Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

REGELUNGSTHEORIE AK 1

Ermittlung von Zustandregelgesetzen mit Hilfe von Links – Eigenvektoren der Systemmatrix

Richard Seeber, Heinico Dourdoumas

3. Version vom 15. August 2022 (1. Version 9.7.2015)

Inhaltsverzeichnis

1 Entwurf eines Zustandsreglers 5
1.1 Verschiebung eines einzigen reellen Eigenwertes 8
1.1.1 Betrachtung im Zeitbereich 8
1.1.2 Betrachtung im Frequenzbereich 9
1.1.3 Links-Eigenvektoren der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des Regelkreises 9
1.1.4 Ermittlung des Stellgrößenverlaufs $u(t)$ 10
1.2 Verschiebung von zwei bzw. $k \leq n$ Eigenwerten 11
1.2.1 Betrachtung im Zeitbereich 11
1.2.2 Betrachtung im Frequenzbereich 12
1.2.3 Verallgemeinerung der Ergebnisse 13
1.3 Bemerkungen zur numerischen Berechnung eines Zustandsreglers 16
1.3.1 Unitäre Transformationen 16
1.3.2 Auswirkungen eines Regelgesetzes 17
1.3.3 Der Algorithmus von Varga 18
1.4 Anwendungen 19
1.4.1 Entwurf eines Zustandsreglers mit I-Anteil 19

Kapitel 1

Entwurf eines Zustandsreglers

Wir betrachten ein lineares und zeitinvariantes System (abgekürzt "LZI- System")

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{1.1}$$

mit dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der skalaren Eingangsgröße u und dem charakteristischen Polynom $\Delta(s) := \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)$. Durch den Einsatz des (konstanten) Regelgesetzes[1]

$$u = -\mathbf{h}^T\mathbf{x} \tag{1.2}$$

entsteht ein Regelkreis

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)\mathbf{x}$$

mit der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T$. Diese soll *beliebig* vorzugebende Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n aufweisen. Zur Erinnerung: für eine beliebige Wahl der Größen λ_i existiert der gesuchte Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ *genau dann*, wenn das System (1.1) steuerbar ist[2].

Führt man das sogenannte Wunschpolynom $w(s) := \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$ ein, so soll das charakteristische Polynom der Systemmatrix des Regelkreises $\det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}})$ folgende Identität in s erfüllen:

$$\det\left[s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)\right] = w(s)\ . \tag{1.3}$$

Ausgehend von diesem Wunsch kann der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ auf verschiedenartigen Wegen ermittelt werden. Üblicherweise stehen im Vordergrund Methoden, die im *Zeitbereich*

[1] Es war Richard Bellman, Mitte der 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts, der diese fundamentale Idee der Regelungstheorie - die Ermittlung der Eingangsgrößen mit Hilfe des Zustands und damit der *Rückkopplung* - akzentuiert hat! Siehe hierzu R.E.KALMAN, P.L.FALB, M.A.ARBIB *"Topics in mathematical System Theory"*, McGraw-Hill Book Company, 1969

[2] Dieser Satz wurde zuerst von J.E. BERTRAM im Jahre 1959 mit Hilfe der klassischen Wurzelortmethode bewiesen. In den nachfolgenden Jahren wurde er mehrmals "wiederentdeckt" und mit Hilfe der linearen Algebra gezeigt.

formuliert sind und auf raffinierten algebraischen Theoremen basieren. Die Ermittlung des Zustandsreglers $\mathbf{h}^T$ im Eingrößenfall erfolgt - nach durchaus nicht trivial vorzugebenden gewünschten Eigenwerten - mechanisch anhand gewisser Algorithmen (zBsp mit Hilfe der "Formel von Ackermann" oder durch Transformation des Systems auf die sogenannte Regelungsnormalform), wobei meistens die Einsicht (das Verstehen) in die Resultate für den Anwender mangelhaft ist[3].

Im Gegensatz hierzu erlauben klassische Frequenzkennlinien-Verfahren eine Einsicht, sind allerdings schwerfälliger und schwieriger bei der Anwendung[4]. Hierbei ist allerdings bemerkenswert, dass der Zustandsreglerentwurf auch im *Frequenzbereich* gedeutet und erfolgen kann[5]. Dies ermöglicht u.A. Vergleiche mit klassischen Verfahren der Reglersynthese im Frequenzbereich. Hierzu formen wir die linke Seite obiger Relation (1.3) folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \det\left[s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)\right] &= \det\left\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\left[\mathbf{E} + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\mathbf{h}^T\right]\right\} \\ &= \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \det\left[\mathbf{E} + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\mathbf{h}^T\right] \\ &= \Delta(s) \cdot \left[1 + \mathbf{h}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\right] \; . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Verwendung der Übertragungsfunktion $L(s)$ des *offenen* Zustands-Regelkreises folgende Gleichung im *Frequenzbereich* für den Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$

$$L(s) := \mathbf{h}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{w(s)}{\Delta(s)} - 1. \tag{1.4}$$

Es geht nun darum, durch Wahl von $\mathbf{h}$ die durch die Polynome $w(s)$ und $\Delta(s)$ festgelegte (gewünschte) Übertragungsfunktion $L(s)$ zu erzeugen.

Um den Einfluß von $\mathbf{h}$ auf $L(s)$ besser zu verstehen, verwenden wir die *kanonische* Darstellung[6] der Resolventen der Matrix $\mathbf{A}$

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - s_i} \prod_{\mu=1}^{i-1} \frac{\mathbf{A} - s_\mu \mathbf{E}}{s - s_\mu}. \tag{1.5}$$

Die Größen $\bar{\varphi}_i(s)$ und die Konstanten $\mathbf{P}_i$ sind durch

$$\bar{\varphi}_i(s) = \prod_{\mu=1}^{i} \frac{1}{s - s_\mu} \qquad \text{und} \quad \mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{A} - s_i\mathbf{E})\;\mathbf{P}_i \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{P}_1 := \mathbf{E} \tag{1.6}$$

[3] Es ist bemerkenswert, dass beide Verfahren eine mathematische Eleganz aufweisen, in der Praxis allerdings aufgrund einer schlechten Kondition numerische Probleme mit sich bringen und nicht besonders gut geeignet sind.

