

# Regelungssysteme



Institut für Regelungs- und  
Automatisierungstechnik





(c) Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

**Hinweis:** Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht!* Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 26.01.2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Begriffe der Regelungstechnik</b>	<b>7</b>
1.1	Einführung . . . . .	7
1.2	Die Sprache der Regelungstechnik . . . . .	7
1.3	Beispiele . . . . .	10
1.3.1	Drehzahlregelung mit Hilfe des Fliehkraftreglers . . . . .	10
1.3.2	Regelung der Raumtemperatur . . . . .	10
1.3.3	Der Pupillenapparat des Menschen . . . . .	11
<b>2</b>	<b>PID-Regler</b>	<b>13</b>
2.1	Einführung . . . . .	13
2.2	Parallelrealisierung - die Lehrbuchform . . . . .	13
2.3	Serienrealisierung (nicht prüfungsrelevant) . . . . .	17
2.4	Praktische Realisierungen . . . . .	18
2.4.1	I-PD-Regler und PI-D-Regler . . . . .	18
2.4.2	Windup-Effekt und Gegenmaßnahmen . . . . .	19
2.5	Einstellregeln für PID-Regler . . . . .	21
2.5.1	Einstellregeln nach Ziegler-Nichols . . . . .	21
2.5.2	Methode der Summenzeitkonstante („T-Summen Regel“) . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Frequenzkennlinien und Ortskurven</b>	<b>25</b>
3.1	Einführung . . . . .	25
3.1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	27
3.2	Frequenzkennlinien . . . . .	27
3.2.1	Normierte Darstellung . . . . .	28
3.2.2	Zerlegung von $G(s)$ in „elementare Bestandteile“ . . . . .	29
3.3	Frequenzgangs-Ortskurve . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Nyquist-Kriterium</b>	<b>39</b>
4.1	Einführung . . . . .	39
4.2	Stetige Winkeländerung einer Ortskurve . . . . .	40
4.3	Formulierung des Nyquist-Kriteriums . . . . .	42
4.4	Vereinfachtes Schnittpunktkriterium . . . . .	45
4.4.1	Durchtrittsfrequenz . . . . .	45
4.4.2	Phasenreserve und Amplitudenrand . . . . .	46

4.4.3	Formulierung des vereinfachten Schnittpunktkriteriums . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Frequenzkennlinien - Verfahren</b>	<b>49</b>
5.1	Allgemeine Überlegungen zum Reglerentwurf . . . . .	50
5.1.1	Einschränkungen beim Entwurf . . . . .	52
5.2	Ein typisches Entwurfsverfahren . . . . .	53
5.2.1	Systeme mit dominantem Polpaar . . . . .	53
5.2.2	Spezifikation des Wunschverhaltens . . . . .	53
5.2.3	Faustformeln für den Reglerentwurf . . . . .	55
5.2.4	Durchführung des Reglerentwurfes . . . . .	55
5.3	Korrekturglieder . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Analytische Reglersynthese</b>	<b>61</b>
6.1	Einführung . . . . .	61
6.2	Implementierbarkeit . . . . .	61
6.3	Entwurf für den Standardregelkreis . . . . .	62
6.3.1	Direkte Reglerberechnung . . . . .	62
6.3.2	Polvorgabe . . . . .	64
6.4	Entwurf für eine erweiterte Regelkreisstruktur . . . . .	66
6.4.1	Realisierung des Reglers . . . . .	70
6.5	Wahl von $T(s)$ . . . . .	70
6.5.1	System mit dominantem Polpaar . . . . .	70
6.5.2	„Optimale“ Vorgabe von $T(s)$ (nicht prüfungsrelevant) . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Entwurf von Zustandsreglern</b>	<b>75</b>
7.1	Einführung . . . . .	75
7.2	Stabilisierung des Regelkreises . . . . .	75
7.2.1	Prinzip der Eigenwertvorgabe . . . . .	76
7.2.2	Stabilisierbarkeit . . . . .	78
7.2.3	Entwurf für ein System in Regelungsnormalform . . . . .	79
7.2.4	Transformation auf Regelungsnormalform . . . . .	80
7.2.5	Formel von Ackermann . . . . .	83
7.3	Nachführung . . . . .	85
7.4	PI - Zustandsregler . . . . .	89
7.5	Wahl der Eigenwerte . . . . .	91
7.5.1	Dominantes Eigenwertpaar . . . . .	92
7.5.2	Linear-Quadratischer Regler (nicht prüfungsrelevant) . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Entwurf von Zustandsbeobachtern</b>	<b>101</b>
8.1	Einführung . . . . .	101
8.2	Trivialer Beobachter . . . . .	101
8.3	Luenberger-Beobachter . . . . .	102
8.4	Der Beobachter im Regelkreis . . . . .	105
8.4.1	Separationstheorem . . . . .	106

<b>9</b>	<b>Zeitdiskrete Regelkreise</b>	<b>109</b>
9.1	Einführung . . . . .	109
9.2	Der digitale Regelkreis . . . . .	109
9.2.1	Halteglied und Abtaster . . . . .	110
9.3	Diskretisierung der Regelgesetze . . . . .	110
9.3.1	Vorwärts-Euler-Integration . . . . .	112
9.3.2	Rückwärts-Euler-Integration . . . . .	112
9.3.3	Integration mittels Trapez-Regel - Tustin Formel . . . . .	114
9.4	Diskretisierung der Regelstrecke . . . . .	115
9.4.1	Diskretes Zustandsmodell . . . . .	116
9.4.2	$z$ -Übertragungsfunktion . . . . .	119
9.4.3	Reglerentwurf für die diskretisierte Strecke . . . . .	121



# Kapitel 1

## Begriffe der Regelungstechnik

### 1.1 Einführung

In allen Bereichen des täglichen Lebens wird vorausgesetzt, dass sich Systeme bzw. Prozesse genau so verhalten, wie man es von ihnen erwartet. Flugzeuge sind in der Lage, vollautomatisch Kurs und Höhe zu halten und können komplizierte Manöver völlig ohne menschliche Einflussnahme fehlerfrei ausführen. Industrieroboter führen mit höchster Präzision und Wiederholgenauigkeit komplexe Bewegungsabläufe aus und verrichten dabei Schweiß- oder Schneidarbeiten. In Geschäftslokalen herrscht, völlig unabhängig von den äußeren Witterungsbedingungen, ein angenehmes Raumklima. Leistungsfähige Assistenzsysteme, wie z.B. Spurhaltesysteme oder Tempomat verbessern Sicherheit und Komfort von Fahrzeugen, autonom bzw. automatisiert fahrende Autos sind keine Zukunftsmusik mehr.

In den angegebenen Beispielen wird das Verhalten der Systeme „Flugzeug“, „Roboter“, „Geschäftslokal“ und „Fahrzeug“ über vorgebbare Größen, wie z. B. die Ruderstellungen beim Flugzeug, in gewünschter Weise beeinflusst. Die hierfür erforderlichen Ruderstellungen werden aus der messtechnisch erfassten Abweichung des Flugzeugs von seinem vorgegebenen Kurs berechnet. Es entsteht also ein **geschlossener Wirkungskreis**, in dem das „Ist-Verhalten“ fortlaufend mit dem „Soll-Verhalten“ verglichen wird und das System im Sinne einer Angleichung an das „Soll-Verhalten“ beeinflusst wird. Dieses Prinzip der **Rückkopplung** ist charakteristisch für eine **Regelung**. Im Gegensatz dazu zeichnet sich eine **Steuerung** durch eine **offene Wirkungskette** aus, bei der ein System auf eine vom aktuellen Systemverhalten unabhängige Weise beeinflusst wird. Ein typisches Beispiel hierfür ist ein Bewässerungssystem, bei dem Pflanzen völlig unabhängig von der Witterung nach einem zeitlich fest vorgegebenem Schema mit Wasser versorgt werden.

### 1.2 Die Sprache der Regelungstechnik

In Bild 1.1 ist eine sehr allgemeine Darstellung eines **Regelkreises** zu sehen. Das zu beeinflussende System wird **Regelstrecke** oder kurz **Strecke** genannt. Diejenigen Größen der Regelstrecke, deren Verläufe kontrolliert werden sollen, sind die so genannten **Regelgrößen**. Diese werden als messbar vorausgesetzt. Die vorgebbaren Eingangsgrößen der Regelstrecke,

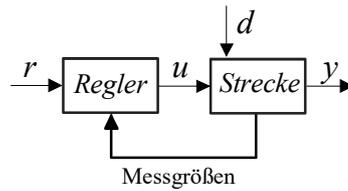


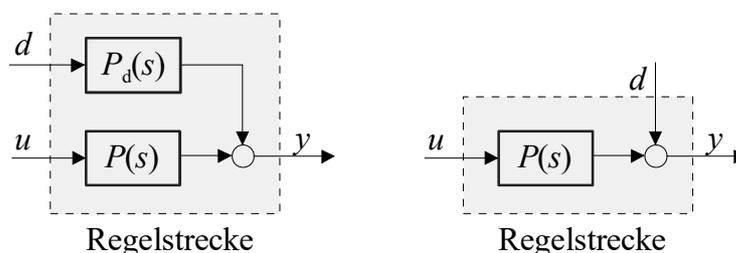
Bild 1.1: Regelkreis, allgemeine Darstellung

also diejenigen Größen, die eine Beeinflussung der Regelgrößen erlauben, sind die so genannten **Stellgrößen**. Im Rahmen dieses Skriptums wird vorausgesetzt, dass es genau *eine* Stellgröße  $u(t)$  und *eine* Regelgröße  $y(t)$  gibt, d.h. die Strecke ist ein Eingrößensystem. Der Wunschverlauf der Regelgröße wird in Form der **Führungsgröße** oder **Referenzgröße**  $r(t)$  vorgegeben. Der **Regelfehler**  $e(t)$  repräsentiert die Abweichung der Regelgröße von der Führungsgröße, d.h.  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Soll  $y(t)$  dem Verlauf von  $r(t)$  folgen, so spricht man von einer **Folgeregelung** oder **Nachführung**. Wenn  $y(t)$  hingegen auf einem konstanten Wert gehalten werden soll - was natürlich auch als Vorgabe einer konstanten Führungsgröße interpretiert werden kann - handelt es sich um eine **Festwertregelung**. Der **Regler** bzw. das **Regelgesetz** generiert aus gegebenen bzw. messbaren Signalen die Stellgröße  $u(t)$  so, dass die Regelgröße  $y(t)$  der Führungsgröße  $r(t)$  trotz des Einwirkens einer **Störgröße**  $d(t)$  „möglichst gut“ entspricht. Diese unscharfe Ausdrucksweise soll verdeutlichen, dass die Güte bzw. Qualität einer Regelung, die so genannte **Regelgüte**, nicht eindeutig definiert werden kann. In späteren Kapiteln wird sich zeigen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, die Regelgüte sinnvoll zu definieren. Allen Definitionen ist allerdings gemeinsam, dass sie die Stabilität des Regelkreises voraussetzen.

In weiterer Folge wird angenommen, dass die Regelstrecke im relevanten Arbeitsbereich durch ein lineares, zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  hinreichend genau approximiert werden kann. Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen  $y$  und  $u$  bzw.  $d$  im Bildbereich durch die Relation

$$\bar{y}(s) = P(s) \bar{u}(s) + P_d(s) \bar{d}(s) \quad (1.1)$$

dargestellt werden kann, siehe hierzu auch Bild 1.2, links. Die beiden Übertragungsfunktionen

Bild 1.2: Einfluss von  $d$  und  $u$  auf die Regelgröße  $y$ 

$P(s)$  und  $P_d(s)$  sind gebrochen rationale Funktionen, d.h. sie können als Quotienten von Poly-

nomen in  $s$  dargestellt werden. Dabei wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die so genannte „Streckenübertragungsfunktion“  $P(s)$ , die das Verhalten der störungsfreien Strecke ( $d = 0$ ) beschreibt, nicht sprungfähig ist, d.h. der Nennerpolynomgrad  $n$  der Übertragungsfunktion ist größer als der Zählerpolynomgrad. Im Gegensatz dazu wird angenommen, dass  $d$  einen *unmittelbaren* Einfluss auf  $y$  besitzt, d.h.  $P_d(s)$  repräsentiert ein sprungfähiges System, bei dem der Zählerpolynomgrad dem Nennerpolynomgrad entspricht. Sehr häufig wird auch vereinfachend angenommen, dass die Störung  $d$  *direkt* auf die Regelgröße  $y$  wirkt, d.h.  $P_d(s) = 1$ , siehe Bild 1.2, rechts. Mit dieser Annahme wird der Tatsache Rechnung getragen, dass der Einfluss einer unbekanntenen und nicht messbaren „inneren“ Störung ohnehin nur mittels des gemessenen Verlaufs von  $y$  erfasst werden kann. Die tatsächliche Störgröße wird also in eine äquivalente Störung am Streckenausgang umgerechnet.

Die Streckenbeschreibung kann auch in Form eines Zustandsmodells der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{h}d \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + g d\end{aligned}\quad (1.2)$$

erfolgen, wobei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$  Matrix ist,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$  und  $\mathbf{c}$  sind  $n$ -dimensionale Spaltenvektoren und  $g$  ist eine reelle Konstante. Der Zustand der Regelstrecke wird durch den Vektor

$$\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x \ \dots \ x_n]^T$$

beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen (1.1) und (1.2) ist durch die Relation

$$P(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad P_d(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{h} + g \quad (1.3)$$

gegeben.

In Bild 1.3 ist exemplarisch der so genannte **Standardregelkreis** dargestellt, er repräsentiert den klassischen Regelkreis schlechthin. Die Eingangsgröße des Reglers ist hier der Regelfehler, d.h. die Abweichung zwischen gewünschtem und tatsächlichem Verlauf der Regelgröße. Es wird sich später zeigen, dass es oft auch sinnvoll ist, andere Regelkreis-Strukturen zu wählen. Die in weiterer Folge für den Standardregelkreis eingeführten Begriffe sind allgemeingültig, die zugehörigen Berechnungsvorschriften müssen allerdings an die jeweilige Regelkreisstruktur angepasst werden.

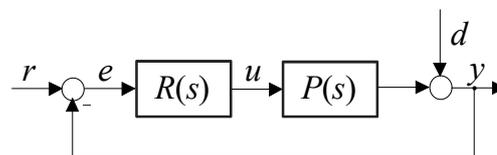


Bild 1.3: Standardregelkreis

Der Regler wird als lineares, zeitinvariantes System angesetzt. Im Fall des Standardregelkreises bedeutet dies, dass der Regler durch eine Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} \quad (1.4)$$

dargestellt werden kann. Der Regler wird im Allgemeinen als sprunghafes System angesetzt, da es wünschenswert ist, dass sich sprunghafte Änderungen am Reglereingang unmittelbar am Reglerausgang auswirken. Der Zusammenhang zwischen Regelgröße  $y$  und Führungsgröße  $r$  sowie Störgröße  $d$  kann im Bildbereich durch die Relation

$$\bar{y}(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \bar{r}(s) + \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \bar{d}(s) \quad (1.5)$$

ausgedrückt werden. Wie man erkennen kann, wird das **Führungsverhalten** durch die so genannte **Führungsübertragungsfunktion**

$$T(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} \right|_{d=0} = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad (1.6)$$

beschrieben, während das **Störverhalten** durch die **Störübertragungsfunktion**

$$S(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}(s)} \right|_{r=0} = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \quad (1.7)$$

charakterisiert ist.

## 1.3 Beispiele

### 1.3.1 Drehzahlregelung mit Hilfe des Fliehkraftreglers

Im Jahr 1788 wurde von Watt und Boulton<sup>1</sup> der in Bild 1.4 dargestellte Fliehkraftregler zur Drehzahlregelung von Dampfmaschinen eingesetzt. Ursprünglich wurde dieses Regelungskonzept zur Drehzahlregelung bei Windmühlen mittels mechanischer Flügelverstellung entwickelt. Der Mechanismus besteht im Wesentlichen aus einem Fliehkraftpendel durch dessen Bewegung die Dampfzufuhr zur Dampfmaschine über einen Hebel verstellt wird. Im Ruhezustand ist die Dampfleitung vollständig geöffnet, mit der Kolbenbewegung der Dampfmaschine beginnt sich das Fliehkraftpendel zu drehen. Mit sich ändernder Drehzahl  $n$  werden die zwei rotierenden Gewichte aufgrund der Fliehkraft angehoben bzw. abgesenkt. Über einen Hebelmechanismus wird in der Dampfleitung eine Drossel (Klappe oder Schieber) betätigt, bis sich ein Gleichgewichtszustand von Dampfzufuhr und Drehzahl einstellt. Die Struktur des Regelkreises ist in Bild 1.5 dargestellt. Der Fliehkraftregler, bestehend aus Fliehkraftpendel und Hebelmechanismus fungiert hier als Drehzahlsensor und Regler, die auf diese Weise generierte Stellgröße wird durch das so genannte Stellglied, im vorliegenden Fall durch den Schieber mechanisch umgesetzt. Der gewünschte Soll-Wert für die Drehzahl kann über die Verschiebung des Angelpunktes am Hebel eingestellt werden.

### 1.3.2 Regelung der Raumtemperatur

Die Einstellung einer gewünschten Temperatur in Wohn- oder Büroräumen erfolgt in vielen Fällen mit Hilfe einer Temperaturregelung. Dabei erfasst ein Sensor fortlaufend die Raumtemperatur, die im Steuergerät mit einer vorgebbaren Wunschtemperatur verglichen wird. Abhängig von der Abweichung zwischen Soll- und Ist-Temperatur wird das Heizungsventil vom

<sup>1</sup>James Watt (1736 - 1819), Matthew Boulton (1728 - 1809)

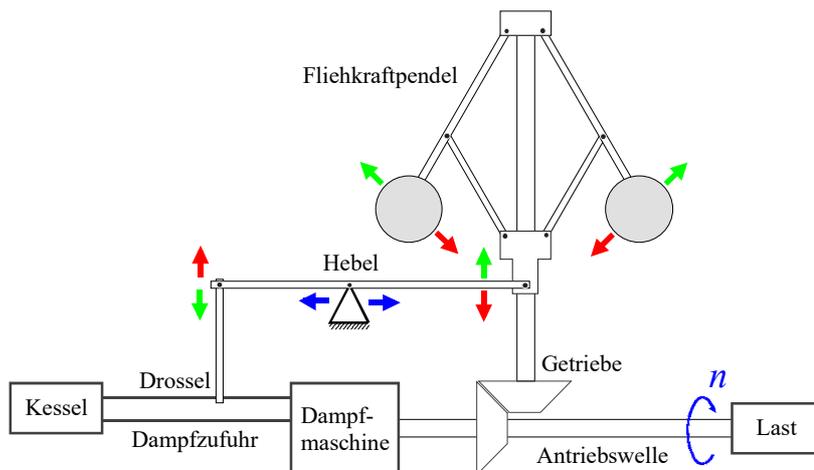


Bild 1.4: Drehzahlregelkreis mit Flihkraftregler

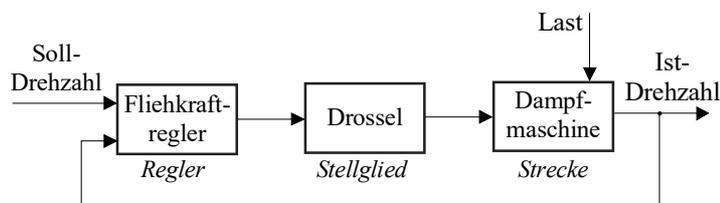


Bild 1.5: Struktur der Drehzahlregelung

Regler mehr oder weniger stark geschlossen oder geöffnet. Je nach Reglertyp kann die Wunschttemperatur auf diese Weise exakt oder mit einem hinreichend kleinen, d.h. nicht wahrnehmbaren Fehler eingestellt werden. Einflüsse durch Störungen, wie geöffnete Fenster oder Witterungseinflüsse können aufgrund des geschlossenen Wirkungskreises unterdrückt werden. In vielen Fällen wird zusätzlich zur Raumtemperatur auch die Aussentemperatur gemessen. Diese Information über eine wesentliche Störgröße kann zur Verbesserung der Leistungsfähigkeit des Regelkreises genutzt werden, man spricht auch von einer **Störgrößenaufschaltung**.

### 1.3.3 Der Pupillenapparat des Menschen

Der so genannte Pupillarapparat des Menschen hat die Aufgabe, die Intensität des auf die Netzhaut des Auges einfallenden Lichtes konstant zu halten<sup>2</sup>. Dies wird durch eine gezielte Verstellung der Pupillenfläche mittels der Irismuskulatur erreicht. Fotorezeptoren in der Netzhaut fungieren als Sensoren, die nicht nur die Lichtintensität, sondern auch deren zeitliche Änderung detektieren. Aus den Sensorinformationen werden im Zentralnervensystem (ZNS) entsprechende Maßnahmen zur Verstellung der Pupillenfläche abgeleitet. Bei der Pupillenregelung handelt es sich somit um eine Festwertregelung, Lichtintensitätsschwankungen in der

<sup>2</sup>bei besonders starken Intensitätsschwankungen erfolgt eine zusätzliche Adaption, die auf chemischen Mechanismen beruht.

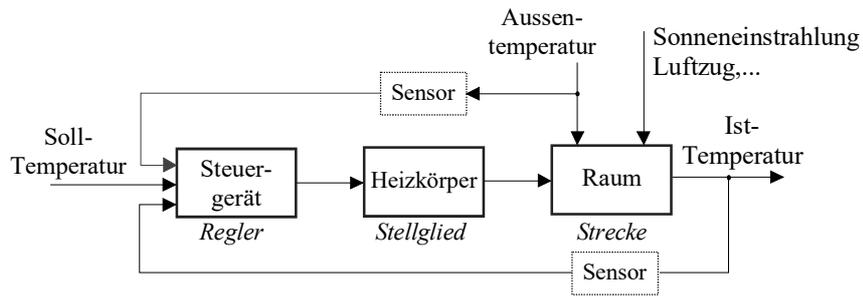


Bild 1.6: Struktur der Temperaturregelung

Außenwelt wirken als Störungen. Die Struktur dieses wichtigen biologischen Regelkreises ist in Bild 1.7 dargestellt.

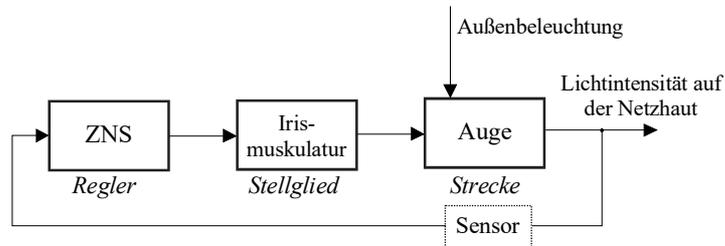


Bild 1.7: Pupillarapparat als Regelkreis

# Kapitel 2

## PID-Regler

### 2.1 Einführung

PID-Regler sind dadurch charakterisiert, dass sich ihre Wirkung aus drei Komponenten zusammensetzt, nämlich einem proportionalen Anteil („P-Anteil“), einem integrierenden Anteil („I-Anteil“) sowie einem differenzierenden Anteil („D-Anteil“). Aufgrund ihrer strukturellen Einfachheit (und auch aus traditionellen Gründen) sind PID-Regler im industriellen Einsatz oft die erste - wenngleich in vielen Fällen nicht die beste - Wahl. Die Einstellung der Regler erfolgt meistens empirisch, unter Zuhilfenahme von Expertenwissen, oder auf Basis so genannter Einstellregeln, also „Kochrezepten“ zur Reglerauslegung.

In den folgenden Abschnitten wird davon ausgegangen, dass die zu regelnde Strecke ein Eingrößensystem ist, die Regelkreisstruktur ist der Standardregelkreis. Zunächst werden die Grundlagen der PID-Regelung erläutert, einige wichtige Begriffe erklärt und verschiedene Realisierungsformen vorgestellt. Danach wird der so genannte Windup-Effekt beschrieben und einfache Gegenmaßnahmen werden vorgestellt. Den Abschluss des Kapitels bilden einige Einstellregeln, mit deren Hilfe geeignete Reglerparameter ermittelt werden können.

### 2.2 Parallelrealisierung - die Lehrbuchform

Diese Reglerform zeichnet sich dadurch aus, dass die Anteile (P, I und D) durch drei parallele Zweige realisiert sind (siehe Bild 2.1), man spricht daher von der Parallelrealisierung eines PID-Reglers. Da in dieser Form Modifikationen bzw. Erweiterungen fehlen, die in industriellen PID-Reglern zu finden sind, spricht man auch von der Lehrbuchform des PID-Reglers.

Die Stellgröße  $u(t)$  setzt sich aus drei Komponenten zusammen, die proportional zum Regelfehler  $e(t)$ , zum zeitlichen Integral über den Regelfehler sowie zur zeitlichen Ableitung des Regelfehlers sind. Es gilt somit

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.1)$$

wobei  $K_P$ ,  $K_I$  und  $K_D$  reelle Konstanten sind. Durch Veränderung dieser Gewichtungsfaktoren können die einzelnen Anteile unabhängig voneinander eingestellt werden, sie sind also

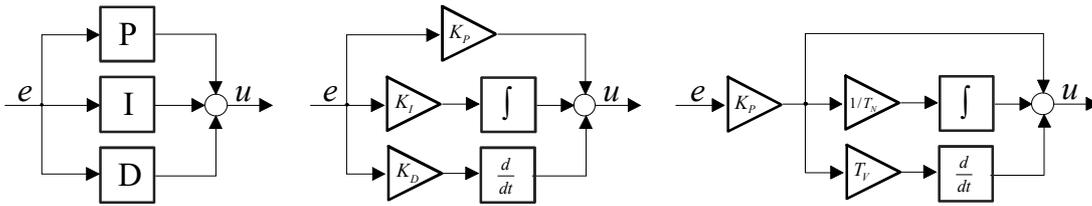


Bild 2.1: Parallelrealisierung eines PID-Reglers

entkoppelt<sup>1</sup>.

Häufig wird auch die in der DIN 19226 vorgeschlagene Realisierung verwendet, nämlich

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_V \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnen die Konstanten  $K_P$ ,  $T_N$  und  $T_V$  den Proportionalbeiwert, die Nachstellzeit und die Vorhaltezeit, der Ursprung dieser Bezeichnungen wird später erläutert. Man beachte, dass bei der Realisierung (2.2) die oben erwähnte Entkopplung der einzelnen Anteile verloren geht. Vergleicht man nämlich (2.1) und (2.2) so findet man die Zusammenhänge

$$K_I = \frac{K_P}{T_N} \quad \text{bzw.} \quad K_D = K_P T_V, \quad (2.3)$$

d.h. bei einer Änderung von  $K_P$  verändern sich auch die Konstanten  $K_I$  und  $K_D$ . Eine Vergrößerung der Nachstellzeit  $T_N$  entspricht einer Reduktion der Gewichtung des I-Anteils, d.h. für  $T_N \rightarrow \infty$  wird der I-Anteil deaktiviert. In Tabelle 1 sind die üblicherweise eingesetzten Konfigurationen von PID-Reglern dargestellt.

Reglertyp	$K_P$	$K_I$	$K_D$	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	*	0	0	*	$\infty$	0
PI-Regler	*	*	0	*	*	0
PD-Regler	*	0	*	*	$\infty$	*
PID-Regler	*	*	*	*	*	*
	Realisierung (2.1)			Realisierung (2.2)		

Tabelle 1: Konfiguration von Standardreglern

<sup>1</sup>engl.: non-interacting

Weiters ist zu beachten, dass in (2.1) bzw. (2.2) die - praktisch nicht mögliche - Durchführung einer *idealen* zeitlichen Differentiation erforderlich ist. Das bedeutet, dass die zugehörige Reglerübertragungsfunktion nicht realisierbar ist, d.h. ihr Zählergrad ist größer als ihr Nennergrad. Für einen PID-Regler gemäß (2.2) ergibt sich beispielsweise die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right) = K_P \frac{1 + sT_N + s^2T_N T_V}{sT_N}. \quad (2.4)$$

Ersetzt man das D-Element durch ein so genanntes DT<sub>1</sub>-Element, also durch einen Differenzierer mit Verzögerungsverhalten, so lautet die nunmehr realisierbare Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1 + sT_R} \right) = K_P \frac{1 + sT_N(1 + T_R/T_N) + s^2T_N T_V(1 + T_R/T_V)}{sT_N(1 + sT_R)}. \quad (2.5)$$

In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem realen PID-Regler bzw. von einem PID-T<sub>1</sub> Regler. Hierbei ist zu beachten, dass die Konstante  $T_R$  hinreichend klein gewählt werden muss, d.h.

$$\frac{T_R}{T_V} \ll 1.$$

Für die Sprungantwort, d.h.  $e(t) = \sigma(t)$ , des realen PID-Reglers gilt

$$u(t) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_N} t + \frac{T_V}{T_R} e^{-\frac{t}{T_R}} \right),$$

in Bild 2.2 ist der zugehörige Verlauf der Stellgröße graphisch dargestellt.

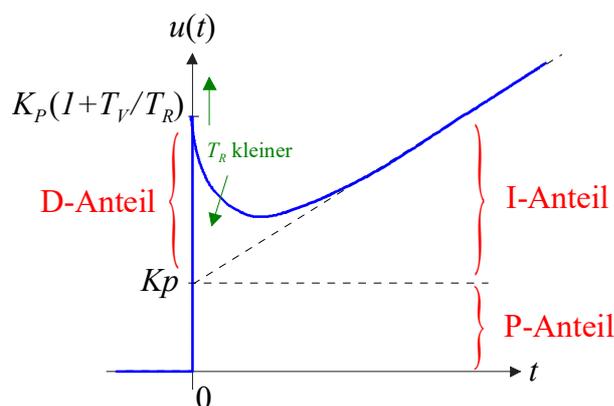


Bild 2.2: Sprungantwort eines realen PID-Reglers

### Nachstellzeit

Der Begriff der Nachstellzeit  $T_N$  eines PI-Reglers (d.h. „D-Anteil=0“) kann mittels seiner Sprungantwort interpretiert werden. Dazu wird als Eingangsgröße des Reglers der Ein-

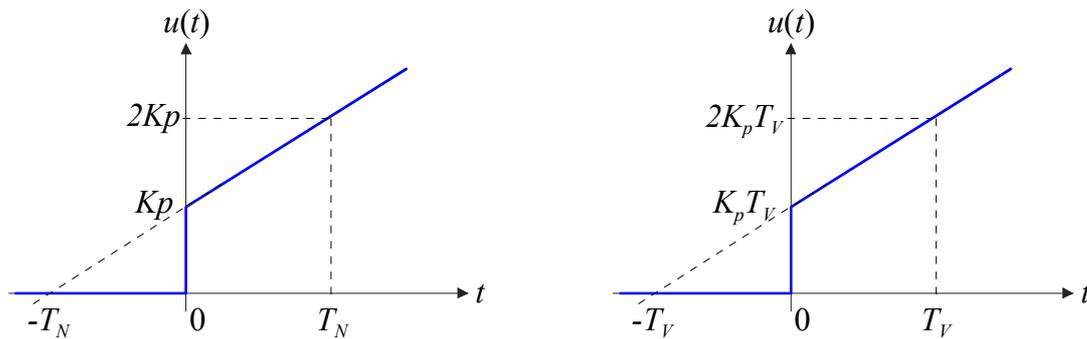


Bild 2.3: Sprungantwort PI-Regler (links) bzw. Rampenantwort PD-Regler (rechts)

heittsprung gewählt, also  $e(t) = \sigma(t)$ . Für den zugehörigen Verlauf der Ausgangsgröße  $u(t)$  gilt dann offensichtlich

$$u(t) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_N} t \right).$$

Das bedeutet, dass sich die Stellgröße aus zwei Komponenten zusammensetzt. Während der P-Anteil des Reglers einen konstanten Stellgrößenanteil  $K_P$  bewirkt, liefert der I-Anteil einen rampenförmigen Anteil  $\frac{K_P}{T_N} t$ . Wie leicht zu erkennen ist, siehe hierzu auch Bild 2.3, sind die beiden Stellgrößenanteile zum Zeitpunkt  $t = T_N$  genau gleich groß. Somit kann die Nachstellzeit als diejenige Zeit interpretiert werden, die der I-Anteil bei einer sprungförmigen Änderung des Regelfehlers braucht, um einen gleich großen Beitrag zur Stellgröße zu liefern wie der P-Anteil.

### Vorhaltezeit

Die Vorhaltezeit  $T_V$  kann auf ähnliche Art und Weise gedeutet werden, wie die Nachstellzeit. Wählt man nämlich als Eingangsgröße eines idealen PD-Reglers eine Rampe, d.h.  $e(t) = t$ , so ergibt sich für den entsprechenden Verlauf der Stellgröße

$$u(t) = K_P (t + T_V).$$

Wieder setzt sich die Stellgröße aus zwei Anteilen zusammen, die offensichtlich zum Zeitpunkt  $t = T_V$  den gleichen Wert annehmen. Die Vorhaltezeit ist somit diejenige Zeit, die der P-Anteil bei einer rampenförmigen Änderung des Regelfehlers benötigt, um einen gleich großen Beitrag zur Stellgröße zu liefern wie der D-Anteil, siehe auch Bild 2.3.

