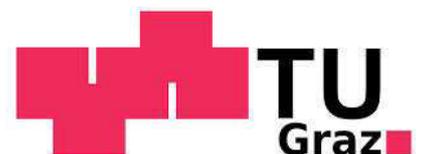


# Control Systems II



Institut für Regelungs- und  
Automatisierungstechnik





(c) Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

**Hinweis:** Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht!* Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 6. 1. 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Zeitkontinuierliche Systeme</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Lineare Systeme im Zustandsraum</b>	<b>9</b>
1.1	Einführung . . . . .	9
1.2	Lösung der Systemgleichungen . . . . .	9
1.2.1	Freie Lösung . . . . .	10
1.2.2	Erzwungene Lösung . . . . .	11
1.2.3	Übertragungsfunktion . . . . .	12
1.3	Transitionsmatrix . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Zustandstransformationen</b>	<b>15</b>
2.1	Einführung . . . . .	15
2.1.1	Invarianz der Übertragungsfunktion . . . . .	16
2.1.2	Invarianz der Stabilitätseigenschaft . . . . .	17
2.2	Transformation auf Diagonalform . . . . .	17
2.2.1	Transformationsvorschrift . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit</b>	<b>23</b>
3.1	Einführung . . . . .	23
3.2	Steuerbarkeit . . . . .	23
3.2.1	Kriterium nach Kalman . . . . .	24
3.2.2	Kriterium nach Hautus . . . . .	26
3.3	Beobachtbarkeit . . . . .	27
3.3.1	Kriterium nach Kalman . . . . .	28
3.3.2	Kriterium nach Hautus . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Übergang von <math>G(s)</math> zu einem Zustandsmodell</b>	<b>31</b>
4.1	Erste Normalform . . . . .	32
4.1.1	Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform . . . . .	33
4.1.2	Herleitung der ersten Normalform . . . . .	33
4.2	Zweite Normalform . . . . .	35
4.2.1	Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform . . . . .	36
4.3	Hinweise zur ersten und zweiten Normalformen . . . . .	36
4.4	Minimalrealisierung . . . . .	39

<b>5</b>	<b>Berechnung von <math>G(s)</math> aus Differentialgleichungen höherer Ordnung</b>	<b>41</b>
5.1	Umkehrung . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Zeitdiskrete Systeme</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>Zustandsraummethoden</b>	<b>45</b>
6.1	Einführung . . . . .	45
6.2	Lösung der Systemgleichungen . . . . .	45
6.2.1	Freie Lösung . . . . .	46
6.2.2	Erzwungene Lösung . . . . .	47
6.2.3	Übertragungsfunktion . . . . .	48
6.3	Ruhelagen . . . . .	48
6.4	Asymptotische Stabilität . . . . .	49
6.5	Zustandstransformationen . . . . .	50
6.5.1	Transformation auf Diagonalfom . . . . .	50
6.6	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . . .	51
6.6.1	Einführung . . . . .	51
6.6.2	Steuerbarkeit . . . . .	51
6.6.3	Beobachtbarkeit . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Übertragungssysteme</b>	<b>55</b>
7.1	Einführung . . . . .	55
7.2	Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich . . . . .	56
7.3	Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell . . . . .	57
7.4	Berechnung von $G(z)$ aus Differenzgleichungen höherer Ordnung . . . . .	58
7.4.1	Umkehrung . . . . .	59
7.5	Pole und Nullstellen . . . . .	59
7.6	BIBO-Stabilität . . . . .	60
7.7	Diskreter Frequenzgang . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Diskretisierung zeitkontinuierlicher Systeme</b>	<b>65</b>
8.1	Einführung . . . . .	65
8.2	Der digitale Regelkreis . . . . .	66
8.2.1	Halteglied und Abtaster . . . . .	66
8.2.2	Diskrete Betrachtung des Regelkreises . . . . .	67
8.3	Diskretisierung der Regelstrecke . . . . .	68
8.3.1	Diskretes Zustandsmodell . . . . .	68
8.4	$z$ -Übertragungsfunktion . . . . .	71
<b>III</b>	<b>Entwurfsmethoden</b>	<b>75</b>
<b>9</b>	<b>Zustandsregler</b>	<b>77</b>
9.1	Einführung . . . . .	77

9.2	Stabilisierung des Regelkreises . . . . .	77
9.2.1	Prinzip der Eigenwertvorgabe . . . . .	78
9.2.2	Stabilisierbarkeit . . . . .	81
9.2.3	Entwurf für ein System in Regelungsnormalform . . . . .	82
9.2.4	Transformation auf Regelungsnormalform . . . . .	83
9.2.5	Formel von Ackermann . . . . .	86
9.2.6	Stabilisierung beliebiger Arbeitspunkte . . . . .	88
9.3	Nachführung . . . . .	89
9.4	PI - Zustandsregler . . . . .	94
<b>10</b>	<b>Zustandsbeobachter</b>	<b>99</b>
10.1	Einführung . . . . .	99
10.2	Trivialer Beobachter . . . . .	99
10.3	Luenberger-Beobachter . . . . .	100
10.4	Der Beobachter im Regelkreis . . . . .	103
10.4.1	Separationstheorem . . . . .	104



# Teil I

## Zeitkontinuierliche Systeme



# Kapitel 1

## Lineare Systeme im Zustandsraum

### 1.1 Einführung

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1.1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (1.2)$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0 = 0)$$

analysiert. Mit  $\mathbf{x}$  wird der  $n$ -dimensionale Zustandsvektor bezeichnet,  $u$  ist die Eingangsgröße und  $y$  die Ausgangsgröße des Systems. Die Zeitinvarianz von (1.1) impliziert, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , der Eingangsvektor  $\mathbf{b}$ , der Ausgangsvektor  $\mathbf{c}$  und der Durchgriff  $d$  konstante Größen passender Dimensionen sind.

### 1.2 Lösung der Systemgleichungen

Da es sich bei den Zustandsgleichungen (1.1) um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Laplace-Transformation eingesetzt werden. Wendet man den Satz über die Differentiation im Zeitbereich auf (1.1) an, so erhält man

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad \text{und} \quad \bar{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei  $\mathbf{E}$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix repräsentiert. Nach einer Multiplikation mit  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  von links findet man

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u}(s). \quad (1.3)$$

Definiert man die  $n \times n$  - Matrix

$$\bar{\phi}(s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \}, \quad (1.4)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes - für die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}(t)$  repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (1.1) als Reaktion auf einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $u(t)$ . Das Systemverhalten (1.5) kann in zwei additive Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil rührt von der „Vorgeschichte“ des Systems her, also vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$ , man spricht von der **freien Lösung**  $\mathbf{x}_{frei}(t)$ . Im Gegensatz dazu wird der zweite Anteil durch den Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq t$  geprägt, man spricht von der **erzwungenen Lösung**  $\mathbf{x}_{erzw}(t)$ .

Die Ausgangsgröße kann mittels Relation (1.2) berechnet werden, im Bildbereich gilt mit (1.3)

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s), \quad (1.6)$$

bzw. unter Verwendung von (1.5) im Zeitbereich

$$y(t) = \mathbf{c}^T \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t). \quad (1.7)$$

Analog zu (1.5) kann die Ausgangsgröße also in einen Anteil, der vom Anfangszustand herrührt und einen Anteil, der vom Verlauf der Eingangsgröße geprägt wird, zerlegt werden.

### 1.2.1 Freie Lösung

Unter der freien Lösung eines Systems versteht man diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System *ausschließlich* durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  angeregt wird. Somit ist hier das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.8)$$

zu untersuchen. Gemäß (1.5) gilt für die Lösung dann

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0. \quad (1.9)$$

Die Matrix  $\phi(t)$  wird **Transitionsmatrix**<sup>1</sup> genannt, sie beschreibt den Übergang des Zustandsvektors von seinem Anfangswert zu seinem Wert zum Zeitpunkt  $t$ . Ihre Berechnung kann mit Hilfe von Formel (1.4) erfolgen, alternative Berechnungsmethoden folgen später.

**B** Für das autonome System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

<sup>1</sup>lat. *transire* = übergehen

ergibt sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix gemäß (1.4) zu

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Eine Partialbruchzerlegung und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} \\ -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors gilt somit

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \\ \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

■

### 1.2.2 Erzwungene Lösung

Die erzwungene Lösung oder Bewegung eines Systems ist diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System bei *verschwindendem* Anfangszustand<sup>2</sup>  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  durch die Eingangsgröße  $u(t)$  angeregt wird. Nach (1.5) gilt unter diesen Umständen

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

eines linearen, zeitinvarianten Systems erster Ordnung mit der Eingangsgröße  $u$ . Mit Hilfe von (1.10) findet man mit  $\phi(t) = e^{-t}$  für die erzwungene Lösung

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot u(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau.$$

Wählt man beispielsweise als Eingangsgröße einen Einheitssprung, d.h.  $u(t) = \sigma(t)$ , so gilt

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

■

<sup>2</sup>man sagt: "Das System befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe"

### 1.2.3 Übertragungsfunktion

Für die Ausgangsgröße folgt unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  aus (1.6) im Bildbereich unmittelbar

$$\bar{y}(s) = [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s). \quad (1.11)$$

Der Ausdruck

$$G(s) := \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (1.12)$$

ist die so genannte **Übertragungsfunktion** des Systems. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems im Bildbereich.

**B** Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x} + 2u.$$

Für die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Systems gilt dann

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 8s - 3}{s^2 - 5s - 2}.$$

■

## 1.3 Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix  $\phi(t)$  prägt das zeitliche Verhalten von linearen Systemen, siehe (1.5). In diesem Abschnitt werden einige elementare Eigenschaften der Transitionsmatrix vorgestellt. Zunächst wird ein System erster Ordnung untersucht, die dort gefundenen Erkenntnisse werden danach auf Systeme höherer Ordnung übertragen.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell eines autonomen Systems erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{mit} \quad x_0 := x(t=0),$$

wobei  $a$  eine reelle Konstante ist. Die Lösung  $x(t)$  kann mit (1.9) berechnet werden, wobei

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (s-a)^{-1} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = e^{at} x_0.$$

Offensichtlich erfüllt die Transitionsmatrix im skalaren Fall ( $n=1$ ) die Bedingungen

$$\phi(0) = 1, \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = a\phi(t), \quad \phi^{-1}(t) = \phi(-t) \quad \text{und} \quad \phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (1.13)$$

und kann als unendliche Reihe

$$\phi(t) = e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} \quad (1.14)$$

angeschrieben werden. ■

Es wird nun gezeigt, dass die in obigem Beispiel angeführten Eigenschaften der Transitionsmatrix für den Fall  $n > 1$  verallgemeinert werden können. Aus (1.9) folgt zunächst unmittelbar die Beziehung

$$\phi(0) = \mathbf{E}. \quad (1.15)$$

Setzt man (1.9) in (1.8) ein, so findet man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\phi(t) \mathbf{x}_0,$$

woraus sich -  $\mathbf{x}_0$  ist ein *beliebiger* Anfangszustand - die Beziehung

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A}\phi(t) \quad (1.16)$$

ableiten lässt. Wie in Bild 1.1 angedeutet, gelten gemäß (1.9) für zwei beliebige Zeitpunkte  $t = t_1$  und  $t = t_1 + t_2$  die Beziehungen

$$\mathbf{x}(t_1) = \phi(t_1) \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_1 + t_2) \mathbf{x}_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Systemgleichungen muss auch die Beziehung

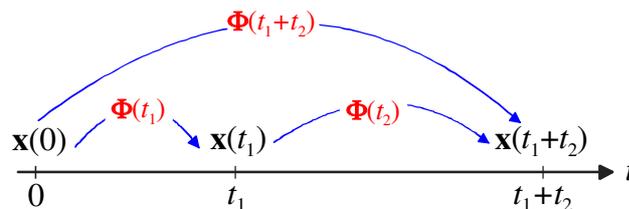


Bild 1.1: Bedeutung der Transitionsmatrix

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_2) \mathbf{x}(t_1)$$

gelten, sodass sich unmittelbar die Relation

$$\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_2)\phi(t_1) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (1.17)$$

ergibt. Im Speziellen resultiert für  $t_2 = -t_1$  daraus

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t), \quad (1.18)$$

d.h. die Transitionsmatrix ist für endliche Werte von  $t$  regulär.

Aufgrund der Analogien zwischen (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) und den Eigenschaften (1.13) der Exponentialfunktion liegt es nahe, die Transitionsmatrix  $\phi(t)$  als **Matrix-Exponentialfunktion**, d.h. als matrixwertige Verallgemeinerung der skalaren Exponentialfunktion, zu interpretieren. Aus diesem Grund wird häufig die Schreibweise

$$\phi(t) := e^{\mathbf{A}t}. \quad (1.19)$$

verwendet. In Anlehnung an (1.14) wird der Reihenansatz

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!} \quad (1.20)$$

gewählt. Hierbei gilt

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \mathbf{A}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{A}^k = \prod_{i=1}^k \mathbf{A}$$

Die Differentiation nach der Zeit bestätigt, dass die Matrix-Exponentialreihe (1.20) die Beziehung (1.16) erfüllt, denn es gilt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = \mathbf{A} \phi(t)$$

Es sei angemerkt, dass (1.20) in den wenigsten Fällen dazu geeignet ist, eine *geschlossene Darstellung* der Transitionsmatrix zu ermitteln. Das folgende Beispiel stellt eine Ausnahme dar.

**B** Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Für die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  gilt<sup>3</sup>

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i \geq 2,$$

d.h. die Transitionsmatrix ist gemäß (1.20) gegeben durch

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man überprüfen kann, erfüllt  $\phi(t)$  die Bedingungen (1.15), (1.16), (1.17) und (1.18). ■

<sup>3</sup>eine solche Matrix nennt man *nilpotent*.

# Kapitel 2

## Zustandstransformationen

### 2.1 Einführung

Die Wahl der Zustandsvariablen zur Beschreibung eines dynamischen Systems ist nicht eindeutig, d.h. für ein und dasselbe System gibt es *unendlich viele* Zustandsbeschreibungen. Der Übergang zu „geeigneten“ Zustandsvariablen kann viele Aufgabenstellungen drastisch vereinfachen.

Bei einer **linearen Zustandstransformation** sind der ursprüngliche Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  und der transformierte Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  über die (lineare) Relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.1)$$

verknüpft, wobei die konstante  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{T}$  die so genannte **Transformationsmatrix** ist. Damit die Transformation umkehrbar eindeutig ist, muss  $\mathbf{T}$  regulär sein, man spricht deshalb auch von einer **regulären Zustandstransformation**. Man beachte, dass die Transformation (2.1) einem Wechsel der Basisvektoren des  $n$ -dimensionalen Zustandsraumes entspricht, es handelt sich bei (2.1) also um eine lineare Koordinatentransformation.

Die Anwendung der Transformationsvorschrift (2.1) auf (1.1) bzw. (1.2) liefert zunächst

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u$$

und in weiterer Folge (Multiplikation mit  $\mathbf{T}^{-1}$  von links)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}} u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + d u. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Das transformierte System liegt somit in der gleichen Form wie das Originalsystem (1.1) vor, wobei gilt

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}, \quad (2.3)$$

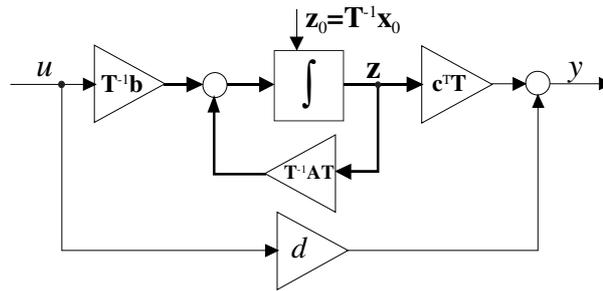


Bild 2.1: Strukturbild des transformierten Systems (2.2)

der Durchgriffsterm  $d$  bleibt durch die Transformation unverändert. Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 2.1 dargestellt.

Es zeigt sich, dass einige wesentliche Systemeigenschaften *unabhängig* von der Wahl der Zustandsvariablen sind. Man nennt solche Eigenschaften **invariant** bezüglich einer regulären Zustandstransformation. Dieses Erkenntnis ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass das transformierte System (2.2) bloß eine alternative Beschreibung des ursprünglichen Systems (1.1), (1.2) darstellt.

### 2.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion

Für die Übertragungsfunktion des Originalsystems gilt gemäß (1.12)

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Wird nun eine reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  durchgeführt, so gilt für die Übertragungsfunktion des transformierten Systems analog

$$\tilde{G}(s) = \tilde{\mathbf{c}}^T (s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} + d \stackrel{(2.3)}{=} \mathbf{c}^T \mathbf{T} (s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Unter Ausnutzung der Relation

$$(\mathbf{V}\mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^{-1}$$

für zwei beliebige reguläre  $n \times n$  Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  kann für  $\tilde{G}(s)$  auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \mathbf{c}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1}]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T [\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \\ &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G(s). \end{aligned}$$

Offensichtlich ändert sich also durch eine reguläre Zustandstransformation die Übertragungsfunktion *nicht*.

### 2.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft

Wie gezeigt wurde, wird die Stabilität eines Systems (1.1) durch die Lage der  $n$  Eigenwerte  $s_i$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  geprägt. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Für das charakteristische Polynom der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  gilt analog

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

Unter Anwendung von (2.3) gilt weiter

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}). \quad (2.4)$$

Da für die Determinante des Produktes zweier  $n \times n$  Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  immer

$$\det(\mathbf{V}\mathbf{W}) = \det(\mathbf{V}) \det(\mathbf{W}) \quad (2.5)$$

gilt, kann (2.4) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\tilde{\Delta}(s) = \det[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{T}] = \det \mathbf{T}^{-1} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}.$$

Aus (2.5) folgt unmittelbar

$$\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{T}) = 1,$$

d.h. es gilt

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \Delta(s). \quad (2.6)$$

Die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  besitzt also das gleiche charakteristische Polynom wie die Matrix  $\mathbf{A}$ . Das bedeutet, dass die Eigenwerte des transformierten Systems identisch mit den Eigenwerten des Originalsystems sind. Erwartungsgemäß ändert sich durch eine lineare Zustandstransformation der Stabilitätscharakter eines Systems somit *nicht*.