[4] Siehe zBsp Ch. LANDGRAF, G. SCHNEIDER, *Elemente der Regelungstechnik,* (Kap. 7, 8), Springer Verlag, 1970

[5] Siehe zBsp Donald G. SCHULTZ, James L. MELSA, *State Functions and Linear Control Systems*, (Kap. 8.), McGraw-Hill Company, 1967, bzw. Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS, *Regelungstechnik*, (Kap. 20.1.6 "Entwurf der Rückkopplung im Frequenzbereich"), Pearson, 2. Auflage, 2004

[6] Siehe hierzu: Heinico DOURDOUMAS, Richard SEEBER, *Systemtheorie AK1*, (Kap. Eine kanonische Form von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$), Online-Skriptum, Institut für Regelungstechnik der TU Graz, 2. Version 2021

gegeben. Damit erhalten wir für $L(s)$ die Darstellung:

$$L(s) = \mathbf{h}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i(s) \cdot \mathbf{h^T P}_i\ \mathbf{b}$$

bzw.

$$\mathbf{h}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{b}}{s - s_1} + \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{P}_2\mathbf{b}}{(s - s_1)(s - s_2)} + ... + \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{P}_n\mathbf{b}}{\Delta(s)} \ .$$

Der Rückkopplungsvekor $\mathbf{h}^T$ erfüllt dann die Gleichung

$$\frac{\mathbf{h}^T\mathbf{b}}{s - s_1} + \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{P}_2\mathbf{b}}{(s - s_1)(s - s_2)} + ... + \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{P}_n\mathbf{b}}{\Delta(s)} = \frac{w(s)}{\Delta(s)} - 1 \ , \tag{1.7}$$

in der die Rolle der (skalaren) Faktoren $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_i\mathbf{b}$ ersichtlich wird: *angenommen* ein Produkt $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_i$ in Gleichung (1.7) verschwindet *erstmalig* für $i = m$

$$\mathbf{h}^T\mathbf{P}_m = \mathbf{h}^T(\mathbf{A} - s_{m-1}\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_{m-2}\mathbf{E})(\mathbf{A} - s_{m-3}\mathbf{E})...(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) = \mathbf{0} \ , \tag{1.8}$$

dann sind auch alle darauf folgenden Produkte gleich Null:

$$\mathbf{h}^T\mathbf{P}_k = \mathbf{0} \qquad \text{für} \ \ k = m,\ m+1,\ m+2, ...,\ n \ .$$

Der Ausdruck $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_m$ verschwindet wiederum *genau dann erstmalig*, wenn der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ *Links-Eigenvektor* der Systemmatrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert s_{m-1} ist! Es ist ferner ersichtlich, dass für *teilerfremde* Polynome $w(s)$ und $\Delta(s)$ der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ *kein* Links-Eigenvektor der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sein kann.

Links-Eigenvektoren spielen demnach bei der Festlegung des Zustandsreglers eine prägende Rolle. Dies ist eigentlich nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass die vorausgesetzte Steuerbarkeit des Systems (1.1) gleichbedeutend damit ist, dass *kein* Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}^T$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{b} = 0$ existiert[7].

Ziel der nachfolgenden Ausführungen ist es in mathematisch einfacher Art die Rolle der Links-Eigenvektoren bei der Festlegung des Rückkopplungsverktors $\mathbf{h}^T$ genauer zu untersuchen und hervorzuheben sowie - für den Fall paarweise voneinander verschiedener Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ - eine konzeptionell einfache Darstellung des Rückkopplungsvektors als Linearkombination von Links-Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ *systematisch* zu entwickeln[8]. Hierzu betrachtet man zunächst die Verschiebung von einem bzw. zwei Eigenwerten, wobei Betrachtungen sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich angestellt werden.

[7] Die Sinnhaftigkeit dieser Bedingung kann leicht nachvollzogen werden: nach Multiplikation des Modells $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ von links mit einem Linkseigenvektor $\boldsymbol{\rho}^T$ der Matrix $\mathbf{A}$ erhalten wir $\boldsymbol{\rho}^T\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\rho}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}^T\mathbf{b}u$ bzw. $\frac{d(\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x})}{dt} = s(\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}^T\mathbf{b}u$. Man erkennt, dass falls der Faktor $\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{b}$ =0 ist, ein freies System $\frac{d(\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x})}{dt} = s(\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x})$ vorliegt, aus dem hervorgeht, dass eine Linearkombination der Zustandsvariablen gemäß $\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{st} \cdot \boldsymbol{\rho}^T\mathbf{x}(0)$ einem eigenen von u unabhängigen Gesetz unterliegt. Damit ist das System *nicht* steuerbar.

[8] Da bei Vorliegen paarweise einfacher Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist die Existenz einer solchen Darstellung des Rückkopplungsvektors evident.

1.1 Verschiebung eines einzigen reellen Eigenwertes

Für ein *steuerbares* LZI-System $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ mit der Ordnung n soll ein Zustandregelgesetz $u = -\mathbf{h}^T\mathbf{x}$ entworfen werden, das *nur* einen einzigen *reellen* Eigenwert von $\mathbf{A}$, zBsp. den Eigenwert s_1 auf den (reellen) Wert λ_1 verändert. Das bedeutet, die Systemmatrix des Regelkreises $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T$ soll die Eigenwerte

$$\lambda_1 \neq s_1, \quad \text{und} \quad \lambda_2 = s_2,\ \lambda_3 = s_3, ..., \lambda_n = s_n$$

aufweisen. Hierbei gehen wir davon aus, dass alle n Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ paarweise verschieden voneinander sind[9].

1.1.1 Betrachtung im Zeitbereich

Die Ermittlung des Vektors $\mathbf{h}^T$ und die prägende Rolle von Links-Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ kann - ohne jegliche Kenntnis obiger einleitender Ausführungen - *elementar* erfolgen. Hierzu betrachten wir einen Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_1^T$, das bedeutet $\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{A} = s_1\boldsymbol{\rho}_1^T$, wobei aufgrund der Steuerbarkeit des Systems $\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1 \neq 0$ gilt. Offensichtlich gilt $\boldsymbol{\rho}_1^T \cdot \mathbf{b}\boldsymbol{\rho}_1^T = \boldsymbol{\rho}_1^T \cdot \mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1$ und damit ist für eine beliebige Konstante α die Gleichung

$$\boldsymbol{\rho}_1^T(\mathbf{A} - \mathbf{b}\boldsymbol{\rho}_1^T\alpha) = \boldsymbol{\rho}_1^T(s_1 - \mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1\alpha) \tag{1.9}$$

erfüllt. Mit der (zulässigen) Wahl

$$\alpha = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1} \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \alpha\boldsymbol{\rho}_1 \tag{1.10}$$

erhalten wir aus obiger Gleichung $\boldsymbol{\rho}_1^T(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) = \lambda_1\boldsymbol{\rho}_1^T$ den gesuchten Rückkopplungsvektor

$$\mathbf{h} = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}\boldsymbol{\rho}_1 \ . \tag{1.11}$$

Bedenkt man, dass (orthonormierte) Eigenvektoren $\mathbf{A}\mathbf{p}_i = s_i\mathbf{p}_i$ bzw. $\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{A} = s_1\boldsymbol{\rho}_1^T$ die Eigenschaften $\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{p}_i = 1 = \boldsymbol{\rho}_i^T\boldsymbol{\rho}_i$ und $\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{p}_k = 0$ für $i \neq k$ mit $i, k = 1, 2, ..., n$ aufweisen, so gilt

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\alpha\boldsymbol{\rho}_1^T)\mathbf{p}_k = \mathbf{A}\mathbf{p}_k = s_k\mathbf{p}_k \quad \text{mit } k \neq 1 \ .$$

Daraus ist ersichtlich, dass - wie gewünscht - die Eigenwerte s_2, s_3,..., s_n des Systems unverändert bleiben.

