man die Relation

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} \{ z \} .$$

bzw. indem man die Darstellung²⁸ einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten (r, φ) verwendet (siehe Bild 1.10)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{jt} \right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}e^{j(t+\frac{\pi}{4})} \right\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) . \end{aligned}$$

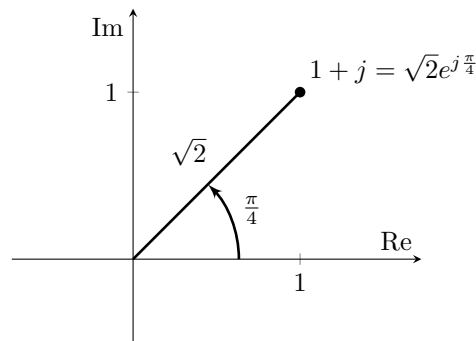


Bild 1.10: Polardarstellung von $1 + j$

Beispiel (Fortsetzung): Ein *alternativer Lösungsweg* besteht darin, für die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

folgenden Ansatz mit den reellen(!) Konstanten k_2 und k_3

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{k_2 + sk_3}{s^2+1} \quad (1.45)$$

²⁸Die Darstellung einer komplexen Zahl z in Polarkoordinaten (r, φ) lautet

$$z = \alpha + j\beta = re^{j\varphi}.$$

Es gilt

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Damit der Winkel φ *eindeutig* ist, betrachtet man ein sogenanntes Grundintervall

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad \text{oder} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi .$$

Es gilt dann

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{\beta}{\alpha} & \text{für } \alpha > 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} \pm \pi & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

und

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } \alpha = 0 \quad \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } \alpha = 0 \quad \beta < 0 \end{cases} .$$

aufzustellen. Die Konstante c_1 lautet

$$c_1 = \frac{1}{s^2 + 1} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) - c_1 \frac{1}{s+1} &= \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} \frac{1-s^2}{s^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1-s}{s^2+1} = \frac{k_2 + sk_3}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$k_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad k_3 = -\frac{1}{2},$$

d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} \right).$$

Unter Anwendung von (1.7) und (1.8) ergibt sich die zugehörige Zeitfunktion

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} (\sin t - \cos t).$$

■

1.3.2 Fall 2: Das Nennerpolynom $\nu(s)$ besitzt *mehrfache* Nullstellen

Im Falle mehrfacher Nullstellen des Nennerpolynoms $\nu(s)$ wird der Ansatz für die Partialbruchzerlegung modifiziert. Die Vorgangsweise wird zunächst an folgendem Beispiel demonstriert.

B **Beispiel:** Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, \quad \text{d.h.} \quad p_1 = 0, \quad p_2 = p_3 = -1.$$

Die Partialbruchzerlegung wird als

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{(s+1)^2}$$

angesetzt. In Analogie zu Fall 1 wird hier ein einfacher Weg zur Bestimmung der Konstanten gewählt. Da $p_1 = 0$ eine einfache Nullstelle von $\nu(s)$ ist, kann die Konstante c_1 gemäß (1.36) ermittelt werden, d.h.

$$c_1 = s \bar{f}(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = 1.$$

Die Konstante c_3 kann offensichtlich in analoger Weise durch

$$c_3 = (s+1)^2 \bar{f}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s} \Big|_{s=-1} = -1$$

ermittelt werden. Damit erhalten wir

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{c_2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Zur Ermittlung der fehlenden Konstanten c_2 wird $\bar{f}(s)$ mit $(s+1)^2$ multipliziert

$$(s+1)^2 \bar{f}(s) = \frac{1}{s} = \frac{(s+1)^2}{s} + c_2(s+1) - 1, \quad (1.46)$$

und anschließend diese Identität(!) nach s abgeleitet. Man erhält dadurch die einfache Beziehung

$$\frac{d}{ds} [(s+1)^2 \bar{f}(s)] = -\frac{1}{s^2} = \frac{2(s+1)s - (s+1)^2}{s^2} + c_2$$

für die gesuchte Konstante. Wählt man nun (sinnigerweise) $s = -1$, so erhält man

$$-1 = c_2.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\bar{f}(s)$ lautet somit

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2},$$

und für die zugehörige Originalfunktion findet man²⁹ nach Anwendung von (1.7) und (1.24)

$$f(t) = \sigma(t) - e^{-t} - te^{-t}.$$

Man beachte, dass die Vorschrift zur Ermittlung von c_2 kompakt in der Form

$$c_2 = \frac{d}{ds} [(s+1)^2 \bar{f}(s)] \Big|_{s=-1} = -1$$

angeschrieben werden kann. ■

Analog zu Fall 1 können die im letzten Beispiel gefundenen Erkenntnisse verallgemeinert werden. Besitzt nämlich das Nennerpolynom $\nu(s)$ eine K -fache Nullstelle bei $s = p_1$ und

²⁹Natürlich kommt man im vorliegenden Fall zum gleichen Ergebnis, indem man nach Ermittlung der Konstanten c_1 und c_3 , die Identität

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + c_2 \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

für einen (clever) gewählten Wert s auswertet. Der oben eingeschlagene Lösungsweg kann aber leicht verallgemeinert werden.

sonst - der mathematischen Einfachheit halber - lauter verschiedene Nullstellen, so lautet $\bar{f}(s)$ in faktorisierter Darstellung des Nennerpolynoms

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\mu(s)}{(s - p_1)^K \prod_{i=K+1}^n (s - p_i)}.$$

Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet nun

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \frac{c_3}{(s - p_1)^3} + \dots + \frac{c_K}{(s - p_1)^K} + \sum_{i=K+1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $(s - p_1)^K$, so erhält man - nach einer Umsortierung der ersten K Terme - die Identität

$$\begin{aligned} (s - p_1)^K \bar{f}(s) &= c_K + c_{K-1}(s - p_1) + \dots + c_2(s - p_1)^{K-2} + c_1(s - p_1)^{K-1} \\ &\quad + (s - p_1)^K \sum_{i=K+1}^n \frac{c_i}{s - p_i}. \end{aligned}$$

Die mit der Nullstelle bei $s = p_1$ assoziierten Konstanten $c_K, c_{K-1}, \dots, c_1$ ergeben sich dann durch wiederholte Differentiation obiger Beziehung nach s und anschliessende Auswertung an der Stelle $s = p_1$. Es ergeben sich sukzessive

$$\begin{aligned} c_K &= \frac{1}{(K - K)!} \cdot \frac{d^{K-K}}{ds^{K-K}} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1} = (s - p_1)^K \bar{f}(s) \Big|_{s=p_1}, \\ c_{K-1} &= \frac{1}{(K - K + 1)!} \cdot \frac{d^1}{ds^1} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{(K - 2)!} \cdot \frac{d^{K-2}}{ds^{K-2}} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1}, \\ c_1 &= \frac{1}{(K - 1)!} \cdot \frac{d^{K-1}}{ds^{K-1}} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1}, \end{aligned}$$

bzw.

$$c_i = \frac{1}{(K - i)!} \cdot \frac{d^{K-i}}{ds^{K-i}} [(s - p_1)^K \bar{f}(s)] \Big|_{s=p_1} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, K. \quad (1.47)$$

Die mit den einfachen Nullstellen assoziierten Koeffizienten werden wie üblich mit Hilfe von Relation (1.36)

$$c_i = (s - p_i) \bar{f}(s) \Big|_{s=p_i} \quad i = K + 1, K + 2, \dots, n.$$

berechnet.

Bemerkung: Anhand der Bestimmungsgleichungen (1.47) erkennt man, dass *falls* bei dem Wert p_1 auch eine Nullstelle des Zählerpolynoms $\mu(s)$ auftritt,

$$\mu(s = p_1) = 0$$

gilt. Das bedeutet, dass die Vielfachheit der Polstelle auf jeden Fall kleiner als K ist. Damit ist korrekterweise der entsprechende Koeffizient in der Partialbruchzerlegung auch gleich Null. Demnach ist es - auch im vorliegenden Fall - nicht nötig, *vor* einer Partialbruchzerlegung von $\bar{f}(s)$

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$$

zu überprüfen, ob die Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ teilerfremd sind.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s-1)^2} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = p_2 = -1, \quad p_3 = p_4 = +1.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{\tilde{c}_1}{s-1} + \frac{\tilde{c}_2}{(s-1)^2}.$$

Die Anwendung von (1.47) liefert

$$\begin{aligned} c_1 &= \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s+2}{(s-1)^2} \right] \right|_{s=-1} = - \left. \frac{s+5}{(s-1)^3} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2}, \\ c_2 &= \left. \frac{s+2}{(s-1)^2} \right|_{s=-1} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s+2}{(s+1)^2} \right] \right|_{s=1} = - \left. \frac{s+3}{(s+1)^3} \right|_{s=1} = -\frac{1}{2}, \\ \tilde{c}_2 &= \left. \frac{s+2}{(s+1)^2} \right|_{s=1} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{(s-1)^2},$$

und für die zugehörige Zeitfunktion ergibt sich

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{4}te^t. \quad (1.48)$$

■

[B]Beispiel (Fortsetzung): Ein *alternativer Lösungsweg* basiert auf der Kenntnis der Korrespondenzen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh t := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^2 - 1} \quad , \quad (1.49)$$

$$\cosh t := \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 - 1} \quad , \quad (1.50)$$

und der mit Hilfe des Differentiationssatzes im Bildbereich

$$t \cdot f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad - \frac{d\bar{f}}{ds}$$

sich ergebenden Korrespondenzen

$$t \cdot \sinh t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{2s}{(s^2 - 1)^2} \quad (1.51)$$

und

$$t \cdot \cosh t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1 + s^2}{(s^2 - 1)^2} \quad (1.52)$$

Die vorgegebene Funktion $\bar{f}(s)$ kann unter Benutzung obiger Korrespondenzen clever angeschrieben werden

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \frac{s+2}{(s^2-1)^2} = \frac{s}{(s^2-1)^2} + \frac{2}{(s^2-1)^2} \\ &= \frac{s}{(s^2-1)^2} + \frac{-1}{s^2-1} + \frac{1+s^2}{(s^2-1)^2} \quad . \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (1.51), (1.49) und (1.52) erhalten wir die zugehörige Originalfunktion

$$f(t) = \frac{1}{2}t \cdot \sinh t - \sinh t + t \cdot \cosh t \quad .$$

Dieses Ergebnis kann konventionell angeschrieben werden

$$f(t) = \frac{1}{4}t \cdot (e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + t \cdot \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

was mit (1.48) identisch ist. ■

[B]Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s^2 + 7s + 10}{(s+3)(s+5)^2} \quad .$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\bar{f}(s) = \frac{s^2 + 7s + 10}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{c_1}{s+5} + \frac{c_2}{(s+5)^2} + \frac{c_3}{s+3}.$$

Die Konstante c_2 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} c_2 &= (s+5)^2 \bar{f}(s) \Big|_{s=-5} = \frac{s^2 + 7s + 10}{s+3} \Big|_{s=-5} \\ &= \frac{(-5)^2 + 7(-5) + 10}{-5+3} = \frac{25 - 35 + 10}{-2} = 0, \end{aligned}$$

das bedeutet, dass (-5) *keine* zweifache Polstelle ist! In analoger Berechnungsweise erhalten wir die Konstante c_3

$$\begin{aligned} c_3 &= (s+3) \bar{f}(s) \Big|_{s=-3} = \frac{s^2 + 7s + 10}{(s+5)^2} \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{(-3)^2 + 7(-3) + 10}{[(-3)+5]^2} = \frac{9 - 21 + 10}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Konstante c_1 ergibt sich z.B. durch Auswertung der Identität

$$\frac{s^2 + 7s + 10}{(s+3)(s+5)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} = \frac{c_1}{s+5}$$

an der Stelle $s = 0$

$$\frac{10}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{c_1}{5}$$

zu³⁰

$$c_1 = 5 \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{2}.$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\bar{f}(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{s+5} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} = \frac{s+2}{(s+3)(s+5)}$$

bzw. die zugehörige Originalfunktion

$$f(t) = \frac{3}{2} e^{-5t} - \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

■

³⁰Dasselbe Ergebnis erhält man unter Beachtung der Regel nach de L'Hopital mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{aligned} c_1 &= (s+5) \bar{f}(s) \Big|_{s=-5} = \frac{s^2 + 7s + 10}{(s+3)(s+5)} \Big|_{s=-5} \\ &= \frac{2s+7}{(s+3)} \Big|_{s=-5} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Lösung eines Systems von Differentialgleichungen

In diesem Kapitel geht es um die Lösung eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Solche Systeme entstehen ganz natürlich bei der Modellierung von elektrischen Netzwerken mit *idealisierten linearen* Bauelementen, wie Widerständen R , Induktivitäten L und Kapazitäten C , mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze (Axiome). Um die Lösungsmethodik besser zu verstehen, ist es sinnvoll, zunächst einen einfachen Fall zu untersuchen. Die Vorgehensweise kann dann problemlos auf n Differentialgleichungen 1. Ordnung verallgemeinert werden.

2.1 Eine Differentialgleichung 1. Ordnung

Betrachten wir eine elektrische Serienschaltung bestehend aus den folgenden *idealen* Bauelementen: einem Ohmschen Widerstand R , einer Induktivität L und einer Spannungsquelle u (siehe Bild 2.1). Dann gehorcht der gesuchte Stromverlauf $i(t)$ durch die Induktivität bzw.

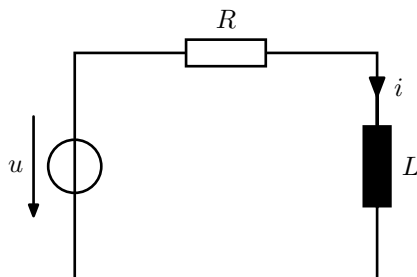


Bild 2.1: RL -Netzwerk

durch den Widerstand der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u$$

mit konstanten Koeffizienten. Es handelt sich um eine (skalare) Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \quad (2.1)$$

für die gesuchte Zeitfunktion $x(t)$. Vorgegeben sind die Konstanten a und b , der Anfangswert

$$x(t=0) =: x_0$$

sowie die sogenannte Eingangsfunktion $u(t)$ in einem Zeitintervall.

Wir unterwerfen obige Gleichung der Laplace-Transformation und erhalten

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ ax + bu \} .$$

Die rechte Seite ergibt aufgrund der Eigenschaft der Linearität (1.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ ax + bu \} &= \mathcal{L} \{ ax \} + \mathcal{L} \{ bu \} = a\mathcal{L} \{ x \} + b\mathcal{L} \{ u \} \\ &= a\bar{x}(s) + b\bar{u}(s) . \end{aligned}$$

Die linke Seite ergibt mit Hilfe der Differentiationsregel (1.16)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} &= s\mathcal{L} \{ x(t) \} - x(t=0) \\ &= s\bar{x}(s) - x_0 . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine *lineare algebraische* Gleichung in $\bar{x}(s)$

$$(s - a)\bar{x}(s) = x_0 + b\bar{u}(s) .$$

Die Auflösung nach der Unbekannten $\bar{x}(s)$ ergibt:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s - a}x_0 + \frac{1}{s - a}b\bar{u}(s) . \quad (2.2)$$

Die Rücktransformation obiger Relation liefert

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} \right\} x_0 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} b\bar{u}(s) \right\} . \quad (2.3)$$

Mit den Abkürzungen für die *freie* Lösung $x_f(t)$

$$x_f(t) := \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} \right\} x_0$$

und die *erzwungene* Lösung $x_e(t)$

$$x_e(t) := \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} b\bar{u}(s) \right\}$$

erkennt man, dass die Lösung $x(t)$ durch Superposition der Auswirkungen des Anfangswertes x_0 (freie Lösung) und der Eingangsfunktion $u(t)$ (erzwungene Lösung) entsteht:

$$x(t) = x_f(t) + x_e(t).$$

Dies ist durch die *Linearität* der Differentialgleichung bedingt. Unter Ausnutzung der Korrespondenz (1.7) und der Faltungsregel (1.29) können wir die gesuchte Lösung formal durch

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

angeben¹. Die Auswertung obigen Integrals bei vorliegender Funktion $u(\tau)$ stellt die eigentliche Rechenhürde dar! In vielen Fällen ist es zielführender, die Laplace-Transformierte der erzwungenen Lösung

$$\bar{x}_e(s) = \frac{1}{s-a}b\bar{u}(s)$$

in systematischer Weise mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung in einfachere Terme zu zerlegen, um $x_e(t)$ auf dem Wege der Rücktransformation zu erhalten. Diese Vorgehensweise wird am folgenden Beispiel demonstriert.

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

mit

$$x(0) = x_0$$

und der Eingangsfunktion

$$u(t) = \sin \omega_0 t \quad .$$

¹Bei der Ermittlung der freien Lösung wurde die Korrespondenz

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a} \quad \text{mit } \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{a\}$$

benutzt. Diese Lösung wird nun auf einem anderen Wege erarbeitet. Die Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sie auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinerbar ist! Der Quotient $\frac{1}{s-a}$ wird für $|a| < |s|$ wie folgt in eine unendliche Reihe umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{s} \frac{1}{1-\frac{a}{s}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{k+1}}.$$

Unter Ausnutzung von (1.32) erhält man die Rücktransformierte

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k = e^{at}.$$

Unter Benutzung der Korrespondenz (1.8)

$$\sin \omega_0 t \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

lautet die Laplace-Transformierte der Lösung $x(t)$ gemäß (2.2)

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s+1} x_0 + \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Eine Partialbruchzerlegung des zweiten Terms (d.h. der erzwungenen Lösung) in obiger Gleichung ergibt

$$\bar{x}_e(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-j\omega_0} + \frac{c_2^*}{s+j\omega_0}.$$

Die Konstanten ergeben sich zu

$$c_1 = \left. \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right|_{s=-1} = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

und

$$\begin{aligned} c_2 &= \left. \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\omega_0}{s+j\omega_0} \right|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{j\omega_0+1} \cdot \frac{\omega_0}{2j\omega_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{j-\omega_0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\omega_0^2}} e^{-j(\frac{\pi}{2} + \arctan \omega_0)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abkürzung für den Winkel der komplexen Zahl c_2 in Polarform (siehe Bild 2.2)

$$\varphi := -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega_0 \quad (2.5)$$

lautet $\bar{x}_e(s)$

$$\bar{x}_e(s) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \left(e^{j\varphi} \frac{1}{s-j\omega_0} + e^{-j\varphi} \frac{1}{s+j\omega_0} \right)$$

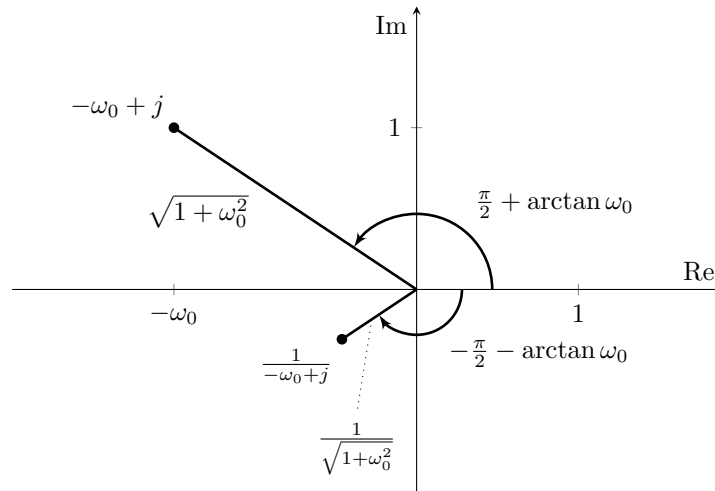
und besitzt die Originalfunktion $x_e(t)$

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} (e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} [e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}] \end{aligned}$$

bzw.

$$x_e(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \}. \quad (2.6)$$

Daraus erhält man die Funktion $x_e(t)$ in der üblichen Schreibweise

Bild 2.2: Polardarstellung von $(-\omega_0 + j)$ und deren Kehrwert

$$x_e(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

bzw. unter Beachtung von (2.5)

$$x_e(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctan \omega_0\right)$$

bzw.

$$x_e(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan \omega_0) . \quad (2.7)$$

Die Gesamtlösung

$$x(t) = x_f(t) + x_e(t)$$

ergibt sich durch Superposition der freien Lösung

$$x_f(t) = e^{-t} x_0$$

und der erzwungenen zu

$$x(t) = e^{-t} x_0 + \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan \omega_0) . \quad (2.8)$$