### Proportionalband

Ein oft verwendeter Begriff ist das so genannte Proportionalband  $PB$ . Dabei wird berücksichtigt, dass Regelfehler  $e$  und Stellgröße  $u$  in gewissen Bereichen liegen, also

$$e \in [e_{\min}, e_{\max}] \quad \text{bzw.} \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}].$$

Für die Schwankungen von  $e$  und  $u$  gilt somit

$$e_S = e_{\max} - e_{\min} \quad \text{bzw.} \quad u_S = u_{\max} - u_{\min}.$$

Ändert sich der Regelfehler um den Wert  $\Delta e$ , so gilt für den P-Anteil der Stellgröße

$$\Delta u = K_P \Delta e.$$

Das Proportionalband  $PB$  gibt nun an, um wieviel Prozent von  $e_S$  sich das Fehlersignal ändern muss, um eine Änderung  $\Delta u = u_S$  zu bewirken, d.h.

$$\Delta e = \frac{PB}{100} e_S \quad \Rightarrow \quad \Delta u = K_P \Delta e = K_P \frac{PB}{100} e_S = u_S.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$PB = \frac{100}{K_P} \frac{u_S}{e_S} \quad \text{in \%}. \quad (2.6)$$

## 2.3 Serienrealisierung (nicht prüfungsrelevant)

Im praktischen industriellen Einsatz wird häufig die so genannte Seriendarstellung eingesetzt. Die Ursachen hierfür sind manchmal technischer Natur, in vielen Fällen wird die Serienstruktur

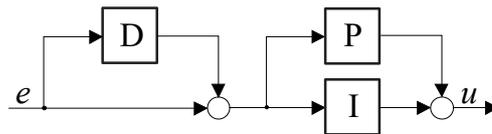


Bild 2.4: Seriendarstellung eines PID-Reglers

aber nur aus traditionellen Gründen eingesetzt. In Bild 2.4 ist die Struktur der Serienrealisierung dargestellt, die entsprechende Übertragungsfunktion lautet

$$R(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right) (1 + sT_D), \quad (2.7)$$

wobei hier wieder ideale Differentiation vorausgesetzt wird und die Parameter  $K$ ,  $T_D$  und  $T_I$  reell sind. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$R(s) = K \frac{T_I + T_D}{T_I} \left( 1 + \frac{1}{T_I + T_D} \frac{1}{s} + s \frac{T_D T_I}{T_I + T_D} \right), \quad (2.8)$$

durch einen Vergleich mit (2.4) findet man unmittelbar die entsprechenden Kenngrößen der Parallelrealisierung, nämlich

$$K_P = K \frac{T_I + T_D}{T_I}, \quad T_N = T_I + T_D, \quad T_V = \frac{T_D T_I}{T_I + T_D} \quad (2.9)$$

bzw.

$$T_D = \frac{T_N}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{T_V}{T_N}} \right), \quad T_I = T_N - T_D, \quad K = K_P \frac{T_I}{T_N}. \quad (2.10)$$

Man beachte, dass - im Gegensatz zur Parallelrealisierung - bei der Reglerübertragungsfunktion (2.7) der Serienrealisierung ausschließlich reelle Nullstellen eingestellt werden können.

**B** Gegeben sei ein PID-Regler der Form (2.2) mit den Reglerparametern

$$K_P = 1, T_N = 1 \quad \text{und} \quad T_V = 1.$$

Eine Serienrealisierung dieses Reglers ist *nicht* möglich, da die zugehörige Reglerübertragungsfunktion (2.4) ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar besitzt. Diese Tatsache manifestiert sich auch darin, dass die Auswertung von (2.10) keine rein reellen Lösungen für  $K$ ,  $T_I$  und  $T_D$  liefert.

Wählt man hingegen

$$K_P = 1, T_N = 1 \quad \text{und} \quad T_V = 0.1,$$

so findet man mittels (2.8) die *beiden* möglichen Serienrealisierungen mit den Parametern

$$K = 0.1127, T_I = 0.1127 \quad \text{und} \quad T_D = 0.8873$$

bzw.

$$K = 0.8873, T_I = 0.8873 \quad \text{und} \quad T_D = 0.1127.$$

■

## 2.4 Praktische Realisierungen

Erfahrungen aus unzähligen praktischen Anwendungen von PID-Reglern sind der Ursprung mannigfaltiger Erweiterungen bzw. Modifikationen der ursprünglichen Reglerstruktur. Das Ziel dieser Erweiterungen besteht darin, unvorteilhafte Eigenschaften der elementaren PID-Struktur zu bekämpfen. Im Folgenden werden exemplarisch zwei besonders wichtige Erweiterungen des Standard-Reglers vorgestellt.

### 2.4.1 I-PD-Regler und PI-D-Regler

Bei einem abrupten Arbeitspunktwechsel, d.h. bei einer sprunghaftigen Änderungen der Referenzgröße  $r$  ändert sich im Standardregelkreis der Regelfehler  $e$  aufgrund der „Trägheit“ der Regelstrecke ebenfalls sprunghaft. Daraus resultiert im „normalen“ PID-Regler eine sprunghafte Änderung des P-Anteils der Stellgröße („proportional kick“) und ein impulsartiger Verlauf des D-Anteils der Stellgröße („derivative kick“). Eine solch starke Anregung der Regelstrecke bei einem Arbeitspunktwechsel ist oft aber unerwünscht, da sie zu einer unnötigen Beanspruchung des Stellgliedes bzw. der Regelstrecke führt. Um diesem Problem zu begegnen, wird oft ein Regelgesetz der Form

$$u(t) = K_P e_P(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de_D(t)}{dt} \quad (2.11)$$

eingesetzt. Hierbei gilt

$$e_P(t) = br(t) - y(t) \quad \text{und} \quad e_D(t) = cr(t) - y(t), \quad (2.12)$$

wobei über die vorgebbaren Konstanten  $b$  und  $c$  der Einfluss der (unstetigen) Referenzgröße auf  $e_P$  bzw.  $e_D$  eingestellt - und gegebenenfalls sogar eliminiert - werden kann. Für die Wahl  $b = c = 0$  ergibt sich beispielsweise der in Bild 2.5 dargestellte I-PD-Regler, mit  $b = 1$  und  $c = 0$  ergibt sich der PI-D-Regler.

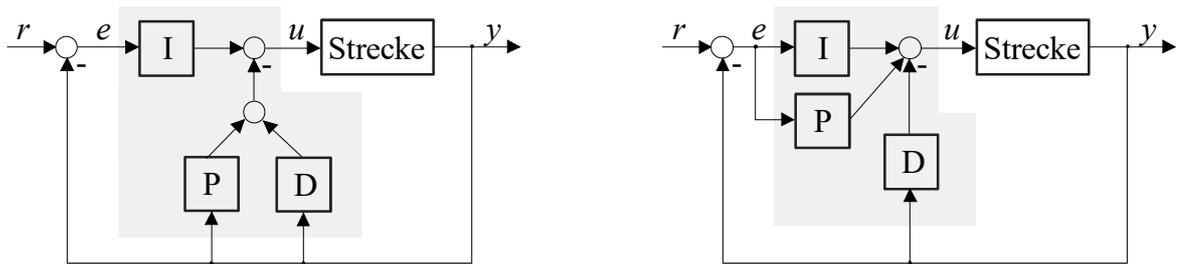


Bild 2.5: Struktur des I-PD-Reglers (links) und des PI-D-Reglers (rechts)

### 2.4.2 Windup-Effekt und Gegenmaßnahmen

Grundsätzlich ist beim Entwurf von Regelkreisen immer zu beachten, dass in praktischen Anwendungen die Stellgröße betragsmäßig beschränkt ist, also nicht beliebige Werte annehmen kann. Dieser Effekt kann mit Hilfe der in Bild 2.6 in den Standardregelkreis eingefügten Sättigungsfunktion nachgebildet werden, es gilt

$$u^*(t) = \text{sat } u(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } |u(t)| \leq u_{\max} \\ u_{\max} \text{ sign } u(t) & \text{für } |u(t)| \geq u_{\max} \end{cases},$$

wobei die positive, reelle Konstante  $u_{\max}$  den maximal zulässigen Betrag der Stellgröße repräsentiert. Man beachte, dass durch das „Ansprechen“ der Sättigungsfunktion die Regel-

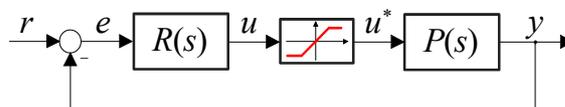


Bild 2.6: Standardregelkreis mit Stellgrößenbeschränkung

güte des Regelkreises dramatisch verschlechtert werden kann, im schlimmsten Fall kann es sogar zur Destabilisierung kommen.

Bei Reglern mit Integralanteil, also auch bei PID-Reglern, kann der so genannte „Windup-Effekt“ auftreten. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass es beispielsweise bei einem abrupten



für PID-Regler.

**B** Gegeben sei eine Regelstrecke, deren dynamisches Verhalten im interessierenden Betriebsbereich durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s + 0.9}{s^2 + 0.5s + 1}$$

beschrieben werden kann. Für die betragsmäßig beschränkte Stellgröße  $u$  gilt

$$|u(t)| \leq u_{\max} = 1.5.$$

Als Regler wurde ein PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{s T_N} \right) \quad \text{mit} \quad K_P = 3, \quad T_N = 0.5$$

ausgewählt. Weiters wurde die in Bild 2.7 dargestellte Anti-Windup-Maßnahme realisiert, wobei

$$T_a = 0.1$$

gesetzt wurde. In Bild 2.8 sind die Verläufe der Regelgröße  $y$  und der Stellgröße  $u$  graphisch dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass es ohne Anti-Windup-Maßnahme (blaue Kurven) zu einem starken Überschwingen der Regelgröße kommt, was auf das oben beschriebene „Aufwickeln“ des Integrieres zurück zu führen ist. ■

## 2.5 Einstellregeln für PID-Regler

Mit Hilfe von so genannten Einstellregeln können die Reglerparameter von PID-Reglern relativ geradlinig ermittelt werden. Die hierfür benötigten charakteristischen Streckenparameter werden experimentell ermittelt. Die gesuchten Reglerparameter werden dann als Funktion dieser Streckenparameter angegeben, die entsprechenden Relationen sind tabellarisch zusammengefasst. Man beachte, dass hier nur einige der unzähligen Einstellregeln für PID-Regler vorgestellt werden. Weiters ist zu beachten, dass die mittels der Einstellregeln gefundenen Reglerparameter nur als Ausgangspunkt für die Reglerauslegung dienen, die endgültigen Werte der Parameter werden durch nachfolgendes „Feintuning“ ermittelt.

### 2.5.1 Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Die beiden Methoden nach Ziegler und Nichols wurden im Jahr 1942 vorgestellt und gehören seitdem zu den klassischen Einstellregeln für PID-Regler. Man unterscheidet zwischen der Wendetangenten-Methode („open-loop method“) und der Stabilitätsrand-Methode („closed loop method“). Erfahrungsgemäß führt die Anwendung der Ziegler-Nichols Regeln im Allgemeinen zu schwach gedämpften Regelkreisen.

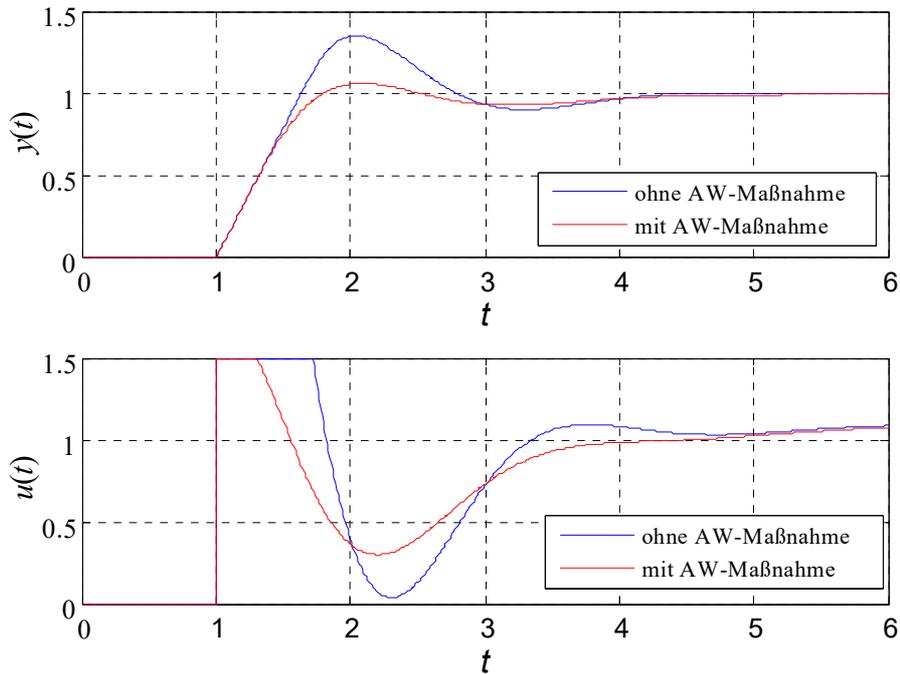


Bild 2.8: Verläufe von Regelgröße (Bild oben) und Stellgröße (Bild unten) ohne und mit Anti-Windup Maßnahme

### Wendetangenten-Methode

Bei diesem Verfahren wird vorausgesetzt, dass die Sprungantwort der Regelstrecke gefahrlos experimentell ermittelt werden kann. Wie in Bild 2.9 angedeutet, wird die Wendetangente der Sprungantwort eingezeichnet und die Streckenverstärkung  $K_S$ , die Verzugszeit  $T_v$  und die Ausgleichszeit  $T_g$  werden abgelesen. Die Reglerdimensionierung erfolgt dann mit Hilfe von Tabelle 2.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{T_g}{K_S T_v}$	$\infty$	0
PI-Regler	$0.9 \frac{T_g}{K_S T_v}$	$3.33 T_v$	0
PID-Regler	$1.2 \frac{T_g}{K_S T_v}$	$2 T_v$	$0.5 T_v$

Tabelle 2: Reglerparameter, Wendetangenten-Methode

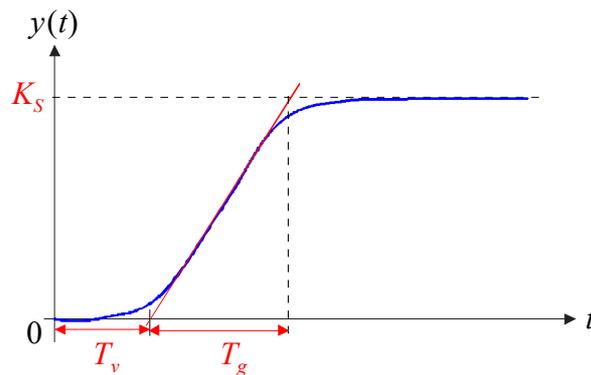


Bild 2.9: Zur Wendetangenten-Methode nach Ziegler-Nichols

### Stabilitätsrand-Methode

Bei diesem Ansatz werden die benötigten Streckeninformationen aus dem dynamischen Verhalten des geschlossenen Regelkreises ermittelt, wobei als Regler zunächst ein P-Glied verwendet wird. Der Verstärkungsfaktor des P-Reglers wird solange variiert, bis die Regelgröße  $y$  bei sprungförmiger Änderung der Referenzgröße eine ungedämpfte Schwingung vollführt, das System wird also bis an den „Stabilitätsrand“ gebracht. Die Periodendauer  $T_k$  der Schwingung wird kritische Periode genannt, der zugehörige Verstärkungsfaktor des Reglers wird mit  $K_k$  bezeichnet. Die Reglerdimensionierung basiert auf den in Tabelle 3 angegebenen Relationen.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$0.5 K_k$	$\infty$	0
PI-Regler	$0.4 K_k$	$0.8 T_k$	0
PID-Regler	$0.6 K_k$	$0.5 T_k$	$0.12 T_k$

Tabelle 3: Reglerparameter, Stabilitätsrand-Methode

Bei "trägen" Regelstrecken, also Systemen mit sehr großer dominanter Zeitkonstante, kann die Durchführung der Stabilitätsrand-Methode mit einem großen zeitlichen Aufwand verbunden sein. Durch leichte Modifikationen kann die Methode auch zum "Autotuning", d.h. zur selbständigen Einstellung, von Reglerparametern eingesetzt werden. Dabei wird der P-Regler durch ein geeignetes nichtlineares Element ersetzt. Dies hat zur Folge, dass sich die Dauerschwingung der Regelgröße automatisch einstellt.

### 2.5.2 Methode der Summenzeitkonstante („T-Summen Regel“)

Aus der Sprungantwort der Regelstrecke wird die Streckenverstärkung  $K_S$  und die so genannte Summenzeitkonstante  $T_\Sigma$  abgelesen. Wie in Bild 2.10 zu erkennen ist, sind für  $t = T_\Sigma$  die

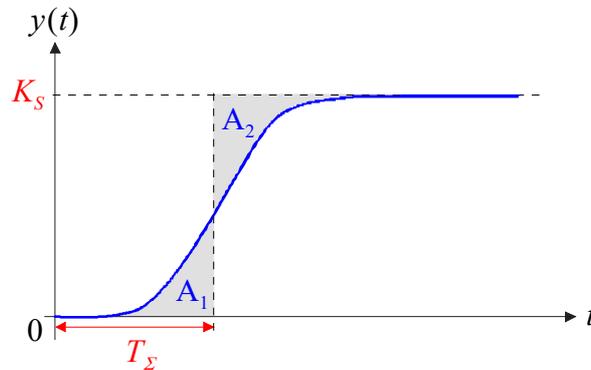


Bild 2.10: Zur Methode der Summenzeitkonstante

beiden Flächen  $A_1$  und  $A_2$  gleich groß. Die Erfahrung zeigt, dass die Ermittlung von  $T_\Sigma$  auch bei stark verrauschter Sprungantwort hinreichend genau durchgeführt werden kann - ganz im Gegensatz zur Wendetangente beim Ziegler-Nichols Verfahren. Die Summenzeitkonstante ist offensichtlich ein Maß für die „Reaktionsfreudigkeit“ des Systems, d.h. je kleiner  $T_\Sigma$  ist, umso schneller reagiert der Streckenausgang auf sprunghafte Änderungen am Streckeneingang. In Tabelle 4 sind die vorgeschlagenen Reglereinstellungen zusammengefasst.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$\infty$	0
PI-Regler	$\frac{1}{2 K_S}$	$0.5 T_\Sigma$	0
PD-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$\infty$	$0.33 T_\Sigma$
PID-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$0.66 T_\Sigma$	$0.17 T_\Sigma$

Tabelle 4: Reglerparameter, T-Summen Regel

# Kapitel 3

## Frequenzkennlinien und Ortskurven

### 3.1 Einführung

Der so genannte Frequenzgang beschreibt den eingeschwungenen Zustand eines linearen, zeit-invarianten Systems bei harmonischer Erregung. Dabei wird hier vorausgesetzt, dass das betrachtete System BIBO-stabil ist, d.h. seine Übertragungsfunktion  $G(s)$  besitzt ausschließlich Pole mit negativem Realteil. Weiters wird vereinfachend vorausgesetzt, dass alle Pole von  $G(s)$  *einfach* sind, die gefundenen Ergebnisse gelten allerdings auch für den allgemeinen Fall mehrfacher Pole. Als Eingangsgröße  $u(t)$  wird nun die komplexe harmonische Funktion

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad \bullet \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s - j\omega} \quad (3.1)$$

gewählt<sup>1</sup>. Für die zugehörige Ausgangsgröße  $y(t)$  gilt im Bildbereich

$$\bar{y}(s) = G(s) \frac{1}{s - j\omega} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \frac{1}{s - j\omega},$$

eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = \frac{c_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Für den Koeffizienten  $c_0$  findet man

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \bar{y}(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[ (s - j\omega) G(s) \frac{1}{(s - j\omega)} \right] = G(j\omega),$$

d.h.

$$\bar{y}(s) = \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass es sich hier um ein reines Gedankenexperiment handelt.

Für die zugehörige Zeitfunktion gilt nun

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}.$$

Für „sehr große Werte von  $t$ “, also im so genannten *eingeschwungenen Zustand* gilt

$$y(t) \approx G(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (3.2)$$

d.h. die Ausgangsgröße entspricht der mit  $G(j\omega)$  gewichteten Eingangsgröße. Diese komplexe Funktion

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \quad (3.3)$$

ist der **Frequenzgang** des Systems. Salopp formuliert beschreibt er, wie sich im eingeschwungenen Zustand die Amplitude und die Phasenlage der harmonischen Eingangsgröße beim Durchlaufen des Systems verändern. Man beachte, dass die Eingangsgröße (3.1) als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion dargestellt werden kann, d.h.

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Nach (3.2) und (3.3) gilt im eingeschwungenen Zustand für die zugehörige Ausgangsgröße

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg G(j\omega))} = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \arg G(j\omega)) + j |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)).$$

Aus der Linearität der Laplace-Transformation und des Systems kann daher unmittelbar gefolgert werden, dass im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$\begin{aligned} u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi) &\quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \arg G(j\omega)) \\ u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi) &\quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg G(j\omega)) \end{aligned}$$

**B** Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Für eine Eingangsgröße  $u(t) = 3 \sin t$  ergibt sich für den Verlauf von  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) \approx 3 |G(j)| \sin(t + \arg G(j)) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

■

Für jeden Wert von  $\omega$  ergibt sich also eine komplexe Zahl  $G(j\omega)$ . Die graphische Darstellung dieser komplexen Zahlen in der komplexen Ebene als Funktion von  $\omega$  wird *Frequenzgangs-Ortskurve* oder kurz Ortskurve genannt. In den so genannten **Frequenzkennlinien** werden jeweils Betrag und Phase von  $G(j\omega)$  über  $\omega$  dargestellt, man spricht in diesem Zusammenhang auch von den **Bode<sup>2</sup>-Diagrammen**.

<sup>2</sup>benannt nach dem amerikanischen Wissenschaftler Hendrik Wade Bode (1905-1982).

### 3.1.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden in aller Kürze die mathematischen Grundlagen wiederholt, die zum Zeichnen von Frequenzkennlinien und in weiterer Folge von Ortskurven erforderlich sind.

#### Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl  $z$  kann in der kartesischen Darstellung

$$z = x + jy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

oder als komplexer Zeiger, also in der Polardarstellung

$$z = |z| e^{j \arg z} \quad \text{mit} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \tan(\arg z) = \frac{y}{x} \quad (3.5)$$

angegeben werden. Hierbei ist  $x = \operatorname{Re}\{z\}$  der Realteil,  $y = \operatorname{Im}\{z\}$  der Imaginärteil,  $|z|$  ist der Betrag und  $\arg z$  ist die Phase der komplexen Zahl  $z$ . Für das Produkt bzw. den Quotienten zweier komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  gilt nun

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{j \arg(z_1 z_2)} = |z_1| e^{j \arg z_1} |z_2| e^{j \arg z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\arg z_1 + \arg z_2)}, \quad (3.6)$$

bzw.

$$\frac{z_1}{z_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| e^{j \arg \frac{z_1}{z_2}} = \frac{|z_1| e^{j \arg z_1}}{|z_2| e^{j \arg z_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\arg z_1 - \arg z_2)}. \quad (3.7)$$

#### Rechnen mit Logarithmen

Gegeben seien zwei positive, reelle Zahlen  $x$  und  $y$ . Berechnet man den (dekadischen) Logarithmus<sup>3</sup> des Produktes bzw. des Quotienten der beiden Zahlen, so gilt

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y \quad \text{bzw.} \quad \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y. \quad (3.8)$$

Für zwei beliebige reelle Zahlen  $x$  und  $y$  gilt weiters

$$\lg |x|^y = y \lg |x|. \quad (3.9)$$

## 3.2 Frequenzkennlinien

Die Frequenzkennlinien eines Systems mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  erhält man, indem man Betrag und Phase des Frequenzganges  $G(j\omega)$  jeweils über  $\omega$  darstellt. Die Darstellung von  $|G(j\omega)|$  über  $\omega$  bezeichnet man als die *Amplitudenkennlinie* bzw. als den *Amplitudengang*. Üblicherweise wird dabei auf der Abszisse die Kreisfrequenz  $\omega$  mit einer logarithmischen Skala oder  $\lg \omega$  und auf der Ordinate der Betrag des Frequenzganges in Dezibel (dB), d.h.

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(j\omega)|. \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>Natürlich kann auch  $\log_{10} x$  anstelle von  $\lg x$  geschrieben werden.

aufgetragen. In der folgenden Tabelle sind wichtige Betragswerte in dB umgerechnet.

$ G(j\omega) $	0.01	0.1	1	10	100	2
$ G(j\omega) _{\text{dB}}$	-40	-20	0	20	40	6

Daraus können problemlos weitere Werte bestimmt werden, beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} |\sqrt{2}|_{\text{dB}} &= |2^{\frac{1}{2}}|_{\text{dB}} \stackrel{(3.9)}{=} \frac{1}{2} |2|_{\text{dB}} = 3 \text{ dB} \\ |0.5|_{\text{dB}} &= \left| \frac{1}{2} \right|_{\text{dB}} \stackrel{(3.8)}{=} |1|_{\text{dB}} - |2|_{\text{dB}} = -6 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Die Darstellung von  $\arg G(j\omega)$  über  $\omega$  wird *Phasenkennlinie* bzw. *Phasengang* des Systems genannt. Hierbei wird auf der Abszisse die Kreisfrequenz  $\omega$  mit einer logarithmischen Skala oder  $\lg \omega$  und auf der Ordinate die Phase von  $G(j\omega)$  in Grad oder Radiant dargestellt. Aus den genannten Gründen spricht man oft auch von den *logarithmischen Frequenzkennlinien* eines Systems.

### 3.2.1 Normierte Darstellung

Der erste Schritt beim händischen Zeichnen der Frequenzkennlinien ist immer die Normierung der Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Es wird dabei - so wie bisher immer - vorausgesetzt, dass  $G(s)$  der Quotient zweier Polynome in  $s$  mit reellen Polynomkoeffizienten ist. Eine solche gebrochen rationale Funktion kann immer in die normierte Darstellung

$$G(s) = \frac{V p(s)}{s^\lambda q(s)} \quad \text{mit} \quad p(0) = q(0) = 1 \quad (3.11)$$

gebracht werden. Hierbei ist die reelle Konstante  $V$  der so genannte *Verstärkungsfaktor* des Systems,  $\lambda$  ist eine ganzzahlige Konstante und  $p(s)$  bzw.  $q(s)$  sind Polynome in  $s$ , bei denen die Koeffizienten zu  $s^0$  auf 1 normiert sind.

**B** Gegeben seien die Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+3}{s^3+2s^2+2s} \quad \text{und} \quad H(s) = \frac{s-1}{s^2-3s+2}.$$

Für die zugehörigen normierten Darstellungen gilt offensichtlich

$$G(s) = \frac{3}{2s} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{\left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{2}, \quad \lambda = 1, \quad p(s) = 1 + \frac{s}{3}, \quad q(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2}$$

und

$$H(s) = -\frac{1}{2} \frac{(1-s)}{\left(1 - \frac{3}{2}s + \frac{s^2}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = 0, \quad p(s) = 1 - s, \quad q(s) = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{s^2}{2}.$$

Man beachte, dass  $p(s)$  und  $q(s)$  reelle Polynomkoeffizienten besitzen und somit rein reelle und/oder paarweise konjugiert komplexe Nullstellen haben. Aus diesem Grund können beide Polynome als Produkte von *Linearfaktoren* (=Polynome ersten Grades mit reellen Koeffizienten zur Berücksichtigung von reellen Nullstellen) und *quadratischen Faktoren* (=Polynome zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zur Berücksichtigung von konjugiert komplexen Nullstellen) dargestellt werden.

▣ Gegeben seien die beiden (normierten) Polynome

$$p(s) = 1 - s^2 \quad \text{und} \quad q(s) = 1 + \frac{7}{13}s - \frac{5}{13}s^2 + \frac{1}{13}s^3.$$

Das Polynom  $p(s)$  besitzt offensichtlich zwei rein reelle Nullstellen bei  $s_1 = +1$  und  $s_2 = -1$  und kann daher als Produkt zweier Linearfaktoren dargestellt werden, d.h.

$$p(s) = (1 + s)(1 - s).$$

Im Gegensatz dazu hat  $q(s)$  eine reelle Nullstelle  $s_1 = -1$  sowie ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen  $s_{2,3} = 3 \pm j2$  und kann somit als Produkt eines Linearfaktors und eines quadratischen Faktors dargestellt werden, d.h.

$$q(s) = (1 + s)\left(1 - \frac{6}{13}s + \frac{1}{13}s^2\right).$$

### 3.2.2 Zerlegung von $G(s)$ in „elementare Bestandteile“

Für den Frequenzgang des Systems mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  in normierter Darstellung (3.11) gilt nun

$$G(j\omega) = \frac{V}{(j\omega)^\lambda} \frac{p(j\omega)}{q(j\omega)}.$$

Aufgrund der Tatsache, dass der Betrag in dB angegeben wird, gilt nun gemäß (3.8) für den Betrag des Frequenzganges

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \left| \frac{V}{(j\omega)^\lambda} \frac{p(j\omega)}{q(j\omega)} \right|_{\text{dB}} = |V|_{\text{dB}} - |(j\omega)^\lambda|_{\text{dB}} + |p(j\omega)|_{\text{dB}} - |q(j\omega)|_{\text{dB}},$$

für die Phase gilt gemäß (3.6) und (3.7)

$$\arg G(j\omega) = \arg V - \arg (j\omega)^\lambda + \arg p(j\omega) - \arg q(j\omega).$$

Zur Ermittlung von  $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$  bzw.  $\arg G(j\omega)$  müssen also die Frequenzgänge der einzelnen „Bestandteile“ von  $G(j\omega)$  entsprechend zusammengesetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Polynome  $p(s)$  und  $q(s)$ , wie bereits erläutert, in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegt werden können. Somit sind insgesamt vier verschiedene „elementare Bestandteile“ zu berücksichtigen.

### I Proportionalfaktor

Die Ermittlung von Betrag und Phase des Frequenzganges eines Proportionalgliedes

$$G(s) = V \quad \text{mit} \quad V \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

ist sehr geradlinig. Gemäß (3.10) ergibt sich der Betrag in dB zu

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = |V|_{\text{dB}} = 20 \lg |V|, \quad (3.13)$$

für die Phase des Frequenzganges gilt

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } V > 0 \\ -180^\circ & \text{für } V < 0 \end{cases}. \quad (3.14)$$

### II Term der Form $\left(\frac{1}{s^\lambda}\right)$

Der Frequenzgang der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda \dots \text{ganzzahlig} \quad (3.15)$$

ist durch

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\lambda}$$

gegeben. Für den Betrag des Frequenzganges in dB ergibt sich somit

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^\lambda} \right| \stackrel{(3.8)}{=} -20 \lg(j\omega)^\lambda \stackrel{(3.9)}{=} -20\lambda \lg |(j\omega)| \stackrel{(3.5)}{=} -20\lambda \lg \omega. \quad (3.16)$$

Trägt man den Betrag (3.16) über  $\lg \omega$  auf, so erhält man eine Gerade, die die 0 dB-Linie bei  $\omega = 1$  schneidet und eine Steigung von  $(-20\lambda)$  dB pro Dekade, also pro Frequenz-Verzehnfachung besitzt. In Bild 3.1 sind Betragskennlinien für verschiedene Werte von  $\lambda$  dargestellt, wobei die Steigungen der Geraden zusätzlich angegeben sind.

Für die Phase des Frequenzganges gilt

$$\arg G(j\omega) = \arg \frac{1}{(j\omega)^\lambda} \stackrel{(3.6)}{=} -\lambda \arg(j\omega) = -\lambda \cdot 90^\circ, \quad (3.17)$$

d.h. die Phase besitzt einen frequenzunabhängigen, konstanten Wert, was auch Bild 3.1 zu entnehmen ist.

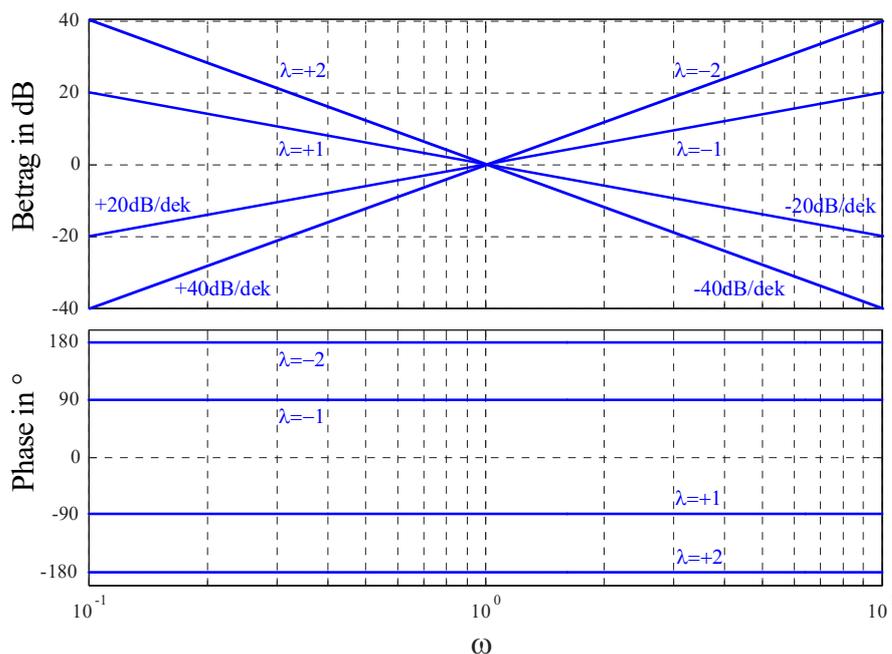


Bild 3.1: Frequenzkennlinien von  $\frac{1}{s^\lambda}$  für  $\lambda = -2, -1, +1, +2$

### III Linearfaktor

Der Frequenzgang eines Linearfaktors der Form

$$G(s) = 1 + \frac{s}{\omega_k} \quad \text{mit} \quad \omega_k \in \mathbb{R} \quad (3.18)$$

ist gegeben durch

$$G(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_k}. \quad (3.19)$$

Hierbei ist  $\omega_k$  ein konstanter, reeller Parameter. Mit (3.5) und (3.10) findet man für den Betrag des Frequenzganges

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \ll |\omega_k| \\ 20 \lg \sqrt{2} \approx 3 & \text{für } \omega = |\omega_k| \\ 20 \lg \frac{\omega}{|\omega_k|} = 20 \lg \omega - 20 \lg |\omega_k| & \text{für } \omega \gg |\omega_k| \end{cases}, \quad (3.20)$$

siehe hierzu auch Bild 3.2, wo  $\omega_k = 1$  gesetzt wurde. Häufig - vor allem aber beim händischen Zeichnen der Frequenzkennlinien - wird vereinfachend der *asymptotische* Verlauf des Amplitudenganges dargestellt. Dabei wird der Betrag für  $\omega \leq |\omega_k|$  gleich 0 dB gesetzt, ab  $\omega = |\omega_k|$  entspricht die Betragskennlinie einer Gerade mit einer Steigung von 20 dB pro Dekade.