Zusammenfassend: ist der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ ein Vielfaches eines Links-Eigenvektors $\boldsymbol{\rho}_i^T$ zum Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$, so wird *ausschliesslich* der Eigenwert s_i auf einen beliebigen Wert λ_i verschoben, während die restlichen Eigenwerte des Regelkreises unverändert bleiben.

[9] Im allgemeinen Fall besitzt die (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ *mehrfache* Eigewerte und weist $r < n$ paarweise verschiedene Eigenwerte s_1, s_2, ..., s_r auf. Gesucht ist dann der Rückkopplungsvektor, der genau einen Eigenwert s_1 auf den Wert $\lambda_1$verschiebt, wobei die (algebraische) Vielfachheit von s_1 sich um eins vermindert. Die Vorgehensweise beim Entwurf ändert sich praktisch nicht.

1.1.2 Betrachtung im Frequenzbereich

Obiges Resultat wird nun mit Hilfe der kanonischen Darstellung der Resolventen von $\mathbf{A}$ erarbeitet und anschließend verallgemeinert. Die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{h}^T$ lautet gemäß (1.7)

$$\mathbf{h}^T(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{w(s)}{\Delta(s)} - 1 = \frac{s-\lambda_1}{s-s_1} - 1 = \frac{s_1-\lambda_1}{s-s_1}.$$

Wir verwenden die Normal-Darstellung der Resolventen und erhalten:

$$\mathbf{h}^T\left[\frac{1}{s-s_1}\mathbf{E} + \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\mathbf{P}_2 + ... + \frac{1}{\Delta(s)}\mathbf{P}_n\right]\mathbf{b} = \frac{s_1-\lambda_1}{s-s_1}\ . \tag{1.12}$$

Obige Relation wird offensichtlich erfüllt, wenn für $i = 2, ..., n$

$$\mathbf{h}^T\mathbf{P}_i\mathbf{b} = 0 = \mathbf{h}^T(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})(\mathbf{A}-s_2\mathbf{E})...(\mathbf{A}-s_{i-1}\mathbf{E})\mathbf{b} \quad ,$$

bzw. - da das System nach Voraussetzung steuerbar ist - wenn $\mathbf{h}^T\mathbf{P}_i = \mathbf{0}$ für $i = 2, ..., n$ gilt. Nachdem alle Matrizen $\mathbf{P}_i$ $(i \geq 2)$ den multiplikativen Faktor $(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})$ aufweisen, besitzt der Vektor $\mathbf{h}^T$ die Eigenschaft $\mathbf{h}^T(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) = \mathbf{0}$. Bedenkt man, dass ein Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_1^T$ der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert s_1 durch $\boldsymbol{\rho}_1^T(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E}) = \mathbf{0}$ charakterisiert ist, so wird der Rückkopplungsvektor durch

$$\mathbf{h}^T = \alpha\boldsymbol{\rho}_1^T \tag{1.13}$$

beschrieben, wobei α eine Konstante ist. Ferner muss nach (1.12)

$$\mathbf{h}^T\frac{1}{s-s_1}\mathbf{b} = \frac{s_1-\lambda_1}{s-s_1} \qquad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}^T\mathbf{b} = s_1 - \lambda_1$$

gelten. Daraus ergibt sich die Konstante α zu $\alpha = \frac{s_1-\lambda_1}{\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b}}$ und der gesuchte Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}$ lautet

$$\mathbf{h} = \frac{s_1-\lambda_1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}\boldsymbol{\rho}_1\ . \tag{1.14}$$

Der Regelkreis besitzt dann die Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T = \mathbf{A} - \frac{s_1-\lambda_1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}\mathbf{b}\boldsymbol{\rho}_1^T\ . \tag{1.15}$$

1.1.3 Links-Eigenvektoren der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des Regelkreises

Wir bezeichnen mit $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T$ Links-Eigenvektoren der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des Regelkreises gemäß (1.15)

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T\left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) = \lambda_i\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T \tag{1.16}$$

und wollen sie berechnen. Multipliziert man die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ von links mit $\boldsymbol{\rho}_1^T$ so erhält man

$$\boldsymbol{\rho}_1^T\tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b}\frac{s_1-\lambda_1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}\boldsymbol{\rho}_1^T = \lambda_1\boldsymbol{\rho}_1^T\ .$$

Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\rho}_1^T$ Links-Eigenvektor sowohl von $\mathbf{A}$ als auch von $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T$ ist! Ausgehend von den für $i = 2, 3, ..., n$ geltenden Beziehungen $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) = s_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T$ *und* $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T$ erscheint folgender Ansatz für $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T$ sinnvoll:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T = \boldsymbol{\rho}_i^T + \boldsymbol{\varrho}_i^T \ , \tag{1.17}$$

wobei $\mathbf{k}_i^T$ noch festgelegt werden muss. Setzen wir diesen Ansatz in (1.16) ein, so erhalten wir

$$\left(\boldsymbol{\rho}_i^T + \boldsymbol{\varrho}_i^T\right)\left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) = s_i \left(\boldsymbol{\rho}_i^T + \boldsymbol{\varrho}_i^T\right) . \tag{1.18}$$

Nach Ausnutzen von $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T$ folgt für (1.18)

$$-\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{h}^T + \boldsymbol{\varrho}_i^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) = s_i \boldsymbol{\varrho}_i^T \ . \tag{1.19}$$

Bedenkt man, dass

$$\mathbf{h}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) = \lambda_1 \mathbf{h}^T \tag{1.20}$$

gilt, so setzt man für $\boldsymbol{\varrho}_i^T = \gamma \mathbf{h}^T$ an, wobei γ eine skalare Konstante ist. Das Einsetzen in (1.19) ergibt unter Ausnutzung von (1.20)

$$-\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{h}^T + \gamma \lambda_1 \mathbf{h}^T = s_i \gamma \mathbf{h}^T \ .$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss γ geeignet gewählt werden: $-\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} + \gamma\lambda_1 = s_i \gamma$ bzw. $\gamma = \frac{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i}{\lambda_1 - s_i}$. Damit können für $i = 2, ..., n$ Links-Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^T$ der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des Regelkreises mittels des Rückkopplungsvektors $\mathbf{h}^T$ und Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$ von $\mathbf{A}$ folgendermaßen berechnet werden[10]:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{h} - \frac{s_i - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i} \boldsymbol{\rho}_i \tag{1.21}$$

bzw.