Bemerkungen: Es ist zu beachten, dass die Eingangsfunktion $u(t)$ durch das Paar der komplexen Exponentialfunktionen

$$\{e^{j\omega_0 t} ; e^{-j\omega_0 t}\} \quad (2.9)$$

charakterisiert wird. In der Lösung $x(t)$ gemäß (2.7) erscheinen die Exponentialfunktionen

$$e^{-t}, \quad \{e^{j\omega_0 t} ; e^{-j\omega_0 t}\} .$$

Dies ist eine Folge der Struktur der vorliegenden Differentialgleichung. Diese Zusammenhänge gelten allgemein bei Systemen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Ferner erkennt man in (2.8), dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t} x_0 + \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} \right) = 0$$

gilt. Für zunehmende Werte von t strebt die freie Lösung nach Null

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = 0,$$

während die erzwungene Lösung $x_e(t)$ sich in die sogenannte *stationäre* Lösung (siehe Bild 2.3)

$$x_s(t) := \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan \omega_0)$$

einschwingt. Man kann die allgemeine Lösung (2.8) mit Hilfe der stationären Lösung aus-

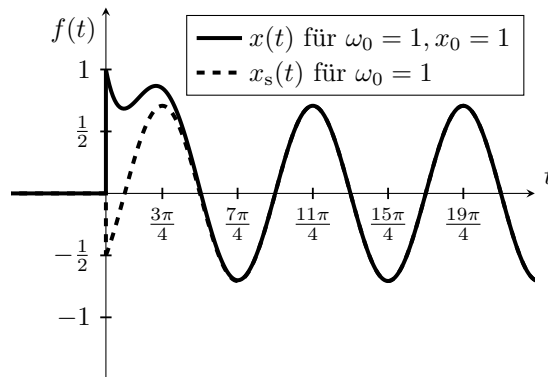


Bild 2.3: Erzwungene und stationäre Lösung

drücken:

$$x(t) = e^{-t} \left(x_0 + \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \right) + x_s(t) .$$

Wählt man einen besonderen speziellen Anfangswert

$$x_0 = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2},$$

so gilt für *alle* Werte des Zeitparameters t

$$x(t) = x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan \omega_0) .$$

■

2.2 Zwei gekoppelte Differentialgleichungen

Wir widmen uns nun der Lösung eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Gesucht werden zwei Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die bei gegebenen Anfangswerten

$$x_1(t=0) =: x_{0,1} \quad \text{und} \quad x_2(t=0) =: x_{0,2}$$

und gegebener Eingangsfunktion $u(t)$ die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u \quad (2.10)$$

und

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \quad (2.11)$$

erfüllen. Unterwerfen wir beide Differentialgleichungen der Laplace-Transformation, so erhalten wir folgende zwei lineare algebraische Gleichungen für die Laplace-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$

$$s\bar{x}_1(s) - x_{0,1} = a_{11}\bar{x}_1(s) + a_{12}\bar{x}_2(s) + b_1\bar{u}(s) \quad (2.12)$$

und

$$s\bar{x}_2(s) - x_{0,2} = a_{21}\bar{x}_1(s) + a_{22}\bar{x}_2(s) + b_2\bar{u}(s). \quad (2.13)$$

Die Verwendung der Vektor- bzw. Matrixschreibweise ist nun empfehlenswert, da sie besonders effizient bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ist und eine kompakte und prägnante Schreibweise ermöglicht. Hierzu werden folgende Vektoren

$$\mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}(s) := \begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) \\ \bar{x}_2(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

bzw. Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

eingeführt². Damit und durch Einführung der Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

können die Gleichungen (2.12) und (2.13) kompakt angeschrieben

$$s\mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

²Unter Benutzung von

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} := \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$$

lautet die allgemeine vektorielle Schreibweise der Differentialgleichungen (2.10) und (2.11)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

umgeformt

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\bar{u}(s)$$

und nach der *vektoriellen* Laplace-Transformierten $\bar{\mathbf{x}}(s)$ aufgelöst werden:

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}(s) . \quad (2.16)$$

Obige Gleichung (2.16) ist das Analogon zu Gleichung (2.2) im skalaren Fall. Die gesuchten Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ergeben sich durch Laplace-Inversion der Beziehung (2.16):

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{\mathbf{x}}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) \\ \bar{x}_2(s) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_1(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}_2(s)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0 + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}(s)\} . \quad (2.17)$$

Letztere Relation ist das Analogon zu (2.3). Verwendet man die Begriffe *freie*

$$\mathbf{x}_f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0 = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{\mathbf{x}}_f(s)\} \quad (2.18)$$

bzw. *erzwungene* Lösung

$$\mathbf{x}_e(t) := \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{\mathbf{x}}_e(s)\} , \quad (2.19)$$

so erhält man im Bildbereich mit (2.16)

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \bar{\mathbf{x}}_f(s) + \bar{\mathbf{x}}_e(s) .$$

Unter Verwendung der Bezeichnung

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.20)$$

lautet die freie Lösung

$$\mathbf{x}_f(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 .$$

Die erzwungene Lösung kann dann folgendermaßen angeschrieben werden

$$\mathbf{x}_e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{\Phi}(s)\mathbf{b}\bar{u}(s)\} .$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes ergibt sich

$$\mathbf{x}_e(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

und erhalten für die Gesamtlösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_e(t)$$

den Ausdruck

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau . \quad (2.21)$$

Er ist das Analogon zu (2.4)

$$x(t) = e^{at} \cdot x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau .$$

Man erkennt, dass $\mathbf{\Phi}(t)$ das Analogon zu e^{at} ist, wobei - im Gegensatz zu e^{at} - die Struktur der Matrixfunktion $\mathbf{\Phi}(t)$ (noch) unbekannt ist!

Wir befassen uns mit der prinzipiellen Durchführung der Laplace-Inversion in (2.17) und untersuchen zunächst die Struktur der sogenannten *Resolvente* ("Auflösenden")

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$$

der Matrix $\mathbf{A}$. Im vorliegenden Fall einer $(2, 2)$ -Matrix $\mathbf{A}$ kann obige Kehrmatrix (inverse Matrix) leicht explizit angegeben werden. Für eine $(2, 2)$ -Matrix $\mathbf{\Theta}$

$$\mathbf{\Theta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

ergibt sich, natürlich(!) unter der Annahme

$$\det \mathbf{\Theta} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 ,$$

die Kehrmatrix $\mathbf{\Theta}^{-1}$ zu:

$$\mathbf{\Theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} .$$

Unter Verwendung des sogenannten *charakteristischen Polynoms*³ $\Delta(s)$ der Matrix $\mathbf{A}$

$$\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^2 - s(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (2.22)$$

ergibt sich für die Resolvente der Ausdruck⁴

³Das charakteristische Polynom $\Delta(s)$ kann im vorliegenden Fall einer $(2, 2)$ -Matrix mit Hilfe der Begriffe "Spur" und "Determinante" der (quadratischen) Matrix $\mathbf{A}$ prägnant dargestellt werden

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^2 - s \cdot \text{spur}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) .$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-a_{22}}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} & \frac{a_{12}}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} \\ \frac{a_{21}}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} & \frac{s-a_{11}}{\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} \end{pmatrix},$$

aus dem ersichtlich ist, dass deren vier Einträge gebrochen rationale Funktionen der komplexen Variable s sind, wobei der Nennergrad *immer* höher als der Zählergrad ist!

Die Laplace-Transformierte der freien Lösung (2.16) lautet damit

$$\bar{\mathbf{x}}_f(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0. \quad (2.23)$$

Der zweite Term in (2.16) - die Laplace-Transformierte der erzwungenen Lösung -

$$\bar{\mathbf{x}}_e(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \bar{u}(s)$$

besitzt eine kompliziertere Struktur. Geht man davon aus, dass die Laplace-Transformierte $\bar{u}(s)$ eine gebrochen rationale Funktion in s ist

$$\bar{u}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad \text{mit} \quad \deg \{\mu(s)\} < \deg \{\nu(s)\} = N,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_e(s) &= (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \bar{u}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} \mathbf{b} \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \\ &= \frac{\mu(s)}{\nu(s) \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \begin{pmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix} \mathbf{b} \end{aligned}$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{x}}_e(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \bar{u}(s) = \begin{pmatrix} \frac{(s-a_{22})\mu(s)}{\nu(s) \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} & \frac{a_{12}\mu(s)}{\nu(s) \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} \\ \frac{a_{21}\mu(s)}{\nu(s) \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} & \frac{(s-a_{11})\mu(s)}{\nu(s) \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})} \end{pmatrix} \mathbf{b}. \quad (2.24)$$

Die Rücktransformation der beiden Ausdrücke (2.23) und (2.24) kann mit Hilfe jeweils einer Partialbruchzerlegung nach Ermittlung der Nullstellen s_1 und s_2 des charakteristischen Polynoms

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s - s_1)(s - s_2)$$

und der Nullstellen $p_1, \dots, p_N$ des Nennerpolynoms $\nu(s)$ erfolgen.

⁴Die Resolvente einer quadratischen (n, n) -Matrix $\mathbf{A}$ kann allgemein mit Hilfe der Adjunkten $\text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ berechnet werden:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Hierbei ist $\text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ein monisches(!) Polynom der Variablen s

$$\text{Adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 s + \mathbf{F}_2 s^2 + \dots + \mathbf{F}_{n-2} s^{n-2} + \mathbf{E} s^{n-1},$$

dessen Koeffizienten $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{n-2}$ konstante (n, n) -Matrizen sind. Das bedeutet, jedes Element der Resolventen $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ ist eine gebrochen rationale Funktion in s .

Bemerkungen zur Struktur von $\Phi(t)$ (optional): Hierzu verfahren wir mit der Matrix $\bar{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ wie mit $(s-a)^{-1}$ im skalaren Fall und suchen die entsprechende Darstellung als unendliche Reihe. Es ergibt sich zunächst

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}(\mathbf{E} - \frac{1}{s}\mathbf{A})^{-1}.$$

Wir führen die Abkürzung

$$\mathbf{\Gamma} := \frac{1}{s}\mathbf{A}$$

ein und wollen die Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma})^{-1}$ untersuchen. Offensichtlich gilt

$$(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 + \dots + \mathbf{\Gamma}^{N-1}) = \mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}^N.$$

Wir lassen nun N nach Unendlich streben. Dabei setzen wir voraus, dass alle Eigenwerte s_i von $\mathbf{\Gamma}$ betragsmäßig kleiner als Eins sind

$$|s_i| < 1.$$

Da die Eigenwerte λ_i von $\mathbf{\Gamma}^N$ durch die Eigenwerte s_i gemäß

$$\lambda_i = s_i^N$$

bestimmt sind, sind sie ebenfalls betragsmäßig beschränkt

$$|\lambda_i| = |s_i|^N < 1.$$

Beim Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ streben alle Eigenwerte λ_i nach Null. Es ist einsichtig, dass dann die Matrix $\mathbf{\Gamma}^N$ das gleiche Verhalten aufweist:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{\Gamma}^N = 0.$$

Es ergibt sich damit

$$(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 + \dots) = \mathbf{E}$$

bzw.

$$(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}^k.$$

Mit diesen Erkenntnissen kann $\bar{\Phi}(s)$

$$\bar{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}(\mathbf{E} - \frac{1}{s}\mathbf{A})^{-1},$$

unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte s_i von $\mathbf{A}$ die Ungleichung

$$\left| \frac{s_i}{s} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |s_i| < |s|$$

erfüllen, durch

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(s) &= (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}(\mathbf{E} - \frac{1}{s}\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s}\mathbf{A}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{k+1}} \mathbf{A}^k\end{aligned}$$

dargestellt werden. Die Rücktransformation ergibt

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k$$

und damit liegt die (gesuchte) bemerkenswerte Struktur von $\Phi(t)$ vor! Obige Relation ist das Analogon der Eulerschen Exponentialfunktion im schon behandelten skalaren Fall

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k.$$

Aus diesem Grund führt man im Matrixfall die Symbolik

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k$$

ein. Man kann sogar zeigen, dass die Matrixfunktion $e^{\mathbf{A}t}$ ähnliche Eigenschaften⁵ wie die skalare Funktion e^{at} aufweist! Im Übrigen: bei der Verwendung der Laplace-Transformation ist das Transformationspaar

$$e^{\mathbf{A}t} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$$

besonders prägnant. Es ist das Analogon zu dem schon berechneten Transformationspaar (1.7)

$$e^{at} \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad (s - a)^{-1}.$$

⁵Es werden hier drei fundamentale Eigenschaften angeschrieben:

I: Für beliebige(!) Werte t_1 und t_2 gilt

$$e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}.$$

II.

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}$$

III. Falls das Produkt der (quadratischen) Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ die Relation

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$$

erfüllt, so gilt

$$e^{(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)t} = e^{\mathbf{A}_1 t} e^{\mathbf{A}_2 t}.$$

Beispiel (linearer Oszillator, Resonanzeffekt): Wir betrachten zwei gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u \quad .$$

Die Differentialgleichungen beschreiben das Verhalten eines linearen Oszillators⁶. Das entspricht einer elektrischen Serienschaltung mit folgenden idealen Bauelementen: einer Induktivität L , einer Kapazität C und einer Spannungsquelle (siehe Bild 2.4). Die Spannung u_C an der Kapazität entspricht x_1 , der Strom i_L durch die Induktivität entspricht x_2 , und die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung entspricht $u(t)$. Es gelten die Relationen

$$C \frac{du_C}{dt} = i_L \quad \text{und} \quad L \frac{di_L}{dt} = -u_C + u \quad .$$

In Matrixschreibweise erhalten wir dann mit Hilfe von

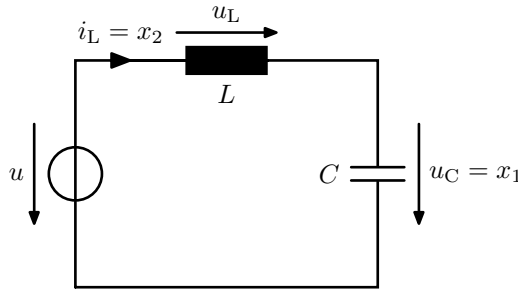


Bild 2.4: LC -Netzwerk

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$$

und für die Werte $L = C = 1$ die vektorielle Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u =: \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} := \mathbf{x}(t = 0) \quad .$$

Ermittlung der freien Lösung: Wir betrachten den Fall $u(t) = 0$. Die Laplace-Transformierte der freien Lösung $\bar{\mathbf{x}}_f(s)$ ergibt sich gemäß (2.16) und (2.23) zu

$$\bar{\mathbf{x}}_f(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad .$$

⁶Siehe hierzu Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS *Regelungstechnik*; Kap. 2.2.5 Beispiele.

Unter Benutzung der Korrespondenzen (1.8)

$$\cos \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \sin \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

erhalten wir die Lösung

$$\mathbf{x}_f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \cos t + x_{0,2} \sin t \\ -x_{0,1} \sin t + x_{0,2} \cos t \end{pmatrix}.$$

Man erkennt in Bild 2.5, dass die Trajektorie des Systems in der x_1 - x_2 -Ebene ein Kreis mit dem Radius $R = \sqrt{\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0}$ ist⁷.

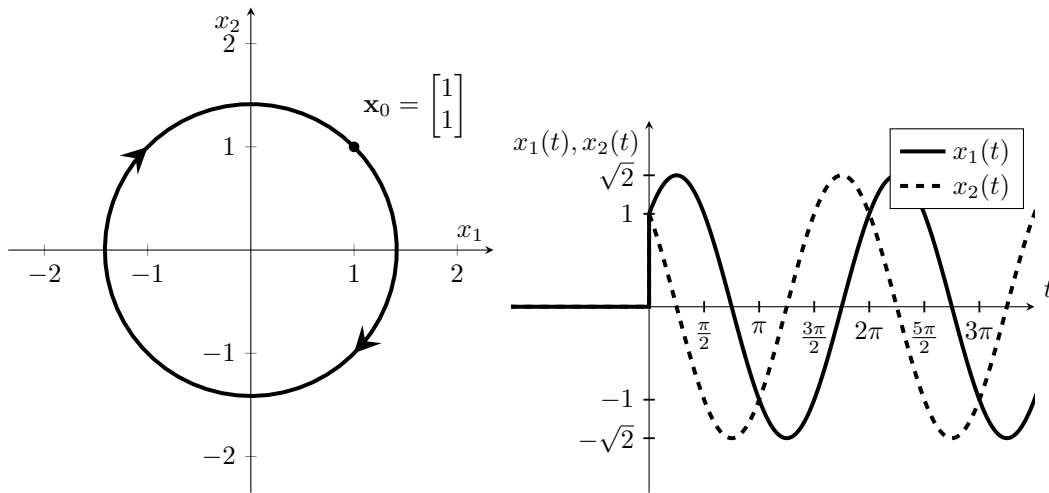


Bild 2.5: Freie Lösung des linearen Oszillators

Ermittlung der erzwungenen Lösung: Wir betrachten den Fall verschwindender Anfangswerte, d.h. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, und der Eingangsfunktion

$$u(t) = \sin t.$$

Wir suchen die erzwungene Lösung $\mathbf{x}_e(t)$. Gemäß (2.24) lautet deren Laplace-Transformierte $\bar{\mathbf{x}}_e(s)$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_e(s) &= (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \bar{u}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

⁷Dies erkennt man anhand von

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \frac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = 2 \left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \right) = 0.$$

1. *Lösungsweg:* Wir brauchen nur die Rücktransformierte $x_{e,1}(t)$ von

$$\bar{x}_{e,1}(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

zu ermitteln, um dann - mit Hilfe des Differentiationssatzes im Zeitbereich - die Funktion $x_{e,2}(t)$ durch Differentiation von $x_{e,1}(t)$ nach t zu erhalten. Die Funktion $x_{e,1}(t)$ kann man in gewohnter Weise unter Verwendung einer Partialbruchzerlegung von $\bar{x}_{e,1}(s)$ erhalten.

2. *Lösungsweg:* Wir schlagen hier einen *alternativen* Ermittlungsweg ein. Wir gehen von den Korrespondenzen für die trigonometrischen Funktionen

$$\sin t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s^2 + 1}, \quad (2.25)$$

$$\cos t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + 1}$$

und den mit Hilfe des Differentiationssatzes im Bildbereich

$$-t \cdot f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{d\bar{f}}{ds}$$

gewonnenen Korrespondenzen

$$t \cdot \sin t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

und

$$t \cdot \cos t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \quad (2.26)$$

aus. Hierzu wird $\bar{x}_1(s)$ folgendermaßen (unkonventionell) umgeschrieben

$$\bar{x}_1(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right].$$

Unter Beachtung von (2.25) und (2.26) erhalten wir die gesuchte Originalfunktion

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) .$$

Der Verlauf von $x_1(t)$ ist in Bild 2.6 dargestellt. Für die Funktion $x_2(t)$ erhalten wir dann durch Differentiation von $x_1(t)$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}t \sin t .$$

Bemerkungen: Man erkennt, dass die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit der Zeit unbegrenzt anwachsen. Dieses Anwachsen der Ausschläge über alle Grenzen bezeichnet man als *Resonanz*. Das wird dadurch verursacht, dass Pole $p_{1,2} = \pm j$ von $\bar{u}(s)$ auch Nullstellen $s_{1,2} = \pm j$ des charakteristischen Polynoms sind! Man spricht von einer Erregung des Systems durch seine Eigenfrequenz ω , im vorliegenden Fall $\omega = 1$. Es ist weiterhin zu beachten, dass, obwohl die Eingangsfunktion $u(t)$ betragsmäßig beschränkt ist, die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ betragsmäßig unbeschränkt sind (siehe Bild 2.7)!