## 2.2 Transformation auf Diagonalform

Bei der Transformation in die so genannte **Diagonalform** wird das Ziel verfolgt, das Originalsystem in ein System von  $n$  entkoppelten Differentialgleichungen umzuwandeln. Das bedeutet, dass in jeder Differentialgleichung nur mehr *eine* Zustandsgröße vorkommt. Diese Zustandsvariable wird nur von der Eingangsgröße  $u$ , nicht jedoch von anderen Zustandsvariablen beeinflusst. Die Entkopplung weist erhebliche Vorzüge gegenüber der ursprünglichen Struktur des Originalsystems auf. So kann man jede der  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Rücksicht auf die anderen Differentialgleichungen lösen. Diese Tatsache kann beispielsweise bei der Berechnung der Transitionsmatrix des Originalsystems vorteilhaft ausgenutzt werden.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -46 & 36 \\ -60 & 47 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -22 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

eines Systems mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Nach Anwendung einer Zustandstransformation der Form (2.1) mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das transformierte System

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Modell des transformierten Systems aus zwei voneinander *entkoppelten* Differentialgleichungen besteht, da die Systemmatrix eine Diagonalmatrix ist. Man sagt, dass das transformierte System in Diagonalform vorliegt. Es ist offensichtlich, dass in dieser Form beispielsweise Aussagen über die Stabilität leicht möglich sind, da die (invarianten) Eigenwerte der Dynamikmatrix in der Hauptdiagonale angeordnet sind. ■

### 2.2.1 Transformationsvorschrift

Gesucht ist nun ein systematischer Weg zur Ermittlung der Transformationsvorschrift (2.1), die das System (1.1) in die Diagonalform überführt. Gemäß (2.3) muss die Relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (2.7)$$

gelten, wobei  $\mathbf{\Lambda}$  eine Diagonalmatrix ist. Da die Eigenwerte der Dynamikmatrizen von ursprünglichem und transformiertem System identisch sind, entsprechen die Diagonalelemente von  $\mathbf{\Lambda}$  den Eigenwerten  $s_i$  von  $\mathbf{A}$ , d.h.

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} = \text{diag}(s_i).$$

Multipliziert man (2.7) von links mit  $\mathbf{T}$ , so erhält man (unter Berücksichtigung von  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$ )

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}. \quad (2.8)$$

Es erweist sich als sinnvoll, die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  durch ihre Spalten darzustellen, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Setzt man diese Darstellung von  $\mathbf{T}$  in (2.8) ein, so erhält man

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix},$$

bzw. in ausmultiplizierter Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t}_1 & \mathbf{A}\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\mathbf{t}_1 & s_2\mathbf{t}_2 & \dots & s_n\mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Ein spaltenweiser Vergleich ergibt unmittelbar

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_i = s_i\mathbf{t}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.$$

bzw.

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{t}_i = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Man beachte, dass es sich bei (2.9) um die bekannte Eigenwertgleichung handelt, d.h.  $\mathbf{t}_i$  ist ein zum Eigenwert  $s_i$  gehöriger (Rechts-)Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$ . Die Transformationsmatrix lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} =: \mathbf{P}. \quad (2.10)$$

Die bisherige Vorgangsweise setzt voraus, dass die Spalten von  $\mathbf{P}$ , also die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  linear unabhängig sind. Man nennt die Matrix  $\mathbf{A}$  dann **diagonalähnlich**. *Hinreichend* hierfür ist, dass  $\mathbf{A}$  lauter verschiedene, d.h. einfache Eigenwerte besitzt. Diese Eigenschaft von  $\mathbf{A}$  wird in den folgenden Abschnitten angenommen, der Fall mehrfacher Eigenwerte wird danach gesondert behandelt.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  lauten  $s_1 = 2$  und  $s_2 = -5$ , die Eigenvektoren werden mittels (2.9) berechnet, d.h.

$$\begin{aligned} s_1 = 2: \quad (s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ s_2 = -5: \quad (s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht überprüfen kann gilt

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},$$

d.h. das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Stellt man die Inverse der Matrix  $\mathbf{P}$  durch ihre Zeilen dar, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

und setzt diese Darstellung in (2.8) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

und weiter

$$\begin{bmatrix} s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \\ s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$s_i \boldsymbol{\rho}_i^T = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n,$$

d.h.  $\boldsymbol{\rho}_i$  ist ein zu  $s_i$  gehöriger Links-Eigenvektor von  $\mathbf{A}$ . Das bedeutet, dass  $\mathbf{P}$  Rechts-Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  als Spalten besitzt und  $\mathbf{P}^{-1}$  entsprechende Links-Eigenvektoren als Zeilen. Aus der Relation

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_n \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_2 & & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{p}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad \text{wobei} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Das bedeutet, dass der Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  normal auf alle Rechts-Eigenvektoren mit Ausnahme von  $\mathbf{p}_i$  steht. Für das System in Diagonalform gilt mit (2.11)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u, \quad (2.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{p}_1 & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + du.$$

Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 2.2 dargestellt. Das System besteht aus  $n$  entkoppelten

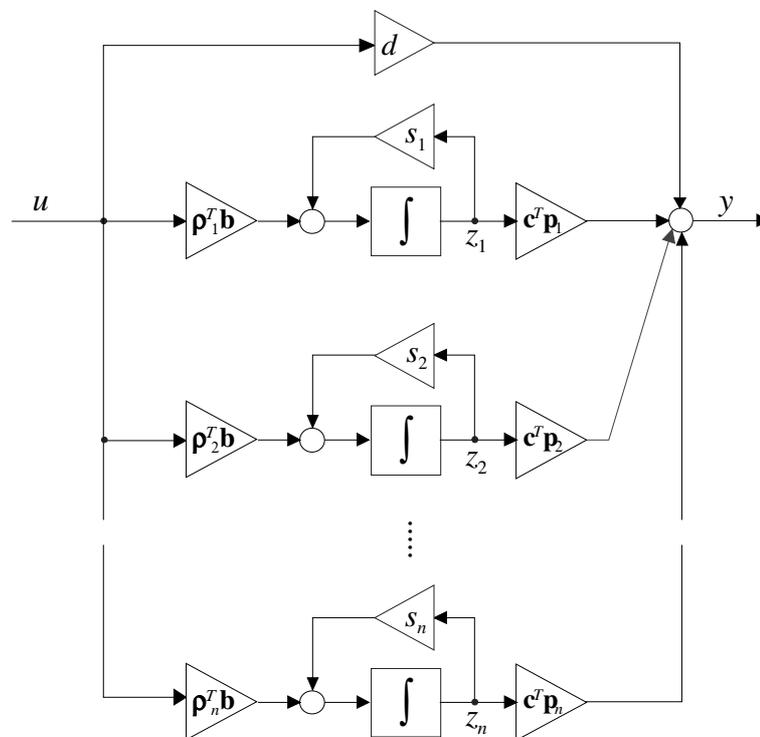


Bild 2.2: Struktur der Diagonalform

Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i z_i + \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} u \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

für die Ausgangsgleichung gilt

$$y = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i z_i + d u. \quad (2.14)$$

Wie man aus Bild 2.2 bzw. den Relationen (2.13) und (2.14) erkennt, kann der Verlauf der Zustandsvariable  $z_i$  für

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (2.15)$$

d.h.  $\mathbf{b}$  ist orthogonal zum Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$ , durch die Eingangsgröße  $u$  *nicht* beeinflusst werden. Weiters leistet im Falle

$$\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i = 0, \quad (2.16)$$

d.h.  $\mathbf{c}$  ist orthogonal zum Rechts-Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$ , die Zustandsvariable  $z_i$  *keinen* Beitrag zur Ausgangsgröße  $y$ . Tritt also (2.15) und / oder (2.16) ein, so spielt die entsprechende Zustandsvariable  $z_i$  keine Rolle für das Übertragungsverhalten des Systems. Dies manifestiert sich auch in der Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Transformiert man (2.13) und (2.14) in den Bildbereich, so findet man unter Annahme verschwindender Anfangswerte

$$\bar{z}_i(s) = \frac{\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} \bar{u}(s) \quad \text{und} \quad \bar{y}(s) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \bar{z}_i(s) + d \bar{u}(s).$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} + d. \quad (2.17)$$

Nur wenn weder (2.15) noch (2.16) gilt, liefert der entsprechende Summand in obiger Formel einen Beitrag zur Übertragungsfunktion. Gibt es Summanden, die keinen Beitrag zu  $G(s)$  leisten, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von  $G(s)$  kleiner ist als die Ordnung  $n$  des Zustandsmodells.

**B** Für die Übertragungsfunktion des in Diagonalform vorliegenden mathematischen Modells

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

findet man mit (2.17)

$$G(s) = \frac{3 \cdot 0}{s - 2} - \frac{2 \cdot 1}{s + 5} = -\frac{2}{s + 5}.$$

■

# Kapitel 3

## Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

### 3.1 Einführung

Wie sich in der Vorlesung „Regelungstechnik“ zeigen wird, sind die Begriffe **Steuerbarkeit** und **Beobachtbarkeit** beim Entwurf von so genannten Zustandsreglern und Zustandsbeobachtern von zentraler Bedeutung. Stark vereinfacht besagt die Steuerbarkeit eines Systems, dass über seine Eingangsgröße jede Zustandsvariable beeinflusst werden kann. Im Gegensatz dazu bedeutet die Beobachtbarkeit eines Systems, dass in seiner Ausgangsgröße Information über jede Zustandsvariable enthalten ist.

### 3.2 Steuerbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.1)$$

**steuerbar**, wenn durch geeignete Wahl der Eingangsgröße  $u(t)$  der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  in *endlicher Zeit*  $T$  aus einem beliebig vorgebbaren Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  in den beliebig vorgebbaren Endzustand  $\mathbf{x}(T)$  bewegt werden kann.

Man beachte, dass die Eigenschaft der Steuerbarkeit lediglich aussagt, ob ein Übergang von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}(T)$  in endlicher Zeit prinzipiell möglich ist. Wie  $u(t)$  zu wählen ist und wie der zugehörige Verlauf von  $\mathbf{x}(t)$  für  $0 < t < T$  aussieht, bleibt offen.

**Hinweis:** In der einschlägigen Literatur wird mitunter zwischen der sogenannten Erreichbarkeit und der (etwas anders als hier definierten) Steuerbarkeit unterschieden. Diese - im zeitdiskreten Fall etwas spitzfindige - Unterscheidung wird durch die hier eingeführte Definition der Steuerbarkeit umgangen.

### 3.2.1 Kriterium nach Kalman

Der Zustand  $\mathbf{x}(T)$  kann für das System (3.1) bekanntlich gemäß

$$\mathbf{x}(T) = \phi(T) \mathbf{x}_0 + \int_0^T \phi(T - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

ermittelt werden. Aus (3.2) folgt daraus unmittelbar

$$\phi(T) \int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \mathbf{x}(T) - \phi(T) \mathbf{x}_0. \quad (3.3)$$

Da die Matrix  $\phi(T)$  jedenfalls regulär ist, folgt aus (3.3) die Bedingung

$$\int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \underbrace{\phi(-T) \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_0}_{=:\mathbf{q}} \quad (3.4)$$

und  $\mathbf{q}$  ist ein beliebiger Vektor. Stellt man die Transitionsmatrix  $\phi(-\tau)$  als Matrix-Exponentialreihe dar, d.h.

$$\phi(-\tau) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\tau + \mathbf{A}^2 \frac{\tau^2}{2!} \mp \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!}, \quad (3.5)$$

so erhält man die Beziehung

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{b} \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau = \mathbf{q}. \quad (3.6)$$

Definiert man die - bei vorgegebener Wahl von  $u$  - konstanten Größen

$$\alpha_i := \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau,$$

so lautet die Bedingung für Steuerbarkeit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathbf{A}^i \mathbf{b} = \mathbf{q}. \quad (3.7)$$

Da  $\mathbf{q}$  ein beliebiger (konstanter) Vektor ist, müssen die Vektoren  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}^3\mathbf{b}$ , ... den gesamten  $n$ -dimensionalen Raum aufspannen. Das bedeutet, dass es  $n$  linear unabhängige Vektoren der Form  $\mathbf{A}^i\mathbf{b}$  mit  $i = 0, 1, 2, \dots$  gibt. Man kann zeigen, dass dies nur die ersten  $n$  Vektoren  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$ , ...,  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$  sein können. Nimmt man nämlich an, dass für  $\delta < n$  die Bedingungen

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \delta \quad \text{und} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \delta$$

gelten, d.h.  $\mathbf{A}^\delta \mathbf{b}$  ist linear abhängig, also

$$\mathbf{A}^\delta \mathbf{b} = k_0 \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b}, \quad (3.8)$$

so ist auch  $\mathbf{A}^{\delta+1} \mathbf{b}$  linear abhängig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\delta+1} \mathbf{b} &= \mathbf{A} (k_0 \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b}) = k_0 \mathbf{A} \mathbf{b} + k_1 \mathbf{A}^2 \mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1} \mathbf{A}^\delta \mathbf{b} = \\ &= \tilde{k}_0 \mathbf{b} + \tilde{k}_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + \tilde{k}_{\delta-1} \mathbf{A}^{\delta-1} \mathbf{b} \end{aligned}$$

Die Steuerbarkeit ist somit gegeben, wenn die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = n \quad (3.9)$$

erfüllt ist. Hierbei handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Definiert man nun die so genannte **Steuerbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{S}_u := \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

so kann das Steuerbarkeitskriterium nach Kalman<sup>1</sup> prägnant formuliert werden: Das System (3.1) ist genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix (3.10) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  steuerbar ist.

**B** Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Für die Steuerbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Steuerbarkeit des Systems. ■

### Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Führt man eine reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$  durch, so erhält man die transformierte Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}} u. \quad (3.11)$$

Die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_u &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} & \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{b}} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \stackrel{(3.11)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}_u. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass  $\tilde{\mathbf{S}}_u$  genau dann regulär ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_u$  des Originalsystems regulär ist.

<sup>1</sup>benannt nach dem ungarischen Elektrotechniker Rudolf Emil Kálmán (geboren 1930).

### 3.2.2 Kriterium nach Hautus

Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  lauter *verschiedene* Eigenwerte besitzt. Zu jedem der  $n$  Eigenwerte  $s_i$  gibt es je einen (Rechts-) Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  bzw. einen Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i^T$ , d.h. es gilt

$$\text{rang}(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = n - 1 \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Da die  $n$  Eigenvektoren linear unabhängig sind, kann das System (3.1) mittels der regulären Zustandstransformation  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$ , wobei  $\mathbf{T} = \mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$  in die Diagonalform

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

transformiert werden. Gilt für die  $i$ -te Komponente des (transformierten) Eingangsvektors

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (3.14)$$

so kann offensichtlich der Verlauf der  $i$ -ten Zustandsgröße des transformierten Systems durch  $u$  nicht beeinflusst werden und es liegt sicher kein steuerbares System vor. Gilt hingegen

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

so lautet die Steuerbarkeitmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & \dots & s_1^{n-1} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & & s_2^{n-1} \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & \dots & s_n^{n-1} \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Die Links-Eigenvektoren können ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt werden, dass  $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 1$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt. Die Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}_u$  ist somit eine so genannte Vandermonde<sup>2</sup>-Matrix der Form

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & \dots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & & s_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & s_n & \dots & s_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Da die Eigenwerte  $s_1, \dots, s_n$  voraussetzungsgemäß voneinander verschieden sind, ist  $\tilde{\mathbf{S}}_u$  regulär, System (3.1) ist somit steuerbar.

Man beachte, dass die hier für den Fall verschiedener Eigenwerte hergeleiteten Ergebnisse auch uneingeschränkt für den Fall mehrfacher Eigenwerte gelten.

Zusammenfassend kann das Hautus<sup>3</sup>-Kriterium folgendermaßen formuliert werden: Das System (3.1) ist genau dann steuerbar, wenn kein Links-Eigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$  auf den Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  normal steht.

<sup>2</sup>benannt nach dem französischen Mathematiker Alexandre T. Vandermonde (1735 - 1796)

<sup>3</sup>benannt nach dem niederländischen Mathematiker Malo Hautus (geboren 1940).

### Alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums

Einer alternativen Formulierung des Kriteriums liegt die Betrachtung der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}^T \quad (3.18)$$

zugrunde, d.h. der Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  steht normal auf die Spalten der Matrix  $(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A})$ , wobei  $i = 1, \dots, n$ . Aufgrund von (3.12) wird durch die Bedingung

$$\text{rang} \left[ s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} \mid \mathbf{b} \right] = n \quad (3.19)$$

gewährleistet, dass der Links-Eigenvektor nicht orthogonal zu  $\mathbf{b}$  ist.

Damit lautet die alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums: Das System (3.1) ist genau dann steuerbar, wenn für jeden Eigenwert  $s_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  die Bedingung (3.19) erfüllt ist.