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 - \frac{s_i - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i} \boldsymbol{\rho}_i . \tag{1.22}$$

Bemerkung: Bildet man das Produkt $\mathbf{b}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i$, das für die Steuerbarkeit des Systems $(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{b})$ kennzeichnend ist, so ergibt sich hierfür der schöne Ausdruck

$$\mathbf{b}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i = s_1 - s_i \qquad \text{für} \quad i = 2, ..., n \ , \tag{1.23}$$

der sich in den nachfolgenden Ausführungen als nützlich erweisen wird!

1.1.4 Ermittlung des Stellgrößenverlaufs $u(t)$

Im vorliegenden Fall kann der Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ explizit dargestellt werden. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\mathbf{h}^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{h}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) \mathbf{x} = -\lambda_1 \mathbf{h}^T \mathbf{x} \\ &= \lambda_1 u \ . \end{aligned}$$

[10] Durch Benutzung des Ausdrucks $\boldsymbol{\rho}_i^T + \frac{\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{\lambda_1 - s_i} \mathbf{h}^T$ erhält man ebenfalls Links-Eigenvektoren des Regelkreises.

Daraus erhalten wir unmittelbar durch Integration

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot u(0) = -e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{h}^T \mathbf{x}(0)$$

bzw.

$$u(t) = -e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{(s_1 - \lambda_1)}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{x}(0) \ . \tag{1.24}$$

Unter der (sinnvollen) Voraussetzung, dass $\lambda_1 < 0$ ist, ergibt sich für $t = 0$ der extremale Wert von $u(t)$

$$u_{extr} := -\frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{x}(0) \ .$$

Entscheidend für diesen Wert ist - abgesehen von dem Anfangswert $\mathbf{x}(0)$ - der Abstand $|s_1 - \lambda_1|$ zwischen vorliegendem und gewünschtem Eigenwert sowie die skalare Größe $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1$, die als Indikator für die Güte der Steuerbarkeit des Eigenwerts aufgefasst werden kann.

1.2 Verschiebung von zwei bzw. $k \leq n$ Eigenwerten

Es wird zunächst ein Zustandsregler $u = -\mathbf{h}^T \mathbf{x}$ entworfen, der den (reellen) Eigenwert s_1 auf den Wert λ_1 und den (reellen) Eigenwert s_2 auf den Wert λ_2 verändert[11]. Eine Verallgemeinerung auf k Eigenwerte mit $k \leq n$ erfolgt dann gradlinig. Es wird der mathematischen Einfachheit halber angenommen, dass alle n Eigenwerte s_i der Matrix $\mathbf{A}$ paarweise verschieden voneinander sind. Dies hat zur Folge, dass die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind[12]. Die Systemmatrix des Regelkreises $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T$ soll die Eigenwerte

$$\lambda_1 \neq s_1, \ \lambda_2 \neq s_2, \qquad \text{und} \quad \lambda_3 = s_3, \ \ldots, \ \lambda_n = s_n$$

besitzen.

1.2.1 Betrachtung im Zeitbereich

Die gestellte Aufgabe kann gedanklich in zwei Schritten erfolgen: zuerst wird *nur* der Eigenwert s_1 auf λ_1 verschoben. Anschließend verschiebt man beim so enstandenen System *nur* den Eigenwert s_2 auf den Wert λ_2. Es ist zu betonen: die Vorgehensweise bei der Verschiebung eines einzelnen Eigenwertes spielt eine Schlüsselrolle für die Lösung allgemeinerer Fälle!

Im vorliegenden Fall entsteht beim *ersten* Schritt eine Systemmarix $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}_1^T$ mit dem Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}_1^T$ gemäß (1.11)

$$\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}_1^T = \mathbf{A} - \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \mathbf{b} \boldsymbol{\rho}_1^T \ . \tag{1.25}$$

[11] Folgende Problemstellung ist ebenfalls sinnvoll: Es soll ein Zustandsregler $u = -\mathbf{h}^T \mathbf{x}$ entworfen werden, der den komplexen Eigenwert s_1 auf den Wert λ_1 und den konjugiert komplexen Eigenwert $s_2 = s_1^*$ auf den Wert $\lambda_2 = \lambda_1^*$ verändert. Der Lösungsweg ist der gleiche wie im hier betracheten "reellen" Fall.

[12] Liegen zwei gleiche Eigenwerte vor, zu denen ein einziger Eigenvektor existiert, so muss man zur Ermittlung der Zustandsrückkopplung einen zugehörigen Hauptvektor benutzen.

Im *zweiten* Schritt wiederholen wir die Prozedur, verschieben *nur* den Eigenwert s_2 und erzeugen die Systemmatrix $\mathbf{A}_2 := \mathbf{A}_1 - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{h}}_2^T$ des Regelkreises. Der Rückkopplungsvektor $\tilde{\mathbf{h}}_2$ lautet

$$\tilde{\mathbf{h}}_2 = \frac{s_2 - \lambda_2}{\mathbf{b}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2 \qquad \text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2^T (s_2 \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_1) = \mathbf{0}, \tag{1.26}$$

wobei der Links-Eigenvektor $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_2^T$ gemäß (1.21)

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_2 = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 - \frac{s_2 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_2} \boldsymbol{\rho}_2 \tag{1.27}$$

berechnet wird. Damit lautet der gesuchte Rückkopplungsvektor, der *nur* die Eigenwerte s_1 und s_2 verschiebt

$$\mathbf{h} := \mathbf{h}_1 + \tilde{\mathbf{h}}_2 = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 \ + \frac{s_2 - \lambda_2}{\mathbf{b}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2 \ . \tag{1.28}$$

Gemäß (1.23) gilt $\mathbf{b}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}_2 = s_1 - s_2$, so dass unter Beachtung von (1.27) für den Rückkopplungsvektor gemäß (1.28)

$$\mathbf{h} = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 \ + \frac{s_2 - \lambda_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 - \frac{s_2 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_2} \boldsymbol{\rho}_2 \right)$$

bzw.

$$\mathbf{h} = \frac{(s_1 - \lambda_2)(s_1 - \lambda_1)}{(s_1 - s_2)\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \cdot \boldsymbol{\rho}_1 \ + \frac{(s_2 - \lambda_1)(s_2 - \lambda_2)}{(s_2 - s_1)\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_2} \cdot \boldsymbol{\rho}_2$$

sich ergibt. Er entspricht einer Linearkombination von Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_1^T$ und $\boldsymbol{\rho}_2^T$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

1.2.2 Betrachtung im Frequenzbereich

Der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ erfüllt die Relation

$$\mathbf{h}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{w(s)}{\Delta(s)} - 1 = \frac{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}{(s - s_1)(s - s_2)} - 1$$

bzw. nach Verwendung von (1.7)

$$\mathbf{h}^T \left[\frac{1}{s - s_1} \mathbf{E} + \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \mathbf{P}_2 + ... + \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{P}_n \right] \mathbf{b} = \frac{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}{(s - s_1)(s - s_2)} - 1 \ . \tag{1.29}$$