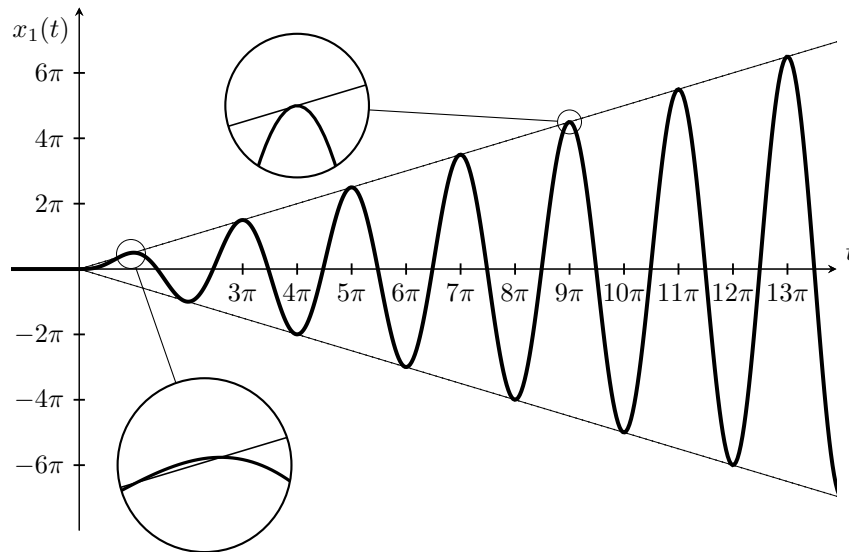
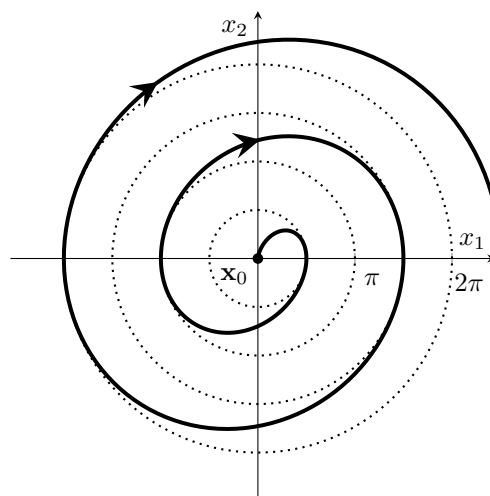
Bild 2.6: Erzwungene Lösung: Verlauf der Spannung $x_1(t)$ 

Bild 2.7: Erzwungene Lösung: Trajektorie

■

Beispiel: Wir betrachten zwei gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_2 + 10u \quad \text{und} \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1$$

mit

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

und

$$u(t) = e^{-t}.$$

In Matrixschreibweise erhalten wir dann unter Benutzung von

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$$

die vektorielle Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} u =: \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit dem Anfangswert

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}.$$

Es liegt der Fall verschwindender Anfangswerte und der Eingangsfunktion $u(t) = e^{-t}$ vor. Es gilt

$$e^{-t} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{s+1}$$

Wir suchen die erzwungene Lösung $\mathbf{x}_e(t)$. Gemäß (2.24) ergibt sich nach Berechnung der Resolventen

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 9} \begin{pmatrix} s & 3 \\ -3 & s \end{pmatrix}$$

die Laplace-Transformierte $\bar{\mathbf{x}}_e(s)$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_e(s) &= (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \bar{u}(s) = \frac{1}{s^2 + 9} \begin{pmatrix} s & 3 \\ -3 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{(s^2 + 9)(s+1)} \begin{pmatrix} 10s \\ -30 \end{pmatrix} =: \begin{bmatrix} \bar{x}_{e,1}(s) \\ \bar{x}_{e,2}(s) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es wird folgender (vektorieller) Ansatz gemacht

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{e,1}(s) \\ \bar{x}_{e,2}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2 + 9)(s+1)} \begin{pmatrix} 10s \\ -30 \end{pmatrix} =: \mathbf{c}_1 \frac{1}{s+1} + (s\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{1}{s^2 + 9}.$$

Hierbei sind $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{k}_3$ konstante Vektoren, deren Ermittlung wie analog zum skalaren Fall durchgeführt werden kann. Der Vektor $\mathbf{c}_1$ ergibt sich zu

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{s^2 + 9} \begin{pmatrix} 10s \\ -30 \end{pmatrix} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{1+9} \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{k}_3$ ergeben sich aus der Identität

$$\frac{1}{(s^2+9)(s+1)} \begin{pmatrix} 10s \\ -30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{s+1} = (s\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{1}{s^2+9} .$$

Die linke Seite lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^2+9)(s+1)} \begin{bmatrix} 10s + s^2 + 9 \\ -30 + 3(s^2+9) \end{bmatrix} &= \frac{1}{(s^2+9)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1)(s+9) \\ 3(s+1)(s-1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+9} \begin{bmatrix} s+9 \\ 3(s-1) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Identität

$$\frac{1}{s^2+9} \begin{bmatrix} s+9 \\ 3(s-1) \end{bmatrix} = (s\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{1}{s^2+9}$$

bzw.

$$\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte (erzwungene, vektorielle) Lösung lautet dann

$$\mathbf{x}_e(t) = \mathbf{c}_1 e^{-t} + \mathbf{k}_2 \cos 3t + \mathbf{k}_3 \frac{1}{3} \sin 3t$$

bzw.

$$\mathbf{x}_e(t) = - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 3t .$$

Bemerkung: Natürlich kann man ausgehend von

$$\bar{x}_{e,1}(s) = \frac{10s}{(s^2+9)(s+1)} \quad \text{und} \quad \bar{x}_{e,2}(s) = \frac{-30}{(s^2+9)(s+1)} \quad (2.27)$$

die Funktion $x_{e,2}(t)$ - wie gewohnt - durch Anwendung der Partialbruchzerlegung ermitteln und anschließend $x_{e,1}(t)$ mit Hilfe des Differentiationssatzes berechnen. ■

Kapitel 3

Die z-Transformation

3.1 Einführung

In vielen praktischen Anwendungsbereichen wie z.B. in der digitalen Signalverarbeitung oder in der Prozessautomatisierung liegen keine Zeitfunktionen $f(t)$, sondern *Folgen* von Zahlenwerten $f_i := f(t_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) vor, die oft zu äquidistanten Zeitpunkten t_i gemessen (abgetastet) wurden, siehe Bild 3.1. Um in diesem Kontext auftretende Aufgaben (Berechnungen mit Folgen) effizient zu behandeln, benutzt man das Analogon der Laplace-Transformation, die z-Transformation.

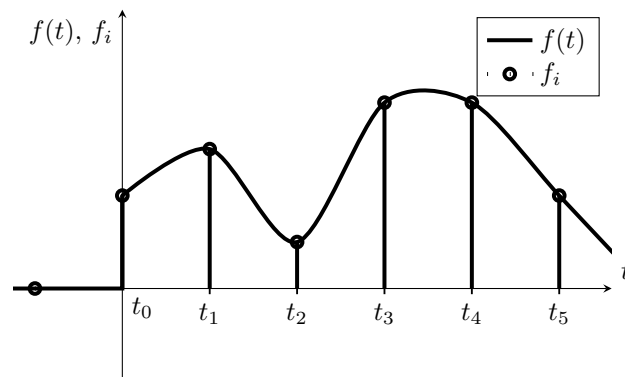


Bild 3.1: Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion

Wir gehen von einer Folge (f) von Zahlenwerten f_i mit $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$(f) := (f_0, f_1, f_2, \dots) \quad (3.1)$$

aus. Hierbei wird *angenommen*, dass für negative Indizes i die Elemente der Folge (f) die Bedingung

$$f_i = 0 \quad \text{für} \quad i < 0$$

erfüllen. Solche Folgen werden *kausal* genannt¹. Wir ordnen nun dieser Zahlenfolge unter

¹Diese Annahme ist nicht zwingend erforderlich, trifft aber in vielen praktischen Fällen zu. Zur Erinnerung: bei der Laplace-Transformation nimmt man auch an, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt.

Benutzung der komplexen Variablen z eine Funktion $\tilde{f}(z)$ zu, indem wir die unendliche Reihe²

$$\tilde{f}(z) := f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad (3.2)$$

bilden³. Unter der Voraussetzung, dass obige Reihe konvergent ist, nennt man die Funktion $\tilde{f}(z)$ die z -Transformierte⁴ oder **Bildfunktion** der **Originalfolge** (f) . Nachdem in der Definitionsreihe $\tilde{f}(z)$ nur negative Potenzen von z stehen, ist es einleuchtend, dass die Reihe für alle z *außerhalb* eines Kreises der komplexen z -Ebene mit dem Radius R , d.h. in einem Bereich $|z| > R$ konvergent ist⁵ (siehe Bild 3.2). Der Radius R hängt natürlich von der Zahlenfolge (f) ab⁶. Jeder z -transformierbaren Folge (f) mit Zahlenwerten f_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) wird durch (3.2) eine Funktion $\tilde{f}(z)$ im sogenannten **Bildbereich** zugeordnet. Diese Zuordnung (Korrespondenz) wird durch die Schreibweisen

$$\tilde{f}(z) = \mathcal{Z}\{f_i\} \quad \text{und} \quad f_i = \mathcal{Z}^{-1}\{\tilde{f}(z)\} \quad (3.3)$$

²Relation (3.2) kann als eine (formale) *Potenzreihe* der Variablen $w := 1/z$

$$\hat{f}(w) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (w - c)^k$$

aufgefasst werden. Sie besitzt den Entwicklungspunkt $c = 0$ und Koeffizienten f_k . Sie kann auch als *Laurentreihe* der Variablen z um den Entwicklungspunkt $c = 0$ aufgefasst werden. Sie besitzt den sogenannten *Hauptteil*

$$f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^{-k}$$

und den sogenannten *Nebenteil* f_0 .

³Die Behandlung von Folgen (f) , deren Elemente f_i auch für negative Indizes i verschieden von Null sein können, erfolgt mit Hilfe der sogenannten zweiseitigen z -Transformation

$$\tilde{f}(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^{-k}.$$

⁴Zahlenfolgen vom sogenannten Exponentialtypus, für deren Elemente zwei Konstanten $M > 0$ und $m \geq 0$ existieren, so dass die Ungleichung

$$|f_i| \leq M e^{mi} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

erfüllt wird, sind z -transformierbar. Solche Folgen treten oft in der Praxis auf.

⁵Die Potenzreihe $\hat{f}(w)$ ist dann im Bereich

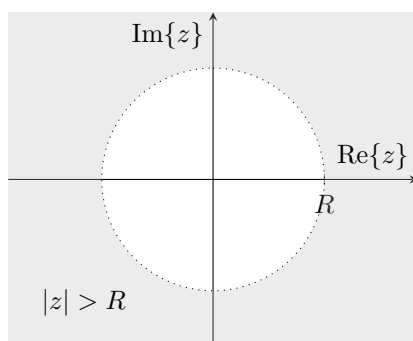
$$|w| < 1/R$$

der komplexen w -Ebene konvergent.

⁶Der Radius R kann mit Hilfe des Begriffes "Limes superior" oder "obere Häufungsgrenze" oder "oberer Limes" der Folge (f) angegeben werden

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup |f_i|^{1/i}.$$

Siehe Konrad KNOPP: *Theorie und Anwendung unendlicher Reihen*; Kap. 10 Häufungswerte und Häufungsgrenzen.

Bild 3.2: Konvergenzbereich $|z| > R$

bzw. durch

$$f_i \circ \bullet \tilde{f}(z) \quad (3.4)$$

symbolisiert.

B **Beispiel (zeitdiskrete Sprungfunktion):** Wir betrachten in Analogie zur zeitkontinuierlichen Sprungfunktion $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ eine Folge mit den Werten (siehe Bild 3.3)

$$\sigma_i = 1 \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

Die zugehörige z -Transformierte lautet dann nach Definition (3.2):

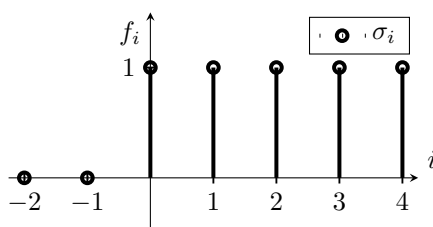


Bild 3.3: Zeitdiskrete Sprungfunktion

$$\mathcal{Z}\{\sigma_i\} = 1 + 1\frac{1}{z} + 1\frac{1}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

Obige Reihe ist eine geometrische Reihe, da der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist

$$\frac{1}{z^{k+1}} / \frac{1}{z^k} = \frac{1}{z}.$$

Sie ist unter der Voraussetzung, dass

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \quad \text{d.h.} \quad 1 < |z|$$

gilt⁷, konvergent und besitzt den Wert

$$\mathcal{Z}\{\sigma_i\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

■

Eine schöne und beachtenswerte Formel: Obwohl obiger Formelausdruck für eine geometrische Reihe einer Formelsammlung entnommen werden kann, wollen wir zum besseren Verständnis sein Entstehen untersuchen. Wir betrachten die Summe

$$\Sigma_{N-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{N-1},$$

wobei a eine i.A. komplexe skalare Konstante ist, und wollen einen geschlossenen Ausdruck zur Berechnung von Σ_{N-1} herleiten. Hierzu bilden wir die Summe

$$\Sigma_N = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{N-1} + a^N$$

und erkennen, dass Σ_N mit Hilfe von Σ_{N-1} auf zwei Arten dargestellt werden kann

$$\Sigma_N = \Sigma_{N-1} + a^N = 1 + a\Sigma_{N-1}.$$

Daraus folgt zunächst

$$(1 - a)\Sigma_{N-1} = 1 - a^N$$

und unter der Voraussetzung⁸ $a \neq 1$ erhalten wir den Formelausdruck⁹

$$\Sigma_{N-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{N-1} = \frac{1 - a^N}{1 - a}.$$

Unter der Annahme

$$|a| < 1$$

gilt außerdem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a^N = 0.$$

⁷Das bedeutet: z liegt *außerhalb* eines Kreises mit dem Radius $R = 1$ (des sogenannten *Einheitskreises*).

⁸Die Formel ist übrigens auch im Fall $a = 1$ gültig, wie man durch Anwendung der Regel von de L'Hopital feststellen kann.

⁹Man beachte, dass für den Fall, dass a einer quadratischen konstanten Matrix(!) $\mathbf{A}$ entspricht und unter der Voraussetzung, dass die Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ regulär ist, die Formel ihre Gültigkeit bewahrt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{N-1} &= (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^N) \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{A}^N)(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \end{aligned}$$

Somit erhält man für $N \rightarrow \infty$ die wohlbekannte Formel zur Berechnung des Grenzwertes einer geometrischen Reihe¹⁰

$$\Sigma_{\infty} := 1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a}.$$

Die z -Transformation besitzt gewisse fundamentale Eigenschaften.

1. Linearitätseigenschaft: Wie man anhand der Definition (3.2) relativ leicht erkennt, ist die z -Transformation eine *lineare* Transformation. Sie wird durch die Eigenschaften *Homogenität* und *Additivität* geprägt. Für zwei beliebige z -transformierbare Folgen (f) und (h) bedeutet das, dass für beliebige, i.A. komplexe(!) Konstanten α und β die Relation

$$\mathcal{Z} \{ \alpha \cdot f_i + \beta \cdot h_i \} = \alpha \cdot \mathcal{Z} \{ f_i \} + \beta \cdot \mathcal{Z} \{ h_i \} = \alpha \cdot \tilde{f}(z) + \beta \cdot \tilde{h}(z) \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Damit kann man die z -Transformation einer komplizierten Folge einfacher durchführen, indem man sie als Superposition geeigneter einfacherer Zahlenfolgen darstellt und diese transformiert.

2. Analytische Eigenschaften: Die z -Transformation ist eindeutig. Unter der Voraussetzung, dass die Reihe (3.2) im Gebiet $|z| > R$ der komplexen z -Ebene konvergiert, ist $\tilde{f}(z)$ eine *holomorphe* Funktion in diesem Gebiet und stellt die einzige Bildfunktion der Folge (f) dar. Die Reihe $\tilde{f}(z)$ kann innerhalb des Konvergenzbereiches beliebig oft gliedweise komplex differenziert¹¹ bzw. nach einer einfachen Modifikation von $\tilde{f}(z)$ integriert werden¹². Das Ergebnis besitzt übrigens denselben Konvergenzbereich. Umgekehrt, falls $\tilde{f}(z)$ eine holomorphe Funktion im Gebiet $|z| > R$ ist, so gibt es eine einzige Folge (f) deren z -Transformierte gleich $\tilde{f}(z)$ ist.

Beispiel: Wir betrachten bei gegebener konstanter (i.A. komplexer) Zahl a eine Folge mit den Elementen (siehe Bild 3.4)

$$f_i = a^i.$$

Die zugehörige z -Transformierte lässt sich anhand

¹⁰Die Formel bleibt für eine quadratische konstante Matrix $\mathbf{A}$, deren Eigenwerte s_i der Ungleichung

$$|s_i| < 1$$

genügen, weiterhin gültig!

$$\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$$

¹¹Siehe Detlef LAUGWITZ: *Ingenieurmathematik V (Komplexe Veränderliche)*, Kap.IV oder Reinholt REM-MERT: *Funktionentheorie I*, Kap.4.

¹²Man beachte, dass die Potenzreihe der Variablen $w := 1/z$

$$\hat{f}(w) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k w^k$$

beliebig oft innerhalb des Konvergenzbereiches gliedweise differenziert bzw. integriert werden kann. Es gilt ferner

$$\frac{d\tilde{f}}{dz} = \frac{d\tilde{f}}{dw} \frac{dw}{dz} = \frac{d\hat{f}}{dw} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

Will man durch Integration einer z -Transformierten $\tilde{f}(z)$ gemäß (3.2) eine neue Korrespondenz ermitteln, so wird die modifizierte Funktion $\frac{1}{z^2} \tilde{f}(z)$ integriert.

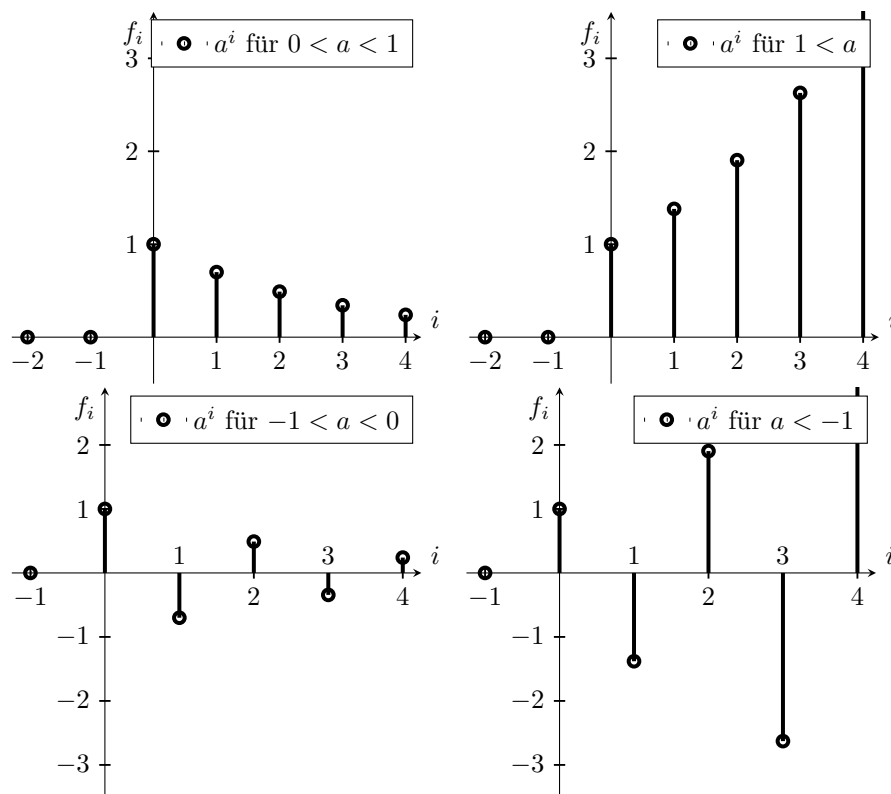


Bild 3.4: Zeitdiskrete Exponentialfunktion

$$\mathcal{Z} \{a^i\} = \tilde{f}(z) = a^0 + \frac{a^1}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

berechnen. Unter der Voraussetzung

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \text{d.h. für } |a| < |z|$$

ist obige geometrische Reihe konvergent. Es ergibt sich die (gebrochen rationale) Funktion

$$\mathcal{Z} \{a^i\} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}. \quad (3.6)$$

Beispiel (Fortsetzung): Unter der Annahme $|a| < |z|$ gilt nach (3.6) folgende Identität(!) in a bzw. z ■

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{z}{z - a}.$$

Die Differentiation obiger Relation nach dem Parameter a ergibt

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{\partial}{\partial a} \frac{z}{z - a}$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ka^{k-1})z^{-k} = \frac{z}{(z - a)^2}.$$

Man erkennt, dass durch diesen einfachen "Trick" eine weitere Korrespondenz, nämlich die z -Transformierte der Folge (h) mit den Elementen (siehe Bild 3.5)

$$h_i := ia^{i-1}$$

gewonnen wurde:

$$\mathcal{Z} \{ia^{i-1}\} = \frac{z}{(z - a)^2}. \quad (3.7)$$

Durch wiederholte Differentiation obigen Resultates nach a erhält man Folgendes: Eine M -fache Differentiation nach a liefert die allgemeine Korrespondenz für $M = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{Z} \{i(i-1)(i-2)\dots(i-M+1)a^{i-M}\} = M! \frac{z}{(z - a)^{M+1}}. \quad (3.8)$$

Durch Benutzung der sogenannten Binomialkoeffizienten

$$\binom{i}{M} := \frac{i(i-1)(i-2)\dots(i-M+1)}{M!} \quad \text{für } 1 \leq M$$

mit

$$\binom{i}{0} := 1$$

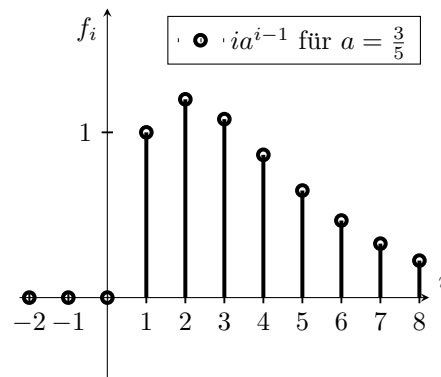


Bild 3.5: Zeitgewichtete zeitdiskrete Exponentialfunktion

erhalten wir die für $0 \leq M$ geltende Korrespondenz

$$\binom{i}{M} a^{i-M} \circ \bullet \frac{z}{(z-a)^{M+1}}. \quad (3.9)$$

Die Korrespondenzen (3.7) bzw. (3.8) spielen bei der Partialbruchzerlegung gebrochen rationaler Funktionen in z eine essentielle Rolle! ■

B **Beispiel:** Wir betrachten eine Folge mit den Elementen

$$\begin{aligned} f_i &= 1 & i &= 0, 2, 4, 6, \dots \\ f_i &= 0 & \text{sonst} \end{aligned}$$

Die zugehörige z -Transformierte lässt sich anhand der Definition (3.2)

$$\tilde{f}(z) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots$$

berechnen. Unter der Voraussetzung

$$\left| \frac{1}{z^2} \right| < 1 \quad \text{d.h. für } 1 < |z|$$

ist obige geometrische Reihe konvergent, und es ergibt sich die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Bemerkung: Ein *alternativer Lösungsweg* ist der folgende: Die Funktion f_i wird als Superposition zweier Funktionen angeschrieben

$$f_i = \frac{1}{2} \cdot (1)^i + \frac{1}{2} \cdot (-1)^i.$$

Daraus folgt unter Ausnutzung der Linearität der z -Transformation und der Korrespondenz (3.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f_i\} &= \tilde{f}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \right) \\ &= \frac{z^2}{z^2-1}.\end{aligned}$$

■ **Beispiel (zeitdiskreter δ -Impuls):** Wir betrachten die Folge (δ) mit den Elementen

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die zugehörige z -Transformierte ergibt sich sofort zu

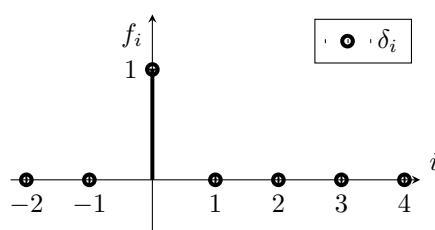


Bild 3.6: Zeitdiskreter δ -Impuls

$$\mathcal{Z}\{\delta_i\} = 1 \tag{3.10}$$

d.h. sie ist eine Konstante! Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, weil im zeitkontinuierlichen Fall keine (übliche) Funktion $f(t)$ existiert, die eine konstante Laplace-Transformierte besitzt. Erst mit Hilfe der mathematisch anspruchsvollen Theorie der Distributionen kann die sogenannte Deltafunktion $\delta(t)$ eingeführt werden, deren Laplace-Transformierte eine Konstante ist!