## 3.3 Beobachtbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (3.20)$$

**beobachtbar**, wenn aus der Kenntnis von  $u(t)$  und  $y(t)$  in einem *endlichen* Zeitintervall  $[0, T]$  der unbekannte Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  bestimmt werden kann.<sup>4</sup>

Der Verlauf der Ausgangsgröße als Reaktion auf den Anfangszustand und die Eingangsgröße lautet

$$y(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + du(t),$$

wobei  $\boldsymbol{\phi}(t)$  die zu (3.20) gehörige Transitionsmatrix ist. Die von der (gegebenen) Eingangsgröße  $u$  abhängigen Anteile des Ausdruckes sind ebenso bekannt wie die Ausgangsgröße  $y$ . Stellt man die obige Gleichung entsprechend um, so erhält man

$$\mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 = y(t) - \underbrace{\int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + du(t)}_{:=\hat{y}(t)}.$$

Das bedeutet, dass aus der Relation  $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 = \hat{y}(t)$  (über ein endliche Intervall betrachtet) der Anfangszustand ermittelt werden soll. Diese Aufgabenstellung entspricht formal der Aufgabe, aus dem Verlauf der Ausgangsgröße des autonomen Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.21)$$

den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  zu ermitteln. Die Beobachtbarkeit von (3.20) kann also anhand des Systems (3.21) untersucht werden.

<sup>4</sup>Man beachte, dass dabei  $T$  prinzipiell beliebig klein gemacht werden kann.

### 3.3.1 Kriterium nach Kalman

Differenziert man die Ausgangsgröße

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

nach der Zeit, so erhält man mit (3.21)

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}, \quad \dots \quad \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x},$$

bzw. in Matrixnotation

$$\begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dieses Ergebnisse besagt, dass der Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , also auch für  $t = 0$  genau dann eindeutig ermittelt werden kann, wenn die so genannte **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{B}_y := \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

den Höchststrang besitzt. Damit lautet das Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman: Das System (3.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix (3.22) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$  beobachtbar ist.

**B** Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll auf Beobachtbarkeit untersucht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Beobachtbarkeit des Systems. ■

### Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Die reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$  führt auf die Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}, \quad y = \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T} \mathbf{z}. \quad (3.23)$$

Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix gilt dann

$$\tilde{\mathbf{B}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{(3.23)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{T} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y \mathbf{T}$$

Das bedeutet, dass  $\tilde{\mathbf{B}}_y$  genau dann regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{B}_y$  des Originalsystems regulär ist.

### 3.3.2 Kriterium nach Hautus

Mit analogen Überlegungen wie bei der Steuerbarkeit kann das Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus hergeleitet werden. Es zeigt sich, dass das System (3.20) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  normal auf den Ausgangsvektor  $\mathbf{c}^T$  steht.

Äquivalent ist die alternative Formulierung des Kriteriums nach Hautus: Das System (3.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \quad (3.24)$$

für alle Eigenwerte  $s_i$  von  $\mathbf{A}$  erfüllt ist.

Analog zur Steuerbarkeit gelten die gefundenen Ergebnisse auch hier uneingeschränkt im Falle mehrfacher Eigenwerte. Zu jedem mehrfachen Eigenwert darf nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren, d.h. in der Dynamikmatrix des transformierten Systems kommt nur *ein* entsprechender Jordanblock vor.



# Kapitel 4

## Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell

Es gibt prinzipiell unendlich viele Möglichkeiten, Zustandsmodelle anzugeben, die eine vorgegebene Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

besitzen. Solche Zustandsmodelle nennt man **Realisierungen** von  $G(s)$ . Eine **Minimalrealisierung** zeichnet sich ferner dadurch aus, dass die Zahl der Zustandsgrößen minimal ist. Man beachte, dass genau dann eine Realisierung von  $G(s)$  existiert, wenn

$$\text{Grad } \beta(s) \leq \text{Grad } \alpha(s) \quad (4.1)$$

erfüllt ist.

An dieser Stelle werden zwei wichtige Normalformen vorgestellt. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein so genanntes **monisches Polynom** ist, der höchstwertige Koeffizient des Nennerpolynoms ist also auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Im Falle eines sprungfähigen Systems ( $m = n$ ) ist eine Polynomdivision durchzuführen, d.h.

$$G(s) = \beta_n + \frac{(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n) s^{n-1} + \dots + (\beta_1 - \alpha_1\beta_n) s + (\beta_0 - \alpha_0\beta_n)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}.$$

## 4.1 Erste Normalform

Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  des Zustandsmodells sowie der Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  besitzen eine sehr einfache Struktur, es gilt nämlich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (4.2)$$

Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0\beta_n & \beta_1 - \alpha_1\beta_n & \dots & \dots & \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \beta_n u \quad (4.3)$$

In Bild 4.1 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in erster Normalform dargestellt.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s^2 + 6s}{2s^2 + 2s + 2} = \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + s + 1} = 2 + \frac{s - 2}{s^2 + s + 1}.$$

Das zugehörige Zustandsmodell in der ersten Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

Besonders einfach kann die erste Normalform aufgestellt werden, wenn das betrachtete System nicht sprunghaft ist, denn dann gilt  $\beta_n = 0$ . Die Ausgangsgleichung (4.3) vereinfacht sich dann zu

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

**B** Das zu der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{21}{3s^3 + 6s + 9} = \frac{7}{s^3 + 2s + 3}$$

gehörige Zustandsmodell in erster Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

### 4.1.1 Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in erster Normalform vorliegt, dann ist das System auf jeden Fall steuerbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

veranschaulicht werden. Verwendet man das Kalman-Kriterium, so besitzt die Steuerbarkeitsmatrix die ausgezeichnete Struktur

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

d.h. sie ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die erste Normalform auch **Steuerbarkeitsnormalform** genannt.

### 4.1.2 Herleitung der ersten Normalform

Zur Herleitung der ersten Normalform wird  $G(s)$  in der folgenden Form dargestellt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{\underbrace{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}_{=G^*(s)}} (\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0). \quad (4.4)$$

Die erste Zustandsvariable  $x_1$  des gesuchten Zustandsmodells wird so eingeführt, dass die Bedingung

$$G^*(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (4.5)$$

erfüllt wird, d.h.

$$s^n \bar{x}_1(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \alpha_1 s \bar{x}_1(s) + \alpha_0 \bar{x}_1(s) = \bar{u}(s)$$

Die restlichen Zustandsvariablen  $x_2$  bis  $x_n$  werden nun so definiert

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(s) &: = s\bar{x}_1(s), \\ \bar{x}_3(s) &: = s\bar{x}_2(s) = s^2\bar{x}_1(s), \\ &\vdots \\ \bar{x}_n(s) &: = s\bar{x}_{n-1}(s) = s^{n-1}\bar{x}_1(s), \end{aligned} \quad (4.6)$$

dass die Relation

$$s^n \bar{x}_1(s) = s\bar{x}_n(s) = -\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s) \quad (4.7)$$

gilt. Im Zeitbereich können (4.6) und (4.7) folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (4.8)$$

Man beachte, dass gemäß (4.5) die Relation  $\bar{x}_1(s) = G^*(s) \bar{u}(s)$  gilt und mit (4.4) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= G(s) \bar{u}(s) = G^*(s) (\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{u}(s) = \\ &= (\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{x}_1(s). \end{aligned}$$

Mit (4.6) und (4.7) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \beta_n s^n \bar{x}_1(s) + \beta_{n-1} s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \beta_1 s \bar{x}_1(s) + \beta_0 \bar{x}_1(s) \stackrel{(4.7)}{=} \\ &= \beta_n [-\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s)] + (\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{x}_1(s) = \\ &= (\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \bar{x}_1(s) + (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \bar{x}_2(s) + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) \bar{x}_n(s) + \beta_n \bar{u}(s). \end{aligned}$$

Das bedeutet im Zeitbereich

$$y(t) = [ (\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \quad (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \quad \dots \quad \dots \quad (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) ] \mathbf{x}(t) + \beta_n u(t), \quad (4.9)$$

d.h. (4.8) und (4.9) ergeben die erste Normalform.

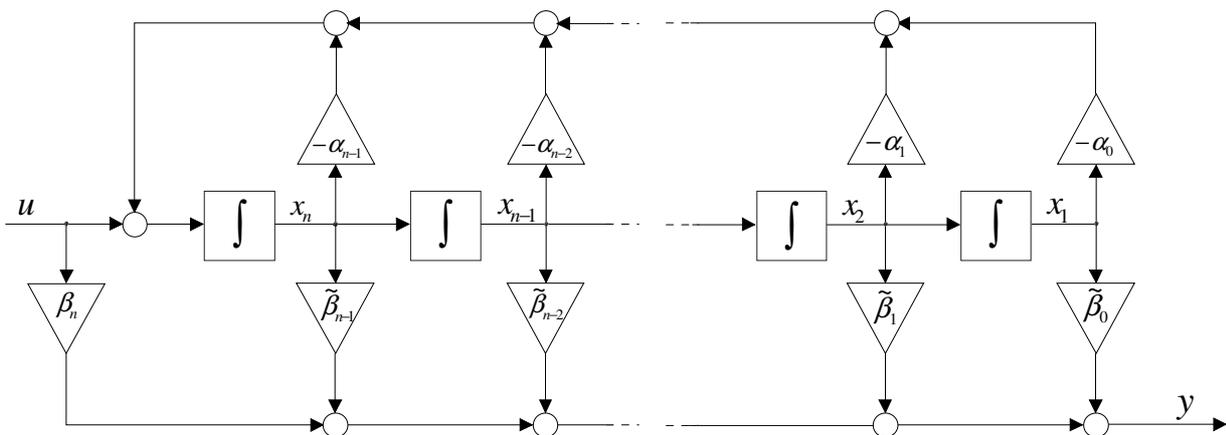


Bild 4.1: Strukturbild zur ersten Normalform, wobei  $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$  gilt

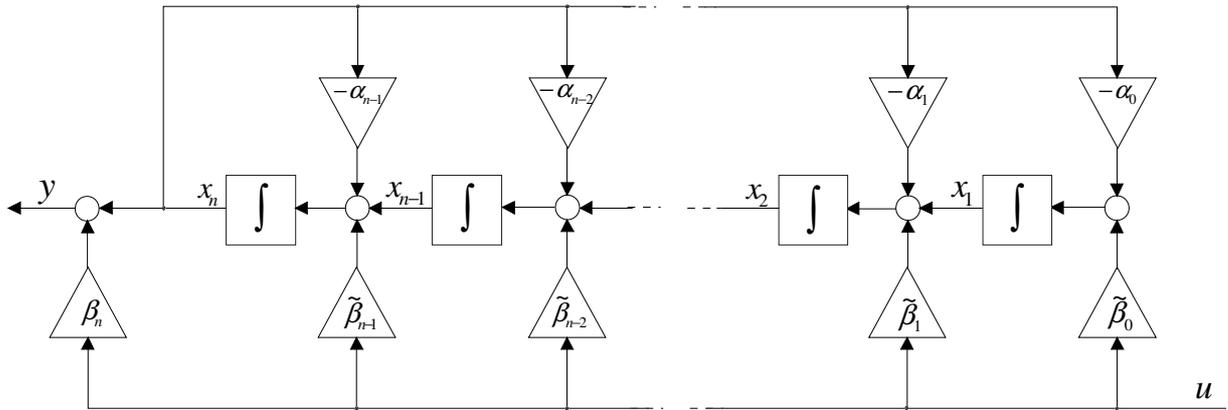


Bild 4.2: Strukturbild zur zweiten Normalform, wobei  $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$  gilt

## 4.2 Zweite Normalform

Die so genannte zweite Normalform kann aus der ersten Normalform gewonnen werden, indem die Dynamikmatrix transponiert wird und die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  miteinander vertauscht werden, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_1 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n \end{bmatrix} u \quad (4.10)$$

und

$$y = [ 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad 1 ] \mathbf{x} + \beta_n u. \quad (4.11)$$

In Bild 4.2 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in zweiter Normalform dargestellt.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + s + 2}.$$

Ein zugehöriges Zustandsmodell in der zweiten Normalform lautet dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \mathbf{x}.$$



### 4.2.1 Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in zweiter Normalform vorliegt, dann ist das System jedenfalls beobachtbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} + \beta_n u$$

veranschaulicht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt nämlich (vgl. Steuerbarkeitsmatrix der ersten Normalform!)

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

diese ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die zweite Normalform auch **Beobachtbarkeitsnormalform** genannt.

## 4.3 Hinweise zur ersten und zweiten Normalformen

Der Zusammenhang zwischen erster und zweiter Normalform hat zur Folge, dass die zwei Zustandsmodelle

$$M_1 : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_1 \\ y_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d u_1 \end{cases} \quad M_2 : \begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{c}u_2 \\ y_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{z} + d u_2 \end{cases}$$

die gleiche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}_1(s)}{\bar{u}_1(s)} = \frac{\bar{y}_2(s)}{\bar{u}_2(s)}$$

besitzen. Dieses Ergebnis ist leicht zu erkennen, da für die (skalare) Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G^T(s) = \mathbf{b}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}]^T \mathbf{c} + d = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d$$

gilt. Wenn man die Strukturbilder 4.1 und 4.2 miteinander vergleicht, so erkennt man, dass sich ein Strukturbild aus dem anderen ergibt, wenn man

- Eingangs- und Ausgangsgrößen vertauscht, d.h.  $u \leftrightarrow y$
- alle Pfeilrichtungen umkehrt
- Summationen und Abzweigungen vertauscht, d.h.  $\bigcirc \leftrightarrow \cdot$

Man beachte weiters, dass die Dynamikmatrizen der beiden Normalformen in so genannter **Begleitform** vorliegen. Das bedeutet, dass man die charakteristischen Polynome der Matrizen *direkt* ablesen kann. Aus den obigen Ausführungen folgt nämlich unmittelbar, dass die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

das gleiche charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

besitzen.

**B** Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beide Matrizen liegen in Begleitform vor, d.h. für die charakteristischen Polynome gilt

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^3 - 3s^2 - 2s + 1$$

und

$$\Delta_{\mathbf{B}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{B}) = s^4 - 5s^3 + 3s^2 - 2s + 1.$$

■

Die Normalformen können auch hilfreich sein, wenn eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung gegeben ist und ein zugehöriges Zustandsmodell benötigt wird.

**B** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + y = u,$$

die ein System mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  beschreibt. Hier ist eine mögliche Wahl der Zustandsvariablen durch

$$x_1 := y, \quad x_2 := \frac{dy}{dt}, \quad x_3 := \frac{d^2y}{dt^2}$$

gegeben und das zugehörige Zustandsmodell lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \left[ y(t=0) \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} \quad \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} \right]^T.$$

■

Nicht immer ist die Wahl der Zustandsvariablen so geradlinig wie im vorangegangenen Beispiel. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn in der Differentialgleichung auch Ableitungen der Eingangsgröße  $u$  auftreten.

**B** Gegeben sei ein System mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Es wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

beschrieben. Eine Möglichkeit, ein Zustandsmodell zu finden, besteht darin, zuerst die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1}$$

zu berechnen und dann auf eine der Normalformen überzugehen, also im Falle der ersten Normalform

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [-1 \ 1] \mathbf{x}.$$

Die Berechnung des Anfangszustands  $\mathbf{x}_0$  erfolgt über den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und Ein- bzw. Ausgangsgröße. Hierzu wird die Ausgangsgleichung

$$y = -x_1 + x_2$$

benutzt. Für die zeitliche Ableitung von  $y$  gilt

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2 + u.$$

Daraus folgt durch Lösung<sup>1</sup> des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} - u \end{bmatrix}$$

der Zusammenhang

$$x_1 = -\frac{1}{4} \left( \frac{dy}{dt} + 3y - u \right) \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{4} \left( \frac{dy}{dt} - y - u \right),$$

d.h. der Anfangszustand lautet

$$\mathbf{x}_0 = \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{dy}{dt} + 3y - u \right) \Big|_{t=0} \quad -\frac{1}{4} \left( \frac{dy}{dt} - y - u \right) \Big|_{t=0} \right]^T.$$

■

<sup>1</sup>die Lösbarkeit erfordert die Eigenschaft der Beobachtbarkeit.

## 4.4 Minimalrealisierung

Wie bereits erwähnt ist eine Minimalrealisierung eine Realisierung mit der minimalen Zahl von Zustandsgrößen, d.h. mit der kleinstmöglichen Systemordnung. Minimalrealisierungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie steuerbar *und* beobachtbar sind. Sie umfassen also ausschließlich jene „Systemanteile“, die das Eingangs- Ausgangsverhalten prägen.

**B** Zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

ist eine Minimalrealisierung gesucht. Um die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Realisierung zu gewährleisten, werden zunächst alle möglichen Kürzungen durchgeführt, d.h.

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 2s}.$$

Die Minimalrealisierung in erster Normalform lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}.$$

■



# Kapitel 5

## Berechnung von $G(s)$ aus Differentialgleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \beta_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u, \quad (5.1)$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung der Laplace-Transformation

$$(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0) \bar{y}(s) = (\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{u}(s).$$

Für  $G(s)$  erhält man somit

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad (5.2)$$

die Realisierbarkeit des Systems ist gemäß (4.1) für  $m \leq n$  gegeben.