Dadurch entsteht bei  $\omega = |\omega_k|$  ein Knick in der Betragskennlinie, weshalb man  $\omega_k$  auch *Knickfrequenz* nennt. In Bild 3.2 ist der asymptotische Verlauf des Amplitudenganges rot strichliert dargestellt. Man erkennt, dass man bei der asymptotischen Darstellung des Betrages an der Stelle  $\omega = |\omega_k|$  einen Fehler von 3 dB in Kauf nehmen muss.

Für den Verlauf der Phasenkennlinie ist, im Gegensatz zur Betragskennlinie, das Vorzeichen von  $\omega_k$  zu berücksichtigen, gemäß (3.5) gilt nämlich

$$\arg G(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_k}.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll |\omega_k| \\ 45^\circ \operatorname{sgn} \omega_k & \text{für } \omega = |\omega_k| \\ 90^\circ \operatorname{sgn} \omega_k & \text{für } \omega \gg |\omega_k| \end{cases} . \quad (3.21)$$

Der exakte Verlauf der Phasenkennlinie ist in Bild 3.2 für  $\omega_k = 1$  dargestellt. Man beachte, dass es auch die Möglichkeit gibt, einen linear interpolierten Verlauf der Phasenkennlinie zu zeichnen. Hierbei wird für  $\omega \leq \frac{1}{10} |\omega_k|$  die Phase gleich  $0^\circ$  gesetzt, für  $\omega \geq 10 |\omega_k|$  wird die Phase gleich  $90^\circ \operatorname{sgn} \omega_k$  gesetzt. Im Bereich zwischen  $\omega = \frac{1}{10} |\omega_k|$  und  $\omega = 10 |\omega_k|$  wird die Phase linear interpoliert, der entsprechende Verlauf ist in Bild 3.2 rot strichliert dargestellt. Im Gegensatz zur asymptotischen Darstellung des Betragsganges wird die interpolierte Darstellung des Phasenganges allerdings nur eher selten angewandt.

Bei einem Linearfaktor im Nenner einer Übertragungsfunktion ändern sich gemäß (3.8) die Vorzeichen von Betrags- und Phasenkennlinie.

#### IV Quadratischer Faktor

Der Frequenzgang eines quadratischen Faktors

$$G(s) = 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_k} + \left( \frac{s}{\omega_k} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \omega_k, \zeta \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (3.22)$$

ist gegeben durch

$$G(j\omega) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_k} \right)^2 \right] + j 2\zeta \frac{\omega}{\omega_k}. \quad (3.23)$$

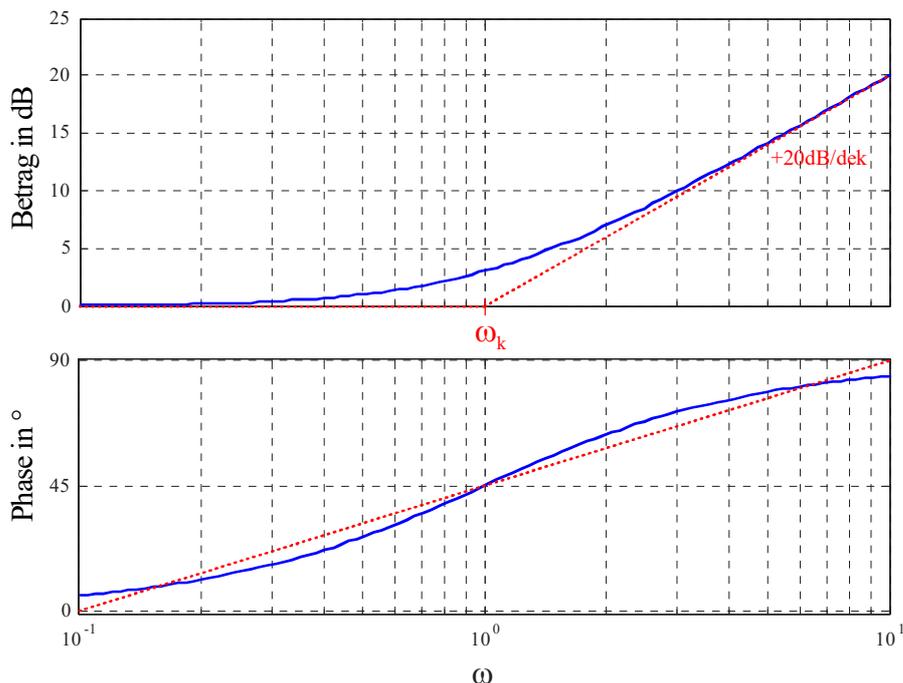


Bild 3.2: Frequenzkennlinien eines Linearfaktors  $\left(1 + \frac{s}{\omega_k}\right)$  mit der Knickfrequenz  $\omega_k = 1$ .

Für den Betrag des Frequenzganges gilt somit

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \ll |\omega_k| \\ 20 \lg 2\zeta & \text{für } \omega = |\omega_k| \\ 20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 = 40 \lg \omega - 40 \lg |\omega_k| & \text{für } \omega \gg |\omega_k| \end{cases} \quad , \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

d.h. in der asymptotischen Darstellung beträgt der Betrag für „niedrige“ Frequenzen 0 dB, für „hohe“ Frequenzen nimmt der Betrag um 40 dB pro Dekade zu. Der Wert des Betrages an der Stelle  $\omega = |\omega_k|$  hängt offensichtlich vom Wert des Parameters  $\zeta$  ab, siehe auch Bild 3.3, wo die Betragskennlinie für verschiedene Werte von  $\zeta$  dargestellt ist.

Für die Phase des Frequenzganges (3.23) ist nicht nur das Vorzeichen von  $\omega_k$ , sondern auch der Wert des Parameters  $\zeta$  von entscheidender Bedeutung. Analog zum Linearfaktor gilt für

die Phase

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{für } \omega \ll |\omega_k| \\ 90^\circ \operatorname{sgn} \omega_k & \text{für } \omega = |\omega_k| \\ 180^\circ \operatorname{sgn} \omega_k & \text{für } \omega \gg |\omega_k| \end{cases} \quad (3.25)$$

Wie man Bild 3.3 entnehmen kann, ergibt sich für kleine Werte von  $\zeta$  ein „schärferer“ Übergang der Phase von  $0^\circ$  zu  $180^\circ \operatorname{sgn} \omega_k$ , für  $\zeta = 0$  ergibt sich ein Phasensprung an der Stelle  $\omega = |\omega_k|$ .

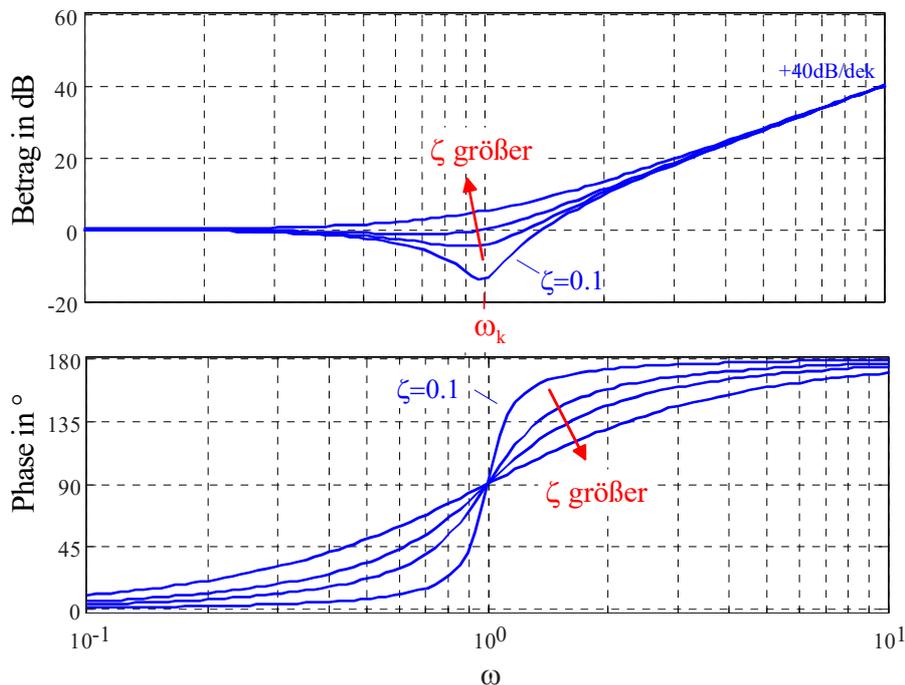


Bild 3.3: Frequenzkennlinien eines quadratischen Faktors  $\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_k} + \frac{s^2}{\omega_k^2}\right)$  für  $\zeta = 0.1, 0.5, 0.7, 0.9$  und  $\omega_k = 1$

Bei einem quadratischen Faktor im Nenner einer Übertragungsfunktion ändern sich gemäß (3.8) natürlich die Vorzeichen von Betrags- und Phasenkennlinie.

### Vorgangsweise beim Zeichnen der (asymptotischen) Frequenzkennlinien

- Normierung von  $G(s)$ .
- Einzeichnen der Betrags- und Phasenkennlinie von  $\frac{1}{s^\lambda}$ .
- Aufspaltung von  $p(s)$  und  $q(s)$  in Linearfaktoren und/oder quadratische Faktoren.

- Die Betragsgänge der zu  $p(s)$  gehörigen Linearfaktoren "knicken" bei der Knickfrequenz  $|\omega_k|$  um  $+20$  dB/Dekade nach „oben“, Linearfaktoren von  $q(s)$  nach „unten“. Ausgehend von  $0^\circ$  für  $\omega \ll |\omega_k|$  strebt die Phase von zu  $p(s)$  gehörigen Linearfaktoren für  $\omega \gg |\omega_k|$  zum Wert  $90^\circ \cdot \text{sgn} \omega_k$ , an der Stelle  $\omega = |\omega_k|$  lautet die Phase  $45^\circ \cdot \text{sgn} \omega_k$ . Linearfaktoren von  $q(s)$  sind analog, allerdings mit umgekehrten Vorzeichen zu berücksichtigen.
- Quadratische Faktoren sind analog zu den Linearfaktoren zu berücksichtigen, die Steigung beträgt jedoch  $40$  dB/Dekade und die Phase strebt zum Wert  $180^\circ \cdot \text{sgn} \omega_k$ , an der Stelle  $\omega = |\omega_k|$  lautet die Phase  $90^\circ \cdot \text{sgn} \omega_k$ .
- Betrags- und Phasenkennlinien der einzelnen „Bestandteile“ von  $G(s)$  werden additiv zusammengefügt.
- Die Betragskennlinie ist um den Wert  $|V|_{dB}$  zu verschieben. Bei negativem  $V$  ist die Phasenkennlinie ebenfalls zu verschieben bzw. die Beschriftung anzupassen.

Die oben beschriebene Prozedur kann etwas vereinfacht werden, indem man im Betragsgang zunächst bei  $\omega = 1$  den Wert  $|V|_{dB}$  einzeichnet und mit derjenigen Asymptote „anvisiert“, die für  $\omega \rightarrow 0$  die Betragskennlinie von  $G(s)$  dominiert<sup>4</sup>. Dadurch kann man die sonst erforderliche Verschiebung der Betragskennlinien (siehe letzter Punkt oben) um  $|V|_{dB}$  umgehen. Die Phasenkennlinie kann man prinzipiell mit einem so genannten Phasenlineal auch händisch sehr genau ermitteln.

**B** Es sollen die zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}$$

gehörigen Frequenzkennlinien gezeichnet werden. Hierzu wird  $G(s)$  zunächst in die normierte Form gebracht, d.h.

$$G(s) = \frac{1}{10} \frac{(1+s)}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

Das bedeutet, dass der Verstärkungsfaktor  $V$ , ein Term der Form  $\frac{1}{s}$  und zwei Linearfaktoren zu berücksichtigen sind. Die entsprechenden Betrags- und Phasenkennlinien sind in den Bildern 3.4 und 3.5 dargestellt. ■

### 3.3 Frequenzgangs-Ortskurve

Die Frequenzgangs-Ortskurve oder kurz Ortskurve eines Systems mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist die graphische Darstellung des Frequenzganges  $G(j\omega)$  in der komplexen Ebene.

<sup>4</sup>Man beachte, dass  $\omega = 0$  aufgrund der logarithmischen Skalierung der Frequenz nicht dargestellt werden kann.

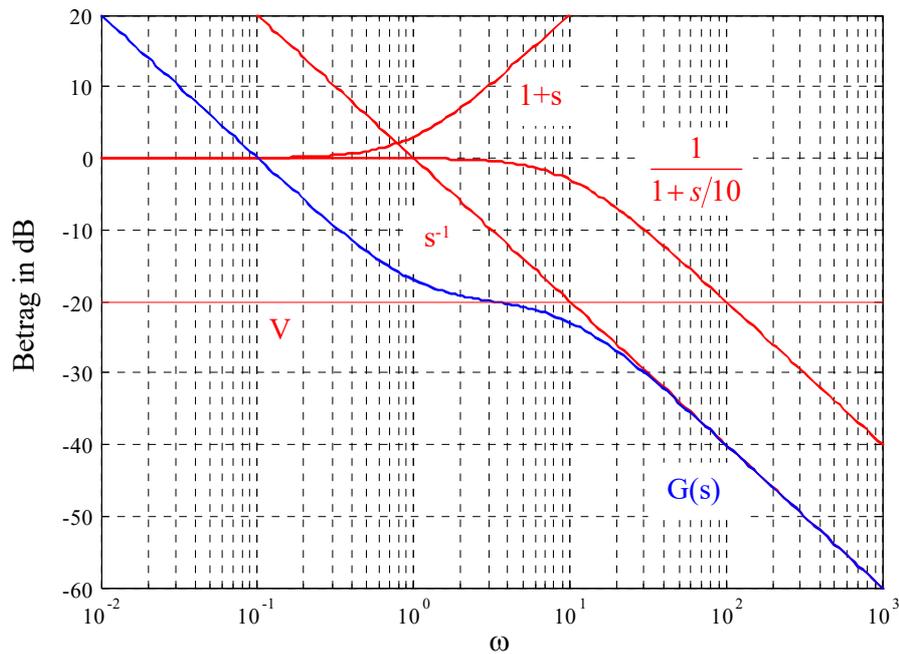


Bild 3.4: Betragskennlinie von  $G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}$

Für einfache Übertragungsfunktionen kann der Verlauf der Ortskurve direkt aus  $G(j\omega)$  ermittelt werden.

**B** Es soll die Ortskurve zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

gezeichnet werden. Hierzu wird zunächst der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

angeschrieben, offensichtlich gilt

$$G(j0) = 1 \quad \text{und} \quad G(j\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow \infty,$$

d.h. die Ortskurve beginnt für  $\omega = 0$  bei 1 und endet für  $\omega \rightarrow \infty$  im Koordinatenursprung. Berechnet man nun den Abstand der Ortskurve zum Punkt  $\frac{1}{2}$ , so erhält man

$$\left| \frac{1}{2} - G(j\omega) \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet, dass die Ortskurve dem in Bild 3.6 dargestellten Halbkreis entspricht. Der eingezeichnete Pfeil zeigt dabei in Richtung wachsender Werte von  $\omega$ .

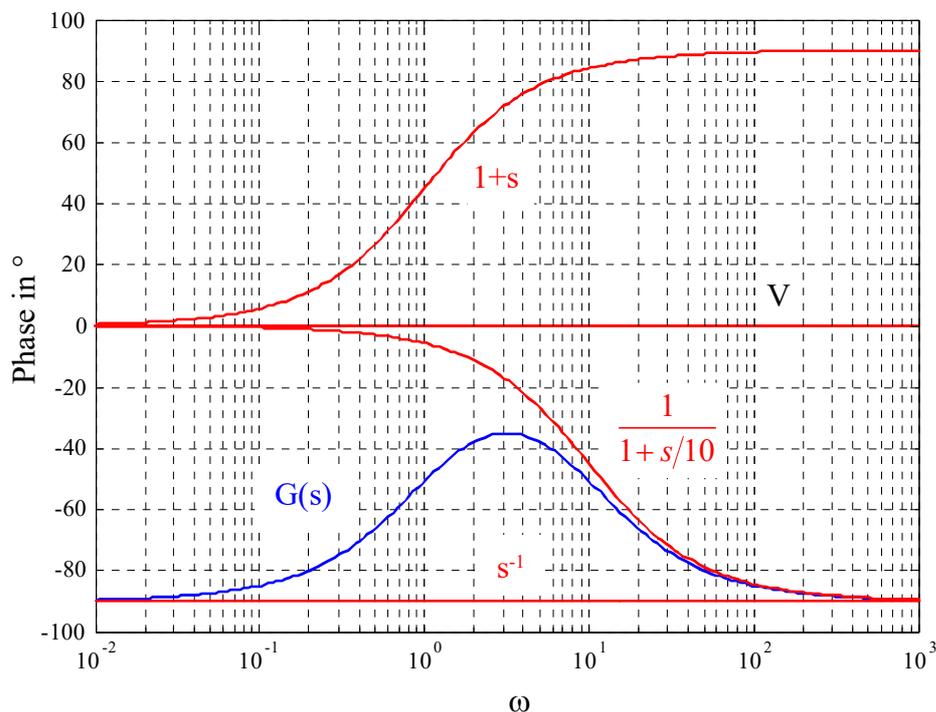


Bild 3.5: Phasenkennlinie von  $G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}$

Bei „komplizierteren“ Übertragungsfunktionen werden üblicherweise zunächst die Frequenzkennlinien des Systems gezeichnet und daraus die Ortskurve skizziert. Hierzu liest man für interessante Frequenzwerte Betrag und Phase des Frequenzganges aus den Frequenzkennlinien ab und zeichnet die entsprechenden komplexen Zeiger in die komplexe Ebene ein. Daraus ergibt sich eine Approximation des Ortskurvenverlaufes.

Man beachte, dass die Ortskurve manchmal für  $-\infty < \omega < \infty$ , also auch für negative Werte von  $\omega$  gezeichnet wird. Dabei ist zu beachten, dass aufgrund von

$$|G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \quad \text{und} \quad \arg G(-j\omega) = -\arg G(j\omega)$$

der Teil der Ortskurve für  $-\infty < \omega \leq 0$  aus dem Teil der Ortskurve für  $0 \leq \omega < \infty$  durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht.

**B** Es soll die zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

gehörige Ortskurve gezeichnet werden. Wie man aus den in Bild 3.7, links dargestellten Frequenzkennlinien erkennt, beträgt die Phase von  $G(j\omega)$  für sehr kleine Frequenzwerte  $-90^\circ$ ,

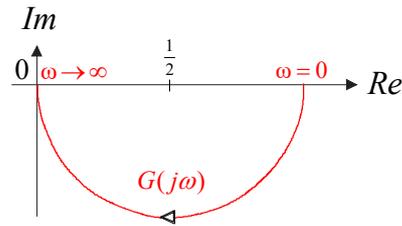


Bild 3.6: Ortskurve zu  $G(s) = \frac{1}{s+1}$

der zugehörige Betrag ist sehr groß und geht für  $\omega = 0$  gegen Unendlich. Mit wachsenden Frequenzen wird der Betrag immer kleiner und die Phase strebt gegen  $-180^\circ$ , bei  $\omega = 1$  beträgt  $|G(j\omega)|_{dB} = -3$ , d.h.  $|G(j\omega)| = \sqrt{2}$  und  $\arg G(j\omega) = -135^\circ$ . Mit diesen Informationen kann man die gesuchte Ortskurve skizzieren, sie ist in Bild 3.7, rechts dargestellt.

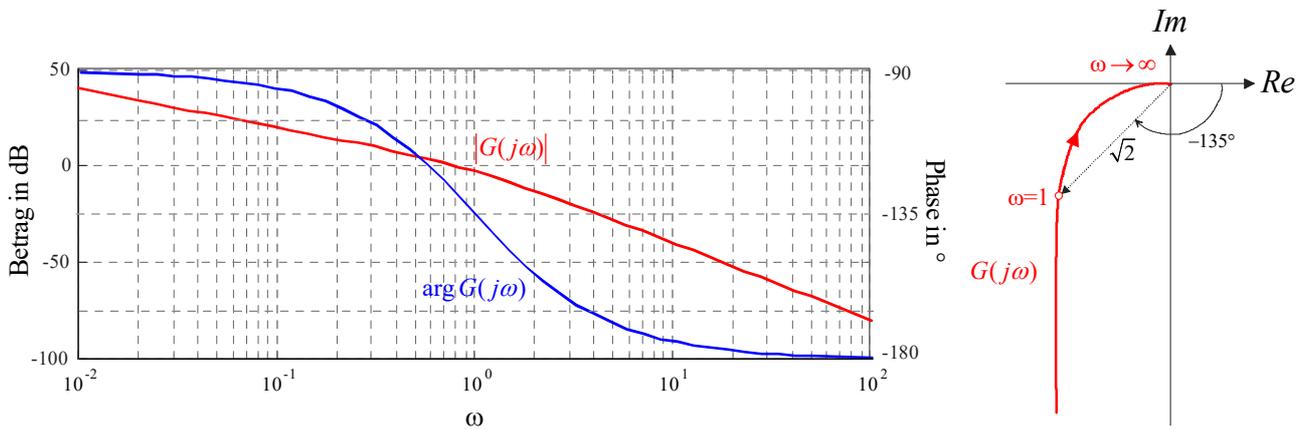


Bild 3.7: Frequenzkennlinien zu  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  und zugehörige Ortskurve

■

# Kapitel 4

## Nyquist-Kriterium

### 4.1 Einführung

Ausgangspunkt der Überlegungen ist der in Bild 4.1 dargestellte Standardregelkreis. Will man die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad (4.1)$$

des Regelkreises hinsichtlich ihrer BIBO-Stabilität untersuchen, so ist zu überprüfen, ob das Nennerpolynom von  $T(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Zur Kontrolle, ob alle Nullstellen des

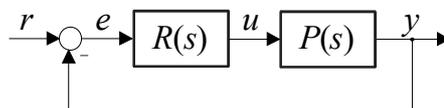


Bild 4.1: Standardregelkreis

Nennerpolynoms von  $T(s)$  in der linken, offenen komplexen Ebene liegen, gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten. Die naheliegendste Möglichkeit besteht darin, die Pole von  $T(s)$  explizit zu berechnen, was meistens nur auf numerischem Weg möglich ist. Dieser Zugang zur Beantwortung des Stabilitätsproblems scheidet allerdings meistens, wenn die Koeffizienten des Nennerpolynoms von  $T(s)$  beispielsweise Funktionen von vorgebbaren Reglerparametern sind. In diesem Fall können Stabilitätskriterien, wie z.B. das Routh-Schema oder das Hurwitz-Kriterium angewandt werden, eine explizite Ermittlung der Polstellen ist dort nicht erforderlich.

Im Gegensatz zu den genannten numerischen Kriterien ist das Nyquist-Kriterium<sup>1</sup> ein *graphisches Stabilitätskriterium*, bei dem aus dem Verlauf der Ortskurve des *offenen Kreises*, also

$$L(j\omega) = R(j\omega)P(j\omega) \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>benannt nach dem in Schweden geborenen, amerikanischen Physiker Harry Nyquist (1889 - 1976)

auf die *Stabilität des geschlossenen Kreises* geschlossen werden kann. Ein wesentlicher Vorzug des Nyquist-Kriteriums besteht darin, dass neben dem Verlauf der Ortskurve  $L(j\omega)$ , z.B. in Form von Messwerten, nur wenige Informationen über die Übertragungsfunktion  $L(s)$  benötigt werden.

Man beachte, dass der deutsche Elektrotechniker Felix Strecker (1892-1951) bereits 1930, also 2(!) Jahre vor Harry Nyquist, ein ähnliches Stabilitätskriterium vorgeschlagen hat. Aus diesem Grund findet man in einigen deutschen Literaturstellen auch die Bezeichnung **Strecker-Nyquist-Kriterium**, siehe z.B. [9].

Für die Herleitung des Kriteriums wird der im nächsten Abschnitt erläuterte Begriff der stetigen Winkeländerung einer Ortskurve benötigt.

## 4.2 Stetige Winkeländerung einer Ortskurve

Zunächst wird vereinfachend die zur Übertragungsfunktion

$$F(s) = s - \beta \quad \text{mit} \quad \beta \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

gehörige Ortskurve genauer untersucht. Hierfür wird der Frequenzgang

$$F(j\omega) = j\omega - \beta$$

in der komplexen Ebene dargestellt, wobei der Frequenzparameter  $\omega$  hier ausnahmsweise Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft. Aus der resultierenden Ortskurve wird nun die so genannte *stetige Winkeländerung* von  $F(j\omega)$ , also

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega) = \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg (j\omega - \beta)$$

ermittelt. Darunter versteht man die Änderung der Phasenlage des komplexen Zeigers  $F(j\omega)$ , wenn  $\omega$  Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft. Phasensprünge, also Unstetigkeiten im Phasenverlauf, werden *nicht* mitgezählt. In Bild 4.2 ist die Ortskurve  $F(j\omega)$  graphisch dargestellt, wobei die drei Fälle  $\operatorname{Re} \beta < 0$ ,  $\operatorname{Re} \beta = 0$  und  $\operatorname{Re} \beta > 0$  unterschieden werden. Weiters ist der komplexe Zeiger  $F(j\omega_*)$  eingezeichnet, wobei  $\omega_*$  ein beliebiger Frequenzwert ist. Man kann leicht erkennen, dass für die stetige Winkeländerung von  $F(j\omega)$  gilt:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega) = \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg (j\omega - \beta) = \begin{cases} -\pi & \text{für } \operatorname{Re} \beta > 0 \\ 0 & \text{für } \operatorname{Re} \beta = 0 \\ +\pi & \text{für } \operatorname{Re} \beta < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

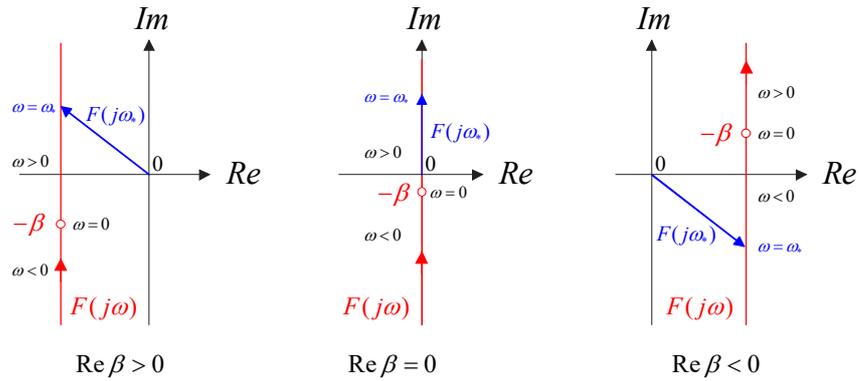


Bild 4.2: Zur Bestimmung der stetigen Winkeländerung von  $F(j\omega) = j\omega - \beta$

Diese Erkenntnisse können nun sehr geradlinig auf eine (teilerfremde, also gekürzte) Übertragungsfunktion der Form

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - \beta_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)} \quad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \quad (4.5)$$

übertragen werden. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion  $m_l$  Nullstellen mit negativem Realteil,  $m_a$  Nullstellen mit verschwindendem Realteil und  $m_r$  Nullstellen mit positivem Realteil besitzt, d.h.

$$m = m_l + m_a + m_r. \quad (4.6)$$

Analoges gilt für die  $n$  Pole von  $F(s)$ , d.h.

$$n = n_l + n_a + n_r. \quad (4.7)$$

Weiters wird wieder vorausgesetzt, dass Nullstellen bzw. Pole reell und/oder paarweise konjugiert komplex auftreten. Für die Phase des zugehörigen Frequenzganges

$$F(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - \beta_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - \alpha_i)}$$

gilt bekanntlich

$$\arg F(j\omega) = \arg K + \sum_{i=1}^m \arg (j\omega - \beta_i) - \sum_{i=1}^n \arg (j\omega - \alpha_i)$$

und in weiterer Folge auch

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega) = \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg K + \sum_{i=1}^m \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg (j\omega - \beta_i) - \sum_{i=1}^n \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg (j\omega - \alpha_i).$$

Mit (4.4) kann nun unmittelbar

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega) = 0 + m_a \cdot 0 + m_l \pi - m_r \pi - n_a \cdot 0 - n_l \pi + n_r \pi$$

gefolgert werden. Eliminiert man nun mittels (4.6) und (4.7)  $m_l$  und  $n_l$ , so findet man nach kurzer Rechnung

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega) = (m - n) \pi - (m_a + 2m_r) \pi + (n_a + 2n_r) \pi. \quad (4.8)$$

Darüber hinaus kann man die Tatsache ausnützen, dass der „negative Ast“ der Ortskurve  $F(j\omega)$  (d.h. für negative Werte von  $\omega$ ) aus dem „positiven Ast“ von  $F(j\omega)$  durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht. Daraus folgt unmittelbar, dass die stetige Winkeländerung von  $F(j\omega)$ , wenn  $\omega$  (nichtnegative) Werte von 0 bis  $+\infty$  durchläuft genau die Hälfte von  $\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega)$  beträgt, d.h.

$$\Delta \arg F(j\omega) := \Delta_0^{+\infty} \arg F(j\omega) = \frac{1}{2} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg F(j\omega). \quad (4.9)$$

Damit gilt aber auch

$$\Delta \arg F(j\omega) = (m - n) \frac{\pi}{2} - (m_a + 2m_r) \frac{\pi}{2} + (n_a + 2n_r) \frac{\pi}{2}. \quad (4.10)$$

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{s^2 + 0.1s + 1}{s^3 - s}$$

mit den Nullstellen und Polen

$$\beta_{1,2} = -0.05 \pm j 0.9987, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = +1, \alpha_3 = -1,$$

d.h.  $m = 2$ ,  $n = 3$  sowie  $m_a = m_r = 0$  und  $n_a = n_r = 1$ . Gemäß (4.10) gilt für die stetige Winkeländerung

$$\Delta \arg F(j\omega) = (2 - 3) \frac{\pi}{2} - (0 + 0) \frac{\pi}{2} + (1 + 2) \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \blacksquare$$

### 4.3 Formulierung des Nyquist-Kriteriums

Wie bereits in der Einführung angedeutet wurde, wird beim Nyquist-Kriterium mit der Ortskurve des offenen Kreises operiert. Die Übertragungsfunktion  $L(s) = R(s)P(s)$  des offenen Kreises ist der Quotient der teilerfremden Polynome  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$ , d.h.

$$L(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}, \quad (4.11)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass  $L(s)$  eine realisierbare Übertragungsfunktion ist, d.h.

$$\text{Grad } \mu(s) \leq \text{Grad } \nu(s). \quad (4.12)$$

Zur Überprüfung der Stabilität des geschlossenen Kreises muss das Nennerpolynom von

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\mu(s)}{\mu(s) + \nu(s)}$$

untersucht werden. Der geschlossene Kreis ist genau dann BIBO-stabil, wenn das Polynom  $\mu(s) + \nu(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Man beachte, dass die Übertragungsfunktion

$$F(s) := 1 + L(s) = \frac{\mu(s) + \nu(s)}{\nu(s)} \quad (4.13)$$

das zu untersuchende Polynom als Zählerpolynom besitzt, d.h. der geschlossene Regelkreis ist genau dann BIBO-stabil, wenn das *Zählerpolynom* von  $F(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Wegen (4.12) und (4.13) gilt sicher

$$m = n,$$

und aus (4.10) folgt nun unmittelbar

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} = -(m_a + 2m_r) \frac{\pi}{2} + (n_a + 2n_r) \frac{\pi}{2}.$$

Der geschlossene Regelkreis ist genau dann BIBO-stabil, wenn  $m_a = m_r = 0$  gilt, d.h. wenn die Bedingung (**Nyquist-Kriterium**)

$$\Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} = (n_a + 2n_r) \frac{\pi}{2} \quad (4.14)$$

erfüllt ist.

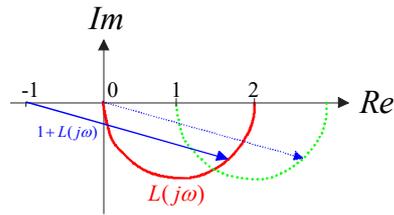
Das bedeutet, dass  $T(s)$  dann, und nur dann BIBO-stabil ist, wenn die stetige Winkeländerung der Ortskurve  $\{1 + L(j\omega)\}$  dem (nichtnegativen) Ausdruck auf der rechten Seite von (4.14) entspricht. Es ist also die stetige Winkeländerung des komplexen Zeigers  $\{1 + L(j\omega)\}$  zu untersuchen. Diesen Zeiger erhält man auch, wenn man den Punkt  $(-1)$  mit  $L(j\omega)$  verbindet, eine Verschiebung der Ortskurve  $L(j\omega)$  nach „rechts“ ist somit nicht erforderlich, siehe hierzu auch Bild 4.3. Man beachte auch, dass aufgrund von (4.13) die Polstellen von  $F(s)$  identisch sind mit den Polstellen von  $L(s)$ , d.h. die nichtnegativen ganzen Zahlen  $n_a$  bzw.  $n_r$  geben an, wieviele Pole des offenen Kreises auf bzw. rechts der imaginären Achse liegen.