■ **Beispiel:** Ausgehend von der Funktion

$$f(t) = \sin \omega t \quad (\omega \text{ konstant})$$

erzeugen wir unter Zugrundelegung der (positiven) Diskretisierungszeit T_d eine Zahlenfolge mit den Elementen

$$f_i := f(iT_d) = \sin i\omega T_d \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Eine solche Zahlenfolge ist beispielhaft in Bild 3.7 dargestellt; man erkennt, dass trotz der Periodizität der zeitkontinuierlichen Funktion $f(t)$ die Folge (f) nicht notwendigerweise periodisch ist¹³. Wir wollen die z -Transformierte dieser Folge berechnen. Zur Vereinfachung der

¹³Die Periodizität der Folge (f) ist genau dann gegeben, wenn $\frac{\omega T_d}{\pi}$ eine rationale Zahl ist.

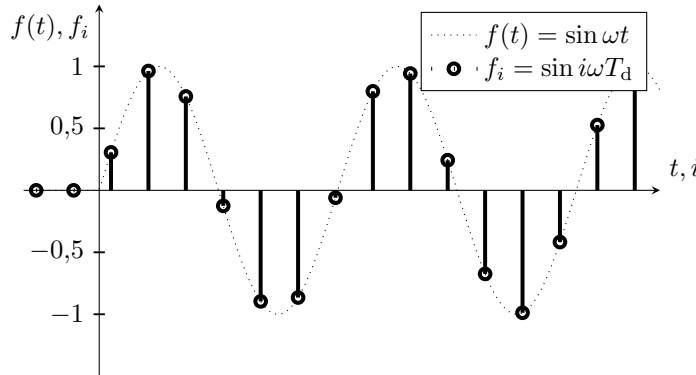


Bild 3.7: Abgetastete Sinusfunktion

Schreibweise führen wir die Größe

$$\varphi := \omega T_d,$$

ein und erhalten

$$f_i = \sin i\varphi.$$

Mit Hilfe der Euler-Relation kann die Sinus-Funktion zu

$$\sin i\varphi = \frac{1}{2j}(e^{ji\varphi} - e^{-ji\varphi}) = \frac{1}{2j}[(e^{j\varphi})^i - (e^{-j\varphi})^i]$$

umgeschrieben werden. Bedenkt man, dass die Korrespondenz (3.6)

$$\mathcal{Z}\{a^i\} = \frac{z}{z-a} \quad \text{für } |a| < |z|$$

gilt, kann man aufgrund der Linearität der z -Transformation schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\sin i\varphi\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j} \cdot [(e^{j\varphi})^i - (e^{-j\varphi})^i]\right\} = \frac{1}{2j} \cdot \mathcal{Z}\{[(e^{j\varphi})^i - (e^{-j\varphi})^i]\} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\varphi}} - \frac{z}{z - e^{-j\varphi}} \right) = \frac{z}{2j} \left(\frac{1}{z - e^{j\varphi}} - \frac{1}{z - e^{-j\varphi}} \right) \\ &= \frac{z}{2j} \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{z^2 - z(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) + 1}. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Euler-Relation erhalten wir dann:

$$\mathcal{Z}\{\sin i\varphi\} = z \frac{\sin \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1} \quad \text{für } 1 < |z|$$

■

Beispiel (Fortsetzung): Man kann auf einen Schlag elegant die z -Transformierte des Paares(!) $(\cos i\varphi, \sin i\varphi)$ ermitteln, wenn man bedenkt, dass eine komplexe Zahl $(\alpha + j\beta)$

einem geordneten Paar (α, β) zweier reeller Zahlen α und β entspricht. Hierzu nutzen wir die Linearität der z -Transformation und die Euler-Relation

$$e^{ji\varphi} = \cos i\varphi + j \cdot \sin i\varphi$$

aus. Man erhält unmittelbar die Beziehung

$$\mathcal{Z}\{e^{ji\varphi}\} = \frac{z}{z - e^{j\varphi}} = \mathcal{Z}\{\cos i\varphi\} + j \cdot \mathcal{Z}\{\sin i\varphi\}.$$

Es wird nun die Funktion $z/(z - e^{j\varphi})$, die eine (gebrochen rationale) Funktion in z mit *komplexen* Koeffizienten ist, folgendermaßen umgeformt

$$\frac{z}{z - e^{j\varphi}} = f(z) + j \cdot h(z).$$

Hierbei sind $f(z)$ und $h(z)$ (gebrochen rationale) Funktionen in z mit *reellen* Koeffizienten. Es ergibt sich unter Ausnutzung der Euler-Identität:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z - e^{j\varphi}} &= \frac{z}{z - e^{j\varphi}} \frac{z - e^{-j\varphi}}{z - e^{-j\varphi}} = z \frac{z - \cos \varphi + j \sin \varphi}{z^2 - z(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) + 1} = z \frac{z - \cos \varphi + j \sin \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1} \\ &= z \frac{z - \cos \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1} + j \cdot z \frac{\sin \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Korrespondenzen

$$\mathcal{Z}\{\cos i\varphi\} = z \frac{z - \cos \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1} \quad \text{für } 1 < |z|$$

und

$$\mathcal{Z}\{\sin i\varphi\} = z \frac{\sin \varphi}{z^2 - 2z \cos \varphi + 1} \quad \text{für } 1 < |z|.$$

■

Bemerkung: Das Beispiel zeigt, dass die Verwendung von komplexen Zahlen viele Berechnungen signifikant vereinfachen kann. Das Wort "komplex" darf in diesem Zusammenhang nicht als Synonym für "kompliziert" verstanden werden. Es wäre besser, komplexe Zahlen als "Mischlingszahlen" zu bezeichnen.

3.2 Sätze für das Rechnen mit der z-Transformation

Es werden Regeln formuliert, mit deren Hilfe gewisse Operationen im Zeit- bzw. Bildbereich vereinfacht werden. Das sind

- Lineare Substitution der Indizes der Originalfolge. Man erhält u.a. die zwei Verschiebungssätze.
- Lineare Substitution der Variablen im Bildbereich. Man erhält den Dämpfungssatz.

- Differentiation im Bildbereich.
- Integration im Bildbereich.
- Grenzwertermittlung der Originalfolge mithilfe des Anfangs- bzw. des Endwertsatzes.
- Multiplikation im Bildbereich.

3.2.1 1. Verschiebungssatz (Verschiebung der Originalfolge nach rechts)

Sei (f) eine Zahlenfolge mit zugehöriger z -Transformierter $\tilde{f}(z)$. Hierbei nehmen wir an, dass

$$f_i = 0 \quad \text{für } i < 0$$

gilt. Wir bilden nun unter Benutzung der beliebigen, aber festen natürlichen Zahl m eine neue Folge (h) gemäß

$$h_i := f_{i-m} .$$

Für diese gilt

$$h_i = 0 \quad \text{für } i - m < 0 .$$

Das bedeutet, die neue Folge entsteht durch m -malige Verschiebung der ursprünglichen Folge nach *rechts*; dieser Zusammenhang ist in Bild 3.8 beispielhaft für $m = 2$ dargestellt. Die zugehörige z -Transformierte lautet

$$\mathcal{Z}\{h_i\} = \mathcal{Z}\{f_{i-m}\} = z^{-m} \tilde{f}(z). \quad (3.11)$$

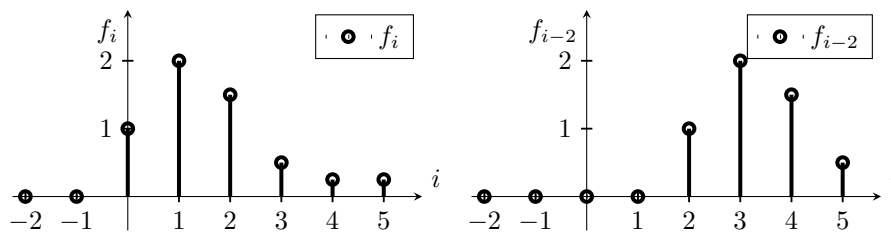


Bild 3.8: Verschiebung nach rechts

BBeispiel: Wir betrachten die einmal nach rechts verschobene zeitdiskrete Sprungfunktion, d.h.

$$h_i = \sigma_{i-1} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Es gilt nach dem 1. Verschiebungssatz

$$\mathcal{Z}\{h_i\} = \mathcal{Z}\{\sigma_{i-1}\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{\sigma_i\}$$

bzw. unter Verwendung der schon abgeleiteten Korrespondenz

$$\mathcal{Z}\{\sigma_i\} = \frac{z}{z-1} ,$$

$$\mathcal{Z}\{\sigma_{i-1}\} = z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} .$$

In analoger Weise folgt unmittelbar, dass die fünfmal nach rechts verschobene zeitdiskrete Sprungfunktion (siehe Bild 3.9)

$$h_i = \sigma_{i-5} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

die z -Transformierte

$$\mathcal{Z}\{\sigma_{i-5}\} = z^{-5} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z^5 - z^4}$$

besitzt.

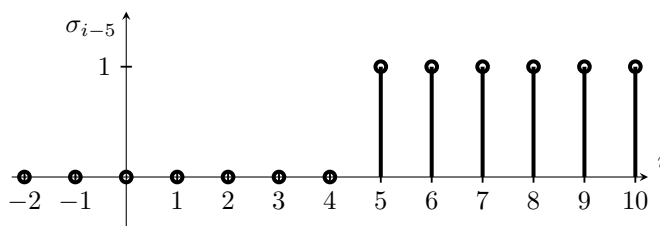


Bild 3.9: Verschobene Sprungfunktion

BBeispiel: Wir betrachten die Funktion

$$y_i = \sum_{k=0}^i u_k \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$y_i = 0 \quad \text{für } i < 0 .$$

Gesucht ist die z -Transformierte $\mathcal{Z}\{y_i\}$ unter der Annahme, dass $\mathcal{Z}\{u_i\}$ vorliegt. Man erkennt, dass

$$y_i = \sum_{k=0}^{i-1} u_k + u_i = y_{i-1} + u_i$$

bzw.

$$y_i - y_{i-1} = u_i$$

gilt. Unterwirft man obige Relation der z -Transformation, erhält man

$$\mathcal{Z}\{y_i\} - \mathcal{Z}\{y_{i-1}\} = \mathcal{Z}\{u_i\}$$

und nach Anwendung des 1. Verschiebungssatzes

$$\mathcal{Z}\{y_i\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{y_i\} = \mathcal{Z}\{u_i\}$$

bzw.

$$\mathcal{Z}\{y_i\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}\mathcal{Z}\{u_i\} = \frac{z}{z - 1}\mathcal{Z}\{u_i\} .$$

- Obiger Verschiebungssatz ergibt sich mit Hilfe der Definition gemäß (3.2):

$$\mathcal{Z}\{h_i\} = h_0 + h_1\frac{1}{z} + h_2\frac{1}{z^2} + h_3\frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{1}{z^k}$$

Unter Beachtung der Beziehungen

$$h_0 = h_1 = h_2 = \dots = h_{m-1} = 0$$

und

$$h_m = f_0, \quad h_{m+1} = f_1, \quad h_{m+2} = f_2, \dots$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{h_i\} &= \sum_{k=m}^{\infty} h_k \frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{\infty} h_{k+m} \frac{1}{z^k} \\ &= \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{1}{z^k} = z^{-m} \tilde{f}(z). \end{aligned}$$

3.2.2 2. Verschiebungssatz (Verschiebung der Originalfolge nach *links*)

Sei (f) eine Zahlenfolge mit der z -Transformierten $\tilde{f}(z)$. Wir bilden nun unter Benutzung der beliebigen, aber festen natürlichen Zahl m eine neue kausale Folge (h) mit den Elementen

$$h_i := \sigma_i \cdot f_{i+m} .$$

Für die neue Folge gilt

$$h_0 = f_m, \quad h_1 = f_{1+m}, \quad h_2 = f_{2+m}, \quad \dots$$

Das bedeutet, die neue Folge entsteht durch m -malige Verschiebung der ursprünglichen Folge nach *links*; dieser Zusammenhang ist in Bild 3.10 beispielhaft für $m = 2$ dargestellt. Die zugehörige z -Transformierte lautet

$$\mathcal{Z}\{h_i\} = \mathcal{Z}\{f_{i+m}\} = z^m \left[\tilde{f}(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right]. \quad (3.12)$$

Falls die ersten m Elemente der Folge (f) gleich Null sind,

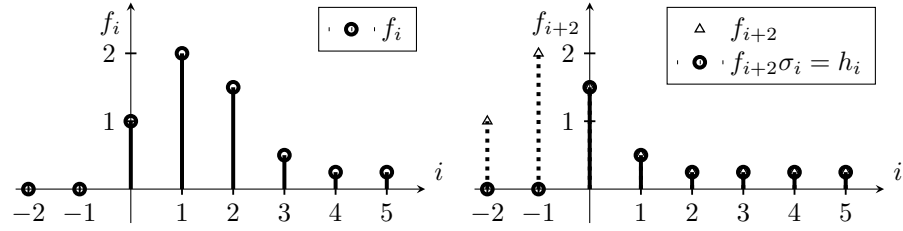


Bild 3.10: Verschiebung nach links

$$f_0 = f_1 = \dots = f_{m-1} = 0 ,$$

so vereinfacht sich (3.12) zu

$$\mathcal{Z} \{f_{i+m}\} = z^m \tilde{f}(z). \quad (3.13)$$

BBeispiel: Bei einer einmaligen Verschiebung, d.h. im Fall $m = 1$ ergibt (3.12)

$$\mathcal{Z} \{f_{i+1}\} = z \left[\tilde{f}(z) - f_0 \right].$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Ergebnisses kann man sukzessiv die Fälle $m = 2, 3, \dots$ lösen. Mit Hilfe dieses Ergebnisses ergibt sich die z -Transformierte $\mathcal{Z} \{f_{i+2}\}$ (Fall $m = 2$):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{f_{i+2}\} &= z \cdot (\mathcal{Z} \{f_{i+1}\} - f_1) \\ &= z \cdot \left(z \cdot \left[\tilde{f}(z) - f_0 \right] - f_1 \right) \\ &= z^2 \left[\tilde{f}(z) - f_0 - f_1 z^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Analog löst sich der Fall $m = 3$ usw.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{f_{i+3}\} &= z \cdot (\mathcal{Z} \{f_{i+2}\} - f_2) \\ &= z \cdot \left(z^2 \cdot \left[\tilde{f}(z) - f_0 - f_1 z^{-1} \right] - f_2 \right) \\ &= z^3 \left[\tilde{f}(z) - f_0 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} \right]. \end{aligned}$$

- Der Beweis obiger Relation (3.12) verläuft geradlinig mit Hilfe von (3.2). Es ergibt sich

$$\mathcal{Z} \{h_i\} = h_0 + h_1 \frac{1}{z} + h_2 \frac{1}{z^2} + h_3 \frac{1}{z^3} + \dots$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\{h_i\} &= f_m + f_{1+m} \frac{1}{z} + f_{2+m} \frac{1}{z^2} + f_{3+m} \frac{1}{z^3} + \dots \\
 &= z^m \left(f_m \frac{1}{z^m} + f_{1+m} \frac{1}{z^{1+m}} + f_{2+m} \frac{1}{z^{2+m}} + \dots \right) = z^m \sum_{k=m}^{\infty} f_k z^{-k} \\
 &= z^m \left[\sum_{k=m}^{\infty} f_k z^{-k} + \left(\sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right) \right] \\
 &= z^m \left[\tilde{f}(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right].
 \end{aligned}$$

3.2.3 Spreizen (Indexänderung) der Originalfolge (optional)

Sei (f) eine Zahlenfolge mit der z -Transformierten $\tilde{f}(z)$. Ferner sei N eine natürliche Zahl mit $N \geq 1$. Wir bilden eine neue Folge (h) gemäß

$$h_k := \begin{cases} f_i & \text{für } k = i \cdot N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{d.h. } k = 0, N, 2N, 3N, \dots$$

Man erhält aus der Folge

$$(f) := (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots)$$

die gespreizte Folge (siehe Bild 3.11)

$$(h) := (f_0, 0, \dots, 0, f_1, 0, \dots, 0, f_2, 0, \dots, 0, f_3, 0, \dots).$$

Die z -Transformierte von (h) ergibt sich mit Hilfe der Definition (3.11)

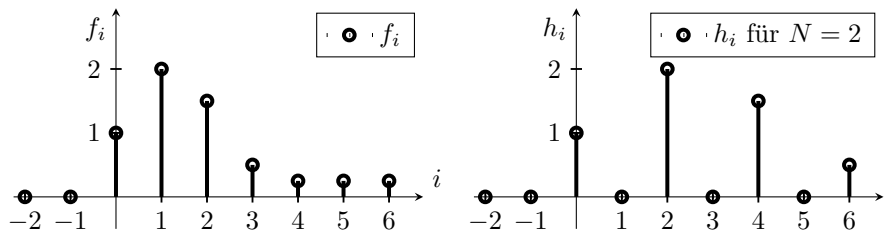


Bild 3.11: Spreizung

$$\mathcal{Z}\{h_k\} = \tilde{h}(z) = f_0 + f_1 \frac{1}{z^N} + f_2 \frac{1}{z^{2N}} + f_3 \frac{1}{z^{3N}} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{1}{z^N} \right)^k$$

bzw.

$$\tilde{h}(z) = \tilde{f}(z^N).$$

3.2.4 Dämpfungssatz

Sei (f) eine Zahlenfolge mit zugehöriger z -Transformierter $\tilde{f}(z)$. Wir bilden eine neue Folge (h) durch Gewichtung der Elemente f_i gemäß

$$h_i := a^i f_i ,$$

wobei a eine beliebige komplexe(!) Konstante ist. Es gilt dann

$$\mathcal{Z} \{a^i f_i\} = \tilde{f}\left(\frac{z}{a}\right). \quad (3.14)$$

BBeispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f_i = \sin i\omega T_d$$

mit der (schon berechneten) z -Transformierten

$$\tilde{f}(z) = z \frac{\sin \omega T_d}{z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1} .$$

Gesucht ist die z -Transformierte der Funktion

$$h_i = e^{i\sigma T_d} \sin i\omega T_d ,$$

wobei σ eine beliebige i.A. komplexe Konstante ist. Mit Hilfe der Relation (3.14),

$$a := e^{\sigma T_d}$$

und

$$h_i = a^i f_i$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{e^{i\sigma T_d} \sin i\omega T_d\} &= \tilde{f}(ze^{-\sigma T_d}) = (ze^{-\sigma T_d}) \frac{\sin \omega T_d}{(ze^{-\sigma T_d})^2 - 2(ze^{-\sigma T_d}) \cos \omega T_d + 1} \\ &= z \frac{e^{\sigma T_d} \sin \omega T_d}{z^2 - 2ze^{\sigma T_d} \cos \omega T_d + e^{2\sigma T_d}} . \end{aligned}$$

- Obige Beziehung ergibt sich unmittelbar mit Hilfe der Definition (3.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{a^i f_i\} &= f_0 + a f_1 \frac{1}{z} + a^2 f_2 \frac{1}{z^2} + a^3 f_3 \frac{1}{z^3} + \dots \\ &= f_0 + f_1 \left(\frac{a}{z}\right) + f_2 \left(\frac{a}{z}\right)^2 + f_3 \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \tilde{f}\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

3.2.5 Differentiation im Bildbereich

Sei (f) eine Zahlenfolge mit den Elementen f_i und der z -Transformierten $\tilde{f}(z)$. Wir bilden nach einer Gewichtung der Elemente f_i die Folge (h) mit Elementen h_i gemäß

$$h_i := i f_i .$$

Es gilt dann

$$\frac{d \tilde{f}(z)}{dz} = -z^{-1} \mathcal{Z} \{h_i\} = -z^{-1} \mathcal{Z} \{i f_i\} \quad (3.15)$$

bzw.

$$\mathcal{Z} \{i f_i\} = -z \frac{d \tilde{f}(z)}{dz} . \quad (3.16)$$

Man beachte, dass $z^{-1} \mathcal{Z} \{h_i\}$ die z -Transformierte der einmal nach rechts verschobenen Folge (h) ist.