Obige Relation wird erfüllt, wenn für $i = 3, ..., n$ die Produkte $\mathbf{h}^T \mathbf{P}_i = \mathbf{0}$ ergeben. Ferner muss $\mathbf{h}^T \mathbf{P}_2 = \mathbf{h}^T (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) \neq \mathbf{0}$ gelten. Die Matrizen $\mathbf{P}_i$ $(i \geq 3)$ enthalten den multiplikativen Faktor $(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2 \mathbf{E})$. Daher muss der Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^T$ die Eigenschaft

$$\mathbf{h}^T (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - s_2 \mathbf{E}) = \mathbf{0} \tag{1.30}$$

besitzen. Man erkennt, dass die Wahl

$$\mathbf{h}^T = \alpha_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \ + \ \alpha_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ sind reelle Konstanten}) \tag{1.31}$$

die gestellten Anforderungen erfüllt. Mit anderen Worten: $\mathbf{h}^T$ ist eine Linearkombination von Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_1^T$ und $\boldsymbol{\rho}_2^T$ der Matrix $\mathbf{A}$ zu deren Eigenwerten $s_1$und s_2: $\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{A} = s_1\boldsymbol{\rho}_1^T$ und $\boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{A} = s_2\boldsymbol{\rho}_2^T$. Damit ergibt sich

$$\frac{\mathbf{h}^T\mathbf{b}}{s-s_1} + \frac{\mathbf{h}^T(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})\mathbf{b}}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} - 1 \ ,$$

bzw.[13]

$$\frac{\alpha_1\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}{s-s_1} + \frac{\alpha_2\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_2}{s-s_2} = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} - 1. \tag{1.32}$$

Die Partialbruch-Koeffizienten (!) $\left(\alpha_1\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1\right)$ und $\left(\alpha_2\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_2\right)$ ergeben sich zu

$$\alpha_1\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1 = \left.\frac{w(s)}{\Delta(s)}(s-s_1)\right|_{s=s_1} = \frac{(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)}{s_1-s_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)}{s_1-s_2}\frac{1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1} \tag{1.33}$$

und

$$\alpha_2\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_2 = \left.\frac{w(s)}{\Delta(s)}(s-s_2)\right|_{s=s_2} = \frac{(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)}{s_2-s_1} \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)}{s_2-s_1}\frac{1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_2} \ . \tag{1.34}$$

Damit lautet der gesuchte Zustandsregler

$$\mathbf{h} = \frac{(s_1-\lambda_2)(s_1-\lambda_1)}{(s_1-s_2)\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_1}\cdot\boldsymbol{\rho}_1 + \frac{(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)}{(s_2-s_1)\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_2}\cdot\boldsymbol{\rho}_2 \ . \tag{1.35}$$

1.2.3 Verallgemeinerung der Ergebnisse

Sequentielle Berechnung der Rückkopplung h im Zeitbereich

Um die Verständlichkeit der nachfolgenden Ausführungen zu erhöhen, werden gewisse Merkmale eingeführt: wir betrachten beim Entwurf verschiedene Stufen k mit $k = 1, 2, ..., n$, bei denen jeweils *ein einziger* Eigenwert verschoben wird und bezeichnen mit EWK die Eigenwert-Konfiguration der jeweiligen Systemmatrix des Regelkreises (abgekürzt durch RK) einer Stufe . Der hochgestellte Index bei einer vektoriellen Größe $\mathbf{f}^{(k)}$ kennzeichnet die Stufe in der diese Größe gebildet wurde. Die Anfangslage ist beschrieben durch die vorliegende EWK $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den zugehörigen Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$ mit $i = 1, 2, ..., n$.

---

[13] Das Ergebnis der nachfolgenden Berechnung ist einleuchtend

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b}}{s-s_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}_2^T(\mathbf{A}-s_1\mathbf{E})\mathbf{b}}{(s-s_1)(s-s_2)} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b}}{s-s_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}_2^T(s_2-s_1)\mathbf{b}}{(s-s_1)(s-s_2)} = \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b}\left[\frac{1}{s-s_1} + \frac{(s_2-s_1)}{(s-s_1)(s-s_2)}\right] \\ &= \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b}\frac{1}{s-s_2} \ .\end{aligned}$$

Im Übrigen ist das Ergebnis auch deswegen einleuchtend, da die Indizierung der Eigenwerte bei der benutzten Form für die Resolvente *irrelevant* ist.

- Stufe $k = 1$**:** Nach Anwendung des Zustandsreglers

$$\mathbf{h}^{(1)} = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1^{(0)}} \boldsymbol{\rho}_1 \tag{1.36}$$

liegt die Systemmatrix $\left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^{(1)T}\right)$ des RK vor. Sie besitzt die EWK $\{\lambda_1, s_2, s_3, ..., s_n\}$ und die zugehörigen Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^{(1)}$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{\rho}_1^{(1)} = \boldsymbol{\rho}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_i^{(1)} = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1 - \frac{s_i - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i} \boldsymbol{\rho}_i \quad \text{für } i = 2, 3, ..., n \quad . \tag{1.37}$$

Aus obiger Beziehung folgt unmittelbar für $i = 2, 3, ..., n$

$$\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(1)} = (s_1 - \lambda_1) - (s_i - \lambda_1) = s_1 - s_i. \tag{1.38}$$

- Stufe $k = 2$**:** Nach Anwendung des Zustandsreglers $\mathbf{h}^{(2)}$ - der die 2 Eigenwerte s_1 und s_2 verschiebt - liegt die Systemmatrix $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^{(2)T}$ des RK mit

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h}^{(1)} + \frac{s_2 - \lambda_2}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_2^{(1)}} \boldsymbol{\rho}_2^{(1)}$$

bzw. - nach Ausnutzung von (1.38) -

$$\mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h}^{(1)} + \frac{s_2 - \lambda_2}{s_1 - s_2} \boldsymbol{\rho}_2^{(1)} \tag{1.39}$$

vor. Sie weist die EWK $\{\lambda_1, \lambda_2, s_3, ..., s_n\}$ und die - für $i \geq k+1$ nachfolgend benötigten - Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^{(2)}$ auf:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_i^{(2)} &= \frac{s_2 - \lambda_2}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1^{(1)}} \boldsymbol{\rho}_1^{(1)} - \frac{s_i - \lambda_2}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(1)}} \boldsymbol{\rho}_i^{(1)} \\ &= \frac{s_2 - \lambda_2}{s_1 - s_i} \boldsymbol{\rho}_1^{(1)} - \frac{s_i - \lambda_2}{s_1 - s_i} \boldsymbol{\rho}_i^{(1)} \qquad \text{für } i = 3, 4, ..., n \end{aligned} \tag{1.40}$$

Aus der letzten Beziehung ergibt sich

$$\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(2)} = (s_2 - \lambda_2) - (s_i - \lambda_2) = s_2 - s_i. \tag{1.41}$$