**B** Gegeben sei ein Standardregelkreis mit

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad \text{wobei} \quad K \in \mathbb{R},$$

d.h.  $n_a = 1$  und  $n_r = 0$ . Es soll mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums derjenige Wertebereich von  $K$  ermittelt werden, für den der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist, d.h. gemäß (4.14) muss für die stetige Winkeländerung von  $\{1 + L(j\omega)\}$  die Bedingung

$$\Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

Bild 4.3: Zur Bildung des komplexen Zeigers  $1 + L(j\omega)$ 

gelten. Zunächst wird die in Bild 4.4, links dargestellte Ortskurve  $L(j\omega)$  für  $K = 1$  skizziert, Details dazu findet man im Kapitel über Ortskurven. Unter Annahme positiver Werte für  $K$  bewirkt eine Variation von  $K$  eine Skalierung der Ortskurve, d.h. die Form der Ortskurve bleibt gleich, die Ortskurve wird aber für  $K > 1$  „aufgeblasen“ und für  $K < 1$  „geschrumpft“. Offensichtlich gilt für beliebige positive Werte von  $K$  tatsächlich

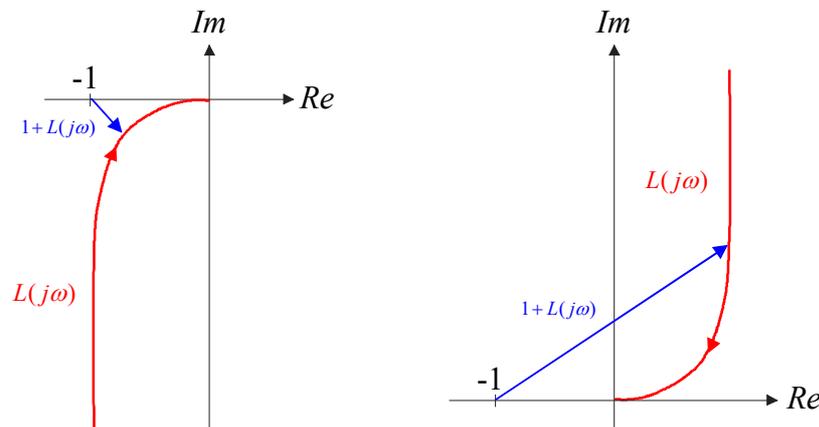


Bild 4.4: Ortskurven von  $L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$  für  $K = +1$  (linkes Bild) und  $K = -1$  (rechtes Bild)

$$\Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} = \frac{\pi}{2},$$

d.h. das Nyquist-Kriterium ist erfüllt. Für negative Werte von  $K$  ändert sich die Phase von  $L(j\omega)$  um  $180^\circ$ , die entsprechende Ortskurve für  $K = -1$  ist in Bild 4.4, rechts dargestellt. Für beliebige negative Werte von  $K$  kann nun die stetige Winkeländerung

$$\Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2},$$

abgelesen werden, d.h. das Nyquist-Kriterium ist *nicht* erfüllt. Der zulässige Wertebereich für den reellen Parameter  $K$  lautet somit

$$0 < K < \infty.$$

Dieses Ergebnis kann auch analytisch bestätigt werden. Für den geschlossenen Regelkreis gilt

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K},$$

d.h. das Nennerpolynom ist genau für den oben angegebenen Wertebereich von  $K$  ein Hurwitzpolynom. ■

## 4.4 Vereinfachtes Schnittpunktkriterium

Das Nyquist-Kriterium (4.14) wird besonders einfach, wenn die (realisierbare) Übertragungsfunktion  $L(s)$  vom so genannten *einfachen Typ* ist, d.h.

1. Der Verstärkungsfaktor  $V$  des offenen Kreises ist positiv.
2. Alle Pole von  $L(s)$  haben einen negativen Realteil bis auf möglicherweise einen Pol bei  $s = 0$ .
3. Die Betragskennlinie von  $L(j\omega)$  besitzt genau einen Schnittpunkt mit der 0 dB Linie und verläuft für  $\omega \rightarrow \infty$  unter dieser.

Ist  $L(s)$  vom einfachen Typ, dann gilt auf jeden Fall  $n_r = 0$  und  $n_a = 0$  bzw.  $n_a = 1$ , d.h. aus (4.14) folgt

$$\Delta \arg \{1 + L(j\omega)\} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } L(s) \text{ keinen Pol bei } s = 0 \text{ besitzt } (n_a = 0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{wenn } L(s) \text{ einen Pol bei } s = 0 \text{ besitzt } (n_a = 1) \end{cases}$$

Dies bedeutet, dass die Phase von  $L(j\omega)$  für diejenige (eindeutige, s.o.) Frequenz  $\omega_c$ , bei der  $L(j\omega)$  den Einheitskreis schneidet, größer sein muss als  $-180^\circ$ , d.h.

$$\arg L(j\omega_c) > -180^\circ. \quad (4.15)$$

Zur endgültigen, prägnanten Formulierung dieses so genannten vereinfachten Schnittpunktkriteriums ist die Einführung der Begriffe „Durchtrittsfrequenz“ und „Phasenreserve“ erforderlich.

### 4.4.1 Durchtrittsfrequenz

Die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  ist diejenige Kreisfrequenz<sup>2</sup>, bei der die Ortskurve  $L(j\omega)$  des offenen Kreises den Einheitskreis schneidet, bzw. bei der die Betragskennlinie  $|L(j\omega)|_{dB}$  die 0 dB Linie schneidet, d.h.

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \text{bzw.} \quad |L(j\omega_c)|_{dB} = 0. \quad (4.16)$$

Die Durchtrittsfrequenz ist in Bild 4.5 im oberen Diagramm beim Schnittpunkt der Betragskennlinie mit der 0 dB Linie eingezeichnet, in Bild 4.6 schneidet die Ortskurve  $L(j\omega)$  den Einheitskreis (EHK) für den Frequenzparameter  $\omega = \omega_c$ .

<sup>2</sup>Die Bezeichnung  $\omega_c$  ist auf die englische Übersetzung „crossover-frequency“ zurück zu führen.

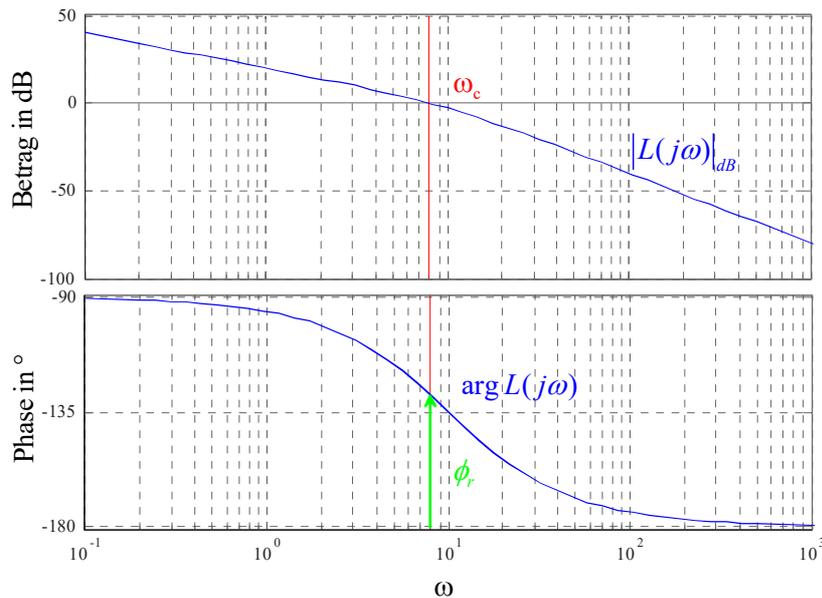


Bild 4.5: Illustration von Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve im Bode-Diagramm

#### 4.4.2 Phasenreserve und Amplitudenrand

Die Phasenreserve  $\phi_r$  ist der „Abstand“ der Phasenkennlinie von  $L(j\omega)$  an der Stelle  $\omega = \omega_c$  zu  $(-180^\circ)$ , d.h.

$$\phi_r = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ. \quad (4.17)$$

In den Bildern 4.5 und 4.6 ist die Phasenreserve in den Frequenzkennlinien bzw. in der Ortskurve des offenen Kreises dargestellt.

Bezeichnet man mit  $\omega^-$  diejenige Frequenz, bei der  $L(j\omega^-) = -180^\circ$  gilt, so gilt für den so genannten Amplitudenrand

$$A_r = \frac{1}{|L(j\omega^-)|}. \quad (4.18)$$

Aus der in Bild 4.6 dargestellten Ortskurve ist der Amplitudenrand leicht ablesbar, bei den in Bild 4.5 dargestellten Frequenzkennlinien gilt  $A_r \rightarrow \infty$ , da die Phasenkennlinie den Wert  $-180^\circ$  für endliche Werte von  $\omega$  nicht erreicht.

#### 4.4.3 Formulierung des vereinfachten Schnittpunktkriteriums

Fasst man die Erkenntnisse und Begriffe der letzten Abschnitte zusammen, so kann das **vereinfachte Schnittpunktkriterium** folgendermaßen formuliert werden:

Ist der offene Kreis  $L(s)$  vom einfachen Typ, so ist der geschlossene Regelkreis genau dann BIBO-stabil, wenn die Phasenreserve (4.17) positiv ist.

Aus dem vereinfachten Schnittpunktkriterium folgen anschauliche Interpretationen für  $\phi_r$  und  $A_r$ . Die Phasenreserve  $\phi_r$  gibt den „Spielraum“ an, in dem sich die Phase des offenen Kreises

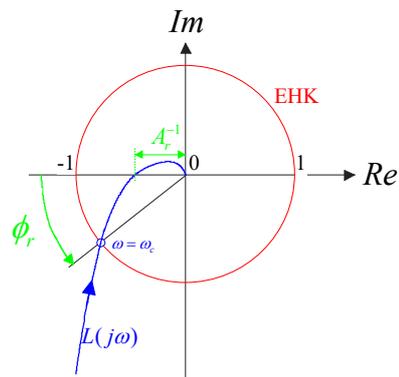


Bild 4.6: Zur Erläuterung von Durchtrittsfrequenz, Phasenreserve und Amplitudenrand

an der Stelle  $\omega_c$  verändern darf, ohne dass der geschlossene Regelkreis instabil wird. Der Amplitudenrand  $A_r$  hingegen kennzeichnet den „Spielraum“, in dem sich der Betrag des offenen Kreises an der Stelle  $\omega_c$  ändern darf, ohne dass der geschlossene Regelkreis instabil wird.



# Kapitel 5

## Frequenzkennlinien - Verfahren

Der Entwurf von Regelgesetzen mit Hilfe von Frequenzkennlinien gehört zu den klassischen Verfahren der Regelungstechnik. Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist der in Bild 5.1 dargestellte Standardregelkreis, wobei  $P(s)$  die *gegebene* Übertragungsfunktion der Regel-

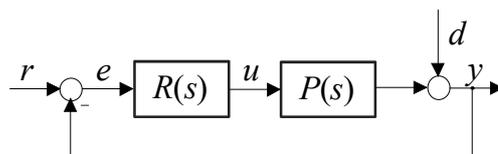


Bild 5.1: Standardregelkreis

strecke ist und  $R(s)$  die *gesuchte* Reglerübertragungsfunktion repräsentiert. Diese muss so bestimmt werden, dass Führungs- und Störverhalten, ausgedrückt durch die Übertragungsfunktionen

$$r \rightarrow y : T(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad \text{und} \quad d \rightarrow y : S(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \quad (5.1)$$

so beeinflusst werden, dass vorgegebene Spezifikationen möglichst gut erfüllt werden. Aus (5.1) geht hervor, dass die Auswirkungen von Modifikationen des Reglers  $R(s)$  auf die Übertragungsfunktionen  $T(s)$  und  $S(s)$  im Allgemeinen nur sehr schwer abzuschätzen sind. Dies erschwert die systematische Vorgangsweise bei der Bestimmung des Regelgesetzes. Erfreulicherweise können gewisse Spezifikationen, die der geschlossene Regelkreis erfüllen muss - wenigstens näherungsweise - in entsprechende Bedingungen für den offenen Kreis

$$L(s) = R(s)P(s) \quad (5.2)$$

übersetzt werden. Wie sich zeigen wird, ergeben sich aus den *Vorgaben für den geschlossenen Kreis im Zeitbereich* mittels einfacher Relationen *Vorgaben für den offenen Kreis im Frequenzbereich*. Der Regler  $R(s)$  wird also dazu verwendet, den Frequenzgang  $L(j\omega)$  des offenen Kreises entsprechend zu „formen“, oft wird dafür der Begriff „loop shaping“ verwendet.

In weiterer Folge wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $L(s)$  vom einfachen Typ ist, d.h. das vereinfachte Schnittpunktkriterium kann eingesetzt werden.

## 5.1 Allgemeine Überlegungen zum Reglerentwurf

Wie man aus (5.1) leicht erkennen kann, gilt

$$S(s) + T(s) = 1, \quad (5.3)$$

d.h. in einem Standardregelkreis ergibt die Summe aus Führungsübertragungsfunktion und Störübertragungsfunktion immer den Wert 1. Daraus folgt unmittelbar, dass in einem (unrealistischen) Regelkreis mit idealem Führungsverhalten, d.h.  $T(s) = 1$ , ganz automatisch auch  $S(s) = 0$  gilt und der Regelkreis somit auch ideales Störverhalten aufweist. In einem realen Regelkreis ist  $T(s) = 1$  aufgrund diverser Einschränkungen (siehe weiter unten) überhaupt nicht erzielbar und, wie sich zeigen wird, auch gar nicht erwünscht. Der Grund hierfür sind bisher unberücksichtigte Störeinflüsse, wie z.B. das in Bild 5.2 eingezeichnete Messrauschen  $n(t)$ . Wie man leicht überprüfen kann, gilt

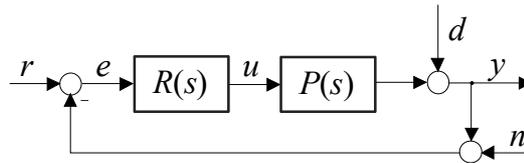


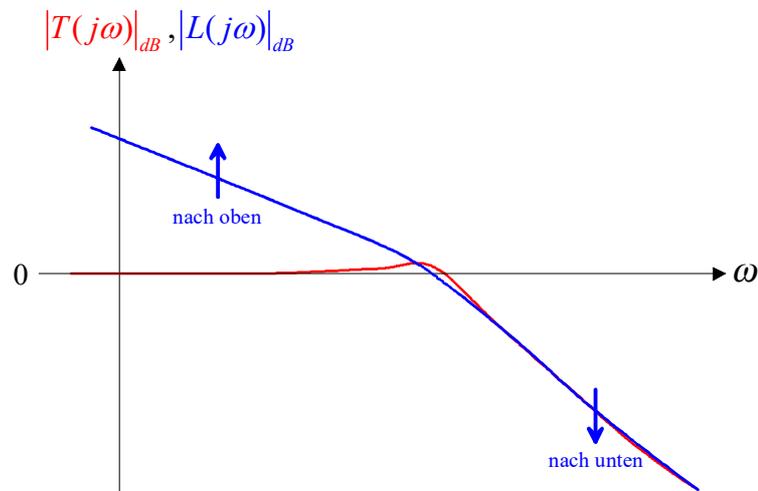
Bild 5.2: Standardregelkreis

$$n \rightarrow y: \quad N(s) = \frac{-R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = -T(s),$$

d.h. das Messrauschen wird für  $T(s) = 1$  in keinsten Weise unterdrückt. In den meisten praktischen Anwendungen sind  $r$ ,  $d$  und  $n$  in verschiedenen Frequenzbereichen wirksam. Verglichen mit  $r$  und  $d$  ist  $n$  üblicherweise ein hochfrequentes Signal. Die daraus resultierenden geforderten Eigenschaften der Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  können somit besonders geradlinig mittels des Frequenzganges  $T(j\omega)$  angegeben werden, es muss gelten:

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &\approx 1 && \text{im „niederfrequenten Bereich“} \\ |T(j\omega)| &\ll 1 && \text{im „hochfrequenten Bereich“} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Diese Erkenntnisse sind in Bild 5.3 graphisch zusammengefasst. Für „niedrige“ Frequenzen soll der Betrag von  $T(j\omega)$  möglichst längs der  $0dB$ -Linie verlaufen, für „hohe“ Frequenzen möglichst weit unter der  $0dB$ -Linie.

Bild 5.3: Typische Verläufe von  $|T(j\omega)|$  und  $|L(j\omega)|$ 

Mit Hilfe der bekannten Relation

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad \text{d.h.} \quad |T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \quad (5.5)$$

kann der wünschenswerte Verlauf von  $|T(j\omega)|$  leicht auf den offenen Kreis umgerechnet werden, es gilt

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| \approx 1 & \Leftrightarrow |L(j\omega)| \gg 1, \\ |T(j\omega)| \ll 1 & \Leftrightarrow |L(j\omega)| \approx |T(j\omega)| \ll 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

D.h. bei niedrigen Frequenzen muss  $|L(j\omega)|$  möglichst weit über der 0dB–Linie verlaufen, bei hohen Frequenzen möglichst weit unter der 0dB–Linie, siehe Bild 5.3.

Von besonderer Bedeutung für das Verhalten des Regelkreises ist der Frequenzbereich nahe der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$ , die bekanntlich durch  $|L(j\omega_c)| = 1$  charakterisiert ist. Aus Bild 5.3 kann gefolgert werden, dass die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  ungefähr der Bandbreite  $\omega_B$  des geschlossenen Kreises entspricht. Diese ist definiert durch

$$|T(j\omega_B)|_{dB} = -3 \quad \text{bzw.} \quad |T(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wie leicht einzusehen ist, bedeutet eine große Bandbreite, dass der geschlossene Regelkreis auf schnelle Änderungen der Eingangsgrößen ohne nennenswerte Verzögerung reagieren kann. Somit stellen  $\omega_B$  bzw.  $\omega_c$  ein Maß für die „Reaktionsfreudigkeit“ des Regelkreises dar. Die Phasenreserve  $\phi_r$  gibt den „Abstand“ der Phasenkennlinie des offenen Kreises an der Stelle  $\omega = \omega_c$  zu  $-180^\circ$  an. Bei kleiner Phasenreserve ist der geschlossene Regelkreis nahe an der Stabilitätsgrenze, was sich durch eine verstärkte Schwingneigung manifestiert. Weiters können Abweichungen des Streckenmodells von der Realität bis zur Instabilität des Regelkreises

führen. Somit ist die Phasenreserve ein Maß für die Robustheit des Regelkreises und charakterisiert dessen Schwingneigung.

### 5.1.1 Einschränkungen beim Entwurf

Wesentlich für den erfolgreichen Reglerentwurf ist die Vorgabe von sinnvollen Spezifikationen. Aus diesem Grund ist bei der Wahl der Spezifikationen genau darauf zu achten, ob diese überhaupt erfüllbar sind. Anhand einiger charakteristischer Streckeneigenschaften können mögliche Einschränkungen bei der Vorgabe von Spezifikationen erkannt werden. Dazu zählen Streckenpole und -nullstellen mit positivem Realteil<sup>1</sup> sowie Beschränkungen der Stellgröße.

#### Instabile Pole

Instabile Streckenpole erfordern eine Mindestbandbreite  $\omega_B$ , woraus auch unmittelbar eine untere Grenze für die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  folgt. Diese Tatsache kann leicht anhand des Balancierens eines Stabes auf einem Finger plausibel gemacht werden. Die Stabilisierung des Stabes ist prinzipiell nur dann möglich, wenn der Finger hinreichend schnell bewegt werden kann, der Regelkreis also eine gewisse Mindestbandbreite besitzt.

#### Instabile Nullstellen

Im Gegensatz zu instabilen Polen begrenzen instabile Streckennullstellen die erzielbare Bandbreite  $\omega_B$  bzw. die maximale Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$ . Es ist zu beachten, dass instabile Streckennullstellen immer auch Nullstellen von  $L(s)$  und  $T(s)$  sind. Anderenfalls kommt es im Regelkreis zu einer verbotenen „instabilen“ Kürzung. Als Beispiel kann wieder das Balancieren eines Stabes auf dem Finger herangezogen werden. Will man beispielsweise den balancierenden Finger nach rechts bewegen ohne dass der Stab hinunterfällt, so muss der Finger zunächst kurz nach links, also in die Gegenrichtung bewegt werden. Dieses „Systemverhalten“ ist typisch für Systeme mit einer instabilen Nullstelle. Es veranschaulicht sehr schön, warum die gewünschte Endposition des balancierenden Fingers nicht beliebig schnell erreicht werden kann.

#### Stellgrößenbeschränkung

Bei praktischen Anwendungen sind de facto immer Beschränkungen der Stellgröße zu berücksichtigen. Eine gezielte Einhaltung von Stellgrößenbeschränkungen ist allerdings bei vielen gängigen Entwurfsverfahren nur schwer oder gar nicht möglich. Aus diesem Grund werden oft sehr „vorsichtige“ Reglereinstellungen verwendet. Dies führt zu einer schlechten Ausnutzung des Stellbereiches und in weiterer Folge zu einem „trägen“ Verhalten des Regelkreises. Häufige und länger andauernde Verletzungen der Stellgrößenbeschränkung aufgrund zu „aggressiver“ Reglereinstellungen können hingegen zu unerwünschtem dynamischen Verhalten des geschlossenen Kreises führen. Ein Beispiel hierfür ist der bereits ausführlich diskutierte Windup-Effekt.

<sup>1</sup>In diesem Zusammenhang spricht man auch von „instabilen“, Polen bzw. Nullstellen.

## 5.2 Ein typisches Entwurfsverfahren

Es wird davon ausgegangen, dass der geschlossene Regelkreis sich näherungsweise verhält wie ein System mit dominantem Polpaar. Das bedeutet, dass das dynamische Verhalten des Regelkreises durch ein konjugiert komplexes Polpaar dominiert wird. Wie sich zeigen wird, ergeben sich aus dieser Annahme einfache Richtlinien für den Reglerentwurf.

### 5.2.1 Systeme mit dominantem Polpaar

Aufgrund obiger Annahme kann davon ausgegangen werden, dass für die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises (wenigstens näherungsweise) gilt

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{mit} \quad \omega_n > 0 \quad \text{und} \quad 0 < d < 1, \quad (5.7)$$

wobei  $\omega_n$  die so genannte Kennkreisfrequenz und  $d$  der Dämpfungsgrad ist. Die angegebenen Wertebereiche für  $\omega_n$  und  $d$  gewährleisten, dass  $T(s)$  BIBO-stabil ist und ein konjugiert komplexes Polpaar

$$s_{1,2} = -d\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-d^2}$$

besitzt. Für die zugehörige Übertragungsfunktion des offenen Kreises gilt offensichtlich

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2d\omega_n)}. \quad (5.8)$$

Wie bereits erwähnt wurde, haben Kenngrößen des offenen Kreises, nämlich die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$ , bei der bekanntlich  $|L(j\omega_c)| = 1$  gilt, und die Phasenreserve  $\phi_r = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ$  einen wesentlichen Einfluss auf das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises. Diese Tatsache wird beim vorliegenden Entwurfsverfahren ausgenutzt, indem das Wunschverhalten des geschlossenen Regelkreises in entsprechende Werte für  $\omega_c$  und  $\phi_r$  umgerechnet wird.

### 5.2.2 Spezifikation des Wunschverhaltens

Sehr oft wird das Wunschverhalten eines Regelkreises im Zeitbereich spezifiziert. Hierfür gibt es eine Vielzahl verschiedener Möglichkeiten. Im vorliegenden Fall wird das dynamische Verhalten des Regelkreises durch den Verlauf seiner Sprungantwort mit Hilfe der so genannten Anstiegszeit und der Überschwingweite charakterisiert, das asymptotische Verhalten wird über die bleibende Regelabweichung spezifiziert.

#### Anstiegszeit $t_r$ und Überschwingweite $M_p$

In Bild 5.4 ist der typische Verlauf der Sprungantwort eines Systems (5.7) mit dominantem Polpaar dargestellt. Mit  $M_p$  wird die Überschwingweite („maximum peak“) bezeichnet, sie gibt den maximalen Wert der Regelgröße an, wenn die Referenzgröße der Einheitssprung ist. Aus der Überschwingweite  $M_p$  kann das entsprechende prozentuale Überschwingen gemäß

$$\ddot{u} = 100 (M_p - 1) \quad \text{in} \quad \% \quad (5.9)$$

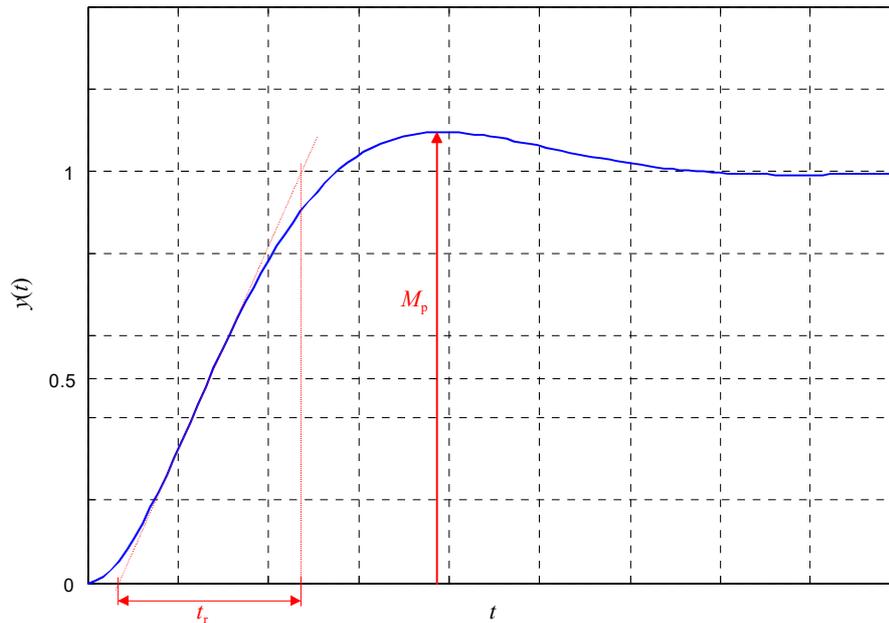


Bild 5.4: Sprungantwort eines Systems mit dominantem Polpaar

ermittelt werden. Mit  $t_r$  wird die so genannte Anstiegszeit („rise time“) bezeichnet. Man beachte, dass in der Literatur verschiedene Definitionen für die Anstiegszeit zu finden sind, die sich bei genauerer Untersuchung jedoch nur geringfügig unterscheiden.

### Bleibende Regelabweichung

Das asymptotische Verhalten des Regelkreises wird durch die bleibende Regelabweichung  $e_\infty$  charakterisiert, wobei für die Führungsgröße spezielle „Testfunktionen“ der Form

$$r(t) = \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \sigma(t) \quad \text{○—●} \quad \bar{r}(s) = \frac{1}{s^\nu} \quad \text{mit} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

gewählt werden. Geht man von einer normierten Darstellung der Übertragungsfunktion des offenen Kreises aus, also

$$L(s) = \frac{V p(s)}{s^\lambda q(s)} \quad \text{mit} \quad p(0) = q(0) = 1,$$

so ergibt sich für die Laplace-Transformierte des Regelfehlers

$$\bar{e}(s) = \mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{1+L(s)} \bar{r}(s) = \frac{s^\lambda q(s)}{s^\lambda q(s) + V p(s)} \bar{r}(s),$$

wobei in einem sinnvoll entworfenen Regelkreis das Polynom  $[s^\lambda q(s) + V p(s)]$  natürlich ein Hurwitzpolynom ist. Setzt man (5.10) in den obigen Ausdruck ein, so erhält man

$$\bar{e}(s) = \frac{s^\lambda q(s)}{s^\lambda q(s) + V p(s)} \frac{1}{s^\nu} = \frac{s^{\lambda-\nu} q(s)}{s^\lambda q(s) + V p(s)}.$$

Vom Endwertsatz der Laplace-Transformation weiß man, dass der Grenzwert

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

genau dann existiert, wenn das Nennerpolynom von

$$s \bar{e}(s) = \frac{s^{\lambda-\nu+1} q(s)}{s^\lambda q(s) + V p(s)}$$

ein Hurwitzpolynom ist. Dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn die Bedingung

$$\lambda - \nu + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq \nu - 1$$

erfüllt ist. Es darf dann der Endwertsatz

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\lambda-\nu+1} q(s)}{s^\lambda q(s) + V p(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\lambda-\nu+1}}{s^\lambda + V}$$

angewandt werden. Aus obigem Ausdruck für die bleibende Regelabweichung kann die unten angegebene Tabelle unmittelbar abgeleitet werden.

$e_\infty$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$
$\nu = 1 \Rightarrow r(t) = \sigma(t)$	$\frac{1}{1+V}$	0	0
$\nu = 2 \Rightarrow r(t) = t\sigma(t)$	-	$\frac{1}{V}$	0
$\nu = 3 \Rightarrow r(t) = \frac{t^2}{2!}\sigma(t)$	-	-	$\frac{1}{V}$

Aus der Tabelle ist beispielsweise zu erkennen, dass bei sprungförmiger Führungsgröße  $r$  die bleibende Regelabweichung  $e_\infty$  verschwindet, wenn der offene Kreis mindestens einfach integrierend ist.

### 5.2.3 Faustformeln für den Reglerentwurf

Es kann gezeigt werden, dass bei Systemen mit dominantem Polpaar die beiden Relationen

$$\phi_r \text{ [in Grad]} + \ddot{u} \text{ [in \%]} \approx 70 \quad \text{und} \quad \omega_c t_r \approx 1.5 \quad (5.11)$$

näherungsweise gelten. Diese beiden „Faustformeln“ spiegeln die bereits bekannten Tatsachen wider, dass eine kleine Phasenreserve eine große Schwingneigung des Regelkreises zur Folge hat und dass eine kleine Anstiegszeit eine große Bandbreite erfordert.

### 5.2.4 Durchführung des Reglerentwurfes

Der Reglerentwurf gliedert sich typischerweise in drei Schritte, nämlich

### I Umrechnung der gegebenen Regelkreisspezifikationen auf den offenen Kreis

Das gewünschte Überschwingen und die gewünschte Anstiegszeit werden mittels (5.11) in  $\omega_c$  und  $\phi_r$  umgerechnet. Weiters werden aus der vorgegebenen bleibenden Regelabweichung  $\lambda$  und gegebenenfalls  $V$  ermittelt.

### II Entsprechende Modifikation der Frequenzkennlinien des offenen Kreises

Durch geschicktes Einfügen von Korrekturgliedern wird der Frequenzgang des offenen Kreises sukzessive so verändert, dass er gewünschte Eigenschaften besitzt.

### III Simulation des Regelkreises

Da der Reglerentwurf auf einigen vereinfachenden Annahmen beruht, ist eine Simulation des geschlossenen Kreises unumgänglich. Hierbei muss überprüft werden, ob die vorgegebenen Spezifikationen zufriedenstellend erfüllt werden.

## 5.3 Korrekturglieder

### Proportionalglieder

Mit Hilfe eines Proportionalgliedes, d.h.

$$R(s) = K$$

kann die Betragskennlinie des offenen Kreises um  $|K|_{dB}$  angehoben ( $|K| > 1$ ) bzw. abgesenkt ( $|K| < 1$ ) werden, wobei die Phasenkennlinie nicht beeinflusst bzw. bei negativem  $K$  um  $180^\circ$  abgesenkt wird.

### Integrierer

Werden  $m$  Integrierer in den offenen Kreis eingefügt, d.h.

$$R(s) = \frac{1}{s^m},$$

so wird die Phasenkennlinie um  $m \cdot 90^\circ$  Grad abgesenkt wobei auch die Betragskennlinie entsprechend verändert wird. Üblicherweise werden Integrierer in den offenen Kreis eingefügt, um das asymptotische Verhalten des Regelkreises den vorgegebenen Spezifikationen anzupassen.

### Lead/Lag-Glied

Das so genannte Lead / Lag-Glied besitzt die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_Z}}{1 + \frac{s}{\omega_N}} \quad \text{mit} \quad \omega_Z, \omega_N > 0,$$

ist also der Quotient zweier Linearfaktoren mit den (positiven) Knickfrequenzen  $\omega_Z$  und  $\omega_N$ . Für  $\omega_Z < \omega_N$  spricht man von einem Lead-Glied (phasenanhebend), für  $\omega_N < \omega_Z$  von einem Lag-Glied (phasenabsenkend). Definiert man die Größe  $m$  gemäß

$$m := \frac{\omega_N}{\omega_Z},$$

so gilt offensichtlich

$$m > 1 : \quad \text{Lead-Glied} \qquad \text{bzw.} \qquad m < 1 : \quad \text{Lag-Glied.}$$

In Bild 5.5 sind die Frequenzkennlinien eines Lead-Gliedes graphisch dargestellt. Man erkennt, dass die Betragskennlinie angehoben wird, für die maximale Anhebung  $\Delta A$  gilt

$$\Delta A_{dB} = m_{dB} = 20 \log m \qquad (\Delta A_{dB} > 0 \text{ wegen } m > 1).$$

Das bedeutet, man kann an einer vorgegebenen Frequenz  $\omega \gg \omega_N$  die Betragskennlinie des offenen Kreises um  $\Delta A$  anheben, ohne die Phasenkennlinie des offenen Kreises nennenswert zu beeinflussen. Typischerweise wird aber ein Lead-Glied dazu eingesetzt, die Phasenkennlinie des offenen Kreises anzuheben. Wie man Bild 5.5 entnehmen kann, tritt die größte Phasenanhebung  $\Delta\varphi$  bei der so genannten Mittenfrequenz

$$\omega_m = \sqrt{\omega_Z \omega_N}$$

auf, sie kann gemäß

$$\Delta\varphi = \arcsin \frac{m-1}{m+1} \tag{5.12}$$

berechnet werden.