- Zum Beweis obiger Relation gehen wir von der Definition

$$\tilde{f}(z) := f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

aus. Die Differentiation¹⁴ von $\tilde{f}(z)$ nach z ergibt

$$\frac{d \tilde{f}(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (-k) z^{-k-1} \quad (3.17)$$

bzw.

$$\frac{d \tilde{f}(z)}{dz} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (k f_k) z^{-k} = -z^{-1} \mathcal{Z} \{i f_i\} .$$

Bemerkungen (*optional*):

- Durch wiederholte Differentiation von (3.17) nach z , z.B. durch m -fache Differentiation von $\tilde{f}(z)$, kann mit Hilfe der m Differentialquotienten $\frac{d^\mu}{dz^\mu} \tilde{f}(z)$ mit $\mu = 1, 2, \dots, m$ die z -Transformierte der Folge (h) mit den Elementen

$$h_i := i(i+1)(i+2)\dots(i+m-1)f_i$$

berechnet werden.

¹⁴Gliedweise Differentiation der Reihe im Inneren des Konvergenzbereiches.

- Durch eine Differentiation von $\mathcal{Z}\{i f_i\}$ gemäß (3.16) nach z erhält man die z -Transformierte der Folge mit den Elementen $i^2 f_i$. Durch wiederholtes Differenzieren kann man dann die z -Transformierte der Folge mit den Elementen $i^m f_i$ ermitteln. Es gilt

$$\mathcal{Z}\{i^m f_i\} = \left[-z \frac{d}{dz}\right]^m \tilde{f}(z),$$

wobei der Ausdruck $\left[-z \frac{d}{dz}\right]^m$ als m -fache Durchführung der Operation $-z \frac{d}{dz}$ verstanden wird.

B **Beispiel** (*optional*): Die Elemente f_i einer Folge (f) erfüllen die Gleichung

$$f_{i+1} = \frac{1}{i+1} f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

mit $f_0 = 1$. Es soll die z -Transformierte $\tilde{f}(z)$ ermittelt werden.

Hierzu schreiben wir obige Gleichung um

$$(i+1)f_{i+1} - f_i = 0, \quad (3.19)$$

unterwerfen sie der z -Transformation und erhalten

$$\mathcal{Z}\{(i+1)f_{i+1}\} - \mathcal{Z}\{f_i\} = 0. \quad (3.20)$$

Gemäß (3.16) gilt

$$\mathcal{Z}\{i f_i\} = -z \frac{d \tilde{f}(z)}{dz}.$$

Definieren wir

$$h_i := i f_i$$

so ist $h_0 = 0$. Gemäß dem ersten Verschiebungssatz gilt

$$\mathcal{Z}\{h_{i+1}\} = z (\mathcal{Z}\{h_i\} - h_0)$$

und damit erhalten wir zunächst

$$\mathcal{Z}\{(i+1)f_{i+1}\} = z \left(-z \frac{d \tilde{f}(z)}{dz} \right)$$

und Relation (3.20) bekommt die Gestalt

$$z^2 \frac{d \tilde{f}(z)}{dz} + \tilde{f}(z) = 0.$$

Es handelt sich um eine (gewöhnliche) Differentialgleichung für die z -Transformierte $\tilde{f}(z)$. Durch Umschreiben können die Variablen getrennt werden

$$\frac{d \tilde{f}(z)}{\tilde{f}(z)} = -\frac{dz}{z^2}$$

und die Differentialgleichung kann unmittelbar integriert werden. Es ergibt sich

$$\tilde{f}(z) = K \exp\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei K eine Konstante ist. Bedenkt man, dass

$$K \exp\left(\frac{1}{z}\right) = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

gilt, besitzt die Folge (f) die Elemente - sie können aus obiger Gleichung direkt abgelesen werden -

$$f_i = K \frac{1}{i!} \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, \dots,$$

Die Konstante K ergibt sich aus dem vorgegebenen Anfangswert

$$f_0 = 1 = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) = K$$

zu $K = 1$. Die gesuchte z -Transformierte lautet

$$\tilde{f}(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k,$$

was auch unmittelbar aus (3.18) gefolgert werden kann. ■

3.2.6 Integration im Bildbereich

Wir betrachten die z -Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge (f)

$$\tilde{f}(z) := f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots \quad (3.21)$$

Es geht nun darum, durch Benutzung obiger Relation und Integration im Bildbereich neue Korrespondenzen zu erhalten. Wir *nehmen an*, dass $f_0 \neq 0$ ist. Wir multiplizieren nun Relation (3.21) mit $-1/z^2$ und erhalten

$$-\frac{1}{z^2} \tilde{f}(z) = -(f_0 \frac{1}{z^2} + f_1 \frac{1}{z^3} + f_2 \frac{1}{z^4} + f_3 \frac{1}{z^5} + \dots).$$

Die Integration¹⁵ im Konvergenzbereich von (3.21) liefert

$$\begin{aligned} - \int_z^\infty \frac{1}{\zeta^2} \tilde{f}(\zeta) d\zeta &= - \int_z^\infty (f_0 \frac{1}{\zeta^2} + f_1 \frac{1}{\zeta^3} + f_2 \frac{1}{\zeta^4} + f_3 \frac{1}{\zeta^5} + \dots) d\zeta \\ &= \left[f_0 \frac{1}{1} \frac{1}{\zeta^1} + f_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta^2} + f_2 \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta^3} + f_3 \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta^4} + \dots \right]_z^\infty \\ &= - \left(f_0 \frac{1}{1} \frac{1}{z^1} + f_1 \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + f_2 \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} + f_3 \frac{1}{4} \frac{1}{z^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\int_z^\infty \frac{1}{\zeta^2} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} f_{k-1} \right) \frac{1}{z^k} .$$

Wir definieren eine Folge (h) mit den Elementen

$$h_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ \frac{1}{i} f_{i-1} & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

und können dadurch die rechte Seite obiger Relation als z -Transformierte der Folge (h) mit den Elementen

$$0, f_0, \frac{f_1}{2}, \frac{f_2}{3}, \frac{f_3}{4}, \dots$$

aufgefasst werden

$$\int_z^\infty \frac{1}{\zeta^2} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = 0 + f_0 \frac{1}{z} + \frac{f_1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{f_2}{3} \frac{1}{z^3} + \frac{f_3}{4} \frac{1}{z^4} + \dots = \mathcal{Z} \{h_i\} .$$

[B]Beispiel : Wir betrachten die zeitdiskrete Sprungfunktion, d.h. eine Folge (σ) mit den Elementen

$$\sigma_i = 1 \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

Die zugehörige z -Transformierte lautet (für $|z| > 1$)

$$\mathcal{Z} \{\sigma_i\} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1} .$$

Damit wird die z -Transformierte der Folge (h)

$$(h) := (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

durch

$$\int_z^\infty \frac{1}{\zeta^2} \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta = 0 + 1 \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{z^4} + \dots = \mathcal{Z} \{h_i\}$$

¹⁵Siehe hierzu z.B. Konrad KNOPP *Funktionentheorie I*; Kap. 3 Das Integral einer stetigen Funktion und Kap. 4 Der Cauchysche Integralsatz.

gegeben¹⁶. Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{1}{\zeta^2} \frac{\zeta}{\zeta-1} d\zeta &= \int_z^\infty \frac{1}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta = \int_z^\infty \left(-\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1}\right) d\zeta \\ &= [-\ln \zeta + \ln(\zeta-1)]_z^\infty = -\ln \frac{z}{z-1} \Big|_z^\infty \\ &= \ln \frac{z}{z-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \end{aligned}$$

und damit gilt (zur Erinnerung: für $|z| > 1$)

$$\ln \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{z^4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{z^k}$$

■

3.2.7 Anfangswertsatz

Gegeben sei die z -Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge (f)

$$\tilde{f}(z) := f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots$$

Das erste Element f_0 kann offensichtlich anhand

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{f}(z) \tag{3.22}$$

berechnet werden.

Bemerkung: Bei *bekanntem* Wert f_0 liefert die Anwendung dieses Satzes den Wert f_1 . Es gilt nämlich

$$\tilde{f}(z) - f_0 = f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots$$

bzw.

$$z \left[\tilde{f}(z) - f_0 \right] = f_1 + f_2 \frac{1}{z^1} + f_3 \frac{1}{z^2} + \dots$$

Daraus folgt nach dem Anfangswertsatz

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left[\tilde{f}(z) - f_0 \right] = f_1.$$

Man kann demnach durch wiederholte Anwendung dieses Satzes die Werte $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ *sukzessiv* berechnen.

¹⁶Die Folge (h) entsteht durch einmalige Verschiebung nach rechts der sogenannten *harmonischen* Folge

$$(g) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) = (g_0, g_1, g_2, \dots).$$

Es gilt nämlich für $i \geq 1$

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{i-1}} + \frac{1}{g_{i+1}} \right).$$

Das bedeutet, jedes Element g_i ist durch das harmonische Mittel seiner unmittelbar benachbarten Elemente gegeben.

3.2.8 Endwertsatz

Gegeben sei die z -Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge (f) , die zumindest im Bereich $|z| > 1$ der komplexen Ebene konvergent¹⁷ ist. Unter der *Voraussetzung*, dass der Grenzwert

$$f_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$$

existiert, kann dieser im Bildbereich anhand

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(1 - \frac{1}{z} \right) \tilde{f}(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \tilde{f}(z) \right] \quad (3.23)$$

ermittelt werden.

Folgendes **Theorem** sichert die Existenz des Grenzwertes f_∞ für eine wichtige Klasse von z -Transformierten $\tilde{f}(z)$ in technischen Anwendungen: Die Funktion

$$\tilde{g}(z) := (z - 1) \tilde{f}(z)$$

sei eine gebrochen rationale Funktion in z mit reellen Koeffizienten

$$\tilde{g}(z) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}$$

und

$$\deg \{ \mu(z) \} - 1 \leq \deg \{ \nu(z) \} \quad .$$

Ferner sollen $\mu(z)$ und $\nu(z)$ *teilerfremd* sein; d.h. Zähler- und Nennerpolynom besitzen *keine* gemeinsamen Nullstellen. Der Grenzwert f_∞ existiert *genau dann*, wenn das Polynom $\nu(z)$ *keine* Nullstellen p_i mit $|p_i| \geq 1$ besitzt¹⁸. Das bedeutet, alle Nullstellen liegen im Inneren des sogenannten Einheitskreises.

Bemerkung: Zur Überprüfung der Eigenschaft

$$|p_i| < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

der n Nullstellen eines Polynoms

$$\nu(z) = \nu_0 + \nu_1 z + \nu_2 z^2 + \dots + \nu_{n-1} z^{n-1} + \nu_n z^n \quad \text{mit } \nu_n \neq 0$$

ohne diese zu berechnen, können algebraische Kriterien nach Jury¹⁹ bzw. Marden²⁰ benutzt werden. Für den Fall, dass $\nu(z)$ ein monisches Polynom ist, d.h. im Fall

$$\nu_n = 1,$$

¹⁷Der Konvergenzbereich wird durch

$$|z| > R \quad \text{mit } 1 \geq R \geq 0$$

beschrieben

¹⁸Man nennt solch ein Polynom, das *nur* Nullstellen p_i mit $|p_i| < 1$ besitzt, ein Einheitskreispolynom (abgekürzt: EKP). Alle seine Nullstellen liegen in der z -Ebene *innerhalb* eines Kreises mit dem Radius $R = 1$.

¹⁹Eliahu Ibraham Jury (Baghdad 1923)

²⁰Morris Marden (Boston 1905 - 1991)

sind folgende einfach(!) überprüfbare Bedingungen *notwendig*, damit $\nu(z)$ ein Einheitskreispolynom ist:

$$\nu(z = +1) > 0 \quad ; \quad (-1)^n \cdot \nu(z = -1) > 0 \quad (3.24)$$

und²¹

$$|\nu_0| < 1 . \quad (3.25)$$

Liegt allerdings ein monisches Polynom mit dem Grad $n \leq 2$ vor, so sind obige Bedingungen (3.24) und (3.25) *notwendig* und *hinreichend*! Im Fall $n = 2$, d.h.

$$\nu(z) = \nu_0 + \nu_1 z + z^2$$

lauten die Bedingungen:

$$\nu(z = +1) = \nu_0 + \nu_1 + 1 > 0,$$

$$\nu(z = -1) = \nu_0 - \nu_1 + 1 > 0$$

und

$$|\nu_0| < 1.$$

- Zum Verständnis obiger Relation (3.23) gehen wir von der Definition

$$\tilde{f}(z) := f_0 + f_1 \frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + f_3 \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

aus und bilden den Ausdruck²² $\mathcal{Z}\{f_{i+1} - f_i\}$

$$\mathcal{Z}\{f_{i+1} - f_i\} = \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) z^{-k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (f_{k+1} - f_k) z^{-k} . \quad (3.26)$$

Nach dem 2. Verschiebungssatz ergibt sich für die *linke* Seite:

$$\mathcal{Z}\{f_{i+1} - f_i\} = z \cdot \left[\tilde{f}(z) - f_0 \right] - \tilde{f}(z) = (z - 1) \tilde{f}(z) - z f_0 . \quad (3.27)$$

²¹Falls das Polynom $\nu(z)$ eine m -fache Nullstelle bei $z = 0$ besitzt, so sind die ersten m Koeffizienten gleich Null. Das Polynom $\nu(z)$ lautet

$$\nu(z) = z^m (\nu_{m-1} + \nu_m z + \nu_{m+1} z^2 + \dots + \nu_{n-1} z^{n-m-1} + \nu_n z^{n-m})$$

Dieses Polynom ist genau dann ein EKP, wenn das gradreduzierte Polynom

$$\nu_{m-1} + \nu_m z + \nu_{m+1} z^2 + \dots + \nu_{n-1} z^{n-m-1} + \nu_n z^{n-m}$$

ein EKP ist. In solch einem Fall ist die Ungleichung $|\nu_0| < 1$ gemäß (3.25) trivialerweise erfüllt und wird durch

$$|\nu_{m-1}| < 1$$

ersetzt!

²²Die Betrachtung des Ausdruckes $\mathcal{Z}\{f_i - f_{i-1}\}$ führt zum gleichen Ergebnis.

Für die *rechte* Seite erhält man die Beziehung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (f_{k+1} - f_k) z^{-k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ (f_1 - f_0) z^0 + (f_2 - f_1) z^{-1} + \dots + (f_{N+1} - f_N) z^{-N} \}. \quad (3.28)$$

Wir bilden nun unter Beachtung von

$$\sum_{k=0}^N (f_{k+1} - f_k) = (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \dots + (f_{N+1} - f_N) = -f_0 + f_{N+1}$$

den Limes beider Seiten für $z \rightarrow 1$. Nachdem die rechte Seite unter der *Voraussetzung*, dass der Grenzwert f_∞ existiert²³

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-f_0 + f_{N+1}) = -f_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} f_{N+1} = -f_0 + f_\infty$$

ergibt, erhalten wir mit (3.26) und (3.27) die Beziehung

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \tilde{f}(z) - f_0 = -f_0 + f_\infty$$

bzw.²⁴

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \tilde{f}(z).$$

B **Beispiel:** Wir betrachten eine Folge mit den Werten f_i gemäß

$$f_i = (-1)^i \quad (3.29)$$

und der zugehörigen z -Transformierten

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1 - \frac{-1}{z}} = \frac{z}{z + 1}.$$

Der Grenzwert im Bildbereich

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \tilde{f}(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z + 1} = 0$$

²³Die Reihe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (f_{k+1} - f_k) z^{-k}$$

ist gemäß der Voraussetzung, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N$$

existiert, für $z = 1$ und damit auch für alle z außerhalb des Einheitskreises $|z| > 1$ konvergent.

²⁴Bei der Grenzwertbildung müsste man eigentlich

$$f_\infty = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| > 1}} \left(1 - \frac{1}{z} \right) \tilde{f}(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| > 1}} (z - 1) \tilde{f}(z)$$

schreiben.

existiert und beträgt Null. Der Grenzwert im Zeitbereich

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^i$$

existiert allerdings *nicht*, da die Folge mit den Elementen gemäß (3.29) eine alternierende ist! ■

Beispiel: Wir betrachten die z -Transformierte

$$\tilde{f}(z) = \frac{24z}{6z^2 - 5z + 1}$$

einer Folge (f) und wollen den Grenzwert

$$f_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$$

ermitteln. Um die Formel

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \tilde{f}(z) \right] = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$$

benutzen zu können, müssen die zwei Nullstellen des Nennerpolynoms $6z^2 - 5z + 1$ im Einheitskreis liegen. Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$6z^2 - 5z + 1 = 0$$

lauten

$$z_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot 6} (5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}) = \frac{1}{12} (5 \pm 1)$$

bzw.

$$z_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{3}.$$

Sie liegen innerhalb des Einheitskreises²⁵

$$|z_1| < 1 \quad \text{und} \quad |z_2| < 1.$$

Damit kann der Grenzwertsatz angewandt werden und es ergibt sich

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{24z}{6z^2 - 5z + 1} = 0$$

²⁵Der Konvergenzbereich von

$$\tilde{f}(z) = \frac{24z}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{4}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

ist

$$|z| > R = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung (*alternativer Lösungsweg*): Man kommt zu dem gleichen Ergebnis *ohne* Ermittlung der Lösungen, wenn man das monische Polynom

$$\nu(z) := \frac{1}{6}(1 - 5z + 6z^2) = \frac{1}{6} - \frac{5}{6}z + z^2$$

betrachtet. Es gilt

$$\nu(1) := \frac{1}{6} - \frac{5}{6}1 + 1^2 = \frac{1}{3} > 0 ,$$

$$\nu(-1) := \frac{1}{6} + \frac{5}{6}1 + 1^2 = 2 > 0$$

und

$$\left| \frac{1}{6} \right| < 1 .$$

Damit sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt, $\nu(z)$ ist ein Einheitskreis-Polynom. ■

3.2.9 Multiplikation im Bildbereich (optional)

Der folgende sogenannte Faltungssatz ist sehr vorteilhaft bei der Transformation der komplizierten Eingangs-Ausgangs-Relation linearer und zeitinvarianter zeitdiskreter Systeme in den Bildbereich. Er dient ferner der Definition des fundamentalen Begriffes "Übertragungsfunktion" solcher Systeme.

Wir gehen von zwei Zahlenfolgen

$$(f) := (f_0, f_1, f_2, \dots)$$

und

$$(g) := (g_0, g_1, g_2, \dots)$$

mit der Eigenschaft

$$f_i = g_i = 0 \quad \text{für } i < 0$$

und den zugehörigen z -Transformierten $\tilde{f}(z) = \mathcal{Z}\{f_i\}$ und $\tilde{g}(z) = \mathcal{Z}\{g_i\}$ aus. Wir bilden eine neue Folge (h) mit den Elementen h_i gemäß

$$h_i := \sum_{k=0}^i f_{i-k} g_k \left(= \sum_{k=0}^i f_k g_{i-k} \right) \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Man spricht von der Faltungssumme²⁶ bzw. von der Faltung der Folgen (f) und (g) . Die z -Transformierte dieser neuen Folge ergibt sich durch Multiplikation der z -Transformierten der

²⁶In der Literatur wird oft die Kurzschreibweise

$$(h) =: (f) * (g) = (g) * (f)$$

verwendet. Man spricht dann vom Faltungsprodukt.

ursprünglichen Folgen:

$$\mathcal{Z}\{h_i\} = \tilde{h}(z) = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^i f_{i-k}g_k\right\} = \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z)$$

bzw.