- Stufe k**:** Nach Anwendung des Zustandsreglers $\mathbf{h}^{(k)}$, der genau k Eigenwerte verschiebt - ergibt sich die Systemmatrix $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^{(k)T}$ des RK mit der EWK $\{\lambda_1, ..., \lambda_k, s_{k+1}, s_{k+2}, ..., s_n\}$ und dem Rückkopplungsvektor

$$\mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k-1)} + \frac{s_k - \lambda_k}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)}} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} = \mathbf{h}^{(k-1)} + \frac{s_k - \lambda_k}{s_{k-1} - s_k} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} \tag{1.42}$$

sowie den - für $i \geq k+1$ benötigten - Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^{(k)}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_i^{(k)} &= \frac{s_k - \lambda_k}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)}} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} - \frac{s_i - \lambda_k}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(k-1)}} \boldsymbol{\rho}_i^{(k-1)} \\ &= \frac{s_2 - \lambda_2}{s_{k-1} - s_i} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} - \frac{s_i - \lambda_2}{s_1 - s_i} \boldsymbol{\rho}_i^{(k-1)} \quad \text{für } i = k+1, k+2, , ..., n \;. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Aus der letzten Beziehung folgt wiederum nach Multiplikation von liks mit $\mathbf{b}^T$

$$\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(k)} = (s_k - \lambda_k) - (s_i - \lambda_k) = s_k - s_i \;. \tag{1.44}$$

Mit Hilfe der Relation (1.42) kann man ausgehend vom ersten Rückkopplungsvektor $\mathbf{h}^{(1)} = \frac{s_1 - \lambda_1}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_1} \boldsymbol{\rho}_1$ gemäß (1.36) alle nachfolgenden Rückkopplungen $\mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{h}^{(3)}, ..., \mathbf{h}^{(K)}$ mit $K \leq n$ gemäß (1.42) sequentiell ermitteln.

Bemerkung: Den "Schönheitsfehler" (Benutzung verschiedener Relationen zur Ermittlung der Rückkopplungen) kann man allerdings ausmerzen: die *formale* Auswertung von (1.44) für $k = 0$ ergibt $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i^{(0)} = s_0 - s_i$, wobei $\boldsymbol{\rho}_i^{(0)}$ und s_0 noch festzulegende Größen sind. Mit der Wahl $\boldsymbol{\rho}_i^{(0)} := \frac{s_0 - s_i}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i} \boldsymbol{\rho}_i$ mit $s_0 \neq s_i$ für $i = 1, 2, ..., n$ ist $\boldsymbol{\rho}_i^{(0)}$ ein Links-Eigenvektor zum Eigenwert s_i. Damit lautet das Rechenschema für die sequentielle Berechnung eines Zustandsreglers mit $k = 0, 1, ..., n$:

$$\mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{h}^{(k-1)} + \frac{s_k - \lambda_k}{s_{k-1} - s_k} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} \tag{1.45}$$

mit den - für $i = k+1, k+2, , ..., n$ - benötigten Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^{(k)}$

$$\boldsymbol{\rho}_i^{(k)} = \frac{s_k - \lambda_k}{s_{k-1} - s_i} \boldsymbol{\rho}_k^{(k-1)} - \frac{s_i - \lambda_k}{s_1 - s_i} \boldsymbol{\rho}_i^{(k-1)} \tag{1.46}$$

sowie den "Anfangswerten"

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_i^{(0)} := \frac{s_0 - s_i}{\mathbf{b}^T \boldsymbol{\rho}_i} \boldsymbol{\rho}_i \quad (\text{mit } s_0 \neq s_i \text{ für } i = 1, 2, ..., n). \tag{1.47}$$

Betrachtung im Frequenzbereich

Die Verallgemeinerung der Vorgehensweise für den Fall der Verschiebung von k Eigenwerten ist evident. Der Ansatz für den Rückkpplungsvektor lautet in Analogie zum Fall $k = 2$ gemäß (1.31) $\mathbf{h} = \alpha_1 \boldsymbol{\rho}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\rho}_2 + ... + \alpha_k \boldsymbol{\rho}_k$, wobei die konstenten Faktoren α_i - wie in obigen Ausführungen dargestellt - auf dem Wege einer Partialbruchzerlegung berechnet werden. Im üblich betrachteten Fall $k = n$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten der Systemmatrix $\mathbf{A}$ ergibt sich der Zustandsregler als Linearkombination von n Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$:

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i, \tag{1.48}$$

mit

$$\alpha_i := \frac{1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_i} \cdot \frac{w(s)}{\Delta(s)}(s - s_i)\Bigg|_{s=s_i} = \frac{1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_i} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(s_i - \lambda_k)}{\prod\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}(s_i - s_k)} \tag{1.49}$$

bzw.[14]

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\rho}_i} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(s_i - \lambda_k)}{\prod\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n}(s_i - s_k)} \cdot \boldsymbol{\rho}_i\ . \tag{1.50}$$

1.3 Bemerkungen zur numerischen Berechnung eines Zustandsreglers

Obige Betrachtungen dienten dem Verständnis der Entstehung und Wirkung eines Zustandsregelgesetzes. Die nachfolgenden Ausführungen dienen seiner *effizienten numerischen* Berechnung. Man wünscht einen robusten Algorithmus zur Berechnung eines Zustandsreglers, in dem Sinne, dass die gewünschten Pole (Eigenwerte) des Systems unempfindlich sind gegenüber "Störungen" der Systemdaten. Hierfür existieren in der Fachliteratur eine Reihe von Ansätzen[15], die allerdings Vor- *und* Nachteile aufweisen. In sofern wählt man - je nach vorliegendem Fall - den passenden Algorithmus. Wir konzentrieren uns hier auf die Arbeit von Varga[16], die konzeptuell einfach erscheint und gute numerische Eigenschaften besitzt, da sie vorteilhafte *unitäre* Transformationen benutzt[17].

1.3.1 Unitäre Transformationen

Den Nutzen einer unitären Transformation erkennt man zBsp, wenn man das *Isolieren* eines Eigenwertes λ einer (n, n)- Matrix $\mathbf{A}$ untersucht. Darunter verstehen wir einen Prozess, um ausgehend von der gegebenen Matrix $\mathbf{A}$ eine neue Matrix zu erzeugen, die abgesehen von λ die restlichen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ besitzt. Hierzu dienen die folgenden Überlegungen: sei $\mathbf{p}$ ein (orthonormierter) Eigenvektor zum Eigenwert λ einer (i.A. komplexwertigen) Matrix $\mathbf{A}$, d.h. $\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{p}.$ Wir können eine $(n, n-1)$-Matrix $\mathbf{R}$ konstruieren, deren Spalten orthogonal zu $\mathbf{p}$

[14] Nachfolgende Relation entspricht der auf einem ganz anderen Wege ermittelten Gleichung (20.50) im Kap. 20.1.6 "Entwurf der Rückkopplung im Frequenzbereich" des Buches Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS, *Regelungstechnik*.