In Bild 5.6 sind die Frequenzkennlinien eines Lag-Gliedes graphisch dargestellt. Üblicherweise wird ein Lag-Glied dazu eingesetzt, die Betragskennlinie an einer vorgegebenen Frequenz  $\omega \gg \omega_Z$  um

$$\Delta A_{dB} = m_{dB} = 20 \log m \qquad (\Delta A_{dB} < 0 \text{ wegen } m < 1).$$

abzusenken, ohne die Phasenkennlinie nennenswert zu beeinflussen.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)^2}.$$

Für die Sprungantwort des Regelkreises sind die Spezifikationen

$$t_r = 3s, \quad M_p = 1.1 \quad \text{und} \quad e_\infty = 0$$

vorgegeben. Die Anwendung der Faustformeln (5.11) liefert die Vorgaben

$$\omega_c = 0.5 \text{ rads}^{-1} \quad \text{und} \quad \phi_r = 60^\circ$$

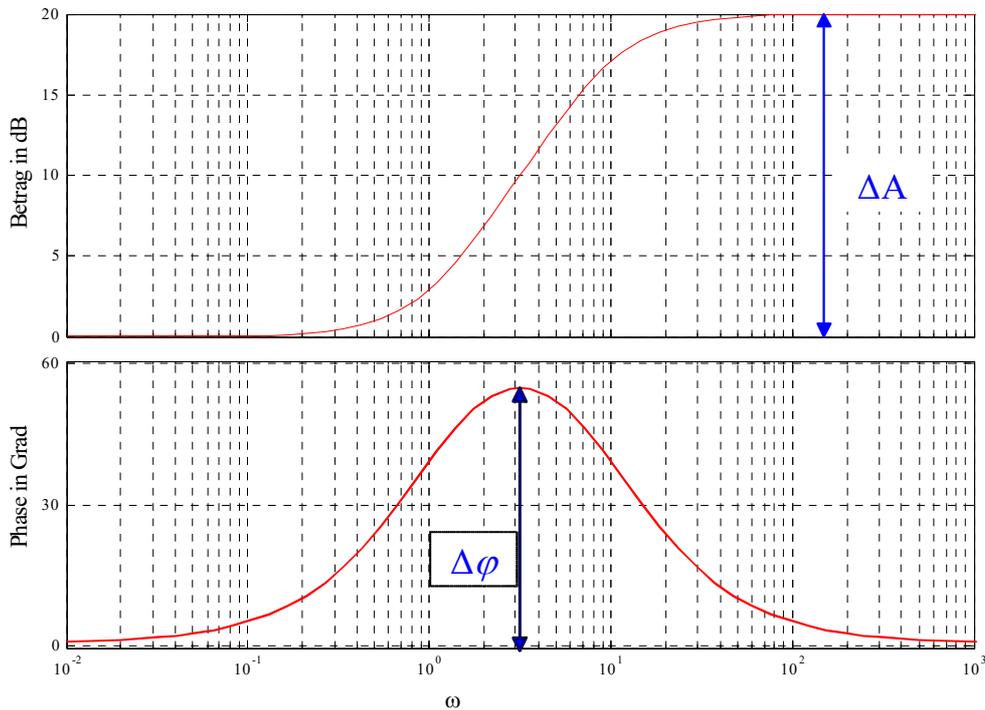


Bild 5.5: Frequenzkennlinien, Lead-Glied

für den Frequenzgang des offenen Kreises. Zur Erzielung von  $e_\infty = 0$  für eine sprungförmige Referenzgröße ist mindestens ein Integrator im offenen Kreis erforderlich. Aus diesem Grund wird als Ausgangsbasis für den Regler die Übertragungsfunktion

$$R_1(s) = \frac{1}{s}$$

gewählt, für den offenen Kreis gilt dann

$$L_1(s) = R_1(s)P(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}.$$

Wie in Bild 5.7 zu erkennen ist, gilt

$$\arg L_1(j\omega_c) = -143^\circ,$$

d.h. zur Erzielung einer Phasenreserve von  $60^\circ$  muss die Phasenkennlinie des offenen Kreises an der Stelle  $\omega_c$  um  $\Delta\varphi = 23^\circ = 0.4 \text{ rad}$  angehoben werden. Hierzu wird ein Lead-Glied eingesetzt. Mit Hilfe von (5.12) findet man

$$m = \frac{1 + \sin 0.4}{1 - \sin 0.4} = 2.28$$

und man erhält mit  $\omega_m = \omega_c$  die Parameter

$$\omega_Z = \frac{0.5}{\sqrt{2.28}} = 0.33 \text{ rads}^{-1}, \quad \omega_N = 0.5\sqrt{2.28} = 0.76 \text{ rads}^{-1}$$

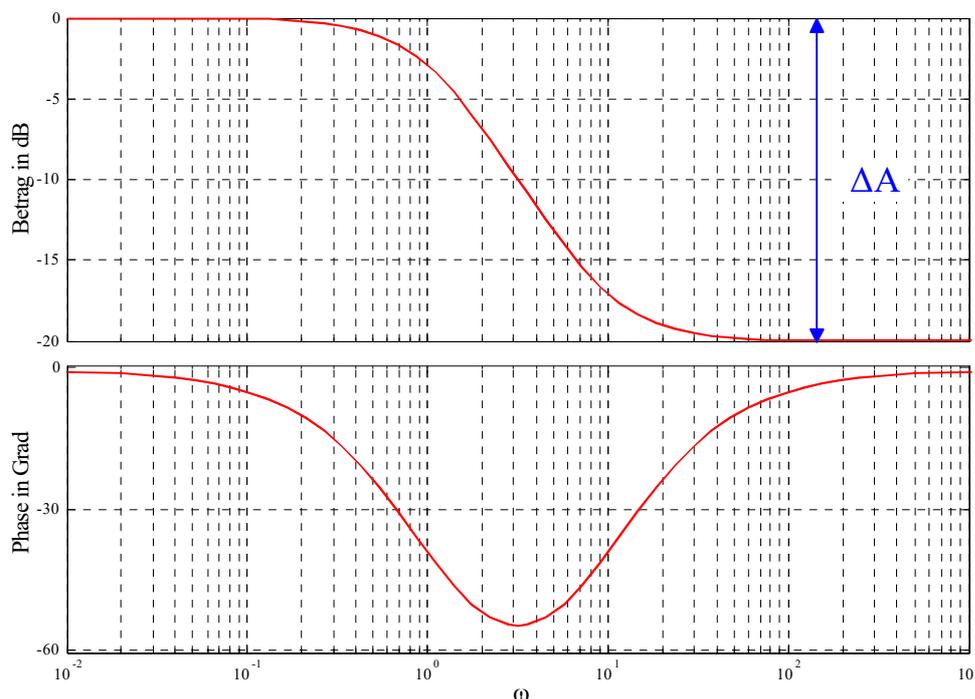


Bild 5.6: Frequenzkennlinien, Lag-Glied

Das gesuchte Lead-Glied lautet somit

$$R_2(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.33}}{1 + \frac{s}{0.76}}$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion des offenen Kreises nun

$$L_2(s) = R_1(s)R_2(s)P(s) = 10 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.33}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{0.76}\right) (1 + s)^2}$$

In Bild 5.7 erkennt man, dass die gewünschte Phase an der Stelle  $\omega_c$  nun gewährleistet ist, für die Betragskennlinie gilt

$$|L_2(j\omega_c)|_{dB} = 27.$$

Die entsprechende Absenkung der Betragskennlinie kann mit dem Proportionalelement

$$R_3(s) = 10^{-\frac{27}{20}} = 0.041$$

bewerkstelligt werden. Damit lautet der endgültige Regler

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)R_3(s) = 0.041 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.33}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{0.76}\right)}$$

In Bild 5.8 ist die Sprungantwort des Regelkreises dargestellt, Überschwingweite und Anstiegszeit entsprechen in guter Näherung den vorgegebenen gewünschten Werten. ■

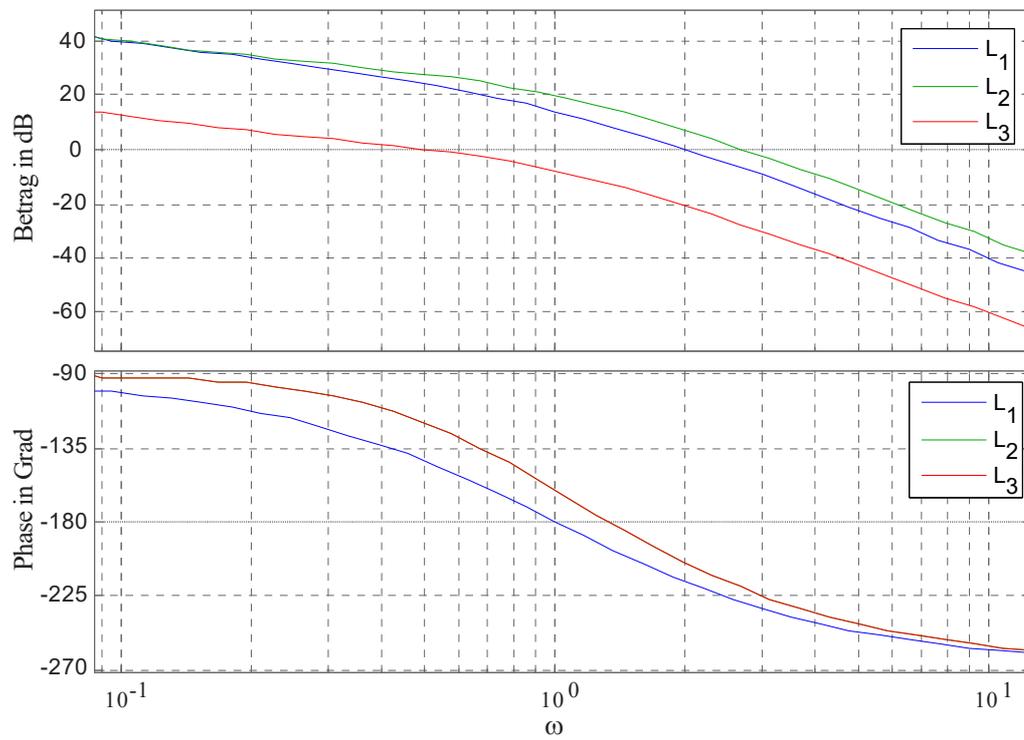


Bild 5.7: Frequenzkennlinien des offenen Kreises

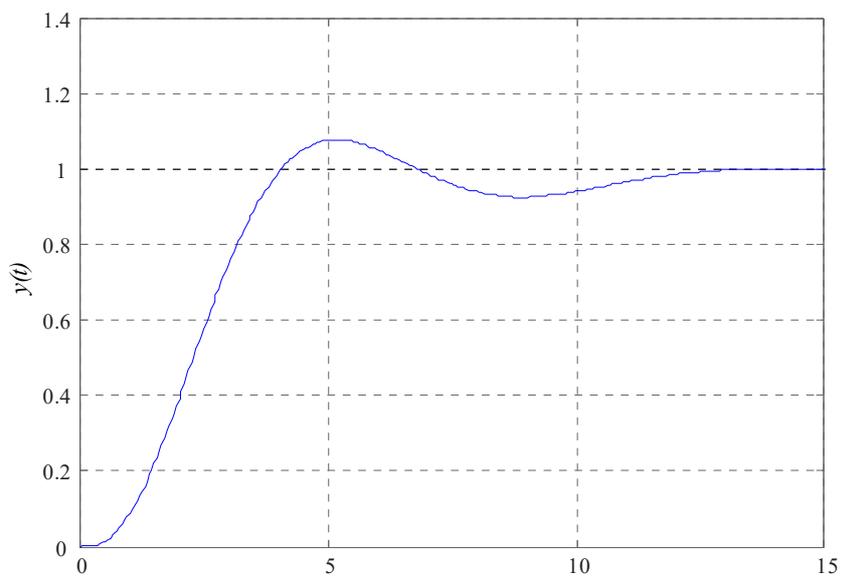


Bild 5.8: Sprungantwort des Regelkreises

# Kapitel 6

## Analytische Reglersynthese

### 6.1 Einführung

Die Idee der so genannten „Analytischen Reglersynthese“ besteht darin, dem Regelkreis eine gewünschte Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  vorzugeben. Aus  $T(s)$  und der gegebenen Streckenübertragungsfunktion  $P(s)$  wird dann der gesuchte Regler berechnet. Damit unterscheidet sich der Entwurfsprozess grundlegend von anderen Entwurfstechniken.

### 6.2 Implementierbarkeit

Eine Übertragungsfunktion  $T(s)$  wird implementierbar genannt, wenn es eine Regelkreisstruktur mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) Alle Teilsysteme des Regelkreises sind realisierbar
- (ii) Der Regelkreis ist intern stabil
- (iii)  $T(s)$  ist die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises

Die Bedingung (i) besagt, dass jeder „Block“ im Regelkreis ein realisierbares System sein muss, d.h. jedes Teilsystem kann in Form eines Zustandsmodells realisiert werden. Die Erfüllung von (ii) hat zur Folge, dass es im Regelkreis zu keinen unerlaubten „instabilen“ Kürzungen kommt, d.h. jede Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises ist BIBO-stabil. Ist  $T(s)$  also nicht implementierbar, so gibt es keinen praktisch sinnvollen Regelkreis mit dieser Führungsübertragungsfunktion.

Die Implementierbarkeit einer Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)} \quad (6.1)$$

bei gegebener teilerfremder (d.h. gekürzter) Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad (6.2)$$

kann leicht überprüft werden.  $T(s)$  ist nämlich genau dann implementierbar, wenn gilt

- (a) Das Polynom  $\nu_T(s)$  ist ein Hurwitzpolynom
- (b) Nullstellen von  $\mu(s)$  in der geschlossenen rechten Halbebene sind Nullstellen von  $\mu_T(s)$
- (c)  $\text{Grad } \nu_T(s) - \text{Grad } \mu_T(s) \geq \text{Grad } \nu(s) - \text{Grad } \mu(s)$

**B** Gegeben sei die Regelstrecke

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}.$$

Es ist zu überprüfen, welche der angegebenen Übertragungsfunktionen implementierbar sind:

	(a)	(b)	(c)	
$T_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$	✓	✓	×	nicht implementierbar
$T_2(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+1}$	×	✓	✓	nicht implementierbar
$T_3(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$	✓	×	✓	nicht implementierbar
$T_4(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+5}$	✓	✓	✓	implementierbar

Das bedeutet, dass nur  $T_4(s)$  eine sinnvolle Wahl für die Führungsübertragungsfunktion eines Regelkreises mit der vorgegebenen Regelstrecke  $P(s)$  darstellt. ■

## 6.3 Entwurf für den Standardregelkreis

Zunächst wird die wohl naheliegendste Vorgangsweise zur Ermittlung von  $R(s)$  aus  $T(s)$  und  $P(s)$  vorgestellt. Es zeigt sich, dass diese direkte Art der Reglerberechnung allerdings nur eingeschränkt anwendbar ist und mit Hilfe des Standardregelkreises nicht jede implementierbare Führungsübertragungsfunktion realisiert werden kann. Daher beschränkt man sich bei der so genannten Polvorgabe auf die Vorgabe der Pole von  $T(s)$ .

### 6.3.1 Direkte Reglerberechnung

Aus der vorgegebenen Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  errechnet sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises gemäß

$$L(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)}. \quad (6.3)$$

Man beachte, dass der resultierende Regelkreis genau dann intern stabil ist, wenn alle „instabilen“ Pole bzw. Nullstellen von  $P(s)$  auch Pole bzw. Nullstellen von  $L(s)$  sind. Anderenfalls kommt es zu unerlaubten instabilen Kürzungen bei der Berechnung von  $L(s)$ . Der gesuchte Regler  $R(s)$  kann über die Relation

$$R(s) = \frac{L(s)}{P(s)} \quad (6.4)$$

berechnet werden.

**B** Gegeben sei die Regelstrecke

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$$

und die gewünschte (implementierbare) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{-3(s-1)}{s^2 + 2.8s + 3}.$$

Für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ergibt sich

$$L(s) = \frac{-3(s-1)}{s(s+5.8)},$$

d.h.  $L(s)$  besitzt den instabilen Streckenpol bei  $s = 0$  und die instabile Streckennullstelle bei  $s = 1$ . Das bedeutet, dass der resultierende Regelkreis intern stabil ist und die Reglerübertragungsfunktion lautet

$$R(s) = \frac{-3(s+2)}{s+5.8}.$$

■

**B** Mit der Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)},$$

und der gewünschten (implementierbaren) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{3}{s^2 + 2.8s + 3}$$

findet man

$$L(s) = \frac{3}{s(s+2.8)}.$$

Man erkennt, dass der instabile Streckenpol bei  $s = 1$  kein Pol von  $L(s)$  ist, d.h. es kommt zu einer instabilen Kürzung im offenen Kreis. Diese Tatsache erkennt man auch an der Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{3(s+1)(s-1)}{s(s+2.8)}.$$

■



so ist die Resultante eine reguläre  $2n \times 2n$ -Matrix, d.h. das Gleichungssystem (6.9) kann eindeutig gelöst werden.

**B** Gegeben sei die Streckenübertragungsfunktion ( $n = 2$ )

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2}.$$

Es soll ein Regler der Ordnung  $\rho = n - 1 = 1$  so ermittelt werden, dass alle Pole von  $T(s)$  an der Stelle  $s = -1$  liegen, d.h.

$$\nu_T(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Für das Gleichungssystem (6.9) ergibt sich somit

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

als Lösung findet man

$$a_0 = 3, a_1 = 1, b_0 = -5 \quad \text{und} \quad b_1 = 1,$$

d.h.

$$R(s) = \frac{s - 5}{s + 3}.$$

Die resultierende Führungsübertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \frac{s - 5}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{s - 5}{(s + 1)^3}.$$

Sie besitzt eine Nullstelle bei  $s = 5$ , die sich gemäß (6.7) aus dem Entwurf ergibt. ■

Wählt man

$$\rho > n - 1, \tag{6.11}$$

so ist das Gleichungssystem (6.9) unterbestimmt, d.h. die Resultante besitzt weniger Zeilen als Spalten. Durch die Erhöhung der Reglerordnung können also zusätzlich zu den gewünschten Polen von  $T(s)$  weitere  $(\rho - n + 1)$  Bedingungen für die Reglerkoeffizienten vorgegeben werden. Dadurch ergeben sich zusätzliche Freiheitsgrade für den Reglerentwurf.

**B Fortsetzung.** Gleich wie im vorigen Beispiel sollen alle Pole von  $T(s)$  an der Stelle  $s = -1$  liegen. Zusätzlich soll der Regler integrierendes Verhalten zeigen, d.h. eine Polstelle bei  $s = 0$  besitzen. Dieser „Zusatzwunsch“ kann durch die Erhöhung der Reglerordnung auf  $\rho = 2$  im Entwurf berücksichtigt werden. Dazu muss lediglich die Gleichung  $a_0 = 0$  zum Gleichungssystem (6.9) hinzugefügt werden. Damit folgt unter Berücksichtigung von

$$\nu_T(s) = (s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

unmittelbar das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

aus dem sich

$$a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 1, b_0 = 1, b_1 = -4 \text{ und } b_2 = 4$$

ergibt, d.h.

$$R(s) = \frac{4s^2 - 4s + 1}{s^2 + 4s}.$$

Die resultierende Führungsübertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \frac{4s^2 - 4s + 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1} = \frac{4(s - 0.5)^2}{(s + 1)^4}.$$

■

Mit der beschriebenen Methode lassen sich zwar die Pole der Übertragungsfunktion  $T(s)$ , nicht jedoch ihre Nullstellen vorgeben. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt eine erweiterte Regelkreisstruktur betrachtet, mit deren Hilfe *jede* implementierbare Führungsübertragungsfunktion realisiert werden kann.

## 6.4 Entwurf für eine erweiterte Regelkreisstruktur

Für die Führungsübertragungsfunktion der in Bild 6.1 dargestellten Regelkreisstruktur findet

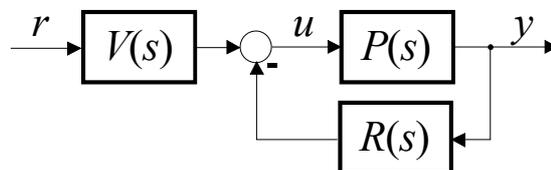


Bild 6.1: Erweiterte Regelkreisstruktur

man

$$T(s) = \frac{V(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)}. \quad (6.12)$$

Man beachte, dass der Regler im vorliegenden Fall *ein* System mit zwei Eingangsgrößen  $y$  und  $r$  und einer Ausgangsgröße  $u$  ist. Daraus resultiert, dass die beiden Übertragungsfunktionen

$R(s)$  und  $V(s)$  dasselbe Nennerpolynom  $a(s)$  besitzen, d.h.

$$R(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_\rho s^\rho + \dots + b_1 s + b_0}{a_\rho s^\rho + \dots + a_1 s + a_0} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{c(s)}{a(s)} = \frac{c_\rho s^\rho + \dots + c_1 s + c_0}{a_\rho s^\rho + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (6.13)$$

Für  $T(s)$  folgt nun

$$T(s) = \frac{c(s)\mu(s)}{a(s)\nu(s) + b(s)\mu(s)}. \quad (6.14)$$

Wählt man nun eine beliebige implementierbare Führungsübertragungsfunktion gemäß (6.1), so müssen die Bedingungen

$$c(s)\mu(s) = \mu_T(s) \quad \text{und} \quad a(s)\nu(s) + b(s)\mu(s) = \nu_T(s) \quad (6.15)$$

gelten. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass  $c(s)$  genau dann, wie gewünscht, ein Polynom ist, wenn  $\mu(s)$  ein Teiler von  $\mu_T(s)$  ist.

**B** Mit der Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)},$$

und der gewünschten (implementierbaren) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)}$$

findet man mittels (6.15)

$$c(s) \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c(s) = 1$$

und

$$a(s) \cdot (s^2 - 1) + b(s) \cdot 1 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Die Polynome  $a(s)$  und  $b(s)$  können aus dem Gleichungssystem (6.9) berechnet werden. Für den Regler findet man

$$R(s) = \frac{4(s+1)}{s+3} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{1}{s+3}.$$

■

Im nachfolgenden Beispiel ist die Voraussetzung, dass  $\mu(s)$  ein Teiler von  $\mu_T(s)$  ist, verletzt, d.h. die beschriebene Methodik kann nicht angewandt werden.

**B** Mit der Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2-1} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)},$$

und der gewünschten (implementierbaren) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)}$$

führt (6.15) auf die Bedingung

$$c(s)(s + 2) = 1,$$

d.h. es gibt kein Polynom  $c(s)$  als Lösung dieser Gleichung. ■

Abhilfe schafft eine geringfügige Modifikation der Vorgangsweise. Zunächst wird die Übertragungsfunktion  $T(s)$  durch das Zählerpolynom der Strecke dividiert, also

$$\frac{1}{\mu(s)}T(s) = \frac{1}{\mu(s)}\frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)} = \frac{\tilde{\mu}_T(s)}{\tilde{\nu}_T(s)}.$$

Dabei ist darauf zu achten, dass bei der Berechnung von  $\tilde{\mu}_T(s)$  bzw.  $\tilde{\nu}_T(s)$  gegebenenfalls alle instabile Kürzungen durchzuführen sind, d.h.  $\tilde{\nu}_T(s)$  ist jedenfalls ein Hurwitzpolynom. Aus (6.14) folgt dann unmittelbar

$$\frac{\tilde{\mu}_T(s)}{\tilde{\nu}_T(s)} = \frac{c(s)}{a(s)\nu(s) + b(s)\mu(s)}, \quad (6.16)$$

d.h. es ergeben sich die Entwurfsgleichungen

$$c(s) = \tilde{\mu}_T(s) \quad \text{und} \quad a(s)\nu(s) + b(s)\mu(s) = \tilde{\nu}_T(s). \quad (6.17)$$

**B** Mit der Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)},$$

und der gewünschten (implementierbaren) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{(s + 1)^2} = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)}$$

führt (6.16) zu

$$\frac{1}{\mu(s)}T(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)^2} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{\tilde{\mu}_T(s)}{\tilde{\nu}_T(s)}.$$

Aus (6.17) folgt nun unmittelbar

$$R(s) = \frac{2(s + 1)}{s + 2} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{1}{s + 2}.$$

■

Man beachte, dass der Polynomgrad von  $\tilde{\nu}_T(s)$  gemäß (6.17) genau  $(n + \rho)$  betragen muss. Gegebenenfalls kann die Erfüllung dieser Bedingung durch eine Erweiterung von  $T(s)$  erreicht werden, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlicht.

**B** Gegeben sei die Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)},$$

und die gewünschte (implementierbare) Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s + 1} = \frac{\mu_T(s)}{\nu_T(s)}.$$

Es soll ein Regler so entworfen werden, dass die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises  $T(s)$  ist und der Regler integrierendes Verhalten hat. Daher wird die Reglerordnung  $\rho = 2$  gewählt, der Polynomgrad von  $\tilde{\nu}_T(s)$  muss also 4 betragen.

Aus (6.16) folgt

$$\frac{1}{\mu(s)}T(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\tilde{\mu}_T(s)}{\tilde{\nu}_T(s)},$$

d.h. der Polynomgrad von  $\tilde{\nu}_T(s)$  beträgt nur 2. Eine Erhöhung des Polynomgrads erreicht man, indem  $T(s)$  als

$$T(s) = \frac{1}{s + 1} \frac{w(s)}{w(s)}$$

angeschrieben wird, wobei  $w(s)$  ein Hurwitzpolynom vom Grade 2 ist. Die spezielle Wahl von  $w(s)$  hat keinen Einfluss auf das Führungsverhalten des Regelkreises, wohl aber auf sein Störverhalten. In Form von  $w(s)$  ergeben sich also zusätzliche Freiheiten beim Reglerentwurf. Im vorliegenden Fall wird willkürlich

$$w(s) = (s + 3)^2$$

gewählt, d.h.

$$T(s) = \frac{1}{(s + 1)} \frac{(s + 3)^2}{(s + 3)^2}.$$

Aus (6.16) folgt nun

$$\frac{1}{\mu(s)}T(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)} \frac{(s + 3)^2}{(s + 3)^2} = \frac{(s + 3)^2}{s^4 + 9s^3 + 29s^2 + 39s + 18} = \frac{\tilde{\mu}_T(s)}{\tilde{\nu}_T(s)},$$

der Regler kann also mittels (6.17) berechnet werden, d.h.

$$c(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

und

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 39 \\ 29 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$R(s) = \frac{7s^2 + 16s + 9}{s(s+2)} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{s(s+2)}.$$

■

### 6.4.1 Realisierung des Reglers

Die Realisierung des Reglers

$$R(s) = \frac{\beta_\rho s^\rho + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\rho + \alpha_{\rho-1} s^{\rho-1} \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad \text{und} \quad V(s) = \frac{\gamma_\rho s^\rho + \dots + \gamma_1 s + \gamma_0}{s^\rho + \alpha_{\rho-1} s^{\rho-1} \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

als *ein* dynamisches System kann beispielsweise mit Hilfe der zweiten Normalform erfolgen. Bezeichnet man mit

$$\mathbf{x}_R = [x_{R,1} \quad \dots \quad x_{R,\rho}]$$

den Zustandsvektor des Reglers, so lautet die zweite Normalform

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_R}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & -\alpha_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{\rho-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_\rho \alpha_0 \\ \beta_1 - \beta_\rho \alpha_1 \\ \beta_2 - \beta_\rho \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_{\rho-1} - \beta_\rho \alpha_{\rho-1} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \gamma_0 - \gamma_\rho \alpha_0 \\ \gamma_1 - \gamma_\rho \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_\rho \alpha_2 \\ \vdots \\ \gamma_{\rho-1} - \gamma_\rho \alpha_{\rho-1} \end{bmatrix} r, \\ u &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}_R - \beta_\rho y + \gamma_\rho r. \end{aligned}$$

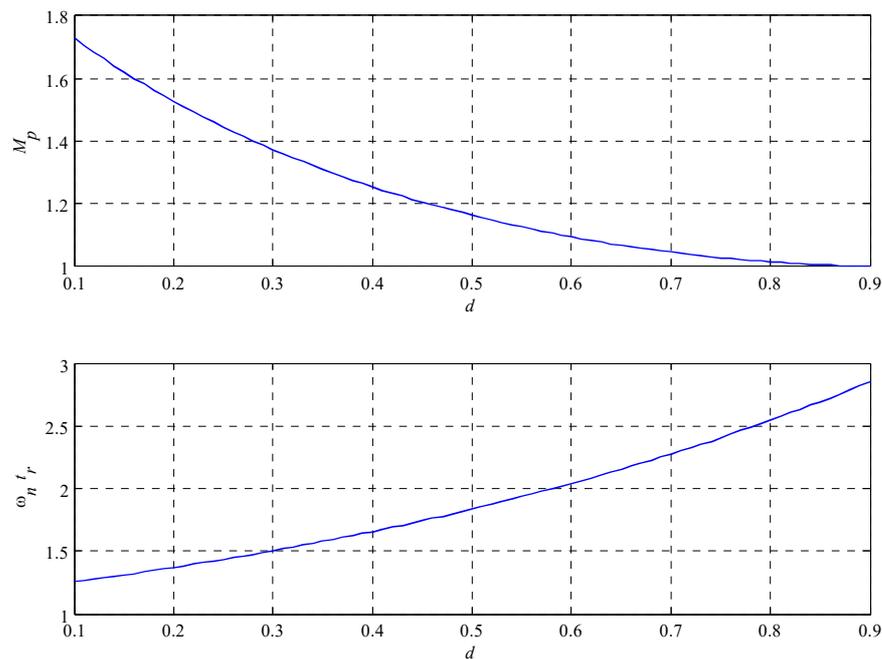
## 6.5 Wahl von $T(s)$

### 6.5.1 System mit dominantem Polpaar

Häufig wird für  $T(s)$  der Ansatz

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{mit} \quad \omega_n > 0 \quad \text{und} \quad 0 < d < 1, \quad (6.18)$$

gewählt, wobei  $\omega_n$  die Kennkreisfrequenz und  $d$  der Dämpfungsgrad ist. Die angegebenen Wertebereiche für  $\omega_n$  und  $d$  gewährleisten, dass  $T(s)$  BIBO-stabil ist. Gibt man für die Sprungantwort entsprechend Abschnitt 5.2 die Überschwingweite  $M_p$  und die Anstiegszeit  $t_r$

Bild 6.2: Ermittlung von  $\omega_n$  und  $d$  aus  $M_p$  und  $t_r$ 

vor, so können die Parameter  $\omega_n$  und  $d$  mit Hilfe der in Bild 6.2 dargestellten Kurven leicht ermittelt werden.

**B** Soll die Sprungantwort des Regelkreises ein prozentuales Überschwingen von  $\ddot{u} = 10\%$  und eine Anstiegszeit  $t_r = 1$  besitzen, so folgt aus Bild 6.2 unmittelbar

$$M_p = 1.1 \quad \Rightarrow \quad d = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \omega_n t_r = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2.$$

Die gesuchte Führungsübertragungsfunktion lautet somit

$$T(s) = \frac{4}{s^2 + 2.4s + 4}.$$

■

Man beachte, dass eine Führungsübertragungsfunktion der Form (6.18) prinzipiell nur dann implementierbar sein kann, wenn die Streckenübertragungsfunktion  $P(s)$  keine „instabilen“ Nullstellen, d.h. Nullstellen mit nichtnegativem Realteil besitzt. Weiters muss für Implementierbarkeit von (6.18) die Bedingung

$$\text{Grad } \nu(s) - \text{Grad } \mu(s) \leq 2 \quad (6.19)$$

erfüllt sein. Die Bedingung (6.19) kann gelockert werden, wenn der Ansatz für  $T(s)$  gemäß

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)^k} \quad (6.20)$$

modifiziert wird. Dabei ist  $\alpha$  eine hinreichend große positive Konstante und für den ganzzahligen Parameter  $k$  gilt

$$k \geq \text{Grad } \nu(s) - \text{Grad } \mu(s) - 2. \quad (6.21)$$

**B** Die im vorigen Beispiel gefundene Führungsübertragungsfunktion soll so modifiziert werden, dass sie bei gegebener Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

implementierbar ist. Um die Implementierbarkeit zu gewährleisten, muss der Nennergrad von  $T(s)$  gemäß (6.20) erweitert werden, d.h.

$$T(s) = \frac{4}{s^2 + 2.4s + 4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\alpha}}$$

Der reelle Parameter  $\alpha$  muss groß genug gewählt werden, damit die Sprungantwort der modifizierten Führungsübertragungsfunktion die Vorgaben  $M_p = 1.1$  und  $t_r = 1$  hinreichend gut erfüllt. Es ist allerdings zu beachten, dass eine zu große Wahl von  $\alpha$  zu großen Werten der Stellgröße  $u$  führt. Berechnet man den Wert der Stellgröße zum Zeitpunkt  $t = 0$  für eine sprungförmige Referenzgröße, so findet man

$$u_0 = u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{u}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{T(s)}{P(s)} \bar{r}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{4(s-1)(s-2)(s-3)}{(s^2 + 2.4s + 4)(1 + \frac{s}{\alpha})} \frac{1}{s} = 4\alpha,$$

d.h. der Wert  $u_0$  steigt proportional zu  $\alpha$ . ■

### 6.5.2 „Optimale“ Vorgabe von $T(s)$ (nicht prüfungsrelevant)

Es soll eine implementierbare Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  so ermittelt werden, dass unter Annahme einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  das Integral

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 + \delta [u(t) - u_{\infty}]^2 dt \quad (6.22)$$

minimiert wird. Hierbei ist  $e$  der Regelfehler,  $u_{\infty}$  ist der stationäre Wert der Stellgröße zur Gewährleistung von  $e_{\infty} = 0$  und  $\delta > 0$  ist ein vorgebarerer reeller Gewichtungsfaktor. Die gesuchte Übertragungsfunktion kann in der Form

$$T(s) = K \frac{\mu(s)}{\nu_T(s)} \quad \text{mit} \quad K = \frac{\nu_T(0)}{\mu(0)} \quad (6.23)$$

angeschrieben werden, d.h. der Zähler von  $T(s)$  entspricht dem Zähler der Strecke und  $K$  wird so bestimmt, dass  $T(0) = 1$  erfüllt ist. Das Hurwitzpolynom  $\nu_T(s)$  kann aus dem Polynom

$$\Delta(s) = \nu(s)\nu(-s) + \frac{1}{\delta}\mu(s)\mu(-s) \quad (6.24)$$

ermittelt werden kann. Dieses Polynom besitzt aufgrund seiner Struktur offenbar Nullstellen, die symmetrisch zur imaginären und reellen Achse sind. Weiters besitzt  $\Delta(s)$  keine Nullstellen auf der imaginären Achse, da aufgrund der vorausgesetzten Teilerfremdheit von  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$  sicher

$$\Delta(j\omega) = \nu(j\omega)\nu(-j\omega) + \frac{1}{\delta}\mu(j\omega)\mu(-j\omega) = |\nu(j\omega)|^2 + \frac{1}{\delta}|\mu(j\omega)|^2 \neq 0$$

gilt.

**B** Für die Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$$

erhält man das Polynom

$$\Delta(s) = (s+2)(-s+2) + \frac{1}{\rho} = -s^2 + 4 + \frac{1}{\delta}.$$

Die Nullstellen von  $\Delta(s)$  liegen bei

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{4 + \frac{1}{\delta}}.$$

■

Aufgrund der Symmetrie seiner Nullstellen besitzt  $\Delta(s)$  genau  $n$  Nullstellen mit negativem Realteil und  $n$  Nullstellen mit positivem Realteil, die sich durch Spiegelung der „stabilen Nullstellen“ an der imaginären Achse ergeben. Man kann nun zeigen, dass sich das gesuchte Hurwitzpolynom  $\nu_T(s)$  aus der so genannten Spektralfaktorisierung

$$\Delta(s) = \nu_T(s)\nu_T(-s) \tag{6.25}$$

berechnen lässt.