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)\right\} = \sum_{k=0}^i f_{i-k}g_k = \sum_{k=0}^i f_k g_{i-k} \quad . \quad (3.31)$$

Bemerkung: Um ein besseres Verständnis für den formulierten Satz zu erhalten und das Bildungsgesetz der Faltungssumme (3.30) besser zu erkennen, werden exemplarisch die Summen h_0 , h_1 , h_2 und h_3 berechnet:

$$h_0 = f_0 g_0 \quad ,$$

$$h_1 = f_0 g_1 + f_1 g_0 \quad ,$$

$$h_2 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0$$

und

$$h_3 = f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0 \quad .$$

Das bedeutet, dass h_i durch

$$h_i = f_0 g_i + f_1 g_{i-1} + f_2 g_{i-2} + \dots + f_i g_0$$

gegeben ist. Wir betrachten nun die Potenzreihen²⁷ in der komplexen Variablen x

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$$

und erhalten für deren Produkt (sogenanntes Cauchy²⁸-Produkt der zwei Potenzreihen)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k \quad .$$

Setzt man $x = z^{-1}$ so erhält man die formulierte Regel für die z -Transformation.

3.3 Inverse z -Transformation gebrochen rationaler Funktionen

Hierbei geht es um folgendes Problem: Gegeben sei eine Funktion $\tilde{f}(z)$, die analytisch in einem Bereich $|z| > R$ der komplexen Ebene ist. Gesucht ist die Folge (f) mit der z -Transformierten $\tilde{f}(z)$. In den nachfolgenden Ausführungen wollen wir uns auf den praktisch relevanten Fall

²⁷Siehe Konrad KNOPP *Theorie und Anwendung unendlicher Reihen*, Kap. 17 und 21.

²⁸Augustin-Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux / Frankreich 1857)

konzentrieren, dass $\tilde{f}(z)$ eine gebrochen rationale Funktion in z ist²⁹. Sie ergibt sich als Quotient

$$\tilde{f}(z) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}$$

zweier hier *teilerfremder* vorausgesetzter Polynome $\mu(z)$ und $\nu(z)$. Der Grad m des Zählerpolynoms ist (zwangsläufig) kleiner gleich dem Grad n des Nennerpolynoms:

$$m := \deg \{\mu(z)\} \leq \deg \{\nu(z)\} =: n \quad .$$

Das Nennerpolynom $\nu(z)$ wird der Einfachheit halber als monisch vorausgesetzt und besitzt unter Benutzung seiner Nullstellen p_k die faktorisierte Darstellung

$$\nu(z) = \prod_{k=1}^n (z - p_k),$$

wobei p_k die sogenannten Pole der Funktion $\tilde{f}(z)$ sind. Die Koeffizienten beider Polynome $\mu(z)$ und $\nu(z)$ werden als reell vorausgesetzt³⁰. Das hat zur Folge, dass falls eine komplexe Polynomnullstelle bei $(\alpha + j\beta)$ vorliegt, die konjugiert komplexe Zahl $(\alpha - j\beta)$ ebenfalls eine Nullstelle des Polynoms ist!

Wir wollen nun die inverse z -Transformierte von

$$\tilde{f}(z) = \frac{\mu(z)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)}$$

ermitteln, indem wir die Linearitätseigenschaft der z -Transformation ausnutzen. Hierzu zerlegen wir die Funktion $\tilde{f}(z)$ in N Terme

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z) + \tilde{f}_2(z) + \dots + \tilde{f}_N(z) \quad ,$$

deren z -Transformierten leicht ermittelbar sind. Unter der Voraussetzung, dass die Pole von $\tilde{f}(z)$ vorliegen, bietet sich eine Partialbruchzerlegung an! Hierbei entstehen $N = n$ Ausdrücke, die prinzipiell Funktionen folgender Art enthalten:

$$\frac{1}{z - p_k}$$

²⁹Allgemein kann man f_i durch Auswertung des Umlaufintegrals

$$f_i = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{f}(z) z^{i-1} dz$$

über einen Kreis mit dem Zentrum $z = 0$ im Konvergenzbereich von $\tilde{f}(z)$ ermitteln. Eine weitere Möglichkeit ist die Anwendung der Taylor-Formel

$$f_i = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i}{dz^i} \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right) \right|_{z=0} \quad .$$

Um den mathematischen Aufwand gering zu halten, verzichten wir hier auf diese Möglichkeiten.

³⁰Diese Voraussetzung ist vom mathematischen Standpunkt aus gesehen nicht notwendig. Sie ist in den meisten praktischen Anwendungen gegeben.

falls p_k eine einfache Polstelle ist, bzw.

$$\frac{1}{(z - p_k)^\nu} \quad \text{mit} \quad L \geq \nu \geq 1$$

falls die Polstelle p_k die Vielfachheit L besitzt. Es liegen folgende Korrespondenzen vor:

$$Z \{a^i\} = \frac{z}{z - a} \quad (3.32)$$

bzw. im allgemeinen Fall mit $M = 1, 2, 3, \dots, i$

$$\frac{1}{M!} \mathcal{Z} \{i(i-1)(i-2)\dots(i-M+1)a^{i-M}\} = \frac{z}{(z-a)^{M+1}} \quad (3.33)$$

Aus diesem Grund erzeugt man die durch z dividierte Funktion $\tilde{f}(z)$

$$\frac{1}{z} \tilde{f}(z) = \frac{1}{z} \frac{\mu(z)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)} =: \frac{\bar{\mu}(z)}{\bar{\nu}(z)}.$$

Sie ist durch den Quotienten der (i.A. teilerfremden) Polynome $\bar{\mu}(z)$ und $\bar{\nu}(z)$ gegeben. Der Quotient $\bar{\mu}(z)/\bar{\nu}(z)$ wird nun einer Partialbruchzerlegung unterworfen. Im Anschluss daran werden die Partialbrüche mit z multipliziert. Man erhält dadurch Ausdrücke (Summanden), die mit Hilfe der Korrespondenzen (3.32) und (3.33) rücktransformiert werden können und damit die gesuchte Originalfolge (f) mit den Elementen f_i liefern. Um diese Vorgehensweise zu verdeutlichen, werden im Folgenden zwei Fälle untersucht.

3.3.1 Fall 1: Das Nennerpolynom $\bar{\nu}(z)$ besitzt *einfache* Nullstellen

In diesem Fall kann die Partialbruchzerlegung von $z^{-1}\tilde{f}(z)$ in der Form

$$\frac{1}{z} \tilde{f}(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - p_k}$$

geschrieben werden. Die $n+1$ Konstanten c_k können - wie bei Anwendungen der Laplace-Transformation - mit Hilfe der Beziehungen

$$c_0 = \tilde{f}(z=0)$$

bzw.

$$c_k = (z - p_k) \frac{1}{z} \tilde{f}(z) \Big|_{z=p_k}$$

berechnet werden. Nach Multiplikation mit z kann $\tilde{f}(z)$

$$\tilde{f}(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \frac{z}{z - p_k}$$

unter Beachtung von (3.6) und (3.10) unmittelbar rücktransformiert werden. Man erhält

$$f_i = c_0 \cdot \delta_i + \sum_{k=1}^n c_k \cdot (p_k)^i.$$

Beispiel: Gesucht ist die Rücktransformierte der Funktion

$$\tilde{f}(z) = \frac{z+2}{(z-2)(z+3)}.$$

Hierzu wird eine Partialbruchzerlegung für $z^{-1}\tilde{f}(z)$ angesetzt:

$$\frac{1}{z}\tilde{f}(z) = \frac{z+2}{z(z-2)(z+3)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z+3}.$$

Die auftretenden Konstanten betragen

$$c_0 = \left. \frac{z+2}{(z-2)(z+3)} \right|_{z=0} = \frac{2}{(-2)(3)} = -\frac{1}{3},$$

$$c_1 = \left. \frac{z+2}{z(z+3)} \right|_{z=2} = \frac{4}{(2)(5)} = \frac{2}{5}$$

und

$$c_2 = \left. \frac{z+2}{z(z-2)} \right|_{z=-3} = \frac{-1}{(-3)(-5)} = -\frac{1}{15}.$$

Damit ergibt sich für $\tilde{f}(z)$

$$\tilde{f}(z) = \frac{z+2}{(z-2)(z+3)} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \frac{z}{z-2} - \frac{1}{15} \frac{z}{z+3}$$

mit der Rücktransformierten

$$f_i = -\frac{1}{3} \cdot \delta_i + \frac{2}{5} \cdot 2^i - \frac{1}{15} \cdot (-3)^i.$$

Beispiel: Es liegt die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \frac{6z^2}{(z-1)(z-2)}$$

vor. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{z}\tilde{f}(z) = \frac{6z}{(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2}$$

mit den Konstanten

$$c_1 = \left. \frac{6z}{z-2} \right|_{z=1} = \frac{6}{1-2} = -6$$

und

$$c_2 = \left. \frac{6z}{z-1} \right|_{z=2} = \frac{12}{2-1} = 12.$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{f}(z) = \frac{6z^2}{(z-1)(z-2)} = -6 \frac{z}{z-1} + 12 \frac{z}{z-2}$$

bzw. unter Beachtung von (3.32) und (3.33)

$$f_i = -6 \cdot (1)^i + 12 \cdot (2)^i = -6 + 12 \cdot 2^i.$$

■

3.3.2 Fall 2: Das Nennerpolynom $\bar{\nu}(z)$ besitzt *mehrfache* Nullstellen

Im Falle mehrfacher Nullstellen wird der Ansatz für die Partialbruchzerlegung modifiziert, die allgemeinen Formeln zur Ermittlung der Koeffizienten sind allerdings schwerfälliger und die Berechnungen komplizierter. Da die Vorgehensweise und die Berechnung der Koeffizienten dieselben sind wie die bei der Laplace-Transformation, verzichten wir darauf diese zu wiederholen und verweisen auf die entsprechenden Ausführungen im vorliegenden Skriptum. Exemplarisch wollen wir nachfolgend ein Beispiel durchrechnen.

Beispiel: Vorgegeben sei die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \frac{2z^2 - 2z}{(z-3)(z-5)^2}.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $z^{-1}\tilde{f}(z)$ lautet

$$\frac{1}{z}\tilde{f}(z) = \frac{2z-2}{(z-3)(z-5)^2} = \frac{c_1}{z-3} + \frac{c_2}{z-5} + \frac{c_3}{(z-5)^2}.$$

Die Koeffizienten c_1 und c_3 können geradlinig anhand folgender einsichtiger Formeln berechnet werden:

$$c_1 = (z-3)z^{-1}\tilde{f}(z)\Big|_{z=3} = \frac{2z-2}{(z-5)^2}\Big|_{z=3} = \frac{6-2}{(3-5)^2} = 1$$

bzw.

$$c_3 = (z-5)^2 z^{-1}\tilde{f}(z)\Big|_{z=5} = \frac{2z-2}{z-3}\Big|_{z=5} = \frac{10-2}{5-3} = 4.$$

Damit erhalten wir für $z^{-1}\tilde{f}(z)$ folgende Identität(!) in z , die den unbekannten Koeffizienten c_2 enthält:

$$\frac{1}{z}\tilde{f}(z) = \frac{2z-2}{(z-3)(z-5)^2} = \frac{1}{z-3} + \frac{c_2}{z-5} + \frac{4}{(z-5)^2}.$$

Durch Umformung erhalten wir

$$\frac{c_2}{z-5} = \frac{2z-2}{(z-3)(z-5)^2} - \frac{1}{z-3} - \frac{4}{(z-5)^2}.$$

Durch *willkürliche* aber *clevere* Wahl eines konkreten Wertes für z - natürlich muss $z \neq 3$ bzw. $z \neq 5$ gelten - erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für c_2 . Die Wahl $z = 1$ ergibt

$$\frac{c_2}{1-5} = \frac{2-2}{(1-3)(1-5)^2} - \frac{1}{1-3} - \frac{4}{(1-5)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

bzw.

$$c_2 = -1 \text{ .}$$

Damit hat $\tilde{f}(z)$ die Form

$$\tilde{f}(z) = \frac{2z^2 - 2z}{(z-3)(z-5)^2} = 1 \frac{z}{z-3} - 1 \frac{z}{z-5} + 4 \frac{z}{(z-5)^2}$$

und die Rücktransformierte

$$\begin{aligned} f_i &= 1 \cdot (3)^i - 1 \cdot (5)^i + 4 \cdot i \cdot (5)^{i-1} \\ &= 3^i - 5^i + 4 \cdot i \cdot 5^{i-1}. \end{aligned}$$

■

Kapitel 4

Lösung linearer Rekursionsgleichungen

4.1 Skalare Rekursionsgleichung 1. Ordnung

Eine lineare (skalare) Rekursionsgleichung 1. Ordnung besitzt die Form

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

Sie stellt eine rekursive Relation zwischen zwei zeitlich *unmittelbar*¹ aufeinander folgenden Werten der Folge (x) dar. Das Problem besteht darin, bei gegebenem Anfangswert x_0 und gegebener Folge (u) die Elemente x_i der Folge (x) zu ermitteln. Die Größen a und b sind hierbei vorgegebene Konstanten.

Dieses Problem ist das zeitdiskrete Analogon zu folgendem, bereits behandelten Problem: gegeben sei eine lineare (skalare) Differentialgleichung 1. Ordnung der Form

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta u \quad \text{mit } 0 \leq t \leq T. \quad (4.2)$$

Bei gegebenem Anfangswert $x(0)$ und vorgegebenem Verlauf $u(t)$ in einem Zeitintervall $[0, T]$ soll die Lösung $x(t)$ ermittelt werden. Die Konstanten α und β sind bekannt. Zur Erinnerung: Die Lösung lautet

$$x(t) = e^{\alpha t} x(0) + \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta u(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

In vielen praktischen Fällen ist allerdings eine Lösung in geschlossener Form erwünscht. Solch eine explizite Darstellung von $x(t)$ kann mit Hilfe der Laplace-Transformation ermittelt werden.

Eine naheliegende Möglichkeit, um zumindest eine *approximative* Lösung zu erhalten, besteht darin, den Differentialquotienten dx/dt für "kleine" Werte Δt zu approximieren

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{für } \Delta t \ll .$$

¹Deswegen spricht man von einer Rekursionsgleichung 1. Ordnung. In der Gleichung sind nur Werte x_i und x_{i+1} enthalten.

Es wird sich gleich zeigen, dass dadurch das "approximative Lösen einer Differentialgleichung" ganz natürlich auf das "Lösen einer Rekursionsgleichung" zurückgeführt wird. Ersetzt man den Differentialquotienten in der Differentialgleichung (4.2) durch obige Approximation, ergibt sich

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \alpha x(t) + \beta u(t)$$

bzw.

$$x(t + \Delta t) = [1 + \alpha \Delta t] \cdot x(t) + [\beta \Delta t] \cdot u(t) .$$

Mit den Abkürzungen

$$a := 1 + \alpha \Delta t \quad \text{und} \quad b := \beta \Delta t$$

erhält man eine Rekursionsgleichung zwischen $x(t + \Delta t)$ und $x(t)$

$$x(t + \Delta t) = ax(t) + bu(t) .$$

Durch Betrachtung zeitdiskreter Werte

$$t_i = i\Delta t \quad \text{mit} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

und der abkürzenden Schreibweise

$$x_i := x(t_i) = x(i\Delta t) \quad \text{und} \quad u_i := u(t_i) = u(i\Delta t)$$

ergibt sich die Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i .$$

4.1.1 Rekursive Ermittlung von x_i

Der Ermittlungsweg von x_i ist im Grunde vorgezeichnet: Ausgehend von einem Wertepaar $[x_0, u_0]$ kann anhand (4.1) der Wert x_1 unmittelbar berechnet werden. Das Paar $[x_1, u_1]$ legt den Wert x_2 fest, das Paar $[x_2, u_2]$ den Wert x_3 usw. Dieses Vorgehen lässt sich symbolisch darstellen:

$$[x_i, u_i] \Rightarrow x_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Der Vorteil einer Rekursionsgleichung (4.1) gegenüber einer Differentialgleichung (4.2) ist offensichtlich. Um die Lösung im ersten Fall zu erhalten, braucht man nur "Multiplizieren" und "Addieren" zu können. Im zweiten Fall müssen wir (leider) auch "Integrieren" beherrschen. Im vorliegenden Fall ergibt das wiederholte Benutzen von (4.1)

$$x_i = a^i \cdot x_0 + a^{i-1}b \cdot u_0 + a^{i-2}b \cdot u_1 + \dots + ab \cdot u_{i-2} + a^0b \cdot u_{i-1} \quad (4.4)$$

bzw.

$$x_i = a^i \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-1-k}b \cdot u_k . \quad (4.5)$$

Diese Beziehung ist das Analogon zu (4.3). Statt eines Faltungs-*Integrals* erscheint (erwartungsgemäß) in der Lösung eine Faltungs-*Summe*.

4.1.2 Ermittlung einer Lösung x_i in expliziter Darstellung

Wir gehen von der Relation (4.1) aus und unterwerfen diese der z -Transformation

$$\mathcal{Z}\{x_{i+1}\} = \mathcal{Z}\{ax_i + bu_i\}.$$

Nach Ausnutzung des 2. Verschiebungssatzes und der Linearität der z -Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} z\mathcal{Z}\{x_i\} - zx_0 &= \mathcal{Z}\{ax_i\} + \mathcal{Z}\{bu_i\} \\ &= a\mathcal{Z}\{x_i\} + b\mathcal{Z}\{u_i\}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist bei bekannter z -Transformierten $\mathcal{Z}\{u_i\}$ eine algebraische Gleichung in $\mathcal{Z}\{x_i\}$. Nach Einführung der (üblichen) Abkürzungen

$$\tilde{x}(z) := \mathcal{Z}\{x_i\} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(z) := \mathcal{Z}\{u_i\}$$

und einer Umsortierung lautet die Bestimmungsgleichung für $\tilde{x}(z)$

$$(z - a)\tilde{x}(z) = zx_0 + b\tilde{u}(z)$$

bzw.

$$\tilde{x}(z) = \frac{z}{z - a}x_0 + \frac{1}{z - a}b\tilde{u}(z). \quad (4.6)$$

Der erste Term in Relation (4.6) ist die z -Transformierte der *freien* Lösung $x_{f,i}$

$$\tilde{x}_f(z) := \mathcal{Z}\{x_{f,i}\} = \frac{z}{z - a}x_0,$$

während der zweite Term in Relation (4.6) die z -Transformierte der *erzwungenen* Lösung $x_{e,i}$ ist

$$\tilde{x}_e(z) := \mathcal{Z}\{x_{e,i}\} = \frac{1}{z - a}b\tilde{u}(z).$$

Die gesuchte Größe x_i ergibt sich durch Rücktransformation von (4.6)

$$x_i = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - a}\right\}x_0 + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z - a}b\tilde{u}(z)\right\} = x_{f,i} + x_{e,i}. \quad (4.7)$$

Unter Beachtung der Korrespondenz

$$x_{f,i} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - a}\right\} = a^i$$

lautet das vorläufige Endergebnis

$$x_i = a^i x_0 + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z - a}b\tilde{u}(z)\right\}. \quad (4.8)$$

Es verbleibt die (i.A. aufwändigere) Rücktransformation des zweiten Terms $\tilde{x}_e(z)$ in (4.8). Diese kann in vielen praktischen Fällen mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erfolgen.