[15] Siehe zBsp. Biswa Nath DATTA, *Numerical Methods for Linear Control Systems,* (Ch. 11, Numerical Methods and Conditioning of the Eigenvalue Assignement Problems), Elsevier Academic Press, 2004

[16] A. VARGA, *A Schur Method for Pole Assignment*, IEEE Transactions on Automatic Control Vol. AC-26, Nr.2, April 1981, S. 517-519.

[17] Für eine i.A. komplexwertige Transformationsmatrix $\mathbf{U}$ bedeutet das Folgendes: sie weist eine leichte Invertierbarkeit ($\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$) und eine perfekte Kondition κ bezüglich der 2-Norm auf ($\kappa = \|\mathbf{U}\|_2 \cdot \left\|\mathbf{U}^H\right\|_2 = 1$). Ferner ermöglicht sie eine gute Fehleranalyse. Siehe hierzu zBsp G.W. STEWART, *Introduction to Matrix Computations*, (Ch. 6.3), Academic Press, 1973.

stehen - d.h. $\mathbf{R}^H\mathbf{p} = \mathbf{0}$ - mit der Eigenschaft, dass die (n,n)-Matrix $\mathbf{U} := (\mathbf{p},\mathbf{R})$ unitär ist. Nachdem

$$\mathbf{AU} = \mathbf{A}(\mathbf{p},\mathbf{R}) = (\lambda\mathbf{p},\mathbf{AR}) \quad \text{und } \mathbf{U}^H\mathbf{AUe}_1 = \mathbf{U}^H\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{U}^H\mathbf{p} = \lambda\mathbf{e}_1$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^H\mathbf{AU} &= (\mathbf{p},\mathbf{R})^H\mathbf{A}(\mathbf{p},\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^H \\ \mathbf{R}^H \end{pmatrix}(\lambda\mathbf{p},\mathbf{AR}) = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{p}^H\mathbf{p} & \mathbf{p}^H\mathbf{AR} \\ \lambda\mathbf{R}^H\mathbf{p} & \mathbf{R}^H\mathbf{AR} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\cdot 1 & \mathbf{p}^H\mathbf{AR} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^H\mathbf{AR} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

gilt, erkennt aufgrund der entstandenen (oberen) Dreiecksstruktur, dass die (ordnungsreduzierte) $(n-1,n-1)$-Matrix $\mathbf{A}_{22}$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ *außer* dem Eigenwert λ aufweist.

Aufgrund letzer Ausführungen ist - nach einem wiederholt durchgeführten Isolationsprozess auf die jeweilige ordnungsreduzierte Matrix - folgender Satz (*kanonische Schurform*) einsichtig: zu einer gegebenen Matrix $\mathbf{A}$ existiert eine unitäre Matrix $\mathbf{Q}$ sowie eine *obere Dreiecksmatrix* $\mathbf{D}$, so dass $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ} = \mathbf{D}$ gilt. Die Diagonalelemente von $\mathbf{D}$ sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$[18]. Es ist zu bemerken, dass selbst bei einer reellwertigen Matrix $\mathbf{A}$ die Matrix $\mathbf{D}$ komplexwertige Elemente enthalten kann. Aus numerischen Gründen ist eine kanonische Form mit reellen Elementen wünschenswert. Dies führt zur sogenannten *kanonischen reellen Schurform*: zu einer gegebenen (reellen) Matrix $\mathbf{A}$ existiert eine (reelle) unitäre Matrix $\mathbf{Q}$ sowie eine *obere Dreieksmatrix* $\mathbf{D}$, so dass $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathbf{D}$ gilt. Die Matrix $\mathbf{D}$ ist eine (obere) Block-Dreiecksmatrix mit reellwertigen Elementen wobei in der Diagonale $(1,1)$- oder $(2,2)$-Blöcke stehen. Diese korrespondieren jeweils mit einem reellen Eigenwert oder einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar der Matrix $\mathbf{A}$[19].

1.3.2 Auswirkungen eines Regelgesetzes

Wir betrachten nun ein *steuerbares* System mit der Beschreibung $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ mit dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der m-dimensionalen Eingangsgröße $\mathbf{u}$. Nach Benutzung der o.a. unitären Transformation $\mathbf{z} = \mathbf{Ux}$ zur Isolation eines Eigenwertes erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \mathbf{U}^H\mathbf{Bu} =: \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Man beachte, dass das System $(\mathbf{A}_{22},\mathbf{B}_2)$ steuerbar ist! Durch den Einsatz des Regelgesetzes

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Hz} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}\mathbf{z},$$

wobei die (m,n)- Matrix $\mathbf{H}$ in die $(m,1)$-Matrix $\mathbf{H}_1$ und die $(m,n-1)$-Matrix $\mathbf{H}_2$ aufgespalten wurde, entsteht ein Regelkreis mit dem Modell

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}\mathbf{H}\right]\mathbf{z} = \left[\begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}\right]\mathbf{z}.$$

[18] Siehe hierzu zBsp G.W. STEWART, *Introduction to Matrix Computations*, Theorem 6.3.7.
[19] Siehe hierzu zBsp G.W. STEWART, *Introduction to Matrix Computations*, Theorem 6.3.9.

Es ist nun unmittelbar ersichtlich, dass durch die Anwendung des speziellen Regelgesetzes $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}$, der Regelkreis durch

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \lambda & (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{H}_2) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{H}_2) \end{pmatrix} \right] \mathbf{z}$$

beschrieben wird und seine Systemmatrix eine obere Block-Dreiecksform besitzt. Damit können alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ *außer* λ beliebig plaziert werden.

Folgende **Verallgemeinerung** ist nun einsichtig: unter der Voraussetzung, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$ eines Systems die Struktur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

aufweist, wird der Regelkreis durch

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} \right] \mathbf{z}$$

beschrieben. Hierbei ist $\mathbf{A}_{11}$ eine (r, r)-Matrix und $\mathbf{A}_{22}$ eine $(n - r, n - r)$-Matrix. Alle übrigen Matrizen weisen passende Diemesionen auf. Wählt man als Rückkopplungsvektor $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}$ so entsteht folgendes System

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{H}_2) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{H}_2) \end{pmatrix} \right] \mathbf{z},$$

dessen Dynamik durch die (unveränderten) Eigenwerten von $\mathbf{A}_{11}$ und die (beliebig platzierbaren) Eigenwerte von $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{H}_2$.

1.3.3 Der Algorithmus von Varga

Die prinzipielle Arbeitsweise des Algorithmus wird durch folgende Schritte beschrieben:

- Ausgangspunkt ist ein steuerbares System $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ (abgekürzt durch $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ mit reellen Systemdaten und mit dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\mathbf{x}$ sowie dem m-dimensionalen Eingangsvektor $\mathbf{u}$. Die Aufgabe besteht darin, ein Regelgesetz zu ermitteln, so dass *ausschliesslich* gewisse Eigenwerte der Matrix $\hat{\mathbf{A}}$ nach Wunsch verändert werden.