**B** Die Beschreibung eines Systems sei in Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

gegeben. Unter Annahme verschwindender Anfangswerte liefert die Laplace-Transformation

$$\bar{y}(s) (s^2 + 2s + 1) = \bar{u}(s) (s - 1),$$

d.h. die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 1}.$$

## 5.1 Umkehrung

Es ist sehr einfach, aus einer gegebenen Übertragungsfunktion  $G(s)$  eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung zu bestimmen. Hierzu ist lediglich zu beachten, dass die Multiplikation einer Laplace-Transformierten  $\bar{f}(s)$  mit  $s^i$  der  $i$ -ten zeitlichen Ableitung von  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$  entspricht.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Daraus folgt

$$(s^2 + 1) \bar{y}(s) = s \bar{u}(s),$$

was im Zeitbereich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \frac{du}{dt}$$

führt. ■

# Teil II

## Zeitdiskrete Systeme



# Kapitel 6

## Zustandsraummethoden

### 6.1 Einführung

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zeitdiskrete lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme, die durch  $n$  Differenzgleichungen erster Ordnung der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \quad (6.1)$$

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k. \quad (6.2)$$

beschrieben werden können. Es handelt sich hierbei um ein System mit der Eingangsfolge  $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  und der Ausgangsfolge  $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ . Mit der Folge  $(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$ , deren Elemente  $n$ -dimensionale Spaltenvektoren sind, wird der zeitliche Verlauf des Zustandsvektors bezeichnet, der Anfangszustand des Systems wird durch  $\mathbf{x}_0$  symbolisiert. Die quadratische Matrix<sup>1</sup>  $\mathbf{A}_d$  ist die System- oder Dynamikmatrix,  $\mathbf{b}_d$  ist der Eingangsvektor,  $\mathbf{c}_d$  ist der Ausgangsvektor und  $d_d$  der (skalare) Durchgriffsterm. Es wird weiters vorausgesetzt, dass dem zeitdiskreten System eine konstante (positive) Diskretisierungszeit  $T_d$  zugrunde liegt, d.h. einem Wert des (ganzzahligen) Zeitindex  $k$  entspricht der Zeitpunkt  $t = k T_d$ .

### 6.2 Lösung der Systemgleichungen

Im Vergleich zu Differentialgleichungssystemen ist die Lösung von Systemen von Differenzgleichungen einfacher, da hier die Lösungsvorschrift bereits enthalten ist. Ausgehend vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  können bei gegebenem Verlauf der Eingangsgröße  $(u_k)$  die Werte des Zustandsvektors zu den diskreten Zeitpunkten  $t = k T_d$  für  $k = 1, 2, \dots$  durch wiederholtes Einsetzen in (6.1) ermittelt werden, d. h.

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad \mathbf{x}_0 \dots \text{Anfangszustand} \\ k = 1 : & \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_d u_0 \\ k = 2 : & \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_d u_1 = \mathbf{A}_d^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{b}_d u_1 \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \\ \text{allgemein:} & \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-i} \mathbf{b}_d u_i \end{aligned} \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>Der Index  $d$  soll verdeutlichen, dass es sich hierbei um Systemdaten eines zeitdiskreten Systems handelt.

Diese Vorgangsweise erlaubt die numerische Berechnung der Elemente der Folge  $(\mathbf{x}_k)$  und in weiterer Folge der Ausgangsfolge  $(y_k)$  mittels (6.2).

Eine *geschlossene* Lösung kann mit Hilfe der z-Transformation ermittelt werden. Wendet man diese auf (6.1) an, so erhält man

$$z \tilde{\mathbf{x}}(z) - z \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{b}_d \tilde{u}(z)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = \mathfrak{Z} \{(\mathbf{x}_k)\} \quad \text{und} \quad \tilde{u}(z) = \mathfrak{Z} \{(u_k)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} z \mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d \tilde{u}(z). \quad (6.4)$$

Wie aus (6.3) bzw. (6.4) zu erkennen ist, setzt sich - analog zum zeitkontinuierlichen Fall - die Lösung (6.3) aus dem freien und dem erzwungenen Anteil additiv zusammen. Die Erfüllung der Linearitätsbedingungen kann leicht überprüft werden.

Definiert man die  $n \times n$  - Matrix

$$\tilde{\phi}_d(z) := z (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \quad \text{d.h.} \quad (\phi_{d,k}) = \mathfrak{Z}^{-1} \{z (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\} \stackrel{(6.3)}{=} (\mathbf{A}_d^k), \quad (6.5)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes der z-Transformation - für die Lösung

$$\mathbf{x}_k = \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i. \quad (6.6)$$

Für die Elemente der Ausgangsgröße  $(y_k)$  gilt dann gemäß (6.2)

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}_d^T \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i + d_d u_k. \quad (6.7)$$

### 6.2.1 Freie Lösung

Die freie Lösung ist diejenige Lösung, die sich ergibt, wenn das System ausschließlich durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  angeregt wird, d.h. man betrachtet das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k.$$

Für den Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt  $t = kT_d$  gilt

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 \stackrel{(6.6)}{=} \phi_{d,k} \mathbf{x}_0. \quad (6.8)$$

Die Matrix  $\phi_{d,k}$  beschreibt somit den Zusammenhang des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$  mit dem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$ . In Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall wird  $\phi_{d,k}$  als Transitionsmatrix

bezeichnet. Sie besitzt aufgrund ihrer Struktur für  $k, i \geq 0$  selbstverständlich die Eigenschaften

$$\phi_{d,0} = \mathbf{E}, \quad \phi_{d,k+1} = \mathbf{A}_d \phi_{d,k} \quad \text{und} \quad \phi_{d,k+i} = \phi_{d,k} \phi_{d,i}. \quad (6.9)$$

Unter Annahme einer regulären Matrix  $\mathbf{A}_d$  folgt weiters

$$\phi_{d,k}^{-1} = \phi_{d,-k}. \quad (6.10)$$

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Nach (6.8) gilt für die freie Lösung

$$\mathbf{x}_k = \phi_{d,k} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}_0.$$

Für die z-Transformierte der Transitionsmatrix findet man

$$\tilde{\phi}_d(z) = z(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} = z \begin{bmatrix} z + 0.4 & 0.2 \\ 0.8 & z + 0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z + 0.8)} \begin{bmatrix} z + 0.4 & -0.2 \\ -0.8 & z + 0.4 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt dann durch Rücktransformation die „kompakte“ Darstellung

$$\phi_{d,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_{d,k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-0.8)^k & \frac{1}{4}(-0.8)^k \\ (-0.8)^k & \frac{1}{2}(-0.8)^k \end{bmatrix} \quad \text{für } k \geq 1$$

der Transitionsmatrix. ■

### 6.2.2 Erzwungene Lösung

Bei der erzwungenen Lösung wird das System bei verschwindendem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  durch die Eingangsgröße  $(u_k)$  angeregt, es gilt

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \phi_{d,k-1-i} \mathbf{b}_d u_i, \quad (6.11)$$

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$x_{k+1} = 0.5x_k + u_k$$

mit dem Anfangszustand  $x_0 = 0$ . Aus (6.11) folgt für die Elemente der Folge  $(x_k)$  unmittelbar

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} 0.5^{k-1-i} u_i \quad \text{für } k \geq 1.$$

### 6.2.3 Übertragungsfunktion

Setzt man in (6.4) für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , so gilt

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d \tilde{u}(z)$$

und man erhält für die z-Transformierte der Ausgangsfolge

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\{(y_k)\} = [\mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d] \tilde{u}(z). \quad (6.12)$$

Die gebrochen rationale Funktion

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d \quad (6.13)$$

ist die so genannte **z-Übertragungsfunktion** des zeitdiskreten Modells (6.1), (6.2).

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Mit Hilfe von (6.13) findet man

$$G(z) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z + 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{z^2 + 0.5z} = \frac{z-1}{z(z+0.5)}.$$

■

## 6.3 Ruhelagen

Die Ruhelagen von (6.1) können über die Bedingung

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad (6.14)$$

ermittelt werden. Für die „konstante“ Eingangsfolge, d.h.

$$(u_k) = (u_R, u_R, \dots) \quad \text{d.h.} \quad u_k = u_R = \text{konst.}$$

erhält man die Relation

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_d u_R,$$

woraus sich das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) \mathbf{x}_R = -\mathbf{b}_d u_R$$

ergibt. Wenn die Matrix  $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$  regulär ist, also den Höchstrang besitzt, gibt es genau eine Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = -(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}_d u_R. \quad (6.15)$$

Anderenfalls gilt analog zum zeitkontinuierlichen Fall

$\text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) = \text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}; \mathbf{b} \ u_R)$	$\text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) < \text{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}; \mathbf{b} \ u_R)$
$\infty$ viele Ruhelagen	keine Ruhelage

Man beachte, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$  mit den Eigenwerten  $z_i$  der Matrix  $\mathbf{A}_d$  über die Relation

$$\lambda_i = z_i - 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n$$

in Verbindung stehen. Das bedeutet, dass die Matrix  $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$  genau dann singulär ist, wenn  $\mathbf{A}_d$  einen Eigenwert an der Stelle  $z = 1$  besitzt.

## 6.4 Asymptotische Stabilität

Man nennt das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k \tag{6.16}$$

asymptotisch stabil, wenn für *jeden beliebigen* Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  die Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \tag{6.17}$$

erfüllt ist. Aus dieser Definition kann gefolgert werden, dass ein asymptotisch stabiles System genau *eine* Ruhelage im Ursprung des Zustandsraumes besitzt. Aus (6.17) folgt weiters, dass die Transitionsmatrix (6.5) der Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{d,k} = \mathbf{0} \tag{6.18}$$

genügen muss, d.h. *jedes* Element der Matrix verschwindet für  $t \rightarrow \infty$ . Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall kann mit Hilfe des Endwertsatzes der  $z$ -Transformation gefolgert werden, dass dies genau dann der Fall ist, wenn *alle* Eigenwerte von  $\mathbf{A}_d$  betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Das System (6.16) ist somit genau dann asymptotisch stabil, wenn das charakteristische Polynom von  $\mathbf{A}_d$  ein **Einheitskreispolynom** ist.

**B** Gegeben sei das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

Da die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}_d$  in Begleitform vorliegt, kann ihr charakteristisches Polynom direkt abgelesen werden, d.h.

$$\Delta(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d) = z^3 + 0.5z^2 + 0.5z = z(z^2 + 0.5z + 0.5).$$

Die Nullstellen des Polynoms liegen bei

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{1}{4} \left( -1 \pm j\sqrt{7} \right)$$

Aufgrund

$$|z_1| = 0 \quad \text{und} \quad |z_2| = |z_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

liegen alle Eigenwerte im Einheitskreis, das System ist somit asymptotisch stabil. ■

## 6.5 Zustandstransformationen

Zustandstransformationen können auf dieselbe Weise wie im zeitkontinuierlichen Fall durchgeführt werden, d.h. der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  des Originalsystems (6.1) steht mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{v}_k$  des transformierten Systems in der Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{T} \mathbf{v}_k. \quad (6.19)$$

Dabei wird die quadratische Matrix  $\mathbf{T}$  als regulär vorausgesetzt. Setzt man (6.19) in (6.1) und (6.2) ein, so erhält man die Beschreibung

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_d \mathbf{T} \mathbf{v}_k + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}_d u_k, \quad (6.20)$$

$$y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{T} \mathbf{v}_k + d_d u_k. \quad (6.21)$$

für das transformierte System.

### 6.5.1 Transformation auf Diagonalform

Für die Transformation auf Diagonalform wird wie im zeitkontinuierlichen Fall vorausgesetzt, dass die Matrix  $\mathbf{A}_d$  diagonalähnlich ist. Das bedeutet, dass auch  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  zu den  $n$  Eigenwerten  $z_1, \dots, z_n$  der Matrix  $\mathbf{A}_d$  existieren. Sind die  $n$  Eigenwerte voneinander verschieden, so trifft dies auf jeden Fall zu. Wählt man nun

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} = \left[ \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n \right],$$

so liegt die transformierte Systembeschreibung (6.20) in der Diagonalform vor. Da die Zeilen von  $\mathbf{P}^{-1}$  die zu den Eigenwerten gehörigen Links-Eigenvektoren sind, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix},$$

gilt für das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} &= \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} \mathbf{v}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}_d \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b}_d \end{bmatrix} u_k, \\ y_k &= \left[ \mathbf{c}_d^T \mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_d^T \mathbf{p}_n \right] \mathbf{z}_k + d_d u_k. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Alle Überlegungen, die für zeitkontinuierliche Systeme angestellt wurden, können also unverändert auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden.

### Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix des in Diagonalform vorliegenden Systems (6.22) kann mühelos ermittelt werden. Es gilt offensichtlich

$$\hat{\phi}_{d,0} = \mathbf{E}, \quad \hat{\phi}_{d,k} = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} z_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & z_n^k \end{bmatrix} = \text{diag}(z_i^k) \quad \text{für } k > 0 \quad (6.23)$$

Durch Rücktransformation kann nun die Transitionsmatrix des Originalsystems ermittelt werden, es gilt

$$\phi_{d,k} = \mathbf{P} \text{diag}(z_i^k) \mathbf{P}^{-1}. \quad (6.24)$$

Man erkennt, dass die Elemente der Transitionsmatrix  $\phi_{d,k}$  Linearkombinationen von Potenzen  $z_i^k$  der Eigenwerte von  $\mathbf{A}_d$  sind.

## 6.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

### 6.6.1 Einführung

Man nennt das System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k \end{aligned} \quad (6.25)$$

**steuerbar**, wenn es möglich ist, durch geeignete Wahl der Eingangsgröße den beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in endlicher Zeit  $t = N T_d$  in einen beliebigen Endzustand  $\mathbf{x}_N$  zu überführen.

Man nennt das System **beobachtbar**, wenn aus der Kenntnis von Eingangs- und Ausgangsgröße in einem endlichen Zeitintervall der unbekannte Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ermittelt werden kann.

### 6.6.2 Steuerbarkeit

#### Kriterium nach Kalman

Aus (6.3) folgt

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i,$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i = \underbrace{\mathbf{x}_N - \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0}_{:=\mathbf{q}},$$

wobei  $\mathbf{q}$  ein Vektor ist, der sich aus den beliebig vorgegebenen Werten  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_N$  errechnet. Jeder Vektor  $\mathbf{q}$  muss also als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{b}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d, \dots, \mathbf{A}_d^{N-1} \mathbf{b}_d$  dargestellt werden können. Mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 3.2 kann gefolgert werden, dass dies genau dann möglich ist, wenn die Vektoren  $\mathbf{b}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d, \dots, \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{b}_d$  linear unabhängig sind. Aus den obigen Überlegungen folgt weiters, dass der Übergang zwischen zwei *beliebigen* Zuständen in der minimalen Zeit  $t = nT_d$  abgeschlossen werden kann.

Das System (6.25) ist also genau dann steuerbar, wenn die (diskrete) Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_{d,u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{b}_d \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$  steuerbar ist.

### Kriterium nach Hautus

Völlig analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (6.25) genau dann steuerbar ist, wenn kein Linkseigenvektor von  $\mathbf{A}_d$  orthogonal zu  $\mathbf{b}_d$  ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte  $z_i$  der Matrix  $\mathbf{A}_d$  die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}_d & \mathbf{b}_d \end{bmatrix} = n \quad (6.27)$$

erfüllt ist.

## 6.6.3 Beobachtbarkeit

### Kriterium nach Kalman

Für die Elemente der Ausgangsfolge gilt

$$\begin{aligned} y_0 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_0 + d_d u_0 \\ y_1 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_0 + d_d u_1 \\ y_2 &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_1 + d_d u_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-2} \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-3} \mathbf{b}_d u_1 + \dots + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_{n-1} + d_d u_n \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_d u_0 \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_0 + d_d u_1 \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_1 + d_d u_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-2} \mathbf{b}_d u_0 + \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-3} \mathbf{b}_d u_1 + \dots + \mathbf{c}_d^T \mathbf{b}_d u_{n-1} + d_d u_n \end{bmatrix}.$$

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn obiges Gleichungssystem bezüglich  $\mathbf{x}_0$  eindeutig lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die (diskrete) Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{B}_{d,y} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

regulär ist. Man sagt auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}_d, \mathbf{c}_d)$  beobachtbar ist.

### Kriterium nach Hautus

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (6.25) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Rechtseigenvektor von  $\mathbf{A}_d$  orthogonal zu  $\mathbf{c}_d^T$  ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte  $z_i$  der Matrix  $\mathbf{A}_d$  die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}_d \end{bmatrix} = n \quad (6.29)$$

erfüllt ist.



# Kapitel 7

## Übertragungssysteme

### 7.1 Einführung

Die z-Übertragungsfunktion  $G(z)$  beschreibt das Übertragungsverhalten von zeitdiskreten linearen, zeitinvarianten Systemen. Sie ist definiert als der Quotient der z-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)}. \quad (7.1)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt  $k = 0$  in Ruhe befindet. Im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen handelt es sich bei der z-Übertragungsfunktion stets um eine gebrochen rationale Funktion, d.h.  $G(z)$  kann als Quotient zweier Polynome in der Form

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}, \quad (7.2)$$

dargestellt werden, wobei die Polynomkoeffizienten von  $\alpha(z)$  und  $\beta(z)$  als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(z) \leq \text{Grad } \alpha(z) \quad (7.3)$$

genügen, werden als realisierbar bzw. **kausal** bezeichnet. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(z) = \text{Grad } \alpha(z)$$

spricht man von einem sprunghfähigen System.

Für Systeme der Form (6.1), (6.2) kann die z-Übertragungsfunktion unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gemäß (6.13) mit der Formel

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d \quad (7.4)$$

berechnet werden.

## 7.2 Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich

Gemäß (7.1) gilt für den Verlauf der Ausgangsfolge nach Anwendung des Faltungssatzes

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z) \tilde{u}(z)\} = (g_k) * (u_k) = \left( \sum_{i=0}^k g_{k-i} u_i \right), \quad (7.5)$$

wobei

$$(g_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z)\}. \quad (7.6)$$

Der Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $k$  entspricht also einer gewichteten Summe der Eingangsfolgenelemente bis zu diesem Zeitpunkt. Aus diesem Grund nennt man  $(g_k)$  auch **Gewichtsfolge**. Wählt man als Eingangsgröße nun einen zeitdiskreten Impuls, also

$$(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{u}(z) = 1$$

so gilt

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1} \{G(z)\} = (g_k),$$

weshalb  $(g_k)$  auch Impulsantwort des Systems genannt wird.

Besitzt die Impulsantwort eines Systems nur endlich viele, von Null verschiedene Elemente, so spricht man von einem **FIR-System**<sup>1</sup>. Die Übertragungsfunktion eines FIR-Systems ist durch ein Nennerpolynom der Form  $\alpha(z) = z^n$  charakterisiert. Im Gegensatz dazu werden Systeme, deren Impulsantworten unendliche viele, von Null verschiedene Elemente besitzen, auch **IIR-Systeme**<sup>2</sup> genannt.