Beispiel ($u_i \triangleq$ diskrete Impulsfunktion): Wir betrachten (4.1) mit

$$u_i = \delta_i.$$

Wie schon gezeigt, gilt

$$\tilde{u}(z) = \mathcal{Z}\{\delta_i\} = 1.$$

Damit erhalten wir gemäß (4.8)

$$x_i = a^i x_0 + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-a} \right\} b. \quad (4.9)$$

Um die Rücktransformierte von

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{z-a}$$

zu berechnen, führen wir die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\frac{1}{z} \tilde{f}(z) = \frac{1}{z(z-a)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-a}$$

durch. Die Konstanten ergeben sich zu

$$c_1 = \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = \frac{1}{-a} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{a}.$$

Damit lautet $\tilde{f}(z)$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{a} \frac{z}{z-a} - \frac{1}{a} 1$$

und kann problemlos rücktransformiert werden

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-a} \right\} = \frac{1}{a} a^i - \frac{1}{a} \delta_i.$$

Setzt man dieses Ergebnis in (4.9) ein, so erhält man die explizite Darstellung von x_i

$$x_i = a^i x_0 + \frac{b}{a} a^i - \frac{b}{a} \delta_i = a^i \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) - \frac{b}{a} \delta_i$$

bzw. für $i \geq 1$

$$x_i = a^i \left(x_0 + \frac{b}{a} \right).$$

Beispiel: Wir betrachten die Rekursionsgleichung (4.1)

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i$$

und wählen

$$u_i = \gamma^i.$$

Hierbei ist γ eine i.A. komplexe Konstante, die von Null verschieden ist. Nach (3.6) lautet die zugehörige z -Transformierte

$$\tilde{u}(z) = \mathcal{Z} \{ \gamma^i \} = \frac{z}{z - \gamma} .$$

Damit erhalten wir nach (4.8)

$$x_i = a^i x_0 + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z - a)(z - \gamma)} \right\} b .$$

Es wird nun *angenommen*, dass für die Konstante γ

$$\gamma \neq a$$

gilt. Dies bedingt, dass bei der anschließenden Partialbruchzerlegung nur einfache Nullstellen des Nennerpolynoms vorliegen. Um die Rücktransformation von

$$\tilde{f}(z) := \frac{z}{(z - a)(z - \gamma)}$$

durchzuführen, bilden wir die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{z} \tilde{f}(z) = \frac{1}{(z - a)(z - \gamma)} = \frac{c_1}{z - a} + \frac{c_2}{z - \gamma}$$

mit

$$c_1 = \frac{1}{z - \gamma} \Big|_{z=a} = \frac{1}{a - \gamma} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{z - a} \Big|_{z=\gamma} = \frac{1}{\gamma - a} .$$

Damit kann $\tilde{f}(z)$ elementar rücktransformiert werden

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{a - \gamma} \left(\frac{z}{z - a} - \frac{z}{z - \gamma} \right) \right\} = \frac{1}{a - \gamma} (a^i - \gamma^i) .$$

Dieses Ergebnis wird in (4.9) eingesetzt, und man erhält die explizite Darstellung der Lösung

$$x_i = a^i x_0 + \frac{b}{a - \gamma} (a^i - \gamma^i)$$

bzw.

$$x_i = a^i \left(x_0 + \frac{b}{a - \gamma} \right) + \frac{b}{\gamma - a} \gamma^i .$$

Führt man die Konstanten

$$C_0 := x_0 + \frac{b}{a - \gamma} \quad \text{und} \quad C := \frac{b}{\gamma - a}$$

ein, so erkennt man die bemerkenswerte Struktur² der Lösung

$$x_i = a^i C_0 + C \gamma^i .$$

²Bedenke: diese Struktur ergibt sich aufgrund der Voraussetzung $a \neq \gamma$!

Das bedeutet: im Fall

$$u_i = \gamma^i \quad \text{mit} \quad \gamma \neq a$$

ergibt sich die Lösung

$$x_i = a^i C_0 + C u_i .$$

Insbesondere für den *speziellen* Anfangswert

$$x_0 = -\frac{b}{a - \gamma} \tag{4.10}$$

lautet die Lösung

$$x_i = C u_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) .$$

Bemerkung: Für den Fall $|a| < 1$ und für eine harmonische Eingangsfolge

$$u_i = (e^{j\omega T_d})^i$$

d.h. für

$$\gamma = e^{j\omega T_d} ,$$

sowie für einen *beliebigen* Anfangswert x_0 strebt x_i für große Werte³ von i gegen die *stationäre*⁴ Lösung ξ_i

$$\xi_i := C u_i = C(e^{j\omega T_d})^i .$$

Diese besondere eigentümliche(!) Lösung ergibt sich auch im Falle, dass die Konstante C_0 den Wert Null annimmt, d.h. für den speziellen Anfangswert nach (4.10)

$$x_0 = -\frac{b}{a - \gamma} .$$

Sie ist in diesem Fall für alle i -Werte gültig!

■

4.2 Lösung einer Rekursionsgleichung höherer Ordnung

Eine (lineare) skalare Rekursionsgleichung⁵ der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$) kann in der Form

$$y_{i+n} + a_{n-1}y_{i+n-1} + a_{n-2}y_{i+n-2} + \dots + a_1y_{i+1} + a_0y_i = v_i$$

geschrieben werden. Hierbei ist (v) eine bekannte Folge mit Elementen v_i ($i = 0, 1, 2, \dots$). In vielen praktischen Anwendungen wird v_i bei vorgegebenen Konstanten $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ durch

$$v_i = b_0u_i + b_1u_{i+1} + b_2u_{i+2} + \dots + b_{n-1}u_{i+n-1}$$

beschrieben, wobei die Werte der Eingangsgröße u_i für $i = 0, 1, 2, \dots$ bekannt sind.

³Mit anderen Worten: nach Abklingen des Einschwingvorgangs.

⁴Das bedeutet:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i - \xi_i) = 0 .$$

⁵Solche rekursive Relationen treten oft in Anwendungen der Signalverarbeitung und der Prozessautomatisierung auf.

4.2.1 Rekursive Ermittlung von y_i

Schreibt man obige Gleichung in

$$y_{i+n} = -a_{n-1}y_{i+n-1} - a_{n-2}y_{i+n-2} - \dots - a_1y_{i+1} - a_0y_i + v_i$$

um, so erkennt man, dass n Anfangsglieder der Folge (y)

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$$

bekannt sein müssen, um eine eindeutige Lösung zu erzielen. Die Ermittlung der Folgenglieder y_i mit $i \geq n$ erfolgt dann rekursiv. Der Berechnungsgang ist offensichtlich:

$$[y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, v_0] \Rightarrow y_n$$

bzw.

$$[y_1, y_2, \dots, y_n, v_1] \Rightarrow y_{n+1}$$

usw.

4.2.2 Explizite Darstellung von y_i für eine Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Zur Ermittlung einer expliziten Darstellung der Lösung y_i wird nun die z -Transformation verwendet. Um die Berechnungen bei den nachfolgenden Ausführungen einfach zu gestalten, befassen wir uns mit einer Rekursionsgleichung 2. Ordnung ($n = 2$). Die Überlegungen sind problemlos auf den allgemeinen Fall übertragbar. Es werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall Es liegt die Rekursionsgleichung

$$y_{i+2} + a_1y_{i+1} + a_0y_i = v_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

mit den vorgegebenen Anfangswerten

$$y_0 \text{ und } y_1 \quad (4.12)$$

und den vorgegebenen Werten v_i vor. Unterwerfen wir diese Gleichung der z -Transformation, so erhalten wir

$$\mathcal{Z}\{y_{i+2} + a_1y_{i+1} + a_0y_i\} = \mathcal{Z}\{v_i\}$$

bzw.

$$\mathcal{Z}\{y_{i+2}\} + a_1\mathcal{Z}\{y_{i+1}\} + a_0\mathcal{Z}\{y_i\} = \mathcal{Z}\{v_i\}.$$

Unter Beachtung des 2. Verschiebungssatzes und Benutzung der üblichen Abkürzungen

$$\mathcal{Z}\{y_i\} =: \tilde{y}(z) \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}\{v_i\} =: \tilde{v}(z)$$

ergibt sich

$$z^2 [\tilde{y}(z) - y_0 - y_1 z^{-1}] + a_1 z [\tilde{y}(z) - y_0] + a_0 \tilde{y}(z) = \tilde{v}(z),$$

$$(z^2 + a_1 z + a_0) \cdot \tilde{y}(z) - [y_0 z(z + a_1) + y_1 z] = \tilde{v}(z)$$

bzw.

$$\tilde{y}(z) = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} [y_0 z(z + a_1) + y_1 z + \tilde{v}(z)] \quad (4.13)$$

bzw.

$$\tilde{y}(z) = z \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} \tilde{v}(z) . \quad (4.14)$$

Daraus folgt für die zugehörige Rücktransformierte

$$y_i = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} \tilde{v}(z) \right\} . \quad (4.15)$$

Der erste Term in (4.14) ist die z -Transformierte der freien Lösung $y_{f,i}$

$$\tilde{y}_f(z) := z \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0} .$$

Sie ist eine gebrochen rationale Funktion in z und enthält die zwei Anfangswerten y_0 und y_1 . Die Rücktransformation kann mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erfolgen. Der zweite Term ist die z -Transformierte der erzwungenen Lösung $y_{e,i}$

$$\tilde{y}_e(z) := \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} \tilde{v}(z)$$

und enthält die z -Transformierte der Größe v_i . Unter der *Voraussetzung*, dass $\tilde{v}(z)$ eine gebrochen rationale Funktion in z ist, kann die Rücktransformierte $y_{e,i}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung berechnet werden. Damit erhalten wir die gesuchte Lösung

$$y_i = \mathcal{Z}^{-1} \{ \tilde{y}_f(z) \} + \mathcal{Z}^{-1} \{ \tilde{y}_e(z) \} = y_{f,i} + y_{e,i} . \quad (4.16)$$

Beispiel: Wir wollen den Fall verschwindender Folge (v) untersuchen. Nach (4.14) liegt

$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}_f(z) = z \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

vor. Unter der Annahme, dass das Nennerpolynom zwei voneinander *verschiedene* Nullstellen z_1 und z_2 besitzt, lautet die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \tilde{y}(z) &= \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= c_1 \frac{1}{z - z_1} + c_2 \frac{1}{z - z_2} . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten lassen sich anhand von

$$c_1 = \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z - z_2} \bigg|_{z=z_1} = \frac{y_0 z_1 + y_0 a_1 + y_1}{z_1 - z_2} = \frac{-y_0 z_2 + y_1}{z_1 - z_2}$$

und

$$c_2 = \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z - z_1} \Big|_{z=z_2} = \frac{y_0 z_2 + y_0 a_1 + y_1}{z_2 - z_1} = \frac{-y_0 z_1 + y_1}{z_2 - z_1}.$$

berechnen⁶. Damit ergibt sich die explizite Darstellung

$$y_i = c_1(z_1)^i + c_2(z_2)^i \quad (4.17)$$

bzw.

$$y_i = \frac{-y_0 z_2 + y_1}{z_1 - z_2} (z_1)^i + \frac{-y_0 z_1 + y_1}{z_2 - z_1} (z_2)^i. \quad (4.18)$$

■

B **Beispiel (Fibonacci⁷-Folge):** Wir wollen den Fall

$$y_{i+2} + a_1 y_{i+1} + a_0 y_i = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

mit

$$a_0 = a_1 = -1$$

und den Anfangswerten

$$y_0 = 0 \quad ; \quad y_1 = 1$$

untersuchen. Das bedeutet: gesucht ist eine explizite Darstellung der (freien) Lösung y_i der Rekursionsgleichung

$$y_{i+2} - y_{i+1} - y_i = 0 \quad (4.19)$$

Nach (4.14) lautet die z -Transformierte der gesuchten (freien) Lösung

$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}_f(z) = z \frac{1}{z^2 - z - 1}.$$

Das Nennerpolynom von $\tilde{y}(z)$ besitzt zwei voneinander *verschiedene* (reelle) Nullstellen z_1 und z_2

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Damit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z} \tilde{y}(z) = c_1 \frac{1}{z - z_1} + c_2 \frac{1}{z - z_2}.$$

Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$c_1 = \frac{1}{z - z_2} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

⁶Hierbei wurde die Relation

$$-a_1 = z_1 + z_2$$

benutzt. Man erkennt ferner, dass falls das Zählerpolynom $y_0 z + y_0 a_1 + y_1$ eine Nullstelle bei z_1 oder z_2 besitzt, eine der beiden Koeffizienten gleich Null ist.

⁷Leonardo da Pisa, gen. Fibonacci (vermutliche Lebensdaten: geb. 1180 in Pisa, gest. 1250 ebendort), bedeutender Mathematiker des Mittelalters.

und

$$c_2 = \frac{1}{z - z_1} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gemäß (4.17) erhalten wir die explizite Darstellung der Lösung

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i. \quad (4.20)$$

Die direkte Anwendung der Rekursionsgleichung (4.19)

$$y_{i+2} = y_{i+1} + y_i \quad \text{mit } y_0 = 0 \ ; \ y_1 = 1$$

ergibt eine Folge mit den nichtnegativen(!) Elementen

$$(y) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots) \ .$$

Diese sogenannte Fibonacci-Folge (y) begegnet uns in diversen Bereichen der Mathematik, der Kunst und der Natur⁸.

Bemerkungen:

1. Die Auswertung von (4.20), die den irrationalen Ausdruck $\sqrt{5}$ enthält, liefert als Ergebnis für y_i immer eine *natürliche* Zahl!
2. Für das Produkt der Nullstellen z_1 und z_2 gilt

$$z_1 z_2 = -1 \ .$$

Damit kann die Lösung y_i gemäß (4.20) mit Hilfe der Größe z_1

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(z_1)^i - \frac{1}{(-z_1)^i} \right]$$

dargestellt werden. Nachdem z_1 die Ungleichung

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

erfüllt, gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{(z_1)^i} = 0 \ .$$

Demnach gilt für große Werte von i näherungsweise

$$y_i \approx \frac{1}{\sqrt{5}} (z_1)^i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i.$$

⁸Siehe z.B. Christian HESSE: *Mathematisches Sammelurium*; Kap. 8 Bienenahnenforschung bzw. Kristina REISS & Gerald SCHMIEDER: *Basiswissen Zahlentheorie*; Kap. 2.3.4 Kaninchenaufgabe.

Das bedeutet, dass für große Werte von i der Quotient zweier aufeinander folgender Elemente der Folge (y) näherungsweise

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} \approx \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

beträgt⁹.

3. (*optional*) Das letzte Ergebnis kann auch *ohne* Kenntnis der expliziten Darstellung von y_i mit Hilfe der Rekursionsgleichung (4.19)

$$y_{i+2} - y_{i+1} - y_i = 0$$

erarbeitet werden. Nach Division durch y_{i+1} folgt

$$\frac{y_{i+2}}{y_{i+1}} - 1 - \frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{y_{i+2}}{y_{i+1}} - 1 - \frac{1}{\frac{y_{i+1}}{y_i}} = 0 .$$

Man führt nun die Größe

$$\varphi_i := \frac{y_{i+1}}{y_i}$$

ein und erhält die (nichtlineare) Rekursionsgleichung

$$\varphi_{i+1} - 1 - \frac{1}{\varphi_i} = 0 .$$

Unter der Annahme, dass der Grenzwert

$$\varphi := \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i$$

existiert, lautet seine Bestimmungsgleichung

$$\varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0$$

bzw.

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Damit ist der Grenzwert φ die positive Lösung

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

■

⁹Das ist das Verhältnis des sogenannten *goldenen Schnittes*. Es ist eine Proportion, die dem natürlichen Wachstum in der Natur entspricht. Ferner wird sie von den Menschen als ausgewogen und ästhetisch wahrgenommen.

2. Fall Es liegt die Rekursionsgleichung

$$y_{i+2} + a_1 y_{i+1} + a_0 y_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.21)$$

mit den Anfangswerten y_0 und y_1 und der Eingangsgröße u_i vor. Sie hat die Struktur (4.11) mit

$$v_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} .$$

Unterwerfen wir (4.21) der z -Transformation, so ergibt sich

$$\mathcal{Z} \{y_{i+2} + a_1 y_{i+1} + a_0 y_i\} = \mathcal{Z} \{b_0 u_i + b_1 u_{i+1}\} .$$

Da die linke Seite obiger Gleichung die gleiche wie im vorhin behandelten 1.Fall ist, untersuchen wir die rechte Seite:

$$\mathcal{Z} \{b_0 u_i + b_1 u_{i+1}\} = b_0 \tilde{u}(z) + b_1 z [\tilde{u}(z) - u_0] = (b_0 + b_1 z) \tilde{u}(z) - u_0 b_1 z .$$

Unter Beachtung von (4.13) erhalten wir

$$\tilde{y}(z) = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_0} [(y_0 z + y_0 a_1 + y_1) z - u_0 b_1 z + (b_0 + b_1 z) \tilde{u}(z)] .$$

Mit Hilfe der z -Transformierten der freien Lösung $y_{f,i}$

$$\tilde{y}_f(z) := z \frac{y_0 z + y_0 a_1 + y_1}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

und der z -Transformierten der erzwungenen Lösung $y_{e,i}$

$$\tilde{y}_e(z) := -z \frac{u_0 b_1}{z^2 + a_1 z + a_0} + \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \tilde{u}(z)$$

erhalten wir

$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}_f(z) + \tilde{y}_e(z)$$

Dieser Ausdruck kann in gewohnter Weise rücktransformiert werden, falls $\tilde{u}(z)$ eine gebrochen rationale Funktion in z ist.

4.3 Vektorielle Rekursionsgleichung 1. Ordnung

Hierzu betrachten wir n Zahlenfolgen (x_k) mit $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(x_k) = (x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}, \dots) .$$

Wir fassen diese Folgen zusammen

$$\begin{bmatrix} (x_1) \\ (x_2) \\ (x_3) \\ \dots \\ (x_n) \end{bmatrix}$$

und bezeichnen mit $\mathbf{x}_i$ den n -dimensionalen Vektor, der die jeweils i -ten Elemente $x_{k,i}$ der betrachteten Folgen als Komponenten besitzt, d.h.

$$\mathbf{x}_i := \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ \dots \\ x_{n,i} \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir eine Vektorfolge $(\mathbf{x})$. Unter einer (vektoriellen) linearen Rekursionsgleichung 1. Ordnung verstehen wir eine Relation mit der Struktur:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}u_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

Hierbei sind die Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ vorgegebene Konstanten. Der Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und die Eingangsfolge

$$(u) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$$

sind ebenfalls bekannt. Das Problem besteht darin, die Elemente $\mathbf{x}_i$ der Folge $(\mathbf{x})$ zu berechnen.

Rekursive Ermittlung der Lösung $\mathbf{x}_i$

Die Überlegungen und das Vorgehen bei der rekursiven Ermittlung sind *identisch* mit denjenigen im skalaren Fall (4.1)

$$[\mathbf{x}_i, u_i] \Rightarrow \mathbf{x}_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und ergeben im vektoriellen Fall das Analogon der Relation (4.5)

$$x_i = a^i \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} a^{i-1-k} b \cdot u_k ,$$

nämlich

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{i-1-k} \mathbf{b} \cdot u_k . \quad (4.23)$$

Die *freie* Lösung wird durch

$$\mathbf{x}_{f,i} := \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{x}_0 , \quad (4.24)$$

während die *erzwungene* Lösung durch

$$\mathbf{x}_{e,i} := \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}^{i-1-k} \mathbf{b} \cdot u_k \quad (4.25)$$

beschrieben wird.

4.3.1 Ermittlung der Lösung $\mathbf{x}_i$ in expliziter Darstellung

Die Ermittlung einer Lösung in geschlossener Form verläuft nun in analoger, aber mühevollerer(!) Weise. Wir gehen von (4.22) aus und unterwerfen diese Relation der z -Transformation. Nach Einführung der (vektoriellen) Größe

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\} := \begin{pmatrix} \mathcal{Z}\{x_{1,i}\} \\ \mathcal{Z}\{x_{2,i}\} \\ \mathcal{Z}\{x_{3,i}\} \\ \dots \\ \mathcal{Z}\{x_{n,i}\} \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_{i+1}\} = \mathcal{Z}\{\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}u_i\}.$$

Aufgrund des 2. Verschiebungssatzes und der Linearität der z -Transformation ergibt sich eine algebraische Gleichung in $\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\}$:

$$z\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\} - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\} + \mathbf{b}\mathcal{Z}\{u_i\}.$$

Nach Einführung der Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) := \mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(z) := \mathcal{Z}\{u_i\}$$

und einer Umsortierung lautet die Bestimmungsgleichung (lineares Gleichungssystem) in $\tilde{\mathbf{x}}(z)$ in Abhängigkeit von $\tilde{u}(z)$

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}(z) = z\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\tilde{u}(z). \quad (4.26)$$

Nach Multiplikation von links(!) mit $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z \cdot \mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\cdot\tilde{u}(z). \quad (4.27)$$

Unter Benutzung der freien bzw. erzwungenen Lösung gemäß (4.24) bzw. (4.25) erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{x}}_f(z) := (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z \cdot \mathbf{x}_0 \quad (4.28)$$

und

$$\tilde{\mathbf{x}}_e(z) := (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\cdot\tilde{u}(z). \quad (4.29)$$

Unter Benutzung von

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\tilde{\mathbf{x}}(z)\} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^{-1}\{x_{1,i}\} \\ \mathcal{Z}^{-1}\{x_{2,i}\} \\ \mathcal{Z}^{-1}\{x_{3,i}\} \\ \dots \\ \mathcal{Z}^{-1}\{x_{n,i}\} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_i$$

bekommen wir bei der Rücktransformation

$$\mathbf{x}_i = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z\} \mathbf{x}_0 + \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\tilde{u}(z)\}. \quad (4.30)$$

Um den zu erwartenden Aufwand bei der Rücktransformation abzuschätzen, analysieren wir die Struktur der Funktion $\tilde{\mathbf{x}}(z)$ gemäß (4.27).