- Hierzu wird die Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ mit Hilfe unitärer Transformationen in die reelle Schurform $\mathbf{Q}^T\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q} = \mathbf{A}$ gebracht. Die (reellwertige) Matrix $\mathbf{A}$ ist eine (obere) Block-Dreiecksmatrix, wobei in der Diagonale $(1, 1)$- oder $(2, 2)$-Blöcke stehen. Diese korrespondieren reellen oder konjugiert komplexen Eigenwerten von $\hat{\mathbf{A}}$. Damit wird das transformierte System durch das Paar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_G & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_S \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{F}_S \end{pmatrix}$$

  beschrieben. *Entscheidend* bei dieser Transformation ist es, dass $\mathbf{A}_G$ diejenigen Eigenwerte, die unverändert bleiben sollen (also die "guten") enthält. Die unerwünschten (also die "schlechten") Eigenwerte sind in $\mathbf{A}_S$ enthalten!

- Gesucht ist ein Regelgesetz das die "schlechten" Eigenwerte nach Wunsch plaziert, *aber* die "guten" nicht beeinflußt. Dies kann - wie schon ausgeführt - prinzipiell durch ein Regelgesetz $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_S \end{pmatrix}$ erreicht werden. Nach Varga erfolgt die gewünschte Eigenwertzuweisung für die Matrix $\mathbf{A}_S$ *schrittweise*, indem man jeweils 1 oder 2 Eigenwerte - d.h. einen reellen Eigenwert oder ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar - verschiebt. Man beginnt man indem man den untersten unerwünschten Eigenwertblock von $\mathbf{A}_S$ durch ein Regelgsetz verändert. Anschliessend verschiebt man - durch Verwendung unitärer Transformationen - einen anderen unerwünschten Block in die unterste Diagonalposition und wiederholt sie Prozedur. Das gesuchte Regelgesetz $\mathbf{H}$ ist die Summe der sequentiell ermittelten Rückkopplungen.

1.4 Anwendungen

1.4.1 Entwurf eines Zustandsreglers mit I-Anteil

Zur Erinnerung: eine Maßnahme beim Reglerentwurf um die bleibende Regelabweichung in einem Standardregelkreis bei sprungförmigen Führungs- bzw. Störgrößen zu beseitigen, besteht darin einen I-Anteil im offenen Kreis einzufügen. Diese klassische Vorgehenweise kann auch beim Zustandsreglerentwurf durchgeführt werden[20]. Hierbei liegt ein LZI-System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y, auf das eine konstante *unbekannte* (vektorielle) Störgröße einwirkt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{w} \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

vor. Zur Ermittlung eines Regelgesetzes, das ein gewünschtes asymptotisch stabiles Verhalten des Regelkreises *trotz* des vorhandenen Störeinflusses $\mathbf{w}$ bewirkt, betrachtet man das erweiterte System mit $n+1$ Zustandsvariablen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

bzw. mit

$$\boldsymbol{\xi}^T := \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

in Matrix-Schreibweise

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} u. \tag{1.52}$$

Man erkennt - aufgrund der Dreiecksform der Systemmatrix - unmittelbar deren Eigenwerte: ein Eigenwert bei null und die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Man entwirft dann für das System (1.52) eine Zustandsrückkopplung $u(\boldsymbol{\xi})$. Mit anderen Worten man löst das vorliegende Problem indem man es auf das einer "reinen" Zustandsregelung zurückführt[21]. Diese *for-*

[20] Siehe zBsp Martin HORN & Nicolaos DOURDOUMAS, *Regelungstechnik*, (Kap. 20.1.9 "Zustandsregler mit I-Anteil"), Pearson, 2. Auflage, 2004

[21] Hierbei darf die vorliegende Strecke mit der Übertragungsfunktion $\mathbf{c}^T(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ *keine* Nullstelle bei Null besitzen ! Das bedeutet $\mathbf{c}^T(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \neq 0$.

male Lösung wird nun - aufbauend auf die Erkenntnisse über die Verschiebung eines einzelnen Eigenwertes - durch eine *einsichtige* - elegante - ersetzt[22].

Man setzt ein Zustandsregelgesetz

$$u = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\boldsymbol{\xi}) \tag{1.53}$$

mit

$$u_1(\mathbf{x}) := -\begin{pmatrix} \mathbf{h}^T & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \quad \text{und} \quad u_2(\boldsymbol{\xi}) := -\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^T & h_I \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \tag{1.54}$$

an. Wendet man in einem *ersten* Schritt $u_1(\mathbf{x})$ an, so ensteht das System

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} u_2 \tag{1.55}$$

dessen Systemmatrix - immer noch Dreiecksform - die Eigenwerte von $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T$ und den Eigenwert Null aufweist. Unter der Voraussetzung der Steuerbarkeit für das ursprügliche System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ können die Eigenwerte von $\left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)$ *beliebig* plaziert werden. Im *zweiten* Schritt wird eine Zustandsrückkopplung $\mathbf{k}^T$ angewandt, die *nur* den Eigenwert bei Null verschiebt. Das bedeutet, dass der Rückkopplungsvektor $\mathbf{k}^T := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^T & h_I \end{pmatrix}$ ein Links-Eigenvektor von $\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert Null sein muss! Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{k}$, damit der Eigenwert Null auf den Wert λ verschoben wird:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^T & h_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.56}$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) + h_I \mathbf{c}^T = \mathbf{0}.$$

Da man o.E.d.A. $h_I = -1$ setzen kann, erhalten wir zunächst

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right) - \mathbf{c}^T = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\tilde{\mathbf{h}}^T = \mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1}. \tag{1.57}$$

Damit lautet gemäß (1.11) der Rückkopplunsvektor $\mathbf{k}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= \frac{0 - \lambda}{-\mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1} \mathbf{b}} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{\mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1} \mathbf{b}} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1} & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Bemerkung: Man betrachte die Führungs-Übertragungsfunktion des Regelkreises die sich im ersten Schrit ergibt: $T(s) = \mathbf{c}^T \left[s\mathbf{E} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)\right]^{-1} \mathbf{b}$. Der (skalare) Ausdruck $\mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T\right)^{-1} \mathbf{b} = T(s = 0)$ ist verschieden von Null, da eine Zustandsregelung die Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s) = \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b}$ der betrachteten Strecke *nicht* verschieben kann und $G(s)$ nach Voraussetzung keine Nullstelle bei Null besitzt.

[22] Zur Verwendung und Erweiterung der Vorgehensweise in wesentlich komplexeren Problemstellungen siehe: Richard SEEBER und Jaime A. MORENO, "*Performance Preserving Integral Extension of Linear and Homogeneous State-Feedback Controllers*". 21st IFAC World Congress, Berlin Germany, 2020.