**B** Gegeben sei die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 0.5}{z^3} = z^{-1} - 0.5z^{-3}.$$

Hierbei handelt es sich um ein FIR-System, die zugehörige Impulsantwort lautet

$$(g_k) = (0, 1, 0, -0.5, 0, 0, \dots).$$

Im Gegensatz dazu repräsentiert

$$G(z) = \frac{z}{z - 0.1}$$

ein IIR-System mit der Impulsantwort

$$(g_k) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots) = (0.1^k).$$

<sup>1</sup>engl.: *finite impulse response*

<sup>2</sup>engl.: *infinite impulse response*

### 7.3 Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell

Da der Zusammenhang (7.4) zwischen der  $z$ -Übertragungsfunktion und dem Zustandsmodell (6.1), (6.2) exakt dem zeitkontinuierlichem Fall entspricht, können alle Überlegungen unverändert übernommen werden. Das bedeutet, dass zu einer  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta_n z^n + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

in bekannter Weise die Realisierungen in erster Normalform bzw. zweiter Normalform angegeben werden können.

**B** Gegeben sei die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + 1.2z + 0.2}.$$

Die zugehörige Realisierung in erster Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -1.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k,$$

das entsprechende Strukturbild ist in Bild 7.1 dargestellt. ■

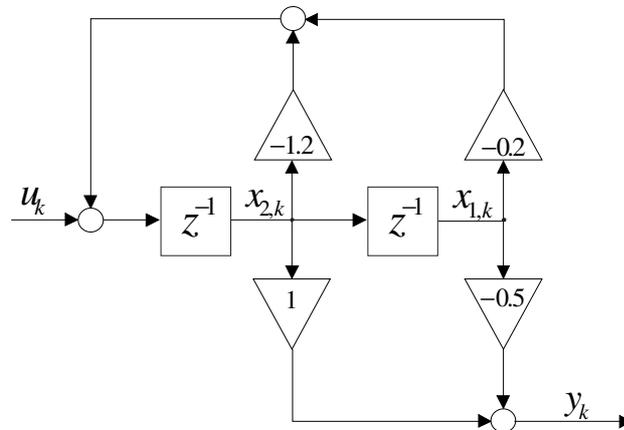


Bild 7.1: Strukturbild eines zeitdiskreten Modells in erster Normalform

**B** Gegeben sei die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 + 0.9z + 0.1}{z^2 - 0.1z + 0.1} = 1 + \frac{z}{z^2 - 0.1z + 0.1}.$$

Die entsprechende Realisierung in zweiter Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$

## 7.4 Berechnung von $G(z)$ aus Differenzgleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße ( $u_k$ ) und der Ausgangsgröße ( $y_k$ ) in Form einer Differenzgleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = \beta_m u_{k+m} + \beta_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + \beta_1 u_{k+1} + \beta_0 u_k,$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung des Verschiebungssatzes der z-Transformation

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}.$$

Die Kausalität ist gemäß (7.3) für  $m \leq n$  gegeben.

**B** Gegeben sei die Differenzgleichung

$$y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k.$$

Die entsprechende z-Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z + 1}.$$

■

Oft sind Differenzgleichungen so angeschrieben, dass man den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $k$  aus *vergangenen* Werten der Ausgangsgröße und dem Verlauf der Eingangsfolge berechnen kann. Die Ermittlung der zugehörigen z-Übertragungsfunktion kann natürlich analog erfolgen.

**B** Gegeben sei die Differenzgleichung

$$y_k = y_{k-1} - y_{k-2} + u_{k-1} - u_{k-2}.$$

Die Anwendung der z-Transformation liefert

$$\tilde{y}(z) = z^{-1}\tilde{y}(z) - z^{-2}\tilde{y}(z) + z^{-1}\tilde{u}(z) - z^{-2}\tilde{u}(z).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z - 1}{z^2 - z + 1},$$

das System besitzt also die gleiche z-Übertragungsfunktion wie im vorangegangenen Beispiel.

■

**B** Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_k = y_{k-1} + u_{k+1}.$$

Hierbei handelt es sich offenbar um ein nicht-kausales System, denn zur Ermittlung der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $k$  wird der *zukünftige* Wert der Eingangsgröße benötigt. Dies manifestiert sich in der  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^2}{z-1},$$

durch die Verletzung der Kausalitätsbedingung (7.3). ■

### 7.4.1 Umkehrung

Die Ermittlung einer Differenzengleichung aus einer  $z$ -Übertragungsfunktion beruht ebenso auf der Anwendung des Verschiebungssatzes.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z + 0.2}{z^2 + 0.1z + 0.15}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{y}(z) (z^2 + 0.1z + 0.15) = \tilde{u}(z) (z + 0.2),$$

woraus sich die Differenzengleichung

$$y_{k+2} + 0.1y_{k+1} + 0.15y_k = u_{k+1} + 0.2u_k$$

ergibt. ■

## 7.5 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (7.2) die Polynome  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{z + 0.1}{z^2 + 0.3z + 0.02}.$$

Gibt man  $G(z)$  in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{z + 0.1}{(z + 0.1)(z + 0.2)} = \frac{1}{z + 0.2}$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist. ■

Geht man nun von einer aus teilerfremden Polynomen gebildeten, d.h. nicht weiter kürzbaren, Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)} \quad \text{mit} \quad \mu(z), \nu(z) \dots \text{teilerfremd} \quad (7.7)$$

aus, so sind diejenigen Werte von  $z$ , für die  $\mu(z) = 0$  gilt, die so genannten **Nullstellen** von  $G(z)$ . Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch  $\nu(z) = 0$  charakterisiert. In der *faktorierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)} \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad (7.8)$$

ist  $z = n_i$  eine Nullstelle und  $z = p_k$  eine Polstelle von  $G(z)$ . Tritt der Faktor  $(z - n_i)$  bzw.  $(z - p_k)$  mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen Pol. Da die Koeffizienten der Polynome  $\mu(z)$  und  $\nu(z)$  reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (7.8) folgt unmittelbar

$$G(z) = 0 \quad \text{für} \quad z = n_i \quad \text{und} \quad |G(z)| \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad z \rightarrow p_k. \quad (7.9)$$

## 7.6 BIBO-Stabilität

Ein zeitdiskretes lineares, zeitinvariantes System mit der z-Übertragungsfunktion  $G(z)$  wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output“) genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsfolge mit einer beschränkten Ausgangsfolge reagiert. Unter einer beschränkten Folge versteht man in diesem Kontext eine Folge, deren Elemente betragsmäßig beschränkt sind. Somit muss bei BIBO-Stabilität

$$|u_k| \leq M < \infty \quad \Rightarrow \quad |y_k| \leq N < \infty \quad \forall k \geq 0. \quad (7.10)$$

gelten. Mit (7.5) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y_k| = \left| \sum_{i=0}^k g_{k-i} u_i \right| \leq \sum_{i=0}^k |g_{k-i}| |u_i| \stackrel{(7.10)}{\leq} M \sum_{i=0}^k |g_{k-i}| = M \sum_{i=0}^k |g_i|.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von  $|y_k|$  für  $k \rightarrow \infty$  auf, d.h. zur Erfüllung von (7.10) muss

$$M \sum_{i=0}^{\infty} |g_i| \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort  $(g_k)$  absolut summierbar sein muss, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty. \quad (7.11)$$

Man beachte, dass es sich bei (7.11) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

**B** Gegeben sei die  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{z - \tau} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{R},$$

mit der zugehörigen Impulsantwort

$$(g_k) = (\tau^k).$$

Die Summe über den Absolutbetrag der Elemente von  $(g_k)$ , also

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\tau^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\tau|^k$$

existiert offensichtlich nur für Werte von  $\tau$ , die betragsmäßig kleiner als eins sind. Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol  $z = \tau$  einen Betrag besitzt, der kleiner als eins ist. ■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort  $(g_k)$  und der  $z$ -Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(z) = \mathfrak{Z}\{(g_k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| |z^{-k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| |z|^{-k}$$

Gilt  $|z| \geq 1$ , so kann weiter geschrieben werden

$$|G(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (7.11) ist also erfüllt - der Ausdruck  $|G(z)|$  für  $|z| \geq 1$  *endliche* Werte annimmt. Daraus kann gefolgert werden, dass  $G(z)$  ausschließlich Pole *im Inneren des Einheitskreises* besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von  $G(z)$  im Einheitskreis liegen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (7.7) das Nennerpolynom von  $G(z)$  ein Einheitskreispolynom sein muss.

**B** Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z + 0.1}{z(z - 0.2)(z + 1)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol besitzt, der nicht im Einheitskreis liegt. ■

**B** Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 1}{(z + 0.1)^2(z - 0.5)(z + 0.9)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von  $G(z)$  im Einheitskreis liegen. ■

## 7.7 Diskreter Frequenzgang

Auch für zeitdiskrete Systeme kann ein Frequenzgang definiert werden. Es wird ein BIBO-stabiles System mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  betrachtet, d.h. alle Pole von  $G(z)$  liegen im Einheitskreis. Als Eingangsgröße wird nun die harmonische Folge

$$(u_k) = (e^{j\omega k T_d}) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \tilde{u}(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega T_d}} \quad (7.12)$$

gewählt. Für die  $z$ -Transformierte der Ausgangsfolge  $(y_k)$  gilt

$$\tilde{y}(z) = G(z) \frac{z}{z - e^{j\omega T_d}},$$

d.h.

$$\frac{\tilde{y}(z)}{z} = G(z) \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - n_i)}{\prod_{l=1}^n (z - p_l)} \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}}.$$

Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{\tilde{y}(z)}{z} = \frac{c_0}{z - e^{j\omega T_d}} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}.$$

Für den Koeffizienten  $c_0$  findet man

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega T_d}} (z - e^{j\omega T_d}) \frac{\tilde{y}(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega T_d}} \left[ (z - e^{j\omega T_d}) G(z) \frac{1}{z - e^{j\omega T_d}} \right] = G(e^{j\omega T_d}),$$

d.h.

$$\tilde{y}(z) = \frac{G(e^{j\omega T_d}) z}{z - e^{j\omega T_d}} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - p_i}.$$

Für die Elemente der zugehörigen Folge  $(y_k)$  gilt wegen  $|p_i| < 1$  also

$$y_k = G(e^{j\omega T_d}) e^{j\omega k T_d} + \sum_{i=1}^n c_i p_i^k.$$

Für „sehr große Werte von  $k$ “, also im *eingeschwungenen Zustand* gilt somit

$$y_k \approx G(e^{j\omega T_d}) e^{j\omega k T_d}, \quad (7.13)$$

d.h. die Ausgangsfolge entspricht der mit  $G(e^{j\omega T_d})$  gewichteten Eingangsfolge. Diese komplexe Funktion

$$G(e^{j\omega T_d}) = |G(e^{j\omega T_d})| e^{j \arg G(e^{j\omega T_d})} \quad (7.14)$$

ist der **diskrete Frequenzgang** des Systems. Da die Begriffe „Phasenverschiebung“ und „Amplitude“ für Folgen keinen Sinn ergeben, werden den harmonischen Folgen so genannte *Trägerschwingungen* zugeordnet, d.h.

Folge $(e^{j\omega k T_d})$	Trägerschwingung $e^{j\omega t}$
Folge $( G(e^{j\omega T_d})  e^{j(\omega k T_d + \arg G(e^{j\omega T_d}))})$	Trägerschwingung $ G(e^{j\omega T_d})  e^{j(\omega t + \arg G(e^{j\omega T_d}))}$

Damit die Zuordnung zwischen Folge und Trägerschwingung eindeutig ist, muss die Bedingung

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_d} \quad (7.15)$$

erfüllt sein.

**B** Gegeben sei ein zeitdiskretes System ( $T_d = 0.1$ ) mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.2}.$$

Als Eingangsgröße wird die Folge

$$(u_k) = (\sin k T_d)$$

gewählt. Im eingeschwungenen Zustand gilt aufgrund von

$$G(e^{0.1j}) = \frac{1}{e^j - 0.2} \approx 1.24 e^{-j0.125}$$

für die zugehörige Ausgangsfolge

$$(y_k) = (1.24 \sin(k T_d - 0.125)).$$

■



# Kapitel 8

## Diskretisierung zeitkontinuierlicher Systeme

### 8.1 Einführung

Bei den bisherigen Ausführungen wurde stillschweigend angenommen, dass die betrachteten Systeme von Natur aus zeitdiskreten Charakter besitzen. Diese Annahme ist jedoch nicht immer gerechtfertigt, da zeitdiskret betrachteten Systemen häufig zeitkontinuierliche Prozesse zugrunde liegen. Ein Beispiel hierfür ist ein so genannter **digitaler Regelkreis**, in dem zur Regelung eines zeitkontinuierlichen Prozesses ein Rechner (Steuergerät, Computer,...) als Regler eingesetzt wird, siehe Bild 8.1.

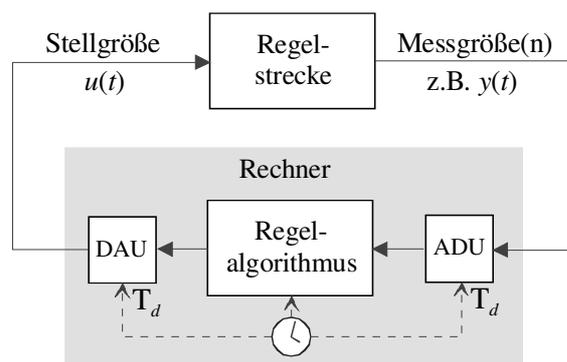


Bild 8.1: Digitaler Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und „digitalem Regler“.

## 8.2 Der digitale Regelkreis

Das Verhalten des zeitkontinuierlichen Systems („Regelstrecke“) kann mittels der skalaren Stellgröße  $u(t)$  gezielt beeinflusst werden. Auf Basis geeigneter Messgrößen<sup>1</sup> wird bewertet, inwieweit das tatsächliche Verhalten der Regelstrecke der Wunschvorstellung entspricht. Daraus werden schließlich durch das Regelgesetz („Regelalgorithmus“) entsprechende Stellgriffe abgeleitet.

### 8.2.1 Halteglied und Abtaster

Es wird davon ausgegangen, dass dem Rechner die Messgrößen zu den äquidistanten Zeitpunkten

$$t = kT_d \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

zugeführt werden, wobei  $T_d$  die (positive) konstante Diskretisierungs- oder **Abtastzeit** ist. Dies erfordert die Umwandlung der analogen Messgrößen in eine geeignete digitale Form mit Hilfe von Analog-Digital-Umsetzern („ADU“). Bei den nachfolgenden Ausführungen wird angenommen, dass diese Umwandlung durch idealisierte Analog-Digital-Umsetzer, auch **Abtaster** genannt, ohne Zeitverzug und fehlerfrei durchgeführt wird. Wird beispielsweise die (skalare) Ausgangsgröße  $y(t)$  der Regelstrecke gemessen, so generiert der Abtaster daraus eine Zahlenfolge  $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \dots)$  gemäß  $y_k = y(kT_d)$ , wie in Bild 8.2 dargestellt. Aus den Ele-

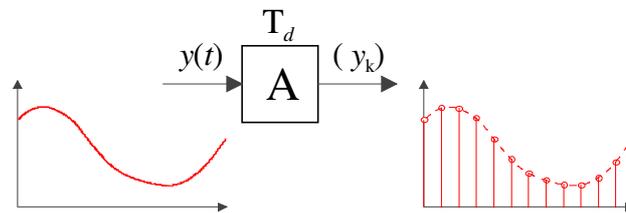


Bild 8.2: Funktionsprinzip des Abtasters

menten dieser Zahlenfolge wird im Regelgesetz, einem (vom Regelungstechniker entworfenen) Algorithmus, eine Folge von Stellgrößenwerten  $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  generiert. Dabei wird angenommen, dass die hierfür benötigte Rechenzeit deutlich kleiner ist als die Abtastzeit und daher vernachlässigt werden kann. Das zeitdiskrete Regelgesetz besitzt also im vorliegenden Fall die Eingangsgröße  $(y_k)$  und die Ausgangsgröße  $(u_k)$ .

Aus den Stellgrößenwerten  $u_k$  wird mit Hilfe eines Digital-Analog-Umsetzers eine Funktion  $u(t)$  generiert. Im vorliegenden Fall wird hierfür ein unendlich schneller, fehlerfreier Umsetzer eingesetzt, der aus  $(u_k)$  eine so genannte äquidistante Treppenfunktion, d.h.

$$u(t) = u_k \quad \text{für} \quad kT_d \leq t < (k+1)T_d \quad (8.2)$$

erzeugt. Einen solcherart idealisierten Digital-Analog-Umsetzer nennt man auch **Halteglied**, siehe Bild 8.3.

<sup>1</sup>Wird die Ausgangsgröße  $y(t)$  zurückgeführt, so spricht man von einer **Ausgangsrückführung**. Man spricht von einer **Zustandsrückführung**, wenn die Zustandsgrößen zurückgeführt werden.

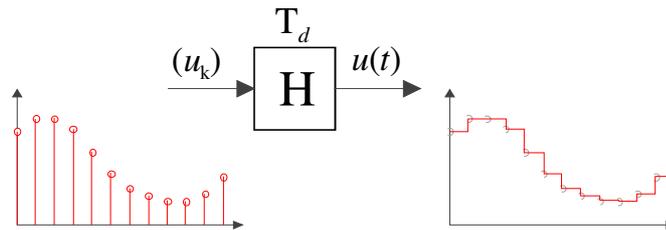


Bild 8.3: Funktionsprinzip des Haltegliedes

## 8.2.2 Diskrete Betrachtung des Regelkreises

Offensichtlich repräsentiert der in Bild 8.1 dargestellte Regelkreis die Zusammenschaltung des zeitdiskreten Regelgesetzes mit der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Die Schnittstellen zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Welt sind Abtaster und Halteglied.