**B** Für die Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s-1} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$$

errechnet sich  $\Delta(s)$  gemäß (6.24) zu

$$\Delta(s) = \nu_T(s)\nu_T(-s) = (s-1)(-s-1) + \frac{1}{\delta} = -s^2 + 1 + \frac{1}{\delta} = \left(s + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}\right) \left(-s + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}\right).$$

Das bedeutet, dass für das gesuchte Nennerpolynom der Führungsübertragungsfunktion

$$\nu_T(s) = s + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}$$

gilt. Zur Gewährleistung der stationären Genauigkeit ermittelt man mittels (6.23) den Faktor

$$K = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}}{1} = \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}.$$

Die gesuchte (implementierbare) Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  lautet somit

$$T(s) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}}{s + \sqrt{1 + \frac{1}{\delta}}}.$$

■

# Kapitel 7

## Entwurf von Zustandsreglern

### 7.1 Einführung

Gegeben sei das lineare und zeitinvariante Zustandsmodell  $n$ -ter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (7.1)$$

einer Regelstrecke. Für den Durchgriffsterm wird hier  $d = 0$  angenommen, wie es bei realen technischen Systemen häufig der Fall ist. Das Verhalten der Regelstrecke kann mittels der Stellgröße  $u$  beeinflusst werden. Weiters wirkt auf die Strecke der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ein, der auch als unbekannte „Anfangsstörung“ interpretiert werden kann.

Durch geeignete Wahl der Stellgröße  $u$  soll der Regelstrecke ein gewünschtes dynamisches Verhalten verliehen werden. Dies umfasst einerseits die Beseitigung der Wirkung des Anfangszustandes  $\mathbf{x}_0$  durch eine Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises. Andererseits ist man häufig daran interessiert, dass die Ausgangsgröße  $y$  einem in Form der Referenzgröße  $r$  vorgegebenen Wunschverlauf „möglichst gut“ folgt. Damit gliedert sich der Reglerentwurf in zwei Schritte, nämlich in die **Stabilisierung** und die **Nachführung**.

### 7.2 Stabilisierung des Regelkreises

Die Stabilisierung des Regelkreises erfolgt durch eine geeignete Rückführung des als *messbar* vorausgesetzten Zustandsvektors  $\mathbf{x}$ . Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Zustandsrückführung der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (7.2)$$

Hierbei umfasst der Vektor

$$\mathbf{k}^T = [ k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n ] \quad (7.3)$$

die zu bestimmenden (konstanten) reellen Reglerparameter. Die Stellgröße  $u$  wird demnach als Linearkombination der Zustandsgrößen angesetzt, man nennt (7.2) daher auch einen **linearen Zustandsregler**.

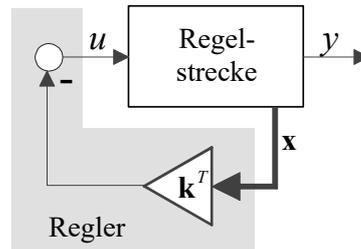


Bild 7.1: Stabilisierung mit Hilfe einer Zustandsregelung

In Bild 7.1 ist der Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und Zustandsregler dargestellt. Das mathematische Modell des Regelkreises ergibt sich aus (7.1) und (7.2) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}. \quad (7.4)$$

Da die Ausgangsgleichung bei der Stabilisierung des Regelkreises keine Rolle spielt, bleibt sie hier auch unberücksichtigt. Das Ziel des Entwurfes besteht nun darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass der Regelkreis asymptotisch stabil ist. Das bedeutet, dass die Dynamikmatrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  des Regelkreises eine Hurwitzmatrix sein muss, all ihre Eigenwerte besitzen also einen negativen Realteil. Der Entwurf des Zustandsreglers läuft somit darauf hinaus, durch geschickte Wahl von  $\mathbf{k}^T$  die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  in gewünschter Weise zu platzieren, man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Eigenwertvorgabe**.

### 7.2.1 Prinzip der Eigenwertvorgabe

Die Aufgabe besteht darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass die  $n$  Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  vorgebbare Werte  $\lambda_i$  annehmen. Das bedeutet, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgegebenen Wunschpolynom  $w(s)$  entsprechen muss, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0. \quad (7.5)$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die *reellen* Koeffizienten des Wunschpolynom, d.h. die vorgebbaren Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  müssen reell und/oder paarweise konjugiert komplex sein.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Zustandsregler der Form (7.2), d.h.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u \quad \text{und} \quad u = -kx.$$

Das Modell des Regelkreises lautet somit

$$\frac{dx}{dt} = (2 - k)x.$$

Wählt man

$$k = 2 - \lambda,$$

so besitzt der Regelkreis einen Eigenwert an einer beliebig vorgebbaren Stelle  $s = \lambda$ . ■

Es stellt sich die Frage, ob stets alle Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  beliebig platziert werden können. Zur Beantwortung dieser Frage wird angenommen, dass  $s_i$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  ist und  $\boldsymbol{\rho}_i^T$  ein zugehöriger Links-Eigenvektor, d.h. es gilt die Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (7.6)$$

Multipliziert man nun die Dynamikmatrix des Regelkreises mit dem Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i^T$ , so findet man

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T \stackrel{(7.6)}{=} s_i \boldsymbol{\rho}_i^T - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T. \quad (7.7)$$

Wenn der Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  normal auf den Eingangsvektor steht, d.h.

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (7.8)$$

so vereinfacht sich (7.7) zu

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (7.9)$$

Das bedeutet, dass  $s_i$  auf jeden Fall, d.h. für jede beliebige Wahl von  $\mathbf{k}^T$  auch ein Eigenwert von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Die Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  sind in diesem Fall somit *nicht* beliebig vorgebar! Dies ist offensichtlich auf (7.8) zurückzuführen, was gemäß dem Hautus-Kriterium bedeutet, dass die Regelstrecke *nicht* steuerbar ist. Erst die Eigenschaft der Steuerbarkeit der Strecke erlaubt die beliebige Vorgabe aller Eigenwerte des Regelkreises.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Regler der Form (7.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Wie man mit Hilfe der Steuerbarkeitmatrix

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

leicht überprüfen kann, ist die Regelstrecke steuerbar, die Eigenwerte des Regelkreises können also beliebig vorgegeben werden. Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom soll einem Wunschkpolynom

$$w(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

entsprechen, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s - k_1 & -k_2 \\ k_1 - 1 & s + 1 + k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1 - k_1 + k_2)s - (k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} w(s).$$

Der Koeffizientenvergleich

$$1 - k_1 + k_2 \stackrel{!}{=} -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad -(k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} \lambda_1 \lambda_2$$

liefert die Relationen

$$k_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2) \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)$$

zur Berechnung der Reglerparameter. ■ ■

## 7.2.2 Stabilisierbarkeit

Ein System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

heißt **stabilisierbar**, wenn der Vektor  $\mathbf{k}^T$  so bestimmt werden kann, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist.

Man beachte, dass die Steuerbarkeit des Systems eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Bedingung für die Stabilisierbarkeit darstellt.

**B** Gegeben sei die (nicht steuerbare) Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ergibt sich

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & -k_2 \\ 2 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix},$$

ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^2 + s(k_1 + k_2) + (k_1 + k_2 - 1) = (s + 1)(s + k_1 + k_2 - 1).$$

Für  $k_1 + k_2 > 1$  ist die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  somit eine Hurwitzmatrix, d.h. das System ist stabilisierbar. ■

### 7.2.3 Entwurf für ein System in Regelungsnormalform

Besonders elegant ist die Ermittlung des Reglers, wenn das Modell der Regelstrecke in erster Normalform vorliegt. Zum einen ist das Modell dann jedenfalls steuerbar, zum anderen erlaubt die Tatsache, dass die Dynamikmatrix des Regelkreises in Begleitform vorliegt eine besonders einfache Berechnung der Reglerparameter. Aus diesem Grund nennt man die erste Normalform häufig auch **Regelungsnormalform**.

Das Modell der Strecke  $n$ -ter Ordnung liege in erster Normalform vor, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für einen Zustandsregler der Form (7.2) folgt dann für die Dynamikmatrix des Regelkreises

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 - k_1 & -\alpha_1 - k_2 & \dots & -\alpha_{n-1} - k_n \end{bmatrix}.$$

Man erkennt, dass die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  wiederum in Begleitform vorliegt, d.h. ihr charakteristisches Polynom

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^n + (\alpha_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + k_2)s + (\alpha_0 + k_1)$$

kann direkt abgelesen werden. Im Sinne der Eigenwertvorgabe muss das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgebbaren Polynom (7.5) entsprechen, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$w_0 = \alpha_0 + k_1, \quad w_1 = \alpha_1 + k_2, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \alpha_{n-1} + k_n,$$

woraus sich unmittelbar die gesuchten Reglerparameter

$$k_i = w_{i-1} - \alpha_{i-1} \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n \quad (7.10)$$

ergeben.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke in erster Normalform und ein Zustandsregler der Form (7.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2] \mathbf{x}.$$

Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Unter der Annahme, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzen soll, d.h.

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + w_1s + w_0 = s^2 + 2s + 1$$

ergeben sich gemäß (7.10) die Reglerparameter

$$k_1 = w_0 - \alpha_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{und} \quad k_2 = w_1 - \alpha_1 = 2 + 1 = 3.$$

Der lineare Zustandsregler (7.2) lautet somit

$$u = -2x_1 - 3x_2.$$

■

Liegt das Modell der (steuerbaren) Regelstrecke nicht in Regelungsnormalform vor, so bietet sich im Sinne einer systematischen Berechnung der Reglerparameter eine reguläre Zustandstransformation in diese vorteilhafte Normalform an. Für das transformierte System kann der Zustandsregler mit Hilfe (7.10) problemlos angegeben werden. Der gesuchte Zustandsregler für das Originalsystem errechnet sich mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ . Wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, kann der beschriebene Reglerentwurf sehr effizient mit Hilfe der Formel von Ackermann bewerkstelligt werden.

## 7.2.4 Transformation auf Regelungsnormalform

Unterwirft man das Modell der Regelstrecke (7.1) einer Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{7.11}$$

so ergibt sich das transformierte Modell

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{b}u. \tag{7.12}$$

Dieses Modell soll in Regelungsnormalform vorliegen, d.h. es müssen die Relationen

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

gelten. Aus der ersten Bedingung in (7.13) folgt nach Multiplikation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  von rechts

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}. \tag{7.14}$$

Stellt man nun die Matrix  $\mathbf{T}$  durch ihre Zeilenvektoren dar, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix},$$

so geht (7.14) in die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_2^T \\ \mathbf{t}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \\ -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

über. Ein Vergleich der ersten  $(n-1)$  Zeilen ergibt

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_2^T \mathbf{A}, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A},$$

woraus durch Einsetzen unmittelbar der Zusammenhang

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \quad (7.16)$$

folgt. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix den bemerkenswerten Aufbau

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

besitzt. Aus der ersten Zeile  $\mathbf{t}_1^T$  von  $\mathbf{T}$  können somit alle übrigen Zeilen durch sukzessive Multiplikation mit  $\mathbf{A}$  berechnet werden. Die zweite Bedingung in (7.13) nimmt nun die Form

$$\mathbf{T} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

an. Durch Transposition obiger Gleichung erhält man

$$\left[ \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} \quad \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \right] = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T \left[ \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \right] = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right].$$

Man beachte, dass in obiger Relation der Zeilenvektor  $\mathbf{t}_1^T$  mit der in (??) eingeführten Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_u$  multipliziert wird, d.h.

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{S}_u = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right].$$

Da die Regelstrecke voraussetzungsgemäß steuerbar ist, kann die erste Zeile von  $\mathbf{T}$  mittels

$$\mathbf{t}_1^T = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right] \mathbf{S}_u^{-1} \quad (7.18)$$

berechnet werden. Das Ergebnis in (7.18) bedeutet, dass  $\mathbf{t}_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ist. Somit kann die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  geradlinig ermittelt werden. Zunächst wird ihre erste Zeile gemäß (7.18) berechnet, die restliche Zeilen ergeben sich nach dem in (7.17) angegebenen Bildungsgesetz.

Man beachte, dass die letzte Zeile der ersten Bedingung in (7.15), also

$$\mathbf{t}_n^T \mathbf{A} = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \quad (7.19)$$

bisher nicht betrachtet wurde. Setzt man die in (7.16) gefundenen Zusammenhänge ein, so erhält man

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^n = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Gemäß dem Satz von Cayley und Hamilton erfüllt *jede* quadratische Matrix ihre eigene charakteristische Gleichung. Das charakteristische Polynom von  $\mathbf{A}$  lautet

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad (7.21)$$

d.h. für Klammerausdruck in (7.20) gilt

$$\Delta(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \quad (7.22)$$

die Bedingung (7.19) ist somit auf jeden Fall erfüllt und bedarf keiner weiteren Beachtung.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

das in die Regelungsnormform transformiert werden soll. Dazu wird die Steuerbarkeitsmatrix und deren Inverse ermittelt, d.h.

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{t}_1^T = [ 0 \quad 1 ],$$

woraus unmittelbar

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} = [ 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [ 1 \quad 0 ]$$

folgt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese besagt, dass man beim vorliegenden System nur die beiden Zustandsgrößen vertauschen muss, um die Beschreibung in die erste Normalform überzuführen. ■

### 7.2.5 Formel von Ackermann

In den bisherigen Ausführungen wurde gezeigt, wie ein beliebiges (steuerbares) System (7.1) in die Regelungsnormform transformiert werden kann. Für das zugehörige transformierte System (7.12) gestaltet sich der Zustandsreglerentwurf

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{z} \quad (7.23)$$

dann äußerst einfach. Die Ermittlung des Zustandsreglers für das Originalsystem (7.1) mittels (7.11) liefert schließlich

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{T} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (7.24)$$

Fasst man die soeben beschriebenen Verfahrensschritte geschickt zusammen, so zeigt sich, dass für die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$  in (7.24) die Ermittlung von  $\mathbf{T}$  bzw. die explizite Durchführung der Zustandstransformation gar nicht erforderlich ist.

Der Reglerentwurf für das transformierte System in Regelungsnormform kann analog zu (7.10) durchgeführt werden, d.h. für den Vektor  $\mathbf{h}^T$  in (7.23) gilt

$$\mathbf{h}^T = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ]. \quad (7.25)$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die Koeffizienten des Wunschpolynoms (7.5) und  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (7.20) von  $\mathbf{A}$ . Die Berechnung von  $\mathbf{k}^T$  erfolgt gemäß (7.24), d.h. mit (7.25) und (7.17) folgt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{h}^T \mathbf{T} = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Nach Ausführung der Multiplikation

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1})$$

und Addition des „Nullterms“  $\mathbf{t}_1^T (\mathbf{A}^n - \mathbf{A}^n)$  erhält man schließlich

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Ein Vergleich mit (7.22) zeigt, dass der zweite Klammerausdruck in obiger Gleichung dem Matrixpolynom  $\Delta(\mathbf{A})$  entspricht, d.h. es gilt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Der Vektor  $\mathbf{k}^T$  entspricht also dem Produkt aus  $\mathbf{t}_1^T$  und dem Wunschpolynom  $w(s)$ , in dem  $s$  durch  $\mathbf{A}$  ersetzt wird. Diese Erkenntnis wird durch die so genannte **Formel von Ackermann**<sup>1</sup>

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) \quad (7.26)$$

in prägnanter Weise widergespiegelt.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Es soll mit der Formel von Ackermann ein Zustandsregler der Form (7.2) so berechnet werden, dass die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  bei

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

liegen, d.h. das Wunschpolynom lautet

$$w(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix und ihre Inverse lauten

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{t}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Ausdruck  $w(\mathbf{A})$  berechnet sich zu

$$w(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} + 9\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},$$

d.h. die Auswertung von (7.26) liefert

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Zustandsregler lautet somit

$$u = - \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -8x_1 - 8x_2.$$

■

<sup>1</sup>benannt nach dem deutschen Regelungstechniker Jürgen Ackermann (geboren 1936)

## 7.3 Nachführung

Zusätzlich zur Stabilität des Regelkreises wird nun gefordert, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  asymptotisch gegen einen vorgebbaren konstanten Wert  $r_0$  strebt. Die Größe  $y(t)$  wird also einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  asymptotisch nachgeführt. Dazu wird das Regelgesetz (7.2) um einen zu  $r$  proportionalen Anteil ergänzt, d.h.

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + V r. \quad (7.27)$$

Dabei ist  $V$  ein entsprechend zu bestimmender reeller, skalarer Reglerparameter. Das mathematische Modell des in Bild 7.2 dargestellten Regelkreises lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}V r, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (7.28)$$

Man beachte, dass die oben formulierte Forderung

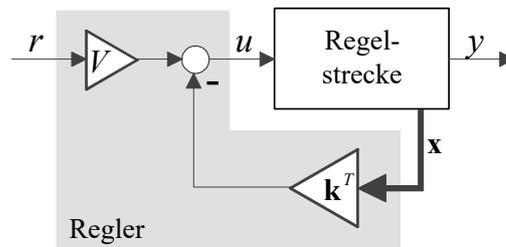


Bild 7.2: Prinzip der Nachführung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty \stackrel{!}{=} r_0 \quad (7.29)$$

impliziert, dass der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  für  $t \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen einen konstanten Wert  $\mathbf{x}_\infty$  strebt, d.h. die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  strebt asymptotisch in die Ruhelage  $\mathbf{x}_\infty$ . Aus (7.28) folgt dann unmittelbar

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_\infty + \mathbf{b}V r_0,$$

da  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  als Hurwitzmatrix vorausgesetzt werden kann, gilt für die Ruhelage

$$\mathbf{x}_\infty = -(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0. \quad (7.30)$$

Durch Einsetzen in (7.29) findet man

$$y_\infty = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0 \stackrel{!}{=} r_0.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Berechnungsvorschrift

$$V = -\frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}} \quad (7.31)$$

für den gesuchten Reglerparameter. Eine Veränderung von  $\mathbf{k}^T$  macht also eine entsprechende Anpassung von  $V$  erforderlich.

*Hinweis:* Bei Regelstrecken mit einer *Nullstelle* bei  $s = 0$  ist die beschriebene Nachführung *nicht* anwendbar. Um die Ausgangsgröße  $y$  auf einem konstanten Wert zu halten ist hier eine rampenförmig ansteigende Stellgröße erforderlich, was aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen praktisch nicht realisierbar ist.

**B Fortsetzung.** Der Zustandsregler aus dem vorangegangenen Beispiel wird gemäß (7.27) erweitert. Die Ausgangsgröße

$$y = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll einer (konstanten) Referenzgröße asymptotisch nachgeführt werden. Die Auswertung von (7.31) ergibt den Reglerparameter

$$V = -\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = 9.$$

■

Mit Hilfe des Parameters  $V$  wird also der Verstärkungsfaktor der Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b}V \quad (7.32)$$

des Regelkreises (7.28) auf den Wert eins korrigiert, d.h.

$$T(0) = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V \stackrel{!}{=} 1,$$

woraus unmittelbar (7.31) folgt.

Man beachte, dass die Nachführung (7.29) nur bei *exakter* Kenntnis von  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  gewährleistet ist. Bei Variationen von Streckenparametern oder aufgrund von Modellierungsungenauigkeiten geht im praktischen Einsatz die Eigenschaft (7.29) des Regelkreises verloren. Eine „robuste“ Nachführung kann hingegen mit dem im folgenden Abschnitt vorgestellten PI - Zustandsregler erzielt werden.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (7.27) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen und die Bedingung (7.29) erfüllt ist. Die zuvor beschriebenen Methoden liefern die Reglerparameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = 0.4 \quad (7.33)$$

Zunächst wird das Verhalten des Regelkreises für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0^T = [ -0.8 \quad -2.5 ]$$

und die Referenzgröße  $r(t) = 0$  untersucht. Die zugehörigen Verläufe der Zustandsvariablen  $x_1$  und  $x_2$  sind in Bild 7.3 dargestellt. In Bild 7.4 ist für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  der Verlauf der

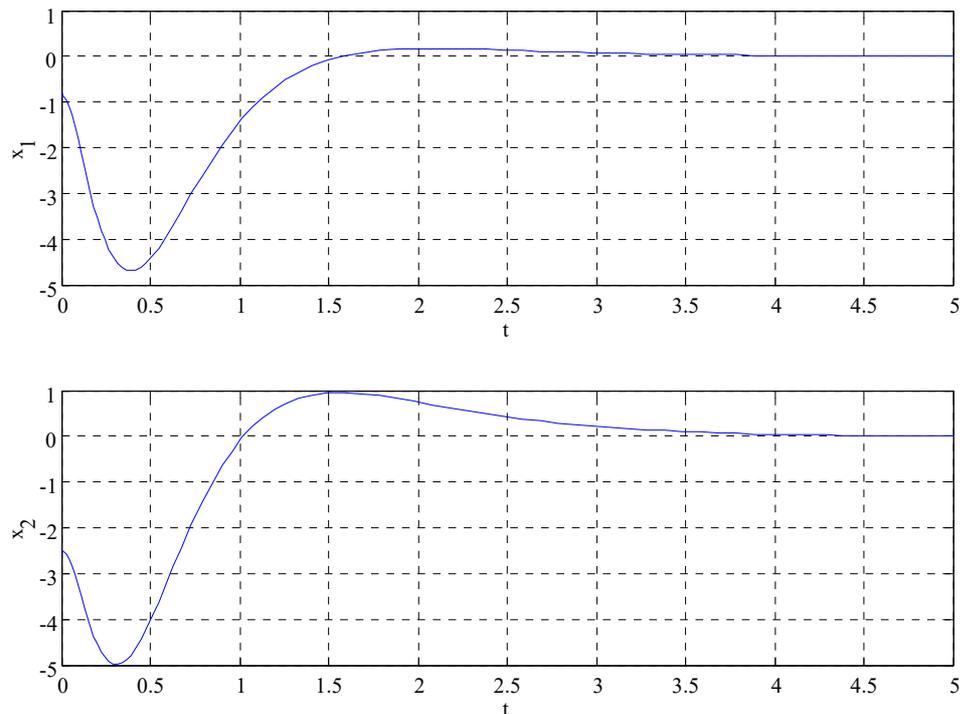


Bild 7.3: Verlauf der Zustandsgrößen für  $\mathbf{x}_0^T = [ -0.8 \quad -2.5 ]$  und  $r(t) = 0$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (7.27)

Ausgangsgröße  $y$  dargestellt. In der oberen Abbildung ist zu erkennen, dass  $y$  wie gewünscht asymptotisch den Wert der Referenzgröße annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des Reglers (7.33) im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit verloren geht. ■

Mit Hilfe des Zustandsreglers (7.27) werden die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises platziert und die stationäre Verstärkung wird entsprechend angepasst. Das bedeutet, die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises lautet

$$T(s) = V \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b} = V \frac{\mu(s)}{w(s)}. \quad (7.34)$$

Das Zählerpolynom der ungekürzten Führungsübertragungsfunktion entspricht - bis auf den Faktor  $V$  - dem Zählerpolynom der Regelstrecke. Das Nennerpolynom  $w(s)$  ist das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und kann beliebig gewählt werden. Die Nullstellen von

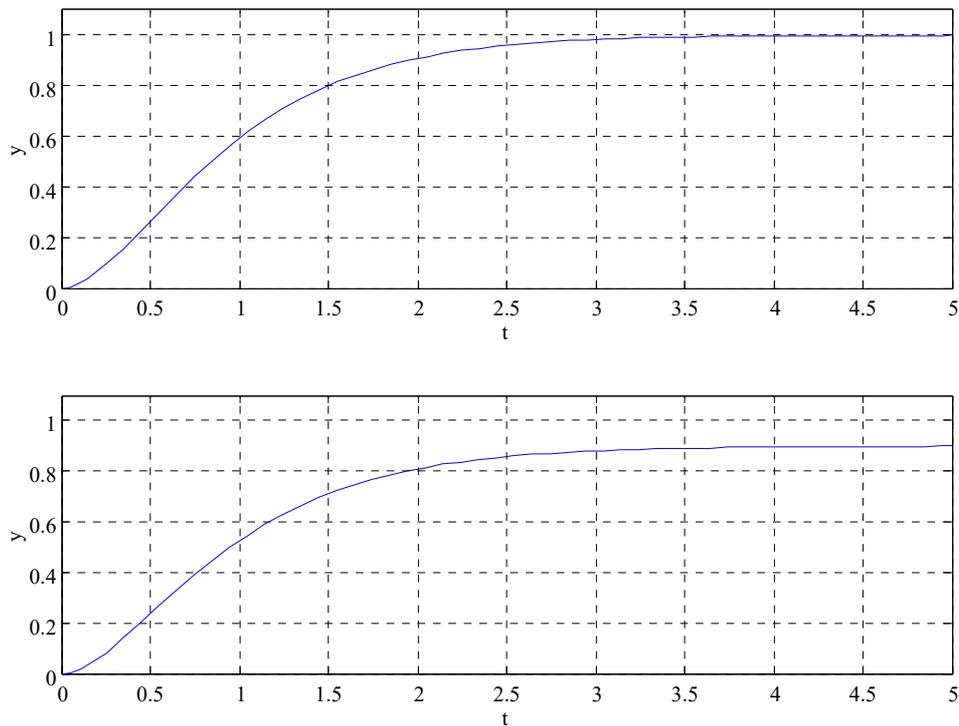


Bild 7.4: Verlauf der Ausgangsgröße für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (7.27)

$T(s)$  entsprechen also den Streckennullstellen, ggf. sind Kürzungen von Streckennullstellen mit entsprechenden Nullstellen von  $\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))$  zu berücksichtigen. Diese Tatsache ist besonders leicht zu erkennen, wenn das Streckenmodell in Regelungsnormalform vorliegt.

**B** Gegeben sei das Streckenmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [3 \quad 1] \mathbf{x}, \quad \text{d.h.} \quad P(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s+3}{s^2-1}.$$

Für den geschlossenen Regelkreis, bestehend aus Strecke und Regler (7.27) gilt dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} r, \quad y = [3 \quad 1] \mathbf{x},$$

d.h. die Führungsübertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \frac{V(s+3)}{s^2 + k_2s + (k_1 - 1)}.$$

Für die Wahl  $k_1 = k_2 = 2$  besitzt der geschlossene Regelkreis zwei Eigenwerte bei  $s_1 = s_2 = -1$  und es gilt mit  $V = \frac{1}{3}$

$$T(s) = \frac{1}{3} \frac{(s+3)}{(s+1)^2}.$$

Wählt man hingegen  $k_1 = k_2 = 4$ , so gilt  $s_1 = -1$  und  $s_2 = -3$  und mit  $V = 1$  folgt für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

■

## 7.4 PI - Zustandsregler

Die Struktur eines Regelkreises mit einem PI - Zustandsregler ist in Bild 7.5 dargestellt. Zur Erzielung der stationären Genauigkeit (7.29) wird in den offenen Kreis ein Integrator eingefügt.

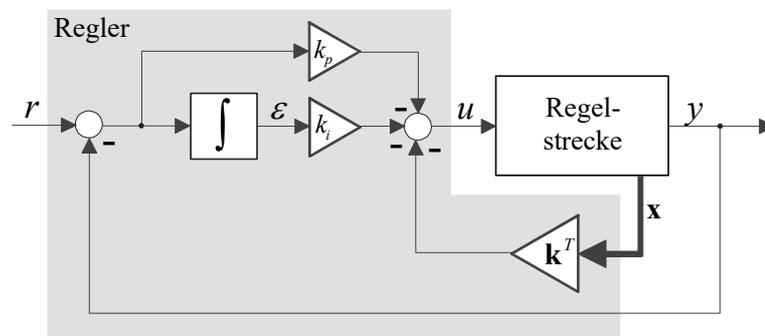


Bild 7.5: Regelkreis mit PI - Zustandsregler

Bezeichnet man die Ausgangsgröße des Integrators mit  $\varepsilon$ , so gilt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - y = r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (7.35)$$

Die Stellgröße wird über die Relation

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p (r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}) = -(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p r \quad (7.36)$$

gebildet, wobei  $\mathbf{k}^T$ ,  $k_i$  und  $k_p$  die  $(n + 2)$  Reglerparameter repräsentieren. Durch Einsetzen in (7.1) erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T)) \mathbf{x} - k_i \mathbf{b} \varepsilon - k_p \mathbf{b} r. \quad (7.37)$$

Fasst man  $\varepsilon$  und  $\mathbf{x}$  zu einem Vektor zusammen, so erhält man das Zustandsmodell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) & -k_i \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_p \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (7.38)$$

für den in Bild 7.5 dargestellten Regelkreis. Ist die Dynamikmatrix des Regelkreises eine Hurwitzmatrix, so ist aufgrund der Regelkreisstruktur die stationäre Genauigkeit (7.29)

gewährleistet. Die Reglerparameter sollen nun so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) & -k_i \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T \quad k_i]$$

beliebig vorgegebene Eigenwerte besitzt. Mit den Definitionen

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{k}}^T := [\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T \quad k_i] \quad (7.39)$$

ist der Entwurf des PI - Zustandsreglers auf ein Eigenwertvorgabeproblem wie in den vorigen Abschnitten zurückgeführt. Damit die Eigenwerte der Matrix  $(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T)$  beliebig vorgegeben werden können, muss also das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

d.h. die Serienschaltung aus Strecke und Integrator steuerbar sein. Das ist genau dann der Fall, wenn die steuerbare Strecke (7.1) *keine* Nullstellen bei  $s = 0$  besitzt.

Zu beachten ist, dass nun  $(n + 1)$  Eigenwerte vorgegeben werden müssen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  kann mit den bereits bekannten Methoden zur Eigenwertvorgabe ermittelt werden. Wie aus (7.39) hervorgeht, entspricht die letzte Komponente von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  dem Reglerparameter  $k_i$ . Im Gegensatz dazu gehen  $\mathbf{k}^T$  und  $k_p$  aus den ersten  $n$  Komponenten von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  *nicht* eindeutig hervor. In vielen Fällen wird zunächst der Parameter  $k_p$  gewählt und danach der Vektor  $\mathbf{k}^T$  gemäß

$$\mathbf{k}^T = [\tilde{k}_1 \quad \dots \quad \tilde{k}_n] + k_p \mathbf{c}^T \quad (7.40)$$

berechnet. Eine mögliche Wahl von  $k_p$  lautet<sup>2</sup> beispielsweise

$$k_p = \frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}. \quad (7.41)$$

Dadurch wird erreicht, dass der Regler bei einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  denjenigen Stellgrößenwert generiert, der dem konstanten Wert der Stellgröße  $u$  im stationären Zustand entspricht.

**B** Für das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad -10] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke wird ein PI - Zustandsregler so entworfen, dass die drei(!) Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = s_3 = -2$  liegen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  ist also so zu bestimmen, dass die Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \tilde{k}_3]$$

<sup>2</sup>dabei wird vorausgesetzt, dass die Strecke keinen Eigenwert bei  $s = 0$  besitzt, d.h.  $\mathbf{A}$  ist regulär.

die gewünschten Eigenwerte besitzt. Diese Berechnung liefert

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = [ 13 \quad -7 \quad -0.8 ],$$

d.h. es gilt  $k_i = -0.8$ . Für den Parameter  $k_p$  wird der Wert  $k_p = -0.3$  gewählt, woraus sich über (7.40) der Vektor

$$\mathbf{k}^T = [ 13 \quad -7 ] - 0.3 \cdot [ 10 \quad -10 ] = [ 10 \quad -4 ]$$

ergibt. In Bild 7.6 ist der Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  dargestellt. Der oberen Abbildung ist zu entnehmen, dass  $y$  asymptotisch den Wert der Referenzgröße

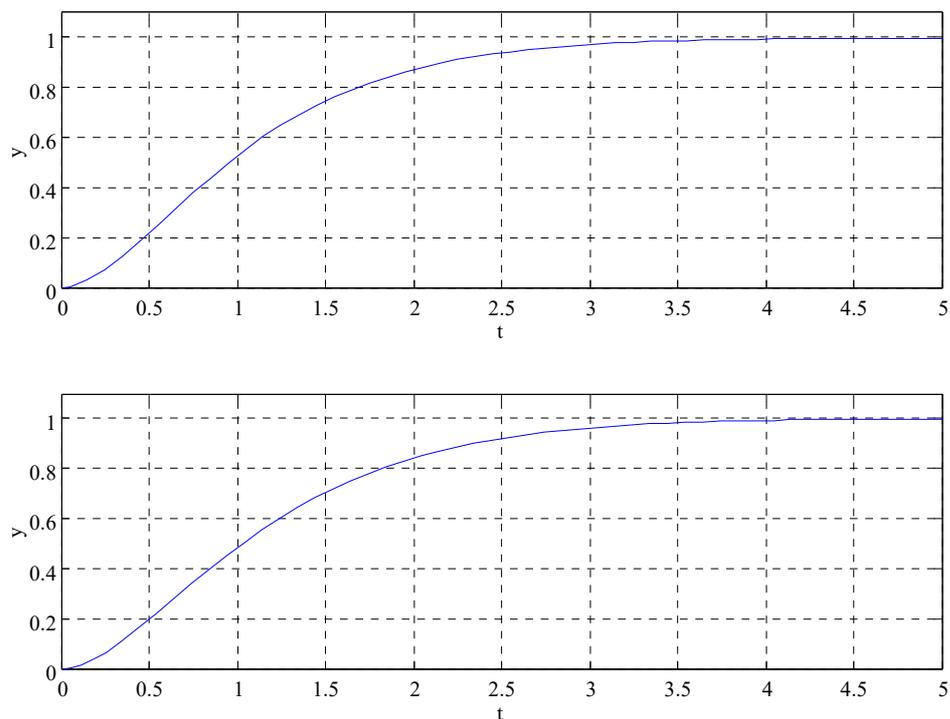


Bild 7.6: Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines PI - Zustandsreglers

annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des gleichen Reglers im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt deutlich, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit erhalten bleibt. ■

## 7.5 Wahl der Eigenwerte

In diesem Abschnitt werden Hinweise zur Wahl der Eigenwertkonfiguration des geschlossenen Regelkreises gegeben. Es wird die Vorgabe eines so genannten dominanten Eigenwertpaares

erläutert. Aus dem gewünschten prozentualen Überschwingen und der Anstiegszeit für die Sprungantwort des Regelkreises kann die erforderliche Lage der Eigenwertpaares ermittelt werden.