- Der erste Term - die freie Lösung - enthält die sogenannte Resolvente der Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, z) := (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Diese ergibt sich mit Hilfe der Adjunkten $\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})$ zu

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Hierbei ist $\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ein monisches(!) Matrixpolynom der Variablen z

$$\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 z + \mathbf{F}_2 z^2 + \dots + \mathbf{F}_{n-2} z^{n-2} + \mathbf{E} z^{n-1},$$

dessen Koeffizienten $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{n-2}$ konstante (n, n) -Matrizen sind. Das bedeutet, jedes Element der Resolventen $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ ist eine gebrochen rationale Funktion in z . Eine Rücktransformation dieses Ausdruckes stellt keine große Hürde dar, da sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erfolgen kann.

- Der zweite Term - die erzwungene Lösung - enthält u.A. die z -Transformierte $\tilde{u}(z)$, die - theoretisch - beliebig kompliziert sein kann. In vielen praktischen Anwendungen ist $\tilde{u}(z)$ erfreulicherweise eine gebrochen rationale Funktion in z . Unter dieser *Annahme* kann die Rücktransformation des zweiten Terms mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erfolgen.

Beispiel: Wir betrachten die Rekursionsgleichung nach (4.22)

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}u_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

mit verschwindender Eingangsgröße $u_i = 0$, vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ sowie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen eine explizite Darstellung der (freien) Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \right\} \cdot \mathbf{x}_0 \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{z} \right)^{-1} \right\} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

berechnen¹⁰.

Das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} z-2 & -1 \\ -4 & z-2 \end{vmatrix} = (z-2)^2 - 4 \\ &= [(z-2) + 2][(z-2) - 2] = z(z-4) \end{aligned}$$

¹⁰Wir suchen also eine *explizite* Darstellung der Matrixpotenz $\mathbf{A}^i$.

und besitzt die Nullstellen $z_1 = 0$ und $z_2 = 4$. Die Partialbruchzerlegung der Resolventen $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ lautet dann

$$\begin{aligned}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{C}_1 \frac{1}{z - z_1} + \mathbf{C}_2 \frac{1}{z - z_2} \\ &= \mathbf{C}_1 \frac{1}{z} + \mathbf{C}_2 \frac{1}{z - 4} .\end{aligned}$$

Die Koeffizienten - in diesem Fall die konstante Matrizen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ - ergeben sich wie üblich aus

$$\mathbf{C}_1 = z(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \Big|_{z=0} = \frac{1}{z - 4} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Big|_{z=0}$$

und

$$\mathbf{C}_2 = (z - 4)(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \Big|_{z=4} = \frac{1}{z} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Big|_{z=4} .$$

Mit der Adjunkten

$$\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} z - 2 & 1 \\ 4 & z - 2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Konstanten

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{0 - 4} \begin{pmatrix} 0 - 2 & 1 \\ 4 & 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 - 2 & 1 \\ 4 & 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} .$$

Aufgrund der Partialbruchdarstellung von $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z$

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \frac{z}{z - 4}$$

ergibt sich die Rücktransformierte

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^i &= \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z \} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \delta_i + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot 4^i \quad i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbf{A}^i = \begin{cases} \mathbf{E} & i = 0 \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot 4^i & i \geq 1 \end{cases}$$

Damit lautet die gesuchte explizite Darstellung der freien Lösung für $i \geq 1$

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot 4^i \cdot \mathbf{x}_0 .$$

■ **Beispiel:** Wir betrachten die Rekursionsgleichung

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_i \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots$$

und suchen bei vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ eine explizite Darstellung der (freien) Lösung

$$\mathbf{x}_i = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z \} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{x}_0 .$$

Das charakteristische Polynom $\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{vmatrix} = z^2 + 3z + 2 \\ &= (z+1)(z+2) \end{aligned}$$

und besitzt die Nullstellen $z_1 = -1$ und $z_2 = -2$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ lautet

$$\begin{aligned} (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{C}_1 \frac{1}{z+1} + \mathbf{C}_2 \frac{1}{z+2} . \end{aligned}$$

Die Matrizen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ ergeben sich aus den Beziehungen

$$\mathbf{C}_1 = (z+1)(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{z+2} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Big|_{z=-1}$$

und

$$\mathbf{C}_2 = (z+2)(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \Big|_{z=-2} = \frac{1}{z+1} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \Big|_{z=-2} .$$

Mit der Adjunkten

$$\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{pmatrix}$$

lauten die Konstanten

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{-1+2} \begin{pmatrix} -1+3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{-2+1} \begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir für $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z$ die Darstellung

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \frac{z}{z+1} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{z}{z+2} ,$$

aus der die Rücktransformierte

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} (-1)^i + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (-2)^i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

gewonnen wird. Damit erhaltenen wir die freie Lösung in expliziter Darstellung

$$\mathbf{x}_i = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} (-1)^i + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (-2)^i \right] \cdot \mathbf{x}_0$$

■

4.4 Äquivalenz von Rekursionsgleichungen (optional)

Wir gehen von einer (vektoriellen) linearen Rekursionsgleichung 1. Ordnung mit folgender Struktur

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}u_i \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

und konstanten Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ sowie der Eingangsfolge

$$(u) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$$

aus. *Zur Erinnerung:* Ausgehend von n Zahlenfolgen (x_k)

$$(x_k) = (x_{k,0}, x_{k,1}, x_{k,2}, \dots)$$

wird der n -dimensionale Vektor $\mathbf{x}_i$ gebildet, der jeweils die i -ten Elemente der Folgen (x_k) als Komponenten besitzt:

$$\mathbf{x}_i := \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ \dots \\ x_{n,i} \end{pmatrix}.$$

Zur Ermittlung einer expliziten Lösung wird obige Rekursionsgleichung der z -Transformation unterworfen. Unter Benutzung der üblichen Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{x}_i\} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(z) = \mathcal{Z}\{u_i\}$$

ergibt sich dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\tilde{u}(z). \quad (4.31)$$

In vielen technischen Anwendungen ist man an einer *Linearkombination*

$$y_i = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$$

der einzelnen Folgen (x_k) interessiert. Hierbei ist $\mathbf{c}^T$ ein konstanter Zeilenvektor

$$\mathbf{c}^T = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n).$$

Oder man interessiert sich nur für eine einzige Folge, z.B. die k -te Folge (x_k). Im letzten Fall ist $\mathbf{c}^T$ der sogenannte Einheitsvektor k -ter Ordnung. Das ist ein Vektor, dessen Elemente alle gleich Null sind, abgesehen vom k -ten Element, das gleich Eins ist

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} .$$

Die skalare Relation für die z -Transformierte $\mathcal{Z}\{y_i\}$ lautet dann:

$$\mathcal{Z}\{y_i\} = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \tilde{u}(z).$$

Es stellt sich nun folgende **Frage**: welche *rekursive* Relation besteht zwischen den Elementen y_i der sogenannten Ausgangsfolge (y) und den Elementen u_i der Eingangsfolge (u)? Zur Beantwortung dieser Frage setzt man den Anfangswert $\mathbf{x}_0$ zunächst gleich Null und erhält

$$\tilde{y}(z) := \mathcal{Z}\{y_i\} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \tilde{u}(z).$$

Unter Beachtung von

$$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}),$$

lautet $\tilde{y}(z)$

$$\tilde{y}(z) = \frac{\mathbf{c}^T \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b}}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \tilde{u}(z).$$

Aufgrund der Tatsachen, dass das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$ durch

$$\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

gegeben ist und der Ausdruck $\mathbf{c}^T \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b}$ ein Polynom $\mu(z)$ mit dem Grad $m \leq n-1$

$$\mu(z) := \mathbf{c}^T \text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m$$

ist, ergibt sich

$$\tilde{y}(z) = \frac{\mu(z)}{\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A})} \tilde{u}(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \tilde{u}(z). \quad (4.32)$$

Daraus folgt

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n) \cdot \tilde{y}(z) = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m) \cdot \tilde{u}(z) .$$

Unter Ausnutzung des 2. Verschiebungssatzes erhalten wir eine Rekursionsgleichung n -ter Ordnung

$$y_{i+n} + a_{n-1} y_{i+n-1} + \dots + a_1 y_{i+1} + a_0 y_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} + \dots + b_m u_{i+m} , \quad (4.33)$$

die den Zusammenhang zwischen den Elementen der Folgen (y) und (u) angibt. Die Anfangswerte sind hierbei gleich Null

$$y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0 .$$

Es ist zu bemerken, dass u.U. bei der gebrochen rationalen Funktion (vgl. Relation (4.32))

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}$$

Zähler- und Nennerpolynom gemeinsame Nullstellen aufweisen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die sogenannte *Resultante*¹¹ dieser zwei Polynome gleich Null ist. In solch einem Fall erniedrigt sich nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren die Ordnung der Rekursionsgleichung. Bei den nachfolgenden Ausführungen brauchen wir allerdings *nicht* zu überprüfen, ob solch ein Kürzungs-Effekt vorliegt!

Wir betrachten nun die zwei rekursiven Schemata:

- die vektorielle Rekursionsgleichung 1. Ordnung für $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}u_i \quad ; \quad y_i = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_i \quad (4.34)$$

mit dem n -dimensionalen Vektor $\mathbf{x}_i$, der (skalaren) Eingangsgröße u_i und der (skalaren) Ausgangsgröße y_i sowie

- die skalare Rekursionsgleichung n -ter Ordnung (4.33) mit $m = n - 1$

$$y_{i+n} + a_{n-1}y_{i+n-1} + \dots + a_1y_{i+1} + a_0y_i = b_0u_i + b_1u_{i+1} + \dots + b_{n-1}u_{i+n-1} \quad (4.35)$$

und stellen die Frage nach der *Gleichwertigkeit* dieser Schemata.

Präziser formuliert lautet die **Aufgabenstellung**: Durch Vorgabe der n Anfangswerte $[y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$ und der Folge (u) ergibt sich eindeutig anhand (4.35) eine Folge (y) . Durch Vorgabe des n -dimensionalen Anfangsvektors $\mathbf{x}_0$ und der Folge (u) ergibt sich eindeutig anhand (4.34) eine Folge (y) . Existieren Schemata (4.34) und (4.35) sowie eine von der Folge (u) abhängige *umkehrbar eindeutige* Zuordnung zwischen $\mathbf{x}_0$ und den Werten $[y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$, so dass sich in beiden Fällen *die gleiche* Folge (y) ergibt?

Zur Beantwortung dieser Frage und zum besseren Verständnis des Lösungsweges behandeln wir zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Anschließend wird die Lösung des allgemeinen Falles angegeben.

4.4.1 Der Fall $n = 2$

Wir gehen von einer Rekursionsgleichung 2. Ordnung

$$y_{i+2} + a_1y_{i+1} + a_0y_i = b_0u_i + b_1u_{i+1} \quad (4.36)$$

mit den Anfangswerten y_0 und y_1 aus. Diese Gleichung schreiben wir folgendermaßen um

$$y_{i+2} + a_1y_{i+1} = (-a_0y_i + b_0u_i) + b_1u_{i+1}. \quad (4.37)$$

¹¹Der Wert der Resultanten ergibt sich durch Auswertung einer $(n + m)$ -reihigen Determinanten. Deren Elemente werden aus den Polynomkoeffizienten gebildet. Siehe z.B.: Stephen BARNETT *Matrices in Control Theory*; Kap. 2; 1971, Van Nostrand Reinhold Company London.

Wir führen eine neue Größe ξ_{i+1} gemäß

$$\xi_{i+1} := -a_0 y_i + b_0 u_i \quad (4.38)$$

ein. Gemäß Rekursionsgleichung (4.38) sind die Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ wohldefiniert. Durch die clevere(!) Einführung der neuen Größe wurde allerdings die Rekursionsgleichung 2. Ordnung (4.37) in eine 1. Ordnung

$$y_{i+2} + a_1 y_{i+1} = \xi_{i+1} + b_1 u_{i+1}$$

umgewandelt! Anhand der letzten Gleichung sind die Werte $y_2, y_3, y_4, \dots$ ebenfalls wohldefiniert. Indem man die Indizierung um Eins erniedrigt entsteht eine rekursive Relation

$$y_{i+1} = \xi_i - a_1 y_i + b_1 u_i. \quad (4.39)$$

Hierbei ergibt sich für $i = 0$

$$y_1 = \xi_0 - a_1 y_0 + b_1 u_0.$$

Diese Relation enthält die noch undefinierte(!) Größe ξ_0 und dient deren konsistenter Festlegung mit Hilfe vorgegebener Größen:

$$\xi_0 = a_1 y_0 + y_1 - b_1 u_0. \quad (4.40)$$

Wir fassen nun die zwei skalaren Rekursionsgleichungen 1. Ordnung (4.38) und (4.39) zusammen und erhalten eine *vektorielle* Rekursionsgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \xi_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} u_i.$$

Indem wir formal die Größe

$$\psi_i := y_i \quad (4.41)$$

einführen, entsteht das rekursive Schema

$$\begin{pmatrix} \xi_{i+1} \\ \psi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} u_i. \quad (4.42)$$

$$y_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Anfangswert ergibt sich bei vorliegender Eingangsfolge (u) in umkehrbar *eindeutiger* Weise aus den Anfangswerten y_0 und y_1 anhand der Beziehung¹²

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u_0. \quad (4.44)$$

¹²Man beachte, die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist regulär, da deren Determinante verschieden von Null ist.

Diese Beschreibung liefert exakt die gleiche Lösung y_i wie die Rekursionsgleichung 2. Ordnung (4.36)!

Umgekehrt entsteht aus (4.42) und (4.43) die Rekursionsgleichung 2. Ordnung (4.36), indem man die Größe ξ_i eliminiert. Wählt man deren Anfangswerte mit Hilfe von (4.44)

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u_0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} u_0, \quad (4.45)$$

so liefert die Rekursionsgleichung 2. Ordnung das gleiche Ergebnis wie die vektorielle Rekursionsgleichung 1. Ordnung gemäß (4.42) und (4.43)!

4.4.2 Der Fall $n = 3$

Wir betrachten die Rekursionsgleichung 3. Ordnung

$$y_{i+3} + a_2 y_{i+2} + a_1 y_{i+1} + a_0 y_i = b_0 u_i + b_1 u_{i+1} + b_2 u_{i+2} \quad (4.46)$$

mit den vorgegebenen Anfangswerten y_0 , y_1 und y_2 . Diese Gleichung schreiben wir folgendermaßen um

$$y_{i+3} + a_2 y_{i+2} + a_1 y_{i+1} = (-a_0 y_i + b_0 u_i) + b_1 u_{i+1} + b_2 u_{i+2} \quad (4.47)$$

und führen eine neue Größe ξ_{i+1} gemäß

$$\xi_{i+1} := -a_0 y_i + b_0 u_i \quad (4.48)$$

ein. Die Auswertung der Rekursionsgleichung (4.48) ergibt wohldefinierte Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$. Durch Verwendung der neuen Größe schreiben wir (4.47) um. Es ergibt sich die rekursive Relation 2. Ordnung

$$y_{i+3} + a_2 y_{i+2} + a_1 y_{i+1} = \xi_{i+1} + b_1 u_{i+1} + b_2 u_{i+2} .$$

Erniedrigt man die Indizierung um Eins, so entsteht die Relation

$$y_{i+2} + a_2 y_{i+1} + a_1 y_i = \xi_i + b_1 u_i + b_2 u_{i+1}. \quad (4.49)$$

Deren Auswertung für $i = 0$ ergibt

$$y_2 + a_2 y_1 + a_1 y_0 = \xi_0 + b_1 u_0 + b_2 u_1$$

und dient dazu, den Anfangswert ξ_0 festzulegen:

$$\xi_0 = y_2 + a_2 y_1 + a_1 y_0 - (b_1 u_0 + b_2 u_1). \quad (4.50)$$

Wir formen nun die Rekursionsgleichung 2. Ordnung (4.49) um

$$y_{i+2} + a_2 y_{i+1} = (-a_1 y_i + \xi_i + b_1 u_i) + b_2 u_{i+1}$$

und führen eine neue Größe φ_{i+1}

$$\varphi_{i+1} := -a_1 y_i + \xi_i + b_1 u_i \quad (4.51)$$

ein. Jetzt liegt die rekursive Relation 1. Ordnung

$$y_{i+2} + a_2 y_{i+1} = \varphi_{i+1} + b_2 u_{i+1}$$

vor. Nach einer Index-Reduktion um eins erhält man

$$y_{i+1} + a_2 y_i = \varphi_i + b_2 u_i . \quad (4.52)$$

Deren Auswertung für $i = 0$ liefert die Gleichung

$$y_1 + a_2 y_0 = \varphi_0 + b_2 u_0 ,$$

mit deren Hilfe die Größe φ_0

$$\varphi_0 = a_2 y_0 + y_1 - b_2 u_0 \quad (4.53)$$

festgelegt wird. Führt man formal die Größe

$$\psi_i := y_i \quad (4.54)$$

ein, so können die Relationen (4.48), (4.51), (4.52) und (4.54) in Matrixschreibweise kompakt dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \xi_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \\ \psi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u_i \quad (4.55)$$

$$y_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Der vektorielle Anfangswert gemäß (4.50), (4.53) und (4.54) lautet

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Er ist umkehrbar eindeutig¹³ den Anfangswerten y_0 , y_1 , und y_2 zugeordnet.

Umgekehrt erhält man nach Elimination der eingeführten Größen ξ_i und φ_i und unter Benutzung der Gleichungen (4.54) und (4.57) die rekursive Relation (4.46)!

¹³Man beachte, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Dreiecksgestalt besitzt. Sie ist immer regulär, da deren Determinante betragsmäßig gleich Eins ist.

4.4.3 Verallgemeinerung der Ergebnisse (ohne Beweis)

Die zwei rekursiven Schemata (mit $i = 0, 1, 2, 3, \dots$)

- die skalare Rekursionsgleichung der Ordnung n mit der (skalaren) Eingangsfolge (u) und der (skalaren) Ausgangsfolge (y)

$$y_{i+n} + a_{n-1}y_{i+n-1} + \dots + a_1y_{i+1} + a_0y_i = b_0u_i + b_1u_{i+1} + \dots + b_{n-1}u_{i+n-1}$$

- die vektorielle Rekursionsgleichung 1. Ordnung mit der n -dimensionalen Vektorfolge ($\mathbf{x}$), der (skalaren) Eingangsfolge (u) sowie der (skalaren) Ausgangsfolge (y)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u_i \\ y_i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

sind unter der Voraussetzung, dass zwischen den jeweiligen Anfangswerten die Beziehung

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

gilt, äquivalent!

Kapitel 5

Korrespondenztabellen

5.1 Kausale Funktionen $f(t)$

$f(t)$ mit $t \geq 0$	$\tilde{f}(s)$
$\sigma(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
e^{at} (a komplex)	$\frac{1}{s - a}$
te^{at} (a komplex)	$\frac{1}{(s - a)^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{at}$ (a komplex)	$\frac{1}{(s - a)^3}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$ (a komplex)	$\frac{(s - a)}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$ (a komplex)	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

5.2 Kausale Folgen (f)

f_i ($i = 0, 1, 2, \dots$)	$\tilde{f}(z)$
$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	1
$\sigma_i = 1$	$z \cdot \frac{1}{z-1}$
i	$z \cdot \frac{1}{(z-1)^2}$
i^2	$z \cdot \frac{z+1}{(z-1)^3}$
a^i (a i.A. komplex)	$z \cdot \frac{1}{z-a}$
ia^{i-1}	$z \cdot \frac{1}{(z-a)^2}$
i^2a^{i-1}	$z \cdot \frac{z+a}{(z-a)^3}$
$\cos i\omega T_d$	$z \cdot \frac{z - \cos \omega T_d}{z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1}$
$\sin i\omega T_d$	$z \cdot \frac{\sin \omega T_d}{z^2 - 2z \cos \omega T_d + 1}$
$a^i \cos i\omega T_d$	$z \cdot \frac{z - a \cos \omega T_d}{z^2 - 2za \cos \omega T_d + a^2}$
$a^i \sin i\omega T_d$	$z \cdot \frac{a \sin \omega T_d}{z^2 - 2za \cos \omega T_d + a^2}$

Kapitel 6

Literatur

- Mathematische Grundlagen
- **Konrad KNOPP**: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 1947, Springer Verlag
- **Konrad KNOPP**: *Elemente der Funktionentheorie*. 1978, Walter de Gruyter
- **Detlef LAUGWITZ**: *Ingenieurmathematik V (komplexe Veränderliche)*. 1965, Band 93 B.I. Hochschultaschenbücher
- **Reinhold REMMERT**: *Funktionentheorie I*. 1984, Springer-Verlag
- Signaltransformationen
- **Heinz DOBESCH & Hannelore SULANKE**: *Zeitfunktionen, Theorie und Anwendung*. 1961, VEB Verlag Technik Berlin
- **Gustav DOETSCH**: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation*. 1985, R. Oldenbourg
- **Otto FÖLLINGER**: *Laplace-, Fourier-, und z-Transformation*. 2007, Hüthig Verlag
- Systemtechnische Grundlagen
- **Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS**: *Regelungstechnik*. 2004, Pearson Verlag München
- **Athanasios PAPOULIS**: *Circuits and Systems (A Modern Approach)*. 1980, Holt-Saunders