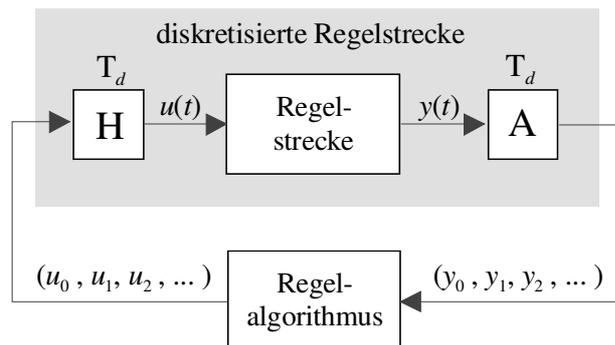


Bild 8.4: Zeitdiskrete Betrachtung des Regelkreises

Der digitale Regelkreis kann aber auch als rein zeitdiskretes System betrachtet werden. Dazu werden, wie in Bild 8.4 veranschaulicht, Abtaster und Halteglied der Regelstrecke zugeschlagen, die somit als zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße  $(u_k)$  und der Ausgangsgröße  $(y_k)$  interpretiert werden kann. Der Regelkreis besteht somit aus zwei zeitdiskreten Systemen, nämlich dem Regelalgorithmus und der „diskretisierten Regelstrecke“, siehe Bild 8.4. Man beachte, dass aus dieser Darstellung die Systemgrößen der zeitkontinuierlichen Regelstrecke zu den Abtastzeitpunkten (8.1) *exakt* bestimmt werden können, eine Ermittlung der Verläufe *zwischen* den Abtastzeitpunkten ist jedoch *nicht* möglich. Aus diesem Grund ist dafür zu sorgen, dass die Abtastzeit  $T_d$  hinreichend klein gewählt wird, d.h. die Zustandsgrößen ändern sich über eine Abtastperiode nur unwesentlich.

### 8.3 Diskretisierung der Regelstrecke

Die zeitkontinuierliche Regelstrecke wird als lineares, zeitinvariantes System vorausgesetzt, dessen dynamisches Verhalten durch ein Zustandsmodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (8.3)$$

beziehungsweise durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \quad (8.4)$$

beschrieben werden kann. In den nachfolgenden Abschnitten werden Methoden zur Diskretisierung von zeitkontinuierlichen Streckenmodellen hergeleitet. Zunächst wird ein zeitdiskretes Zustandsmodell abgeleitet, danach wird eine entsprechende z-Übertragungsfunktion ermittelt.

#### 8.3.1 Diskretes Zustandsmodell

Gesucht ist ein zeitdiskretes Zustandsmodell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \quad y_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k, \quad (8.5)$$

dessen Zustände zu den Abtastzeitpunkten (8.1) exakt denen des zeitkontinuierlichen Systems (8.3) bei treppenförmiger Eingangsgröße  $u$  gemäß (8.2) entsprechen, siehe Bild 8.5. Dazu

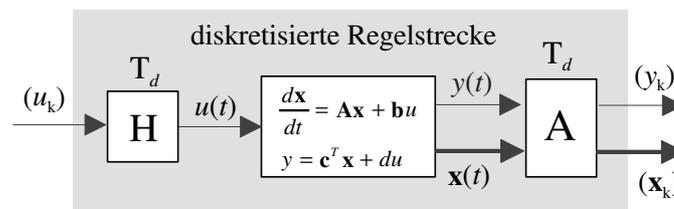


Bild 8.5: Ermittlung eines zeitdiskreten Streckenmodells

wird zunächst der Wert des Zustandsvektors zum Zeit  $t = kT_d$  berechnet, es gilt die bekannte Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT_d) = \phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau, \quad (8.6)$$

wobei  $\phi(t)$  die zu (8.3) gehörige Transitionsmatrix repräsentiert. Analog dazu gilt zum Zeitpunkt  $t = (k+1)T_d$  für den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(kT_d + T_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (8.7)$$

Unter Ausnutzung der bekannten Eigenschaft

$$\phi(kT_d + T_d) = \phi(T_d)\phi(kT_d) = \phi(kT_d)\phi(T_d),$$

der Transitionsmatrix und durch Aufteilung des Integrationsintervalls in zwei Teile kann (8.7) in die Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \left( \phi(kT_d)\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT_d} \phi(kT_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right) + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

gebracht werden. Durch Vergleich mit (8.6) erkennt man, dass der Klammerausdruck in obigem Ergebnis genau  $\mathbf{x}_k$  entspricht, d.h.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (8.8)$$

Von der Eingangsgröße  $u$  weiß man, dass sie zwischen zwei Abtastzeitpunkten konstant ist, siehe (8.2). Damit vereinfacht sich (8.8) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} u_k d\tau = \\ &= \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \phi(kT_d + T_d - \tau) \mathbf{b} d\tau u_k. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Mit der Substitution

$$\sigma = kT_d + T_d - \tau$$

lautet die Berechnungsvorschrift für  $\mathbf{x}_{k+1}$  nun

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(T_d) \mathbf{x}_k - \int_{T_d}^0 \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k = \phi(T_d) \mathbf{x}_k + \int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma u_k. \quad (8.10)$$

Damit sind die gesuchten Zustandsdifferenzgleichungen gefunden. Für den Wert der Ausgangsgröße  $y$  zum Zeitpunkt  $t = kT_d$  gilt offensichtlich

$$y_k = y(kT_d) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k. \quad (8.11)$$

Damit hat man das gesuchte zeitdiskrete Zustandsmodell der Form (8.5) gefunden, es gilt

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\phi(T_d)}_{=\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_k + \underbrace{\int_0^{T_d} \phi(\sigma) \mathbf{b} d\sigma}_{=\mathbf{b}_d} u_k, \quad y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k. \quad (8.12)$$

**B** Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

einer Regelstrecke. Die zugehörige Transitionsmatrix lautet

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt aus (8.12) für die Systemmatrix des diskreten Modells

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

für den Eingangsvektor gilt

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^{T_d} \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix}.$$

Das zeitdiskrete Streckenmodell lautet somit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T_d^2}{2} \\ T_d \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = [1 \ 0] \mathbf{x}_k + 2 u_k.$$

■

### Stabilität der diskretisierten Strecke

Es wird nun untersucht, wie die Eigenwerte  $z_i$  der Dynamikmatrix  $\phi(T_d)$  des diskretisierten Modells mit den Eigenwerten  $s_i$  von  $\mathbf{A}$  zusammenhängen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Matrix  $\phi(T_d)$  als Funktion von  $\mathbf{A}$  dargestellt werden kann:

$$\phi(T_d) = \mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots$$

Multipliziert man  $\phi(T_d)$  von rechts mit einem zum Eigenwert  $s_i$  gehörigen Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  von  $\mathbf{A}$ , so findet man

$$\begin{aligned} \phi(T_d) \mathbf{p}_i &= \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}T_d + \mathbf{A}^2 \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = \\ &= \left( \mathbf{p}_i + \mathbf{A} \mathbf{p}_i T_d + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \mathbf{p}_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \stackrel{\mathbf{A} \mathbf{p}_i = s_i \mathbf{p}_i}{=} \\ &= \left( \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i s_i T_d + \mathbf{A} \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^2}{2!} + \mathbf{A}^2 \mathbf{p}_i s_i \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) = \dots = \\ &= \left( 1 + s_i T_d + s_i^2 \frac{T_d^2}{2!} + s_i^3 \frac{T_d^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{p}_i = e^{s_i T_d} \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass für die Eigenwerte  $z_i$  von  $\phi(T_d)$

$$z_i = e^{s_i T_d} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.13)$$

gilt und die zugehörigen Eigenvektoren den Eigenvektoren  $\mathbf{p}_i$  von  $\mathbf{A}$  entsprechen.

Aus (8.13) kann gefolgert werden, dass aus einem asymptotisch stabilen zeitkontinuierlichen System (8.3) stets auch ein asymptotisch stabiles zeitdiskretes System (8.12) hervorgeht, denn aus  $\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$  folgt unmittelbar  $|z_i| = |e^{s_i T_d}| < 1$ .

**▣ Fortsetzung.** Die Eigenwerte der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

des zeitkontinuierlichen Modells der Regelstrecke aus dem vorangegangenen Beispiel liegen bei

$$s_1 = s_2 = 0.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix des zugehörigen zeitdiskreten Systems

$$\mathbf{A}_d = \phi(T_d) = \begin{bmatrix} 1 & T_d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

liegen gemäß (8.13) bei

$$z_1 = z_2 = 1.$$

■

## 8.4 z-Übertragungsfunktion

Es ist die z-Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} \quad (8.14)$$

der in Bild 8.6 dargestellten Anordnung bei gegebener Übertragungsfunktion  $P(s)$  gesucht. Dabei macht man sich die Tatsache zunutze, dass die  $P_d(z)$  die z-Transformierte der Impul-

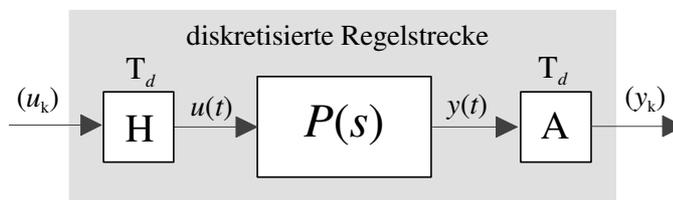


Bild 8.6: Ermittlung der z-Übertragungsfunktion  $P_d(z)$

santwort des zeitdiskreten Systems ist. Wählt man also

$$(u_k) = (1, 0, 0, \dots) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{u}(z) = 1, \quad (8.15)$$

dann generiert das Halteglied daraus

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_d) \quad \text{d.h.} \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_d}. \quad (8.16)$$

Für die Ausgangsgröße  $y(t)$  der zeitkontinuierlichen Regelstrecke gilt dann

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{y}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ P(s) \bar{u}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d} \right\}.$$

Die Folge  $(y_k)$  ergibt sich durch Abtastung von  $y(t)$ , d.h. für die Elemente der Folge gilt

$$y_k = y(t = kT_d) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d} \right\} \Big|_{t=kT_d}.$$

Die z-Transformierte der Folge  $(y_k)$  lautet

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z} \{ (y_k) \} = \mathfrak{Z} \left\{ \left( \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d} \right\} \Big|_{t=kT_d} \right) \right\}. \quad (8.17)$$

Dieser etwas unübersichtliche Ausdruck in (8.17) wird üblicherweise folgendermaßen

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} - \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} e^{-sT_d} \right\} \quad (8.18)$$

abgekürzt, d.h. die Operation  $\tilde{y}(z) = \mathcal{Z} \{ y(s) \}$  repräsentiert folgende Rechenschritte:

$$\bar{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \xrightarrow{\text{Abtastung}} (y_k) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \tilde{y}(z).$$

Da die Multiplikation mit  $e^{-sT_d}$  im Bildbereich der Verschiebung im Zeitbereich um einen Abtastschritt nach rechts entspricht, kann (8.18) auch in der Form

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} - z^{-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}$$

angeschrieben werden. Aufgrund der Wahl der Eingangsfolge (8.15) gilt somit für die gesuchte z-Übertragungsfunktion

$$P_d(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}. \quad (8.19)$$

Eine mögliche Realisierung von  $P_d(z)$  ist natürlich durch (8.12) gegeben.

Man beachte, dass das Ergebnis (8.19) auch durch eine sehr einfache Überlegung gewonnen werden kann. Wählt man nämlich als Eingang für das in Bild 8.6 System die Folge

$$(u_k) = (\sigma_k) = (1, 1, 1, \dots),$$

so gilt  $u(t) = \sigma(t)$  und  $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\}$ . Für die  $z$ -Transformierte der Ausgangsfolge  $(y_k)$  gilt somit

$$\tilde{y}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} \stackrel{!}{=} P_d(z) \frac{z}{z-1}$$

Daraus resultiert unmittelbar (8.19).

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

der zeitkontinuierlichen Regelstrecke. Gemäß (8.19) gilt dann

$$\begin{aligned} P_d(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \right) = \frac{z-1}{z} (\mathfrak{Z} \{(1)\} - \mathfrak{Z} \{(e^{-kT_d})\}) = \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_d}} \right) = \frac{1-e^{-T_d}}{z-e^{-T_d}}. \end{aligned}$$

■

Die Pole der Streckenübertragungsfunktion (8.4) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  und die Pole von (8.19) sind eine Teilmenge der Eigenwerte von  $\phi(T_d)$ . Solange keine „pathologische“ Diskretisierungszeit gewählt wird, entspricht der Nennergrad von  $P_d(z)$  dem Nennergrad von  $P(s)$ . Daraus folgt unmittelbar, dass die Pole  $z_i$  von  $P_d(z)$  über die Relation (8.13) aus den Polen  $s_i$  von  $P(s)$  hervorgehen. Aus einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion  $P(s)$  ergibt sich somit durch die Diskretisierung stets auch eine BIBO-stabile Übertragungsfunktion  $P_d(z)$ .

**B Fortsetzung.** Im vorigen Beispiel geht der Pol  $s = -1$  der Übertragungsfunktion  $P(s)$  durch die Diskretisierung in einen Pol  $z = e^{-T_d}$  der Übertragungsfunktion  $P_d(z)$  über. ■



# Teil III

## Entwurfsmethoden



# Kapitel 9

## Zustandsregler

### 9.1 Einführung

Gegeben sei das lineare und zeitinvariante Zustandsmodell  $n$ -ter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (9.1)$$

einer Regelstrecke. Für den Durchgriffsterm wird hier  $d = 0$  angenommen, wie es bei realen technischen Systemen häufig der Fall ist. Das Verhalten der Regelstrecke kann mittels der Stellgröße  $u$  beeinflusst werden. Weiters wirkt auf die Strecke der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ein, der auch als unbekannt „Anfangsstörung“ interpretiert werden kann.

Durch geeignete Wahl der Stellgröße  $u$  soll der Regelstrecke ein gewünschtes dynamisches Verhalten verliehen werden. Dies umfasst einerseits die Beseitigung der Wirkung des Anfangszustandes  $\mathbf{x}_0$  durch eine Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises. Andererseits ist man häufig daran interessiert, dass die Ausgangsgröße  $y$  einem in Form der Referenzgröße  $r$  vorgegebenen Wunschverlauf „möglichst gut“ folgt. Damit gliedert sich der Reglerentwurf in zwei Schritte, nämlich in die **Stabilisierung** und die **Nachführung**.

### 9.2 Stabilisierung des Regelkreises

Die Stabilisierung des Regelkreises erfolgt durch eine geeignete Rückführung des als *messbar* vorausgesetzten Zustandsvektors  $\mathbf{x}$ . Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Zustandsrückführung der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (9.2)$$

Hierbei umfasst der Vektor

$$\mathbf{k}^T = [ k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n ] \quad (9.3)$$

die zu bestimmenden (konstanten) reellen Reglerparameter. Die Stellgröße  $u$  wird demnach als Linearkombination der Zustandsgrößen angesetzt, man nennt (9.2) daher auch einen **linearen Zustandsregler**.

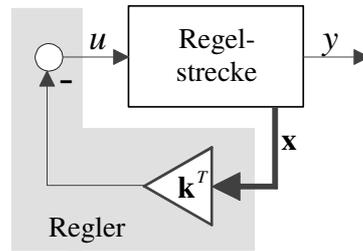


Bild 9.1: Stabilisierung mit Hilfe einer Zustandsregelung

In Bild 9.1 ist der Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und Zustandsregler dargestellt. Das mathematische Modell des Regelkreises ergibt sich aus (9.1) und (9.2) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}. \quad (9.4)$$

Da die Ausgangsgleichung bei der Stabilisierung des Regelkreises keine Rolle spielt, bleibt sie hier auch unberücksichtigt. Das Ziel des Entwurfes besteht nun darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass der Regelkreis asymptotisch stabil ist. Das bedeutet, dass die Dynamikmatrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  des Regelkreises eine Hurwitzmatrix sein muss, all ihre Eigenwerte besitzen also einen negativen Realteil. Der Entwurf des Zustandsreglers läuft somit darauf hinaus, durch geschickte Wahl von  $\mathbf{k}^T$  die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  in gewünschter Weise zu platzieren, man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Eigenwertvorgabe**.

### 9.2.1 Prinzip der Eigenwertvorgabe

Die Aufgabe besteht darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass die  $n$  Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  vorgebbare Werte  $\lambda_i$  annehmen. Das bedeutet, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgegebenen Wunschpolynom  $w(s)$  entsprechen muss, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0. \quad (9.5)$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die *reellen* Koeffizienten des Wunschpolynom, d.h. die vorgebbaren Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  müssen reell und/oder paarweise konjugiert komplex sein.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Zustandsregler der Form (9.2), d.h.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u \quad \text{und} \quad u = -kx.$$

Das Modell des Regelkreises lautet somit

$$\frac{dx}{dt} = (2 - k)x.$$

Wählt man

$$k = 2 - \lambda,$$

so besitzt der Regelkreis einen Eigenwert an einer beliebig vorgebbaren Stelle  $s = \lambda$ . ■

Es stellt sich die Frage, ob stets alle Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  beliebig platziert werden können. Zur Beantwortung dieser Frage wird angenommen, dass  $s_i$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  ist und  $\boldsymbol{\rho}_i^T$  ein zugehöriger Links-Eigenvektor, d.h. es gilt die Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (9.6)$$

Multipliziert man nun die Dynamikmatrix des Regelkreises mit dem Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i^T$ , so findet man

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T \stackrel{(9.6)}{=} s_i \boldsymbol{\rho}_i^T - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T. \quad (9.7)$$

Wenn der Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  normal auf den Eingangsvektor steht, d.h.