### 7.5.1 Dominantes Eigenwertpaar

Eine Möglichkeit, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises zu wählen, beruht auf der Annahme, dass das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises durch ein dominantes Eigenwertpaar geprägt ist, siehe hierzu auch Abschnitt 5.2.1. Hierbei ist zu beachten, dass bei dieser Vorgangsweise prinzipiell vorausgesetzt werden muss, dass die Regelstrecke *keine* Nullstellen besitzt.

Man geht davon aus, dass die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises näherungsweise die Form

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{mit} \quad 0 < d < 1 \quad \text{und} \quad \omega_n > 0 \quad (7.42)$$

besitzt. Die dominanten Eigenwerte  $s_{1,2}$  sind die Pole von  $T(s)$ , d.h.

$$s_{1,2} = -d\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-d^2}. \quad (7.43)$$

Analog zu Kapitel 5 wird das gewünschte Verhalten des Regelkreises bei einem Sprung der Referenzgröße  $r$  durch das prozentuale Überschwingen  $\ddot{u}$  und die Anstiegszeit  $t_r$  spezifiziert. Die „Form“ der Sprungantwort wird dabei ausschließlich durch den Parameter  $d$  festgelegt, d.h. der Zusammenhang zwischen Überschwingen  $\ddot{u}$  und Dämpfungsgrad  $d$  ist eindeutig. Aus dem Bild 7.7 (oben) kann zu vorgegebenem Überschwingen der zugehörige Dämpfungsgrad  $d$  abgelesen werden. Der Parameter  $\omega_n$  ist ein Maß für die „Reaktionsfreudigkeit“ des Systems. Eine Verzehnfachung von  $\omega_n$  bedeutet beispielsweise, dass die Sprungantwort um den Faktor 10 „gestaucht“ wird, eine Verkleinerung des Parameters entspricht einer Verlangsamung, d.h. einer „Streckung“ der Sprungantwort. Mit Hilfe von Bild 7.7 (Mitte) kann bei bekanntem  $d$  und vorgegebenem  $t_r$  der Parameter  $\omega_n$  ermittelt werden.

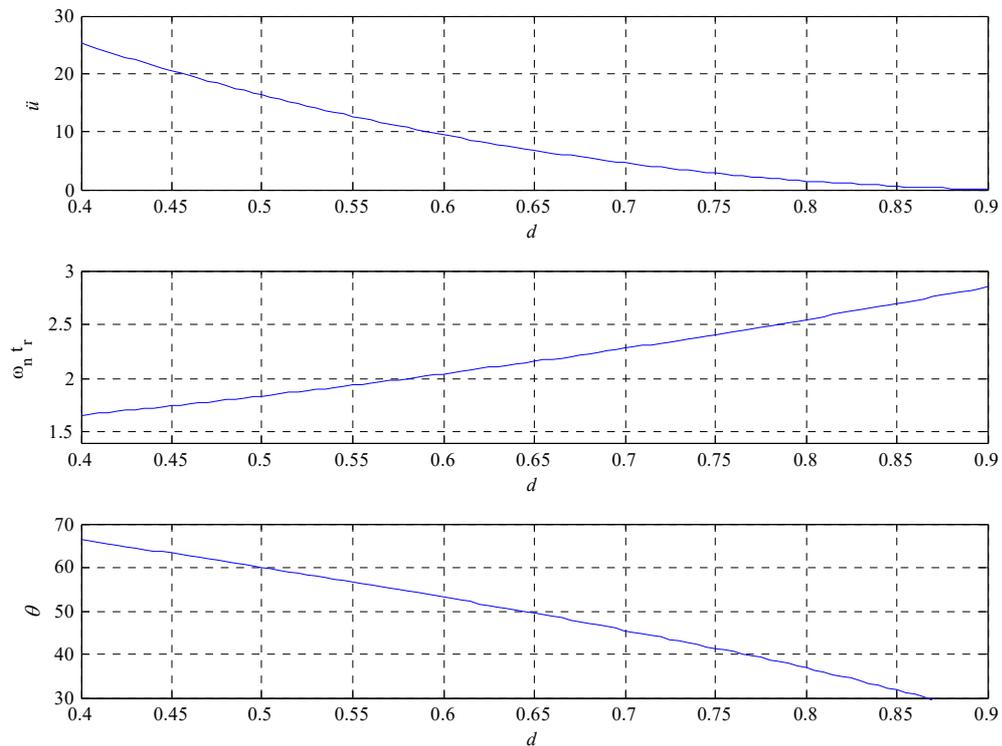
**B** Die Parameter  $d$  und  $\omega_n$  sollen so bestimmt werden, dass die Sprungantwort von (7.42) ein prozentuales Überschwingen  $\ddot{u} = 10\%$  und eine Anstiegszeit  $t_r = 2$  besitzt.

Gemäß Bild 7.7 folgt aus der vorgegebenen Überschwingweite unmittelbar  $d = 0.6$  und  $\omega_n t_r \approx 2$ , d.h.  $\omega_n \approx 1$ . ■

Die Lage der dominanten Eigenwerte  $s_{1,2}$  in der komplexen Ebene ist in Bild 7.8, links eingezeichnet. Wie man leicht überprüfen kann, gilt  $|s_{1,2}| = \omega_n$  und es folgt für den eingezeichneten Winkel  $\Theta$  unmittelbar

$$\Theta = \cos^{-1} d. \quad (7.44)$$

Das bedeutet, dass zu jedem Wert von  $\ddot{u}$  ein Winkel  $\Theta$  berechnet werden kann, siehe Bild 7.7, unten. Will man also beispielsweise erreichen, dass für die Sprungantwort des Regelkreises  $\ddot{u} \leq 10\%$  gilt, so müssen die dominanten Eigenwerte in dem im mittleren Bild 7.8 grau

Bild 7.7: Zur Ermittlung von  $d$ ,  $\omega_n$  und  $\theta$  aus  $\ddot{u}$  und  $t_r$ 

dargestellten Bereich liegen. Häufig wird auch noch die so genannte Ausregelzeit  $t_s$  („settling time“) angegeben, ab der sich die Regelgröße  $y$  in einem 2%-Band um ihren stationären Endwert  $y_\infty$  befindet, d.h.  $0.98 y_\infty \leq y(t) \leq 1.02 y_\infty$  für  $t \geq t_s$ . Wie man zeigen kann, müssen - unter Annahme von  $d \leq 0.9$  - die Parameter  $d$  und  $\omega_n$  der Bedingung

$$d \omega_n \geq \frac{4.7}{t_s} \quad (7.45)$$

genügen. Die zusätzliche Forderung (7.45) schränkt den zulässigen Bereich für die Lage der dominanten Eigenwerte weiter ein, siehe rechtes Bild 7.8.

**B** Für das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad -10] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke soll ein PI - Zustandsregler so entworfen werden, dass die Sprungantwort des Regelkreises die Eigenschaften  $\ddot{u} = 10\%$  und  $t_r = 1$  erfüllt. Man beachte, dass der offene Kreis für  $k_p \neq 0$  eine Nullstelle an der Stelle  $s = -\frac{k_i}{k_p}$  besitzt. Um die beschriebene Methodik der Wahl verwenden zu können, wird daher  $k_p = 0$  gewählt<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Alternativ könnte auch das im vorigen Abschnitt beschriebene Entwurfsschema verwendet werden.

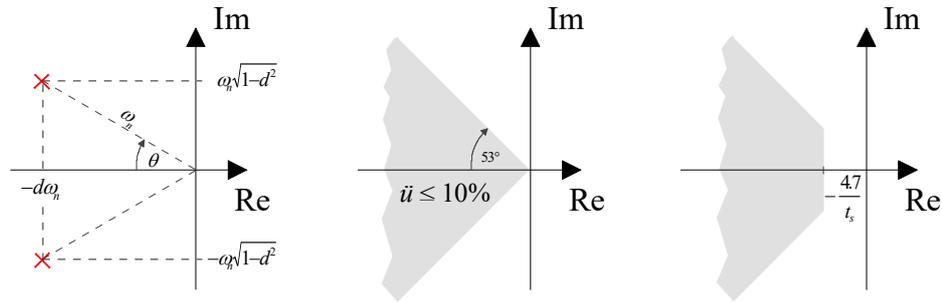


Bild 7.8: Zur Lage der dominanten Eigenwerte in der komplexen Ebene

Aus Bild 7.7 können die Parameterwerte

$$d = 0.6 \quad \text{und} \quad \omega_n = 2$$

abgelesen werden, d.h. das dominante Eigenwertpaar soll bei

$$s_{1,2} = -1.2 \pm j1.6$$

liegen. Der dritte Eigenwert  $s_3$  darf das Übertragungsverhalten des Regelkreises nicht signifikant beeinflussen, d.h. er muss hinreichend weit nach „links“ geschoben werden. Wie Bild 7.9 zu entnehmen ist, führt eine betragsmäßige Vergrößerung von  $s_3$  zu einer Erhöhung der Stellgröße. Im vorliegenden Fall stellt  $s_3 = -4$  einen guten Kompromiss dar, die vorgegebenen Spezifikationen werden zufriedenstellend erfüllt. Für den Vektor der Reglerparameter  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  erhält man

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = [ 14.6 \quad -8.2 \quad -1.6 ],$$

d.h. der PI-Zustandsregler ist durch

$$\mathbf{k}^T = [ 14.6 \quad -8.2 ], \quad k_p = 0 \quad \text{und} \quad k_i = -1.6$$

gegeben. ■

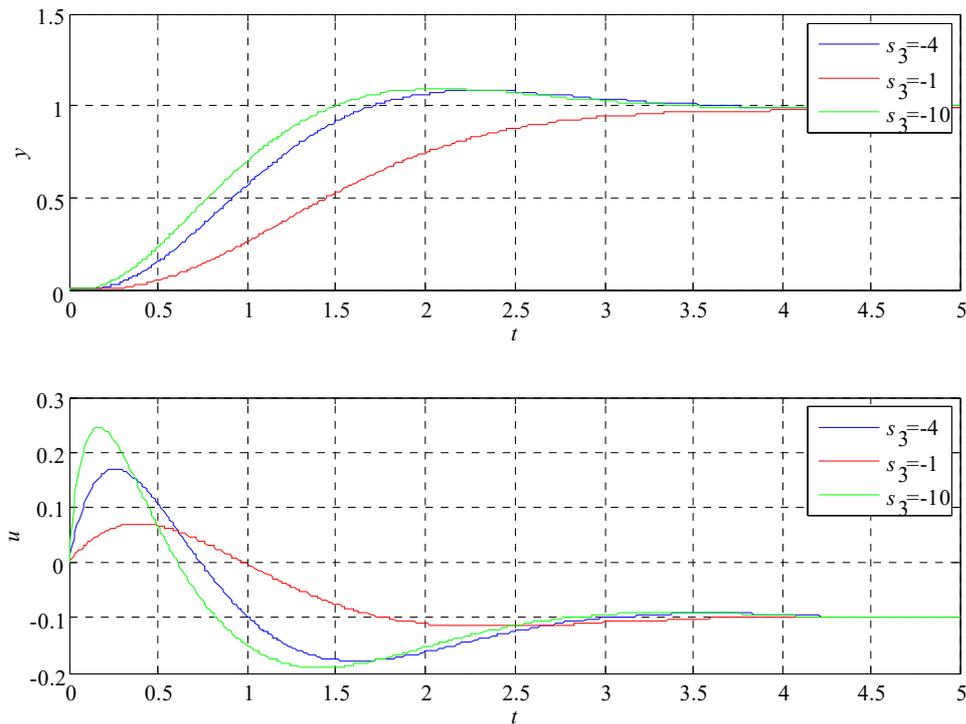
### 7.5.2 Linear-Quadratischer Regler (nicht prüfungsrelevant)

Bisher wurden die Parameter eines Zustandsregler aus den explizit vorgegebenen Eigenwerten der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises berechnet. Im Gegensatz dazu ergeben sich beim so genannten Linear-Quadratischen-Regler (LQR) die Reglerparameter aus der Lösung einer Optimierungsaufgabe. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Modell der Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{7.46}$$

steuerbar ist und der Anfangszustand durch  $\mathbf{x}_0$  beschrieben wird.

Zunächst werden einige wichtige Begriffe, die für das Verständnis der Reglerentwurfsaufgabe wesentlich sind, erläutert. Danach werden das zu lösende Optimierungsproblem und der daraus resultierende optimale Zustandsregler ausführlich diskutiert.

Bild 7.9: Sprungantwort des Regelkreises für verschiedene Werte von  $s_3$ .

### Positive Definitheit einer Matrix

Eine symmetrische  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{S}$  wird **positiv definit** genannt, d.h.  $\mathbf{S} \succ 0$ , wenn die zugehörige **quadratische Form**  $\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}$  für alle  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  positive Werte annimmt, d.h.

$$\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} \succ 0.$$

Man kann zeigen, dass  $\mathbf{S}$  genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind. Mit dem **Sylvester<sup>4</sup>-Kriterium** kann die positive Definitheit einer symmetrischen Matrix auch ohne explizite Berechnung der Eigenwerte überprüft werden. Die symmetrische Matrix  $\mathbf{S}$  ist nämlich genau dann positiv definit, wenn alle „nordwestlichen Unterdeterminanten“ von  $\mathbf{S}$  positiv sind.

**B** Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Für positive Definitheit von  $\mathbf{S}_1$  müssen nach dem Sylvester-Kriterium die Bedingungen  $1 > 0$  und  $\det \mathbf{S}_1 > 0$  erfüllt sein. Wegen  $\det \mathbf{S}_1 = -1$  kann gefolgert werden, dass  $\mathbf{S}_1$  nicht positiv

<sup>4</sup>benannt nach dem britischen Mathematiker James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

definit ist. Im Gegensatz dazu ist  $\mathbf{S}_2$  positiv definit, da  $2 > 0$  und  $\det \mathbf{S}_2 = 5 > 0$  erfüllt ist. Für positive Definitheit von  $\mathbf{S}_3$  müssen die Bedingungen  $3 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$  und  $\det \mathbf{S}_3 > 0$  erfüllt sein, d.h.  $\mathbf{S}_3$  ist eine positiv definite Matrix. ■

### Grundgedanke des Entwurfes

Die Idee der Entwurfsmethodik besteht darin, die „Kosten“ für die Überführung des Anfangszustands  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  nach  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  zu minimieren. Die entstehenden Kosten werden dabei durch die Maßzahl

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \rho u(t)^2 dt, \quad (7.47)$$

quantifiziert. Hierbei ist  $\mathbf{Q}$  eine konstante positiv definite Matrix und  $r$  ist eine positive reelle Konstante, d.h.

$$\mathbf{Q} \succ 0, \quad \rho > 0. \quad (7.48)$$

Mittels des Faktors  $r$  wird das Gewicht der Stellgröße, also ihr Einfluss auf  $J$  eingestellt. Ein sehr kleiner Wert von  $\rho$  hat zur Folge, dass selbst sehr große Werte der Stellgröße  $u$  den Wert von  $J$  nur unbedeutend erhöhen. Es ist also zu erwarten, dass in der optimalen Lösung von (7.47) der Betrag der Stellgröße  $u$  auch große Werte annehmen kann. Umgekehrt bedeutet ein sehr großer Wert von  $\rho$ , dass die Stellgröße den Wert von  $J$  stark beeinflusst, d.h. in der optimalen Lösung sind betragsmäßig kleine Werte für  $u$  zu erwarten.

Über die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  kann Einfluss auf den Verlauf der Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  des geschlossenen Regelkreises genommen werden. Um gezielt auf die Verläufe der einzelnen Zustandsgrößen Einfluss zu nehmen, wird meistens vereinfachend eine Diagonalmatrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(q_{11}, q_{22}, \dots, q_{nn})$  mit positiven Diagonalelementen gewählt, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlicht.

**B** Gegeben sei eine steuerbare Regelstrecke zweiter Ordnung, d.h.  $n = 2$ . Das zu minimierende Gütemaß (7.47) ist durch

$$J = \int_0^{\infty} q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + \rho u^2 dt$$

gegeben, wobei

$$\rho > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{d.h.} \quad q_{11} > 0 \quad \text{und} \quad q_{22} > 0.$$

Es ist leicht zu erkennen, dass über die positiven Gewichtungsfaktoren  $\rho$ ,  $q_{11}$  und  $q_{22}$  Einfluss auf die Verläufe von  $u$ ,  $x_1$  und  $x_2$  genommen werden kann. ■

Die Entwurfsaufgabe besteht nun darin, den Stellgrößenverlauf  $u(t)$  so zu berechnen, dass das Gütekriterium (7.47) minimal wird. In den Wert von  $J$  gehen  $u(t)$  und der daraus gemäß (7.46) resultierende Streckenzustand  $\mathbf{x}(t)$  quadratisch ein. Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es

sich also um ein Problem der optimalen *Steuerung*, d.h. das Ergebnis der Optimierung ist der optimale zeitliche Verlauf von  $u(t)$  im Intervall  $[0, \infty)$ . Man kann nun allerdings zeigen, dass das optimale Steuergesetz in der Form

$$u = -\frac{1}{\rho} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}, \quad (7.49)$$

d.h. als linearer Zustandsregler, angeschrieben werden kann. Hierbei ist die  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{P}$  die einzige positiv definite Lösung der so genannten algebraischen Riccati<sup>5</sup>-Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \frac{1}{\rho}\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}. \quad (7.50)$$

Aus diesem Grund wird der optimale Zustandsregler häufig auch als Riccati-Regler bezeichnet. Der entsprechende optimale, d.h. kleinstmögliche Wert von  $J$  ist durch

$$J_{opt} = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0$$

gegeben.

**B** Gegeben sei das Modell einer Strecke erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = x + u.$$

Das zu minimierende Gütekriterium (7.47) lautet

$$J = \int_0^{\infty} qx^2 + \rho u^2 dt \quad \text{wobei} \quad q > 0, \rho > 0.$$

Gesucht ist nun die einzige positive Lösung der Riccati-Gleichung (7.50), die im vorliegenden Fall

$$\frac{1}{\rho}p^2 - 2p - q = 0$$

lautet. Löst man obige quadratische Gleichung nach  $p$  auf, so lautet die gesuchte Lösung

$$p = \rho + \sqrt{\rho^2 + qr}.$$

Für den optimalen Zustandsregler (7.49) findet man

$$u = -\frac{1}{\rho}px = -\frac{1}{\rho} \left( \rho + \sqrt{\rho^2 + qr} \right) x = - \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{q}{\rho}} \right) x = -kx.$$

Man erkennt, dass der Reglerparameter  $k$  nur vom Verhältnis der Gewichtungsfaktoren  $q$  und  $\rho$  abhängt, was angesichts des gewählten Gütekriteriums plausibel ist. Multipliziert man nämlich

<sup>5</sup>benannt nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754)

das Gütekriterium  $J$  mit einer Konstanten, so hat dies keinen Einfluss auf den minimierenden Verlauf der Stellgröße. Das bedeutet, dass die Minimierung der Gütekriterien

$$J_1 = \int_0^\infty x^2 + \frac{\rho}{q} u^2 dt, \quad J_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 + \frac{\rho}{q} u^2 dt \quad \text{und} \quad J_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{q}{\rho} x^2 + u^2 dt$$

zu gleichen Stellgrößenverläufen führt wie die Minimierung des ursprünglichen Gütemaßes  $J$ .

Das mathematische Modell des geschlossenen Regelkreises, bestehend aus Strecke und Regler, lautet somit

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{1 + \frac{q}{\rho}} x.$$

Für  $\frac{q}{\rho} \rightarrow 0$ , d.h. der Verlauf der Stellgröße wird viel stärker gewichtet als der Verlauf der Zustandsgröße strebt der Eigenwert des geschlossenen Kreises gegen  $s = -1$ . Für  $\frac{q}{\rho} \rightarrow \infty$ , d.h. der Verlauf der Stellgröße hat de facto keinen Einfluss auf  $J$ , strebt der Eigenwert des geschlossenen Kreises gegen  $s = -\infty$ . Das bedeutet, dass in diesem Fall der Regelkreis „unendlich schnell“ wird, was sich natürlich auch in entsprechend großen Stellamplituden manifestiert. ■

Für den Fall  $n > 1$  wird die Riccati-Gleichung üblicherweise mit Hilfe ausgereifter Algorithmen numerisch gelöst. In Matlab kann mit Hilfe des Befehls `lqr` der Riccati-Regler direkt berechnet werden.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Zunächst werden die Gewichtungen  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$  und  $\rho = 1$  gewählt. Der zugehörige optimale Zustandsregler lautet

$$\mathbf{k}^T = [ 2.4142 \quad 1.6131 ]$$

und die Eigenwerte des geschlossenen Kreises liegen bei

$$s_1 = -0.7654, \quad s_2 = -1.8478.$$

Die Verläufe der Zustandsgrößen  $x_1$ ,  $x_2$  und der Stellgröße  $u$  sind für einen Anfangszustand  $x_0 = [ 2 \quad -1 ]^T$  in Bild 7.10 in blauer Farbe dargestellt. Ändert man die Gewichtungen nun zu  $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(10, 1)$  und  $\rho = 0.1$ , so lautet der Zustandsregler

$$\mathbf{k}^T = [ 11.0499 \quad 4.7532 ]$$

und die Eigenwerte des Regelkreises liegen bei

$$s_{1,2} = -2.8766 \pm j1.3323.$$

Für Zustands- und Stellgrößen ergeben sich die in Bild 7.10 in roter Farbe dargestellten Verläufe. Wie erwartet nimmt  $u$  aufgrund des verkleinerten Gewichts größere Werte an, was

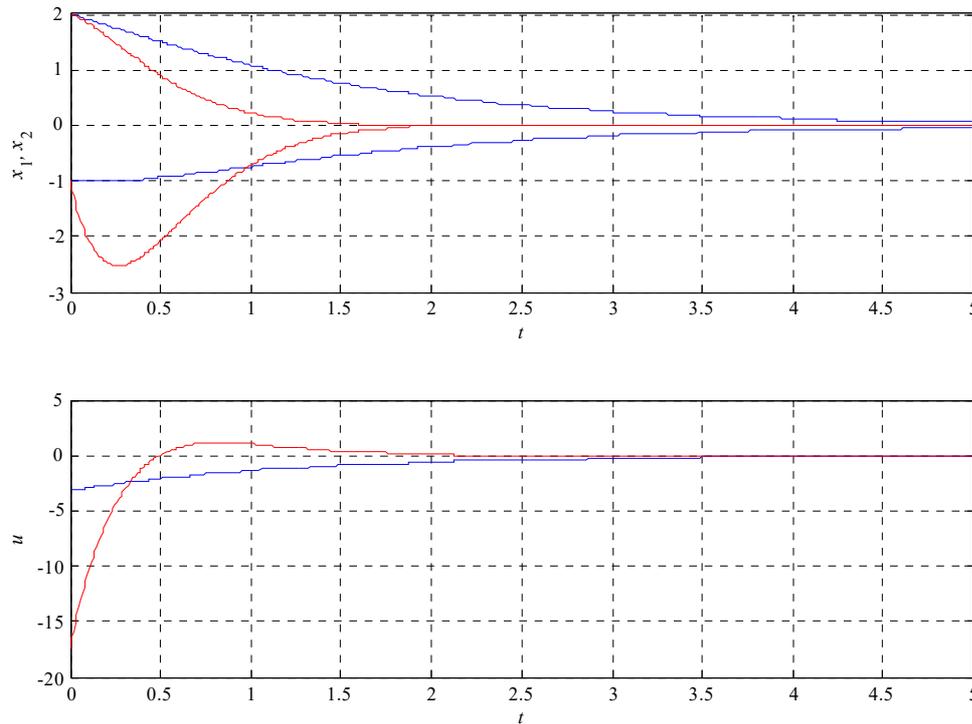


Bild 7.10: Verläufe von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $u$  für  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\rho = 1$  in blauer Farbe bzw. für  $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 1)$ ,  $\rho = 0.1$  in roter Farbe

zu schneller abklingenden Vorgängen im Regelkreis führt. Die vergrößerte Gewichtung  $q_{11}$  führt dazu, dass  $x_1$  sich schnell betragsmäßig kleinen Werten nähert, während  $x_2$  aufgrund des kleineren Gewichts zunächst betragsmäßig größere Werte annimmt. ■

#### Anmerkungen:

- Das oben vorgestellte Entwurfsverfahren kann ohne Modifikation auf steuerbare Mehrgrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

übertragen werden. Das Gütekriterium lautet dann

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} \succ 0, \mathbf{R} \succ 0,$$

der optimale Zustandsregler ist durch

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{P}$  die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}.$$

ist.

- Die Forderung nach positiver Definitheit von  $\mathbf{Q}$  im Gütekriterium (7.47) kann auch abgeschwächt werden, indem nur die positive Semidefinitheit gefordert wird, d.h.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q} \succeq 0.$$

Dies erfordert allerdings die Beobachtbarkeit des Paares  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ , wobei  $\mathbf{A}$  die Dynamikmatrix der Regelstrecke ist und  $\mathbf{C}$  sich aus der Faktorisierung  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$  ergibt.

# Kapitel 8

## Entwurf von Zustandsbeobachtern

### 8.1 Einführung

Bei den Überlegungen im vorigen Kapitel wurde stets angenommen, dass *alle* Zustandsgrößen der Regelstrecke messbar sind, d.h. der gesamte Vektor  $\mathbf{x}$  steht dem Regler zur Verfügung. Bei praktischen Anwendungen ist diese Annahme häufig nicht gerechtfertigt. Oft ist die messtechnische Erfassung bestimmter Zustandsgrößen aufgrund kostspieliger Sensorik unwirtschaftlich oder sie ist technisch sogar unmöglich. Die Grundidee des so genannten **Zustandsbeobachters** besteht nun darin, auf Basis des mathematischen Modells  $n$ -ter Ordnung der Regelstrecke

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & \text{mit } \mathbf{x}_0 \dots \text{ unbekannt} \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8.1)$$

*nicht*-messbare Zustandsgrößen zu rekonstruieren.

Im vorliegenden Fall wird angenommen, dass die Ausgangsgröße  $y$  messbar ist und *alle*  $n$  Zustandsgrößen mit Hilfe eines Beobachters geschätzt werden müssen. Der Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters soll sich *asymptotisch* dem Streckenzustand nähern, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t).$$

Anstelle der bisher als messbar vorausgesetzten Zustandsgrößen  $x_i$  werden deren Schätzwerte  $\hat{x}_i$  im Regelgesetz verwendet, d.h. der Zustandsregler (7.27) lautet nun

$$u = - \sum_{i=1}^n k_i \hat{x}_i + V r = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + V r. \quad (8.2)$$

### 8.2 Trivialer Beobachter

Eine sehr naheliegende Idee zur Rekonstruktion des Zustandsvektors besteht darin, den Beobachter als Kopie des Streckenmodells anzusetzen, d.h.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u. \quad (8.3)$$

Wie in Bild 8.1 angedeutet, wird dieses Modell mit der gleichen Stellgröße  $u$  wie die Regelstrecke angesteuert und zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}$  genutzt, wobei üblicherweise  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  gesetzt wird. Der Schätzfehler

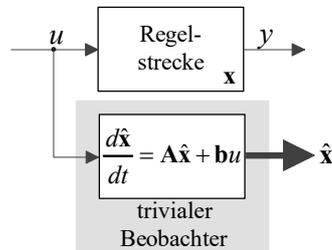


Bild 8.1: Prinzip des trivialen Beobachters

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (8.4)$$

charakterisiert die Abweichung des Schätzwertes  $\hat{\mathbf{x}}$  vom tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$ . Sein zeitliches Verhalten wird durch

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \stackrel{(8.1.)}{=} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}u = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (8.5)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$  gilt. Aus der Schätzfehlerdynamik (8.5) folgt unmittelbar, dass der Schätzfehler ausgehend von beliebigem  $\mathbf{e}_0$  genau dann asymptotisch gegen Null strebt, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0},$$

wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  eine Hurwitzmatrix ist. Das bedeutet, dass die Zustandsgrößen des **trivialen Beobachters** (8.3) genau dann asymptotisch gegen die Zustandsgrößen der Regelstrecke konvergieren, wenn die Regelstrecke (8.1) asymptotisch stabil ist, d.h. die Schätzfehlerdynamik ist starr vorgegeben. Weiters besteht keinerlei Möglichkeit, bei der Beobachtung den Einfluss von Störungen, Parameterschwankungen und Modellierungsfehlern zu berücksichtigen. All diese Tatsachen schränken die Anwendbarkeit des trivialen Beobachters sehr stark ein, er ist daher für den praktischen Einsatz de facto ungeeignet.

### 8.3 Luenberger-Beobachter

Auch der so genannte Luenberger-Beobachter nützt das mathematische Modell (8.1) zur Schätzung des Streckenzustandes. Im Gegensatz zum trivialen Beobachter wird hier aber auch die messbare Ausgangsgröße  $y$  für die Ermittlung von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Dazu wird  $y$  mit der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters verglichen und die Differenz  $(y - \hat{y})$  zur „Korrektur“ von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Wie in Bild 8.2 zu erkennen ist, entsteht so eine Rückkopplung innerhalb des Beobachters.

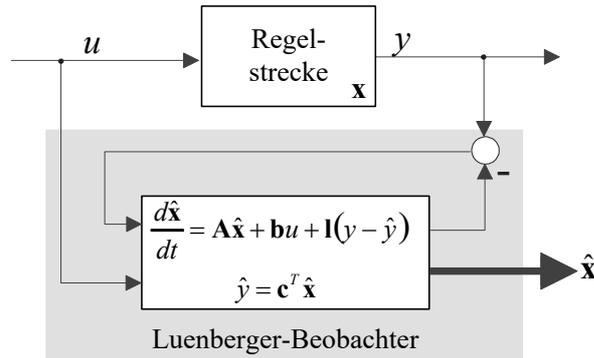


Bild 8.2: Beobachter nach Luenberger

Das mathematische Modell des Beobachters lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (8.6)$$

bzw.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y \quad (8.7)$$

wobei

$$\mathbf{l}^T = [ l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n ] \quad (8.8)$$

der geeignet zu bestimmende Vektor der Beobachterparameter bzw. „Beobachterverstärkungen“ ist. Setzt man nun  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  in (8.6) ein, so erhält man

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Für die Dynamik des Schätzfehlers (8.4) ergibt sich damit

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}u = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{x} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e} \quad (8.9)$$

Wie zu erkennen ist, kann die Schätzfehlerdynamik (8.9) über der Vektor  $\mathbf{l}$  gezielt beeinflusst werden. Analog zum Zustandsreglerentwurf soll der Vektor  $\mathbf{l}$  so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig vorgebbare Eigenwerte besitzt.

Ein Vergleich von (8.9) mit (7.4) verdeutlicht, dass der Beobachterentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{l}$ , sehr ähnlich strukturiert ist wie der Zustandsreglerentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$ . In der Tat unterscheiden sich die Dynamikmatrizen des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  und des geschlossenen Regelkreises  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  nur dadurch, dass der Vektor  $\mathbf{l}$  der „linke Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  ist, während  $\mathbf{k}^T$  der „rechte Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Sehr hilfreich erweist sich an dieser Stelle die Tatsache, dass die Eigenwerte einer

quadratischen Matrix  $\mathbf{W}$  identisch sind mit den Eigenwerten der transponierten Matrix  $\mathbf{W}^T$ . Wenn man also bei der Eigenwertvorgabe anstelle von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^T = (\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  betrachtet, dann sind Beobachterentwurf und Zustandsreglerentwurf strukturell identisch! Der Beobachterentwurf kann somit auch so interpretiert werden, dass für das so genannte **duale System**

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{c} v \quad (8.10)$$

ein Zustandsregler der Form

$$v = -\mathbf{l}^T \mathbf{z} \quad (8.11)$$

ermittelt wird. Alle Überlegungen aus dem vorigen Kapitel zum Zustandsreglerentwurf können also unverändert auf den Beobachterentwurf übertragen werden.

Notwendig und hinreichend dafür, dass die Eigenwerte von  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  bzw.  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig platziert werden können, ist die Steuerbarkeit des dualen Systems (8.10). Das bedeutet, dass die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

regulär sein muss. Durch Bildung der transponierten Matrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y \quad (8.13)$$

erkennt man, dass das duale System genau dann steuerbar ist, wenn die Regelstrecke (8.1) beobachtbar ist.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Es soll ein Zustandsbeobachter der Form (8.7) so entworfen werden, dass die Dynamikmatrix der Schätzfehlerdynamik (8.9) zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzt.

Zunächst wird mit Hilfe der regulären Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gezeigt, dass die Beobachtbarkeit des Streckenmodells gegeben ist. Die Eigenwerte der Matrix

$$(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ 1 - l_2 & 2 \end{bmatrix}$$

können somit beliebig platziert werden. Die reellen Konstanten  $l_1$  und  $l_2$  müssen so bestimmt werden, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  dem Wunschpolynom

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

entspricht, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 + (l_1 - 2)s + (l_2 - 2l_1 - 1) \stackrel{!}{=} s^2 + 2s + 1.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $l_1 = 4$  und  $l_2 = 10$ , d.h. das Beobachtermodell ist durch

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} y$$

gegeben. ■

Natürlich kann auch die im vorigen Kapitel hergeleitete Formel von Ackermann für den Beobachterentwurf eingesetzt werden. Hierfür sind in (7.26) die entsprechenden Größen des dualen Systems (8.10) einzusetzen, d.h.

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T w(\mathbf{A}^T), \quad (8.14)$$

wobei  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  die letzte Zeile der inversen „dualen“ Steuerbarkeitsmatrix (8.12) ist.

**■ Fortsetzung.** Verwendet man zur Lösung des vorigen Beispiels die Formel von Ackermann, so ist zunächst  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  zu ermitteln, d.h.

$$\hat{\mathbf{t}}_1^T = [0 \ 1] \hat{\mathbf{S}}_u^{-1} = [0 \ 1] (\mathbf{B}_y^T)^{-1} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [0 \ 1].$$

Mit (8.14) folgt dann

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T \left( (\mathbf{A}^T)^2 + 2\mathbf{A}^T + \mathbf{E} \right) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = [4 \ 10].$$

.