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (9.8)$$

so vereinfacht sich (9.7) zu

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (9.9)$$

Das bedeutet, dass  $s_i$  auf jeden Fall, d.h. für jede beliebige Wahl von  $\mathbf{k}^T$  auch ein Eigenwert von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Die Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  sind in diesem Fall somit *nicht* beliebig vorgebar! Dies ist offensichtlich auf (9.8) zurückzuführen, was gemäß dem Hautus-Kriterium bedeutet, dass die Regelstrecke *nicht* steuerbar ist. Erst die Eigenschaft der Steuerbarkeit der Strecke erlaubt die beliebige Vorgabe aller Eigenwerte des Regelkreises.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Regler der Form (9.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Wie man mit Hilfe der Steuerbarkeitmatrix

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

leicht überprüfen kann, ist die Regelstrecke steuerbar, die Eigenwerte des Regelkreises können also beliebig vorgegeben werden. Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom soll einem Wunschkpolynom

$$w(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

entsprechen, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s - k_1 & -k_2 \\ k_1 - 1 & s + 1 + k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1 - k_1 + k_2)s - (k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} w(s).$$

Der Koeffizientenvergleich

$$1 - k_1 + k_2 \stackrel{!}{=} -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad -(k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} \lambda_1 \lambda_2$$

liefert die Relationen

$$k_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2) \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)$$

zur Berechnung der Reglerparameter. ■

Üblicherweise wird zunächst überprüft, ob das Streckenmodell (9.1) steuerbar ist. Üblicherweise wird dabei aber *nicht* hinterfragt, wie „gut“ oder „schlecht“ das betrachtete System steuerbar ist, man begnügt sich mit einer ja/nein-Aussage. Intuitiv wird man ein steuerbares System als „schlecht“ steuerbar klassifizieren, wenn es eines unverhältnismäßig großen Stelllaufwandes bedarf, um die Zustandsgrößen gezielt zu beeinflussen<sup>1</sup>. Dies manifestiert sich im Regelgesetz (9.2) durch betragsmäßig große Elemente im Vektor  $\mathbf{k}^T$ .

**B** Gegeben sei das (steuerbare) mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -4.47 \\ 1.79 \end{bmatrix} u.$$

Wählt man für die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beispielsweise  $s_1 = s_2 = -3$ , so erhält man

$$\mathbf{k}^T = [ 1795.6 \quad 4486.7 ].$$
■

Der im obigen Beispiel beobachtete Effekt großer Reglerparameter lässt sich anschaulich deuten. Vereinfachend wird hierzu angenommen, dass die Dynamikmatrix der steuerbaren Regelstrecke (9.1) lauter verschiedene Eigenwerte  $s_1, s_2, \dots, s_n$  besitzt. Die zugehörigen Links-Eigenvektoren werden mit  $\boldsymbol{\rho}_1^T, \boldsymbol{\rho}_2^T, \dots, \boldsymbol{\rho}_n^T$  bezeichnet, gemäß dem Hautus-Kriterium gilt  $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} \neq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Es soll nun ein Zustandsregler (9.2) entworfen werden, der den Eigenwert  $s_1$  an die Stelle  $s = \lambda$  verschiebt, die restlichen Eigenwerte jedoch unverändert lässt, d.h. die Eigenwerte des geschlossenen Kreises lauten  $\lambda, s_2, \dots, s_n$ . Es gilt nun

$$\boldsymbol{\rho}_1^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T = s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T - \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T.$$

Setzt man nun

$$\mathbf{k}^T = \frac{s_1 - \lambda}{\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}} \boldsymbol{\rho}_1^T, \tag{9.10}$$

<sup>1</sup>Mit Hilfe so genannter Steuerbarkeit-Maße kann die Eigenschaft der Steuerbarkeit bezüglich ihrer „Güte“ quantifiziert werden.

so erhält man

$$\boldsymbol{\rho}_1^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \lambda \boldsymbol{\rho}_1^T,$$

d.h.  $\lambda$  ist wie gewünscht ein Eigenwert des geschlossenen Regelkreises. Offensichtlich nehmen gemäß (9.10) die Elemente von  $\mathbf{k}^T$  betragsmäßig große Werte an, wenn das Skalarprodukt  $\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}$  betragsmäßig sehr klein ist, was auf „schlechte Steuerbarkeit“ des Eigenwertes  $s_1$  schließen lässt. Transformiert man die Regelstrecke auf Diagonalform, so erkennt man, dass der Einfluss von  $u$  auf das zum Eigenwert  $s_1$  gehörige Teilsystem aufgrund des kleinen Betrages von  $\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}$  nur sehr gering ist.

**B Fortsetzung.** Die zu den Eigenwerten  $s_1 = 0$  und  $s_2 = -1$  der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  gehörigen Links-Eigenvektoren sind durch

$$\boldsymbol{\rho}_1^T = [ 6.3246 \quad 15.8114 ] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_2^T = [ 5.3852 \quad 16.1555 ]$$

gegeben. Für die Skalarprodukte  $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}$  findet man

$$\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} = 0.0316 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} = 4.8466 .$$

Daraus kann gefolgert werden, dass die großen Werte der Reglerparameter auf die „schlechte Steuerbarkeit“ des Eigenwertes  $s_1 = 0$  zurückzuführen sind. ■

## 9.2.2 Stabilisierbarkeit

Ein System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

heißt **stabilisierbar**, wenn der Vektor  $\mathbf{k}^T$  so bestimmt werden kann, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist.

Man beachte, dass die Steuerbarkeit des Systems eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Bedingung für die Stabilisierbarkeit darstellt.

**B** Gegeben sei die (nicht steuerbare) Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ergibt sich

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & -k_2 \\ 2 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix},$$

ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^2 + s(k_1 + k_2) + (k_1 + k_2 - 1) = (s + 1)(s + k_1 + k_2 - 1).$$

Für  $k_1 + k_2 > 1$  ist die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  somit eine Hurwitzmatrix, d.h. das System ist stabilisierbar. ■

### 9.2.3 Entwurf für ein System in Regelungsnormalform

Besonders elegant ist die Ermittlung des Reglers, wenn das Modell der Regelstrecke in erster Normalform vorliegt. Zum einen ist das Modell dann jedenfalls steuerbar, zum anderen erlaubt die Tatsache, dass die Dynamikmatrix des Regelkreises in Begleitform vorliegt eine besonders einfache Berechnung der Reglerparameter. Aus diesem Grund nennt man die erste Normalform häufig auch **Regelungsnormalform**.

Das Modell der Strecke  $n$ -ter Ordnung liege in erster Normalform vor, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für einen Zustandsregler der Form (9.2) folgt dann für die Dynamikmatrix des Regelkreises

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 - k_1 & -\alpha_1 - k_2 & \dots & -\alpha_{n-1} - k_n \end{bmatrix}.$$

Man erkennt, dass die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  wiederum in Begleitform vorliegt, d.h. ihr charakteristisches Polynom

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^n + (\alpha_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + k_2)s + (\alpha_0 + k_1)$$

kann direkt abgelesen werden. Im Sinne der Eigenwertvorgabe muss das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgebbaren Polynom (9.5) entsprechen, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$w_0 = \alpha_0 + k_1, \quad w_1 = \alpha_1 + k_2, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \alpha_{n-1} + k_n,$$

woraus sich unmittelbar die gesuchten Reglerparameter

$$k_i = w_{i-1} - \alpha_{i-1} \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n \quad (9.11)$$

ergeben.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke in erster Normalform und ein Zustandsregler der Form (9.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2] \mathbf{x}.$$

Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Unter der Annahme, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzen soll, d.h.

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + w_1s + w_0 = s^2 + 2s + 1$$

ergeben sich gemäß (9.11) die Reglerparameter

$$k_1 = w_0 - \alpha_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{und} \quad k_2 = w_1 - \alpha_1 = 2 + 1 = 3.$$

Der lineare Zustandsregler (9.2) lautet somit

$$u = -2x_1 - 3x_2.$$

■

Liegt das Modell der (steuerbaren) Regelstrecke nicht in Regelungsnormalform vor, so bietet sich im Sinne einer systematischen Berechnung der Reglerparameter eine reguläre Zustandstransformation in diese vorteilhafte Normalform an. Für das transformierte System kann der Zustandsregler mit Hilfe (9.11) problemlos angegeben werden. Der gesuchte Zustandsregler für das Originalsystem errechnet sich mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ . Wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, kann der beschriebene Reglerentwurf sehr effizient mit Hilfe der Formel von Ackermann bewerkstelligt werden.

### 9.2.4 Transformation auf Regelungsnormalform

Unterwirft man das Modell der Regelstrecke (9.1) einer Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{9.12}$$

so ergibt sich das transformierte Modell

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{b}u. \tag{9.13}$$

Dieses Modell soll in Regelungsnormalform vorliegen, d.h. es müssen die Relationen

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

gelten. Aus der ersten Bedingung in (9.14) folgt nach Multiplikation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  von rechts

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}. \tag{9.15}$$

Stellt man nun die Matrix  $\mathbf{T}$  durch ihre Zeilenvektoren dar, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix},$$

so geht (9.15) in die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_2^T \\ \mathbf{t}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \\ -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

über. Ein Vergleich der ersten  $(n-1)$  Zeilen ergibt

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_2^T \mathbf{A}, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A},$$

woraus durch Einsetzen unmittelbar der Zusammenhang

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \quad (9.17)$$

folgt. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix den bemerkenswerten Aufbau

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

besitzt. Aus der ersten Zeile  $\mathbf{t}_1^T$  von  $\mathbf{T}$  können somit alle übrigen Zeilen durch sukzessive Multiplikation mit  $\mathbf{A}$  berechnet werden. Die zweite Bedingung in (9.14) nimmt nun die Form

$$\mathbf{T} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

an. Durch Transposition obiger Gleichung erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} & \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man beachte, dass in obiger Relation der Zeilenvektor  $\mathbf{t}_1^T$  mit der in (3.10) eingeführten Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_u$  multipliziert wird, d.h.

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da die Regelstrecke voraussetzungsgemäß steuerbar ist, kann die erste Zeile von  $\mathbf{T}$  mittels

$$\mathbf{t}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_u^{-1} \quad (9.19)$$

berechnet werden. Das Ergebnis in (9.19) bedeutet, dass  $\mathbf{t}_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ist. Somit kann die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  geradlinig ermittelt werden. Zunächst wird ihre erste Zeile gemäß (9.19) berechnet, die restliche Zeilen ergeben sich nach dem in (9.18) angegebenen Bildungsgesetz.

Man beachte, dass die letzte Zeile der ersten Bedingung in (9.16), also

$$\mathbf{t}_n^T \mathbf{A} = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \quad (9.20)$$

bisher nicht betrachtet wurde. Setzt man die in (9.17) gefundenen Zusammenhänge ein, so erhält man

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^n = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) = \mathbf{0}. \quad (9.21)$$

Gemäß dem Satz von Cayley und Hamilton erfüllt *jede* quadratische Matrix ihre eigene charakteristische Gleichung. Das charakteristische Polynom von  $\mathbf{A}$  lautet

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad (9.22)$$

d.h. für Klammerausdruck in (9.21) gilt

$$\Delta(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \quad (9.23)$$

die Bedingung (9.20) ist somit auf jeden Fall erfüllt und bedarf keiner weiteren Beachtung.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

das in die Regelungsnormalform transformiert werden soll. Dazu wird die Steuerbarkeitsmatrix und deren Inverse ermittelt, d.h.

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{t}_1^T = [ 0 \quad 1 ],$$

woraus unmittelbar

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} = [ 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [ 1 \quad 0 ]$$

folgt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese besagt, dass man beim vorliegenden System nur die beiden Zustandsgrößen vertauschen muss, um die Beschreibung in die erste Normalform überzuführen. ■

### 9.2.5 Formel von Ackermann

In den bisherigen Ausführungen wurde gezeigt, wie ein beliebiges (steuerbares) System (9.1) in die Regelungsnormalform transformiert werden kann. Für das zugehörige transformierte System (9.13) gestaltet sich der Zustandsreglerentwurf

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{z} \tag{9.24}$$

dann äußerst einfach. Die Ermittlung des Zustandsreglers für das Originalsystem (9.1) mittels (9.12) liefert schließlich

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{T} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \tag{9.25}$$

Fasst man die soeben beschriebenen Verfahrensschritte geschickt zusammen, so zeigt sich, dass für die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$  in (9.25) die Ermittlung von  $\mathbf{T}$  bzw. die explizite Durchführung der Zustandstransformation gar nicht erforderlich ist.

Der Reglerentwurf für das transformierte System in Regelungsnormalform kann analog zu (9.11) durchgeführt werden, d.h. für den Vektor  $\mathbf{h}^T$  in (9.24) gilt

$$\mathbf{h}^T = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ]. \tag{9.26}$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die Koeffizienten des Wunschpolynoms (9.5) und  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (9.21) von  $\mathbf{A}$ . Die Berechnung von  $\mathbf{k}^T$  erfolgt gemäß (9.25), d.h. mit (9.26) und (9.18) folgt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{h}^T \mathbf{T} = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Nach Ausführung der Multiplikation

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1})$$

und Addition des „Nullterms“  $\mathbf{t}_1^T (\mathbf{A}^n - \mathbf{A}^n)$  erhält man schließlich

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Ein Vergleich mit (9.23) zeigt, dass der zweite Klammerausdruck in obiger Gleichung dem Matrixpolynom  $\Delta(\mathbf{A})$  entspricht, d.h. es gilt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Der Vektor  $\mathbf{k}^T$  entspricht also dem Produkt aus  $\mathbf{t}_1^T$  und dem Wunschpolynom  $w(s)$ , in dem  $s$  durch  $\mathbf{A}$  ersetzt wird. Diese Erkenntnis wird durch die so genannte **Formel von Ackermann**<sup>2</sup>

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) \quad (9.27)$$

in prägnanter Weise widergespiegelt.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Es soll mit der Formel von Ackermann ein Zustandsregler der Form (9.2) so berechnet werden, dass die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  bei

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

liegen, d.h. das Wunschpolynom lautet

$$w(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix und ihre Inverse lauten

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{t}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Ausdruck  $w(\mathbf{A})$  berechnet sich zu

$$w(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} + 9\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},$$

d.h. die Auswertung von (9.27) liefert

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Zustandsregler lautet somit

$$u = - \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -8x_1 - 8x_2.$$

<sup>2</sup>benannt nach dem deutschen Regelungstechniker Jürgen Ackermann (geboren 1936)

### 9.2.6 Stabilisierung beliebiger Arbeitspunkte

Mit dem vorgestellten Konzept des Zustandsreglers (9.2) kann man prinzipiell beliebige Arbeitspunkte, also Ruhelagen der Regelstrecke (9.1) stabilisieren. Ein solche Ruhelage ist durch die konstanten Größen  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  charakterisiert, wobei bekanntlich  $\mathbf{A}\mathbf{x}_R + \mathbf{b}u_R = 0$  erfüllt sein muss. Mit

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R \quad \text{und} \quad v = u - u_R \quad (9.28)$$

werden die Abweichungen des Zustandes  $\mathbf{x}$  und der Stellgröße  $u$  von ihren konstanten Werten im Arbeitspunkt bezeichnet. Für (9.1) ergibt sich dann

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_R) + \mathbf{b}(v + u_R) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}v. \quad (9.29)$$

Mit der Zustandsrückführung

$$v = -\mathbf{k}^T \boldsymbol{\xi} \quad (9.30)$$

erhält man

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \boldsymbol{\xi}. \quad (9.31)$$

Genau dann, wenn  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist, gilt für jeden beliebigen Anfangswert  $\boldsymbol{\xi}_0 := \boldsymbol{\xi}(t=0)$ , also  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R. \quad (9.32)$$

Das bedeutet, dass der durch  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  charakterisierte Arbeitspunkt asymptotisch stabil ist. Aus (9.30) und (9.28) erhält man den Zustandsregler

$$u = u_R - \mathbf{k}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R), \quad (9.33)$$

siehe auch Bild 9.2.