## 8.4 Der Beobachter im Regelkreis

Der Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}$  für den tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$  der Regelstrecke wird nun zur Regelung der steuerbaren und beobachtbaren Strecke mittels eines Zustandsreglers der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + Vr \quad (8.15)$$

verwendet. Der resultierende Regelkreis, bestehend aus Strecke, Beobachter und Zustandsregler ist in Bild 8.3 dargestellt.

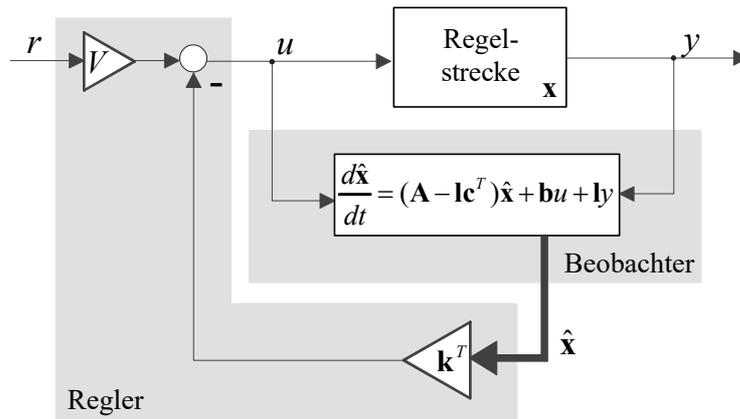


Bild 8.3: Regelkreis, bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Beobachter

Setzt man das Regelgesetz (8.15) in das Streckenmodell (8.1) und den Beobachter (8.7) ein, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}Vr, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

und

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}Vr.$$

Das mathematische Modell des Gesamtsystems kann auch in der kompakten Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{l}\mathbf{c}^T & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} Vr \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.16)$$

angeschrieben werden. Die Systemordnung des Regelkreises beträgt also  $2n$ , entspricht also der doppelten Streckenordnung. Die Dynamikmatrix des Gesamtsystems wird offensichtlich maßgeblich von den Vektoren  $\mathbf{k}^T$  und  $\mathbf{l}$  beeinflusst. Es ist eine äußerst bemerkenswerte Eigenschaft dieser Matrix, dass sich ihre  $2n$  Eigenwerte aus den Eigenwerten von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  zusammensetzen. Das bedeutet, dass man Zustandsregler- und Beobachterentwurf *voneinander unabhängig* durchführen kann! Dies ist das so genannte Separationstheorem, das im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

### 8.4.1 Separationstheorem

Zur Herleitung des Separationstheorems wird das System (8.16) der regulären Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

unterworfen, d.h. in (8.16) wird  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{e}$  gesetzt. Daraus folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(\mathbf{x} - \mathbf{e}) + \mathbf{b}Vr = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{e} + \mathbf{b}Vr,$$

die Schätzfehlerdynamik lautet nach (8.9)

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}.$$

In kompakter Schreibweise lautet das transformierte System somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die transformierte Dynamikmatrix besitzt eine so genannte Block-Dreieckstruktur, d.h. für ihr charakteristisches Polynom  $\Delta(s)$  gilt

$$\Delta(s) = \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)] \cdot \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)].$$

Da die Eigenwerte der Block-Dreiecksmatrix identisch sind mit den Eigenwerten der Dynamikmatrix des Originalsystems (8.16), ist damit das Separationstheorem bewiesen.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (7.2) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen. Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, besitzt der Zustandsregler die Parameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zur Schätzung der Zustandsgrößen wird ein Zustandsbeobachter der Form (8.7) eingesetzt. Der Vektor  $\mathbf{l}$  wird so bestimmt, dass die Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik (8.9) bei  $s_3 = s_4 = -6$  liegen, man findet

$$\mathbf{l}^T = \begin{bmatrix} 4.9 & 3.7 \end{bmatrix}.$$

In Bild 8.4 sind die Verläufe der Zustandsgrößen der Regelstrecke für

$$\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$$

dargestellt, die zugehörigen Schätzwerte sind punktiert eingezeichnet. ■

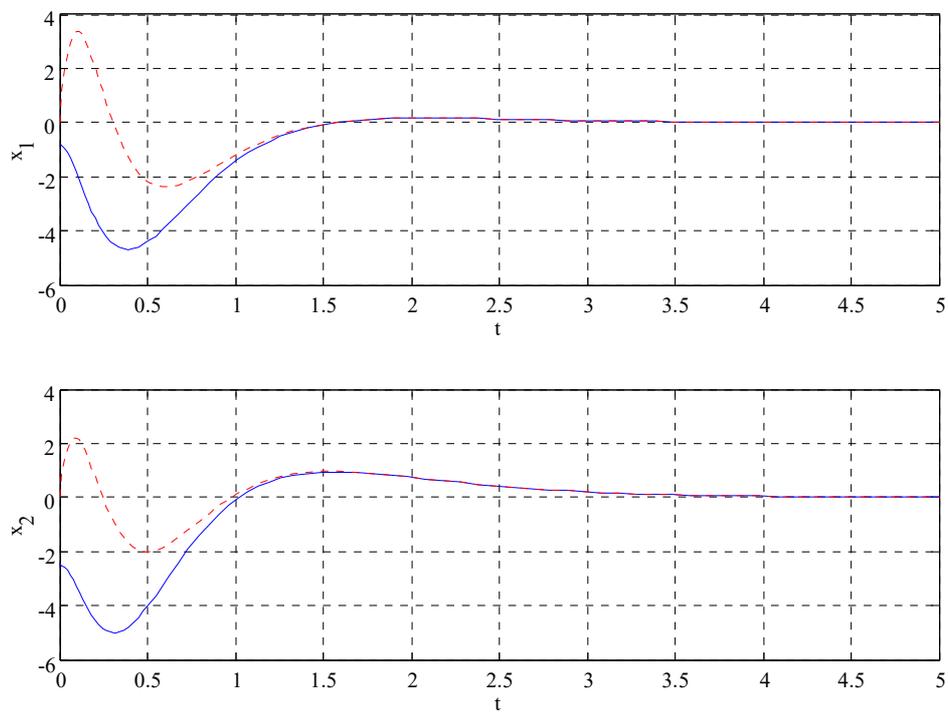


Bild 8.4: Verläufe der Zustandsgrößen  $x_1$ ,  $x_2$  der Regelstrecke und der zugehörigen Schätzwerte (punktiert).

# Kapitel 9

## Zeitdiskrete Regelkreise

### 9.1 Einführung

Bei den bisherigen Ausführungen wurde angenommen, dass nicht nur die Regelstrecke, sondern auch der Regler zeitkontinuierlichen Charakter besitzt. Üblicherweise wird jedoch der Regelalgorithmus, der auf einem Steuergerät läuft, zeitdiskret ausgeführt. Die prinzipielle Struktur eines solchen **digitalen Regelkreises**, in dem zur Regelung eines zeitkontinuierlichen Prozesses ein Rechner (Steuergerät, Computer,...) als Regler eingesetzt wird, ist in Bild 9.1 dargestellt.

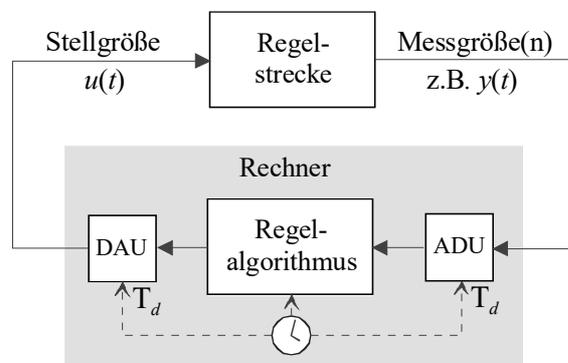


Bild 9.1: Digitaler Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und „digitalem Regler“.

### 9.2 Der digitale Regelkreis

Das Verhalten des zeitkontinuierlichen Systems („Regelstrecke“) kann mittels der skalaren Stellgröße  $u(t)$  gezielt beeinflusst werden. Auf Basis geeigneter Messgrößen<sup>1</sup> wird bewertet,

<sup>1</sup>Wird die Ausgangsgröße  $y(t)$  zurückgeführt, so spricht man von einer **Ausgangsrückführung**. Man spricht von einer **Zustandsrückführung**, wenn die Zustandsgrößen zurückgeführt werden.

inwieweit das tatsächliche Verhalten der Regelstrecke der Wunschvorstellung entspricht. Daraus werden schließlich durch das Regelgesetz („Regelalgorithmus“) entsprechende Stellgriffe abgeleitet.

### 9.2.1 Halteglied und Abtaster

Es wird davon ausgegangen, dass dem Rechner die Messgrößen zu den äquidistanten Zeitpunkten

$$t = kT_d \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

zugeführt werden, wobei  $T_d$  die (positive) konstante Diskretisierungs- oder **Abtastzeit** ist. Dies erfordert die Umwandlung der analogen Messgrößen in eine geeignete digitale Form mit Hilfe von Analog-Digital-Umsetzern („ADU“). Bei den nachfolgenden Ausführungen wird angenommen, dass diese Umwandlung durch idealisierte Analog-Digital-Umsetzer, auch **Abtaster** genannt, ohne Zeitverzug und fehlerfrei durchgeführt wird. Wird beispielsweise die (skalare) Ausgangsgröße  $y(t)$  der Regelstrecke gemessen, so generiert der Abtaster daraus eine Zahlenfolge  $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$  gemäß  $y_k = y(kT_d)$ , wie in Bild 9.2 dargestellt. Aus den Ele-

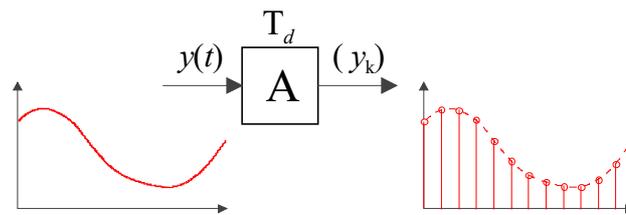


Bild 9.2: Funktionsprinzip des Abtasters

menten dieser Zahlenfolge wird im Regelgesetz, einem (vom Regelungstechniker entworfenen) Algorithmus, eine Folge von Stellgrößenwerten  $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  generiert. Dabei wird angenommen, dass die hierfür benötigte Rechenzeit deutlich kleiner ist als die Abtastzeit und daher vernachlässigt werden kann. Das zeitdiskrete Regelgesetz besitzt also im vorliegenden Fall die Eingangsgröße  $(y_k)$  und die Ausgangsgröße  $(u_k)$ .

Aus den Stellgrößenwerten  $u_k$  wird mit Hilfe eines Digital-Analog-Umsetzers eine Funktion  $u(t)$  generiert. Im vorliegenden Fall wird hierfür ein unendlich schneller, fehlerfreier Umsetzer eingesetzt, der aus  $(u_k)$  eine so genannte äquidistante Treppenfunktion, d.h.

$$u(t) = u_k \quad \text{für} \quad kT_d \leq t < (k+1)T_d \quad (9.2)$$

erzeugt. Einen solcherart idealisierten Digital-Analog-Umsetzer nennt man auch **Halteglied**, siehe Bild 9.3.

## 9.3 Diskretisierung der Regelgesetze

Häufig werden Regelgesetze zunächst zeitkontinuierlich entworfen und danach erst für die zeitdiskrete Realisierung diskretisiert. Das dynamische Verhalten des resultierenden zeit-

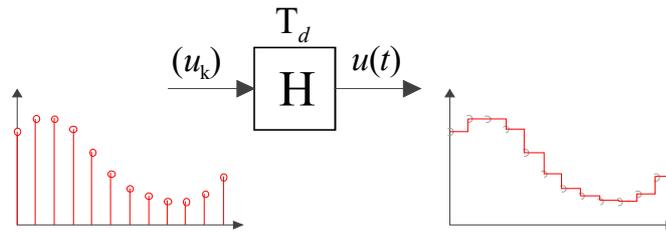


Bild 9.3: Funktionsprinzip des Haltegliedes

diskreten Regelkreises soll dann dem Verhalten des ursprünglich entworfenen zeitkontinuierlichen Regelkreises „möglichst nahe“ kommen. Diese „Güte“ der Diskretisierung wird dabei üblicherweise durch numerische Simulation des zeitdiskreten Regelkreises bewertet. Eine notwendige Voraussetzung für eine zufriedenstellende Diskretisierung ist natürlich die sinnvolle Wahl der Diskretisierungszeit  $T_d$ , wovon in weiterer Folge auch ausgegangen wird.

Die grundlegenden Ideen der Reglerdiskretisierung werden im Folgenden exemplarisch anhand eines einfachen Integrieres mit der Zeitbereichsbeschreibung

$$u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (9.3)$$

und der Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = \frac{\mathcal{L}\{u(t)\}}{\mathcal{L}\{e(t)\}} = \frac{1}{s} \quad (9.4)$$

demonstriert. Das Regelgesetz (9.3) wird nun zu den äquidistanten Zeitpunkten

$$t = k T_d \quad \text{wobei} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.5)$$

ausgewertet, d.h.

$$u(k T_d) = \int_0^{k T_d} e(\tau) d\tau \quad (9.6)$$

Mit den Abkürzungen

$$u_k := u(k T_d) \quad \text{und} \quad e_k := e(k T_d)$$

erhält man

$$u_k = \int_0^{k T_d} e(\tau) d\tau = \int_0^{(k-1) T_d} e(\tau) d\tau + \int_{(k-1) T_d}^{k T_d} e(\tau) d\tau, \quad (9.7)$$

was schlussendlich auf die Beziehung

$$u_k = u_{k-1} + \int_{(k-1) T_d}^{k T_d} e(\tau) d\tau. \quad (9.8)$$

führt. Die nachfolgend angeführten Methoden zur Diskretisierung des Reglers unterscheiden sich durch die Art der numerischen Berechnung des in (9.8) auftretenden Integrals.

### 9.3.1 Vorwärts-Euler-Integration

Hier wird die Approximation

$$\int_{(k-1)T_d}^{kT_d} e(\tau) d\tau \approx T_d e_{k-1} \quad (9.9)$$

verwendet, d.h. das Integral wird durch ein Rechteck, das in Bild 9.4 schraffiert dargestellt ist, angenähert. Die Differenzengleichung, die das zeitliche Verhalten des zeitdiskreten Reglers

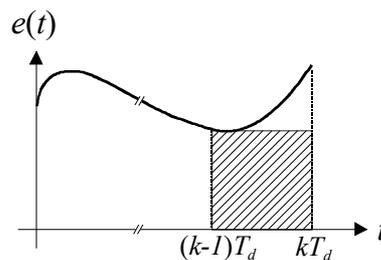


Bild 9.4: Prinzip der Vorwärts-Euler-Integration

beschreibt, lautet somit

$$u_k = u_{k-1} + T_d e_{k-1}. \quad (9.10)$$

Wendet man auf (9.10) die z-Transformation an, so erhält man die z-Übertragungsfunktion

$$R_d(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\tilde{e}(z)} = \frac{T_d}{z-1}. \quad (9.11)$$

Der direkte Vergleich von (9.4) mit dem zeitdiskreten Regler (9.11) zeigt, dass

$$R_d(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T_d}}. \quad (9.12)$$

gilt. Der Zusammenhang zwischen Punkten der komplexen  $s$ -Ebene und Punkten in der komplexen  $z$ -Ebene wird also durch die Relation

$$z = 1 + sT_d \quad (9.13)$$

beschrieben. Offensichtlich wird die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene, d.h.  $s = j\omega$  auf  $z = 1 + j\omega T_d$  abgebildet. Das bedeutet, dass die linke offene Halbebene  $\operatorname{Re}\{s\} < 0$  abgebildet wird auf die Halbebene  $\operatorname{Re}\{z\} < 1$ , siehe Bild 9.5. Ein stabiler Regler  $R(s)$  kann also prinzipiell durch diese Art der Diskretisierung (9.12) in einen instabilen zeitdiskreten Regler  $R_d(z)$  übergehen.

### 9.3.2 Rückwärts-Euler-Integration

Bei dieser Art der Diskretisierung wird die Approximation

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} e(\tau) d\tau \approx T_d e_k \quad (9.14)$$

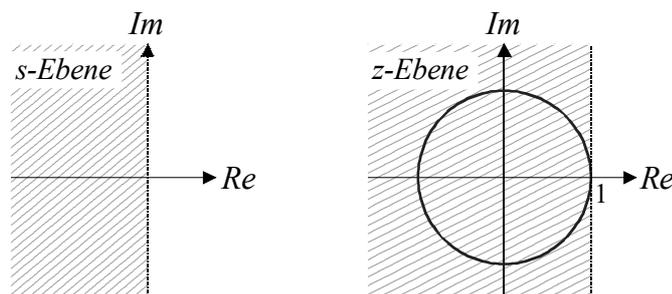
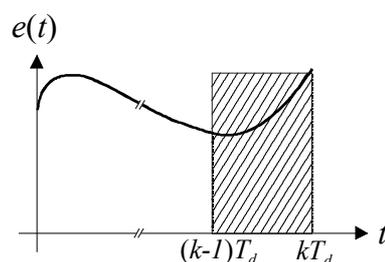
Bild 9.5: Abbildung von  $\operatorname{Re}\{s\} \leq 0$  auf  $\operatorname{Re}\{z\} \leq 1$  bei der Vorwärts-Euler-Integration

Bild 9.6: Prinzip der Rückwärts-Euler-Integration

eingesetzt, das Integral in (9.8) wird also durch das in Bild 9.6 schraffiert dargestellte Rechteck angenähert. Für das zeitdiskrete Regelgesetz ergibt sich somit die Differenzgleichung

$$u_k = u_{k-1} + T_d e_k \quad (9.15)$$

mit der zugehörigen  $z$ -Übertragungsfunktion

$$R_d(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\tilde{e}(z)} = \frac{T_d z}{z - 1}. \quad (9.16)$$

Der Zusammenhang zwischen  $R(s)$  und  $R_d(z)$  wird also durch

$$R_d(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{zT_d}} \quad (9.17)$$

beschrieben. Punkte in der komplexen  $s$ -Ebene stehen mit Punkten in der komplexen  $z$ -Ebene über die Relation

$$z = \frac{1}{1 - sT_d}$$

in Beziehung. Die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene, d.h.  $s = j\omega$  geht in den in Bild 9.7 dargestellten Kreis

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

über. Die linke offene  $s$ -Ebene geht in das Innere des Kreises über, d.h.

$$\operatorname{Re}\{s\} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}. \quad (9.18)$$

Daraus kann unmittelbar gefolgert werden, dass durch diese Art der Diskretisierung die BIBO-Stabilität der Reglerübertragungsfunktion erhalten bleibt.

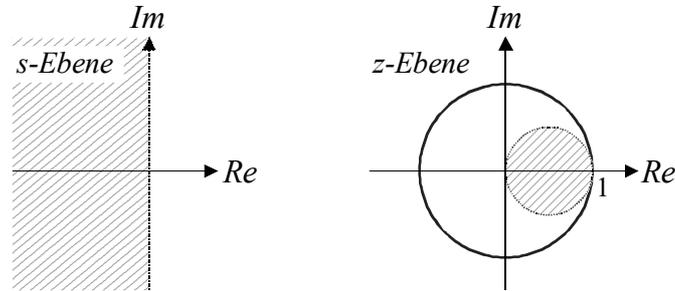


Bild 9.7: Abbildung von  $\operatorname{Re}\{s\} \leq 0$  auf  $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$  bei der Rückwärts-Euler-Integration

### 9.3.3 Integration mittels Trapez-Regel - Tustin Formel

Bei der Integration nach der Trapez-Regel wird, wie in Bild 9.8 dargestellt, das Integral in (9.8) durch das schraffierte Trapez approximiert, d.h.

$$\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} e(\tau) d\tau = \frac{T_d}{2} (e_{k-1} + e_k). \quad (9.19)$$

Für die Differenzgleichung ergibt sich somit

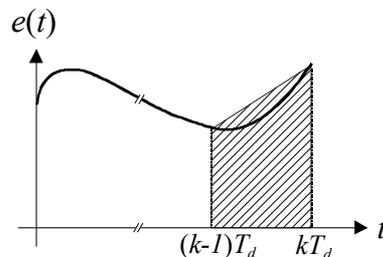


Bild 9.8: Prinzip der Trapez-Integration

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T_d}{2} (e_{k-1} + e_k)$$

d.h. z-Übertragungsfunktion des Reglers lautet

$$R_d(z) = \frac{\tilde{u}(z)}{\tilde{e}(z)} = \frac{T_d z + 1}{2 z - 1}.$$

Es gilt somit

$$R_d(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_d} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (9.20)$$

Den in (9.20) angegebenen Zusammenhang

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (9.21)$$

zwischen den komplexen Variablen  $s$  und  $z$  nennt man auch **Tustin-Formel**. Die Umkehrrelation zu (9.21) lautet

$$z = \frac{1 + s \frac{T_d}{2}}{1 - s \frac{T_d}{2}}, \quad (9.22)$$

d.h. die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene geht in den Einheitskreis der  $z$ -Ebene über bzw. die linke offene  $s$ -Ebene geht in das Innere des Einheitskreises über, siehe auch Bild 9.9.

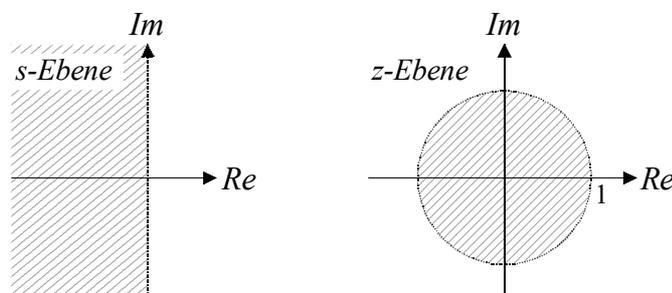


Bild 9.9: Abbildung von  $\text{Re}\{s\} \leq 0$  auf  $|z| \leq 1$  bei der Trapez-Integration

## 9.4 Diskretisierung der Regelstrecke

Eine Alternative zum zeitkontinuierlichen Reglerentwurf mit nachfolgender Diskretisierung besteht darin, bereits den Reglerentwurf zeitdiskret durchzuführen. Hierfür wird ein zeitdiskretes Modell der Regelstrecke benötigt. Diese wird als lineares, zeitinvariantes System vorausgesetzt, dessen dynamisches Verhalten durch ein Zustandsmodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (9.23)$$

beziehungsweise durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \quad (9.24)$$

beschrieben werden kann. In den nachfolgenden Abschnitten werden Methoden zur Diskretisierung von zeitkontinuierlichen Streckenmodellen hergeleitet. Zunächst wird ein zeitdiskretes Zustandsmodell abgeleitet, danach wird eine entsprechende  $z$ -Übertragungsfunktion ermittelt.

### 9.4.1 Diskretes Zustandsmodell

Gesucht ist ein zeitdiskretes Zustandsmodell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \quad y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k, \quad (9.25)$$

dessen Zustände zu den Abtastzeitpunkten (9.1) exakt denen des zeitkontinuierlichen Systems (9.23) bei treppenförmiger Eingangsgröße  $u$  gemäß (9.2) entsprechen, siehe Bild 9.10. Dazu

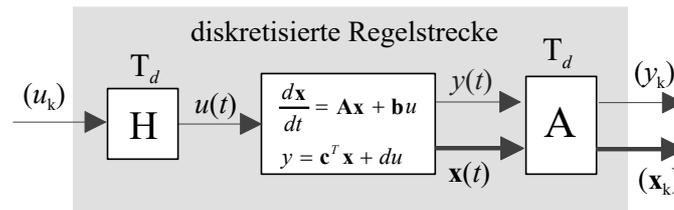


Bild 9.10: Ermittlung eines zeitdiskreten Streckenmodells

wird zunächst der Wert des Zustandsvektors zum Zeit  $t = kT_d$  berechnet, es gilt die bekannte Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_d) = \phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau, \quad (9.26)$$

wobei  $\phi(t)$  die zu (9.23) gehörige Transitionsmatrix repräsentiert. Analog dazu gilt zum Zeitpunkt  $t = (k+1)T_d$  für den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(kT_d + T_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (9.27)$$

Unter Ausnutzung der bekannten Eigenschaft

$$\phi(kT_d + T_d) = \phi(T_d)\phi(kT_d) = \phi(kT_d)\phi(T_d),$$

der Transitionsmatrix und durch Aufteilung des Integrationsintervalls in zwei Teile kann (9.27) in die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \left( \phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right) + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

gebracht werden. Durch Vergleich mit (9.26) erkennt man, dass der Klammerausdruck in obigem Ergebnis genau  $\mathbf{x}_k$  entspricht, d.h.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (9.28)$$

Von der Eingangsgröße  $u$  weiß man, dass sie zwischen zwei Abtastzeitpunkten konstant ist, siehe (9.2). Damit vereinfacht sich (9.28) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u_k d\tau = \\ &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} d\tau u_k.\end{aligned}\quad (9.29)$$

Mit der Substitution

$$\sigma = kT_d + T_d - \tau$$

lautet die Berechnungsvorschrift für  $\mathbf{x}_{k+1}$  nun

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k - \int_{T_d}^0 \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k.\quad (9.30)$$

Damit sind die gesuchten Zustandsdifferenzgleichungen gefunden. Für den Wert der Ausgangsgröße  $y$  zum Zeitpunkt  $t = kT_d$  gilt offensichtlich

$$y_k = y(kT_d) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k.\quad (9.31)$$

Damit hat man das gesuchte zeitdiskrete Zustandsmodell der Form (9.25) gefunden, es gilt

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\phi(T_d)}_{=\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_k + \underbrace{\int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma}_{=\mathbf{b}_d} u_k, \quad y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k.\quad (9.32)$$

**B** Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

einer Regelstrecke. Die zugehörige Transitionsmatrix lautet

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt aus (9.32) für die Systemmatrix des diskreten Modells

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

für den Eingangsvektor gilt

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix}.$$

Das zeitdiskrete Streckenmodell lautet somit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + 2 u_k.$$

■

### Stabilität der diskretisierten Strecke

Es wird nun untersucht, wie die Eigenwerte  $z_i$  der Dynamikmatrix  $\phi(T_d)$  des diskretisierten Modells mit den Eigenwerten  $s_i$  von  $\mathbf{A}$  zusammenhängen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Matrix  $\phi(T_d)$  als Funktion von  $\mathbf{A}$  dargestellt werden kann:

$$\phi(T_d) = \mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots$$

Multipliziert man  $\phi(T_d)$  von rechts mit einem zum Eigenwert  $s_i$  gehörigen Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  von  $\mathbf{A}$ , so findet man

$$\begin{aligned} \phi(T_d) \mathbf{p}_i &= \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = \\ &= \left( \mathbf{p}_i + \mathbf{A} \mathbf{p}_i T_d + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \mathbf{p}_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \stackrel{\mathbf{A} \mathbf{p}_i = s_i \mathbf{p}_i}{=} \\ &= \left( \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i s_i T_d + \mathbf{A} \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) = \dots = \\ &= \left( 1 + s_i T_d + s_i^2 \frac{T_d^2}{2!} + s_i^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = e^{s_i T_d} \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass für die Eigenwerte  $z_i$  von  $\phi(T_d)$

$$z_i = e^{s_i T_d} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.33)$$

gilt und die zugehörigen Eigenvektoren den Eigenvektoren  $\mathbf{p}_i$  von  $\mathbf{A}$  entsprechen.

Aus (9.33) kann gefolgert werden, dass aus einem asymptotisch stabilen zeitkontinuierlichen System (9.23) stets auch ein asymptotisch stabiles zeitdiskretes System (9.32) hervorgeht, denn aus  $\text{Re}\{s_i\} < 0$  folgt unmittelbar  $|z_i| = |e^{s_i T_d}| < 1$ .

**B Fortsetzung.** Die Eigenwerte der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

des zeitkontinuierlichen Modells der Regelstrecke aus dem vorangegangenen Beispiel liegen bei

$$s_1 = s_2 = 0.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix des zugehörigen zeitdiskreten Systems

$$\mathbf{A}_d = \phi(T_d) = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

liegen gemäß (9.33) bei

$$z_1 = z_2 = 1.$$

■

### 9.4.2 z-Übertragungsfunktion

Es ist die z-Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} \quad (9.34)$$

der in Bild 9.11 dargestellten Anordnung bei gegebener Übertragungsfunktion  $P(s)$  gesucht. Dabei macht man sich die Tatsache zunutze, dass die  $P_d(z)$  die z-Transformierte der Impul-

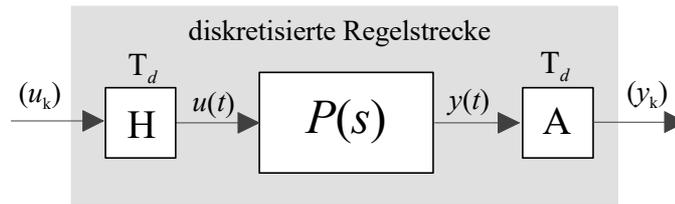


Bild 9.11: Ermittlung der z-Übertragungsfunktion  $P_d(z)$

santwort des zeitdiskreten Systems ist. Wählt man also

$$(u_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{u}(z) = 1, \quad (9.35)$$

dann generiert das Halteglied daraus

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_d) \quad \text{d.h.} \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_d}. \quad (9.36)$$

Für die Ausgangsgröße  $y(t)$  der zeitkontinuierlichen Regelstrecke gilt dann

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{y}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\bar{u}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}.$$

Die Folge  $(y_k)$  ergibt sich durch Abtastung von  $y(t)$ , d.h. für die Elemente der Folge gilt

$$y_k = y(t = kT_d) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}\Bigg|_{t=kT_d}.$$

Die z-Transformierte der Folge  $(y_k)$  lautet

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\{(y_k)\} = \mathfrak{Z}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\}\Bigg|_{t=kT_d}\right)\right\}. \quad (9.37)$$

Dieser etwas unübersichtliche Ausdruck in (9.37) wird üblicherweise folgendermaßen

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\} = \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - \mathfrak{Z}\left\{\frac{P(s)}{s} e^{-sT_d}\right\} \quad (9.38)$$

abgekürzt, d.h. die Operation  $\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\{y(s)\}$  repräsentiert folgende Rechenschritte:

$$\bar{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \xrightarrow{\text{Abtastung}} (y_k) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \tilde{y}(z).$$

Da die Multiplikation mit  $e^{-sT_d}$  im Bildbereich der Verschiebung im Zeitbereich um einen Abtastschritt nach rechts entspricht, kann (9.38) auch in der Form

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}$$

angeschrieben werden. Aufgrund der Wahl der Eingangsfolge (9.35) gilt somit für die gesuchte z-Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}. \quad (9.39)$$

Eine mögliche Realisierung von  $P_d(z)$  ist natürlich durch (9.32) gegeben.

Man beachte, dass das Ergebnis (9.39) auch durch eine sehr einfache Überlegung gewonnen werden kann. Wählt man nämlich als Eingang für das in Bild 9.11 System die Folge

$$(u_k) = (\sigma_k) = (1, 1, 1, \dots),$$

so gilt  $u(t) = \sigma(t)$  und  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}$ . Für die z-Transformierte der Ausgangsfolge  $(y_k)$  gilt somit

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} \stackrel{!}{=} P_d(z)\frac{z}{z-1}$$

Daraus resultiert unmittelbar (9.39).

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Gemäß (9.39) gilt dann

$$\begin{aligned} P_d(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) = \frac{z-1}{z}\left(\mathfrak{Z}\{(1)\} - \mathfrak{Z}\{(e^{-kT_d})\}\right) = \\ &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_d}}\right) = \frac{1-e^{-T_d}}{z-e^{-T_d}}. \end{aligned}$$

■

Die Pole der Streckenübertragungsfunktion (9.24) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  und die Pole von (9.39) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von  $\phi(T_d)$ . Solange keine

„pathologische“ Diskretisierungszeit gewählt wird, entspricht der Nennergrad von  $P_d(z)$  dem Nennergrad von  $P(s)$ . Daraus folgt unmittelbar, dass die Pole  $z_i$  von  $P_d(z)$  über die Relation (9.33) aus den Polen  $s_i$  von  $P(s)$  hervorgehen. Aus einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion  $P(s)$  ergibt sich somit durch die Diskretisierung stets auch eine BIBO-stabile Übertragungsfunktion  $P_d(z)$ .

**B Fortsetzung.** Im vorigen Beispiel geht der Pol  $s = -1$  der Übertragungsfunktion  $P(s)$  durch die Diskretisierung in einen Pol  $z = e^{-T_d}$  der Übertragungsfunktion  $P_d(z)$  über. ■

### 9.4.3 Reglerentwurf für die diskretisierte Strecke

Man beachte, dass einige der besprochenen Verfahren, wie z.B. die analytische Synthese oder der Entwurf von Zustandsreglern und -beobachtern mit nur sehr geringen Modifikationen für den Entwurf zeitdiskreter Regler eingesetzt werden können. Meistens ist die Vorgangsweise beim Entwurf identisch zum zeitkontinuierlichen Fall, es ist lediglich zu berücksichtigen, dass der Stabilitätsbereich im Zeitdiskreten im Inneren des Einheitskreises der komplexen  $z$ -Ebene liegt, d.h. statt mit Hurwitzpolynomen operiert man nun mit Einheitskreis-Polynomen.



# Literaturverzeichnis

- [1] CHEN C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993
- [2] CHEN C.T.: Linear System Theory and Design, Saunders College Publishing, 1984
- [3] FOELLINGER O.: Regelungstechnik, 11. Auflage, VDE Verlag, 2013
- [4] FRIEDLAND B.: Control System Design: An Introduction to State-Space Methods, McGraw-Hill, 1986
- [5] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004
- [6] KAILATH T.: Linear Systems, Prentice Hall, 1980
- [7] LANDGRAF C., SCHNEIDER G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer Verlag, 1970
- [8] LUNZE J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001
- [9] REINSCHKE K.: Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie, Springer Verlag, 2007
- [10] ZEITZ M.: Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme, at - Automatisierungstechnik 58, Heft 1, 2010