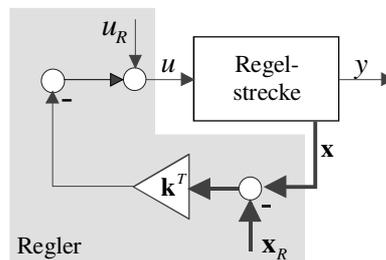


Bild 9.2: Stabilisierung eines beliebigen Arbeitspunktes

**B** Für die Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

soll ein Zustandsregler (9.33) so entworfen werden, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen, d.h.

$$\mathbf{k}^T = \left[ 1\frac{2}{3} \quad 7\frac{1}{3} \right].$$

Für  $t < 1$  soll die Ruhelage  $\mathbf{x}_A = [-2 \quad 1]^T$ ,  $u_A = 0$  stabilisiert werden, für  $t \geq 1$  soll die Ruhelage  $\mathbf{x}_E = [1 \quad -0.5]^T$ ,  $u_E = 0$  angefahren und stabilisiert werden. Das bedeutet, dass für die in Bild 9.2 eingezeichneten Größen  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  gilt

$$\mathbf{x}_R = \begin{cases} \mathbf{x}_A & \text{für } t < 1 \\ \mathbf{x}_E & \text{für } t \geq 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad u_R = \begin{cases} u_A & \text{für } t < 1 \\ u_E & \text{für } t \geq 1 \end{cases}.$$

In Bild 9.3 sind die resultierenden Verläufe der Zustandsgrößen und der Stellgröße dargestellt, der gewünschte Arbeitspunktwechsel ist deutlich zu erkennen. ■

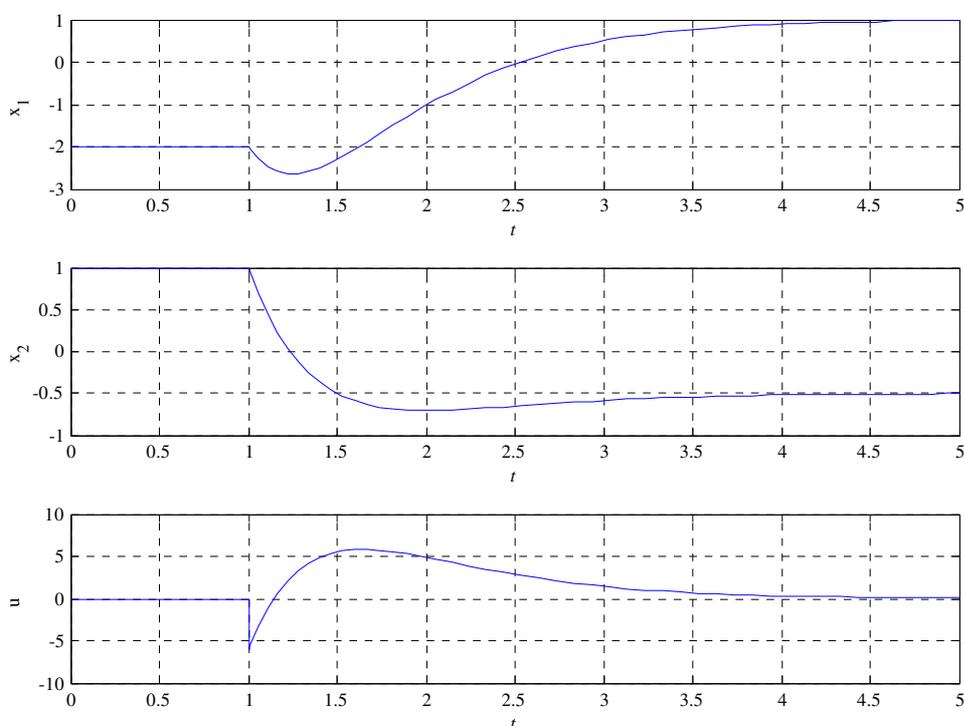


Bild 9.3: Übergang von  $\mathbf{x}_A$  nach  $\mathbf{x}_E$  mit Hilfe eines Zustandsreglers

## 9.3 Nachführung

Zusätzlich zur Stabilität des Regelkreises wird nun gefordert, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  asymptotisch gegen einen vorgebbaren konstanten Wert  $r_0$  strebt. Die Größe  $y(t)$  wird also einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  asymptotisch nachgeführt. Dazu wird das Regelgesetz (9.2) um einen zu  $r$  proportionalen Anteil ergänzt, d.h.

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + V r. \quad (9.34)$$

Dabei ist  $V$  ein entsprechend zu bestimmender reeller, skalarer Reglerparameter. Das mathematische Modell des in Bild 9.4 dargestellten Regelkreises lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}V r, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (9.35)$$

Man beachte, dass die oben formulierte Forderung

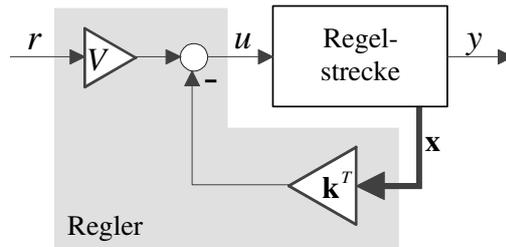


Bild 9.4: Prinzip der Nachführung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty \stackrel{!}{=} r_0 \quad (9.36)$$

impliziert, dass der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  für  $t \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen einen konstanten Wert  $\mathbf{x}_\infty$  strebt, d.h. die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  strebt asymptotisch in die Ruhelage  $\mathbf{x}_\infty$ . Aus (9.35) folgt dann unmittelbar

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_\infty + \mathbf{b}V r_0,$$

da  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  als Hurwitzmatrix vorausgesetzt werden kann, gilt für die Ruhelage

$$\mathbf{x}_\infty = -(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0. \quad (9.37)$$

Durch Einsetzen in (9.36) findet man

$$y_\infty = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0 \stackrel{!}{=} r_0.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Berechnungsvorschrift

$$V = -\frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}} \quad (9.38)$$

für den gesuchten Reglerparameter. Eine Veränderung von  $\mathbf{k}^T$  macht also eine entsprechende Anpassung von  $V$  erforderlich.

*Hinweis:* Bei Regelstrecken mit einer *Nullstelle* bei  $s = 0$  ist die beschriebene Nachführung *nicht* anwendbar. Um die Ausgangsgröße  $y$  auf einem konstanten Wert zu halten ist hier eine rampenförmig ansteigende Stellgröße erforderlich, was aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen praktisch nicht realisierbar ist.

**B Fortsetzung.** Der Zustandsregler aus dem vorangegangenen Beispiel wird gemäß (9.34) erweitert. Die Ausgangsgröße

$$y = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll einer (konstanten) Referenzgröße asymptotisch nachgeführt werden. Die Auswertung von (9.38) ergibt den Reglerparameter

$$V = -\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = 9.$$

■

Mit Hilfe des Parameters  $V$  wird also der Verstärkungsfaktor der Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b}V \quad (9.39)$$

des Regelkreises (9.35) auf den Wert eins korrigiert, d.h.

$$T(0) = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V \stackrel{!}{=} 1,$$

woraus unmittelbar (9.38) folgt.

Man beachte, dass die Nachführung (9.36) nur bei *exakter* Kenntnis von  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  gewährleistet ist. Bei Variationen von Streckenparametern oder aufgrund von Modellierungsungenauigkeiten geht im praktischen Einsatz die Eigenschaft (9.36) des Regelkreises verloren. Eine „robuste“ Nachführung kann hingegen mit dem im folgenden Abschnitt vorgestellten PI - Zustandsregler erzielt werden.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (9.34) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen und die Bedingung (9.36) erfüllt ist. Die zuvor beschriebenen Methoden liefern die Reglerparameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = 0.4 \quad (9.40)$$

Zunächst wird das Verhalten des Regelkreises für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$$

und die Referenzgröße  $r(t) = 0$  untersucht. Die zugehörigen Verläufe der Zustandsvariablen  $x_1$  und  $x_2$  sind in Bild 9.5 dargestellt. In Bild 9.6 ist für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  der Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  dargestellt. In der oberen Abbildung ist zu erkennen, dass  $y$  wie gewünscht

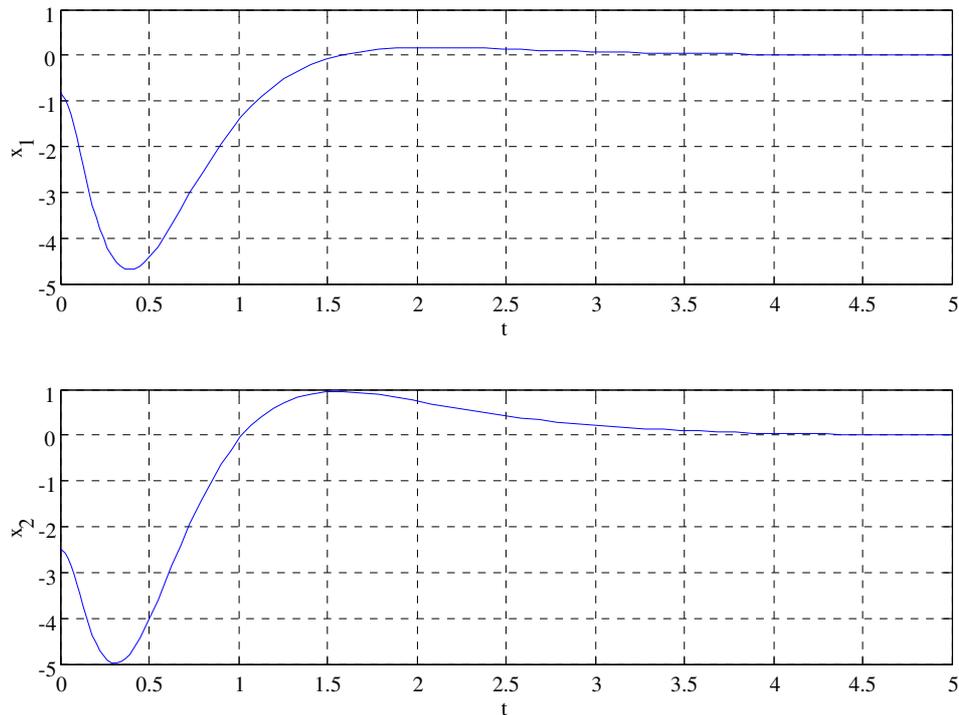


Bild 9.5: Verlauf der Zustandsgrößen für  $\mathbf{x}_0^T = [-0.8 \quad -2.5]$  und  $r(t) = 0$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (9.34)

asymptotisch den Wert der Referenzgröße annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des Reglers (9.40) im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit verloren geht. ■

Mit Hilfe des Zustandsreglers (9.34) werden die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises platziert und die stationäre Verstärkung wird entsprechend angepasst. Das bedeutet, die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises lautet

$$T(s) = V \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b} = V \frac{\mu(s)}{w(s)}. \quad (9.41)$$

Das Zählerpolynom der ungekürzten Führungsübertragungsfunktion entspricht - bis auf den Faktor  $V$  - dem Zählerpolynom der Regelstrecke. Das Nennerpolynom  $w(s)$  ist das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und kann beliebig gewählt werden. Die Nullstellen von  $T(s)$  entsprechen also den Streckennullstellen, ggf. sind Kürzungen von Streckennullstellen mit entsprechenden Nullstellen von  $\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))$  zu berücksichtigen. Diese Tatsache ist besonders leicht zu erkennen, wenn das Streckenmodell in Regelungsnormalform vorliegt.

**B** Gegeben sei das Streckenmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 3] \mathbf{x}, \quad \text{d.h.} \quad P(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s+3}{s^2-1}.$$

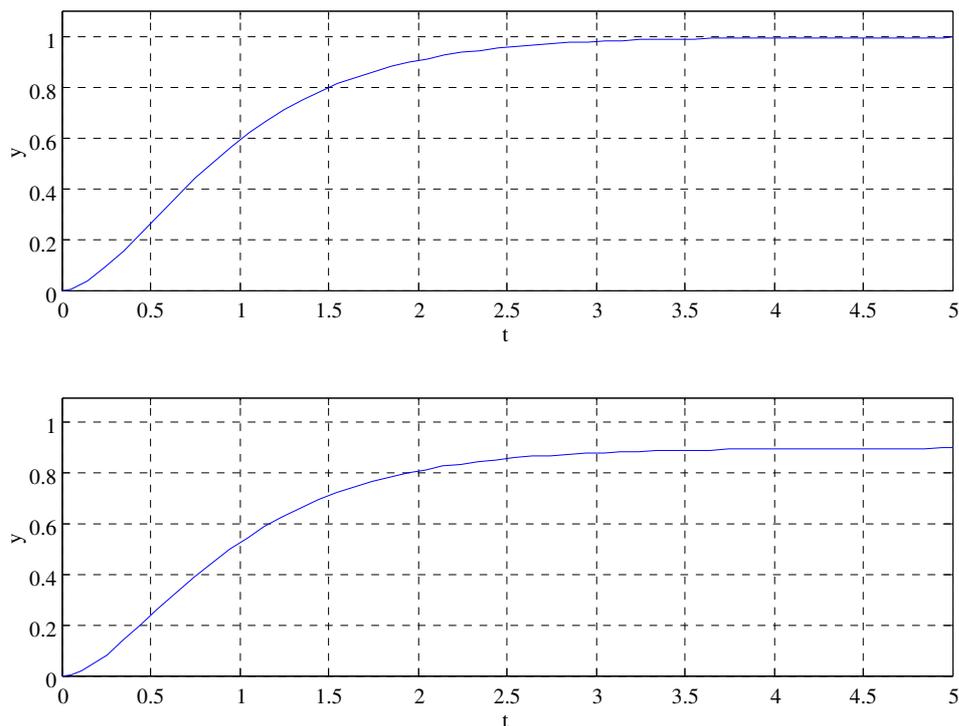


Bild 9.6: Verlauf der Ausgangsgröße für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (9.34)

Für den geschlossenen Regelkreis, bestehend aus Strecke und Regler (9.34) gilt dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} r, \quad y = [1 \quad 3] \mathbf{x},$$

d.h. die Führungsübertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \frac{V(s+3)}{s^2 + k_2s + (k_1 - 1)}.$$

Für die Wahl  $k_1 = k_2 = 2$  besitzt der geschlossene Regelkreis zwei Eigenwerte bei  $s_1 = s_2 = -1$  und es gilt mit  $V = \frac{1}{3}$

$$T(s) = \frac{1}{3} \frac{(s+3)}{(s+1)^2}.$$

Wählt man hingegen  $k_1 = k_2 = 4$ , so gilt  $s_1 = -1$  und  $s_2 = -3$  und mit  $V = 1$  folgt für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s+1}.$$

## 9.4 PI - Zustandsregler

Die Struktur eines Regelkreises mit einem PI - Zustandsregler ist in Bild 9.7 dargestellt. Zur Erzielung der stationären Genauigkeit (9.36) wird in den offenen Kreis ein Integrator eingefügt.

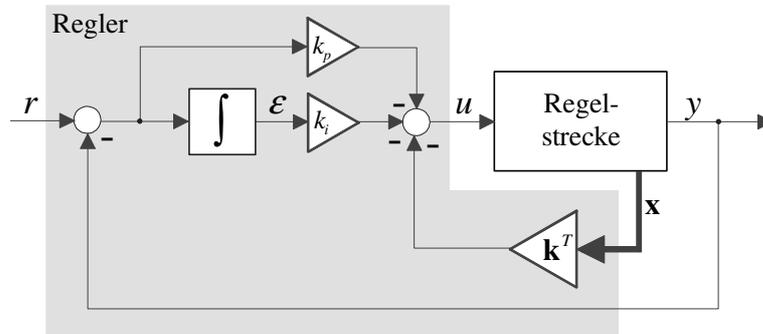


Bild 9.7: Regelkreis mit PI - Zustandsregler

Bezeichnet man die Ausgangsgröße des Integrators mit  $\varepsilon$ , so gilt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - y = r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (9.42)$$

Die Stellgröße wird über die Relation

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p (r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}) = -(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p r \quad (9.43)$$

gebildet, wobei  $\mathbf{k}^T$ ,  $k_i$  und  $k_p$  die  $(n + 2)$  Reglerparameter repräsentieren. Durch Einsetzen in (9.1) erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T)) \mathbf{x} - k_i \mathbf{b} \varepsilon - k_p \mathbf{b} r. \quad (9.44)$$

Fasst man  $\varepsilon$  und  $\mathbf{x}$  zu einem Vektor zusammen, so erhält man das Zustandsmodell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) & -k_i \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_p \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (9.45)$$

für den in Bild 9.7 dargestellten Regelkreis. Ist die Dynamikmatrix des Regelkreises eine Hurwitzmatrix, so ist aufgrund der Regelkreisstruktur die stationäre Genauigkeit (9.36) gewährleistet. Die Reglerparameter sollen nun so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) & -k_i \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} [ \mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T \quad k_i ]$$

beliebig vorgegebene Eigenwerte besitzt. Mit den Definitionen

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{k}}^T := [ \mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T \quad k_i ] \quad (9.46)$$

ist der Entwurf des PI - Zustandsreglers auf ein Eigenwertvorgabeproblem wie in den vorigen Abschnitten zurückgeführt. Damit die Eigenwerte der Matrix  $(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T)$  beliebig vorgegeben werden können, muss also das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

d.h. die Serienschaltung aus Strecke und Integrator steuerbar sein. Das ist genau dann der Fall, wenn die steuerbare Strecke (9.1) *keine* Nullstellen bei  $s = 0$  besitzt.

Zu beachten ist, dass nun  $(n + 1)$  Eigenwerte vorgegeben werden müssen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  kann mit den bereits bekannten Methoden zur Eigenwertvorgabe ermittelt werden. Wie aus (9.46) hervorgeht, entspricht die letzte Komponente von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  dem Reglerparameter  $k_i$ . Im Gegensatz dazu gehen  $\mathbf{k}^T$  und  $k_p$  aus den ersten  $n$  Komponenten von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  *nicht* eindeutig hervor. In vielen Fällen wird zunächst der Parameter  $k_p$  gewählt und danach der Vektor  $\mathbf{k}^T$  gemäß

$$\mathbf{k}^T = [ \tilde{k}_1 \quad \dots \quad \tilde{k}_n ] + k_p \mathbf{c}^T \quad (9.47)$$

berechnet. *Eine* mögliche Wahl von  $k_p$  lautet<sup>3</sup> beispielsweise

$$k_p = \frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}. \quad (9.48)$$

Dadurch wird erreicht, dass der Regler bei einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  denjenigen Stellgrößenwert generiert, der dem konstanten Wert der Stellgröße  $u$  im stationären Zustand entspricht.

**B** Für das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 10 \quad -10 ] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke wird ein PI - Zustandsregler so entworfen, dass die drei(!) Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = s_3 = -2$  liegen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  ist also so zu bestimmen, dass die Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [ \tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \tilde{k}_3 ]$$

die gewünschten Eigenwerte besitzt. Diese Berechnung liefert

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = [ 13 \quad -7 \quad -0.8 ],$$

d.h. es gilt  $k_i = -0.8$ . Für den Parameter  $k_p$  wird der Wert  $k_p = -0.3$  gewählt, woraus sich über (9.47) der Vektor

$$\mathbf{k}^T = [ 13 \quad -7 ] - 0.3 \cdot [ 10 \quad -10 ] = [ 10 \quad -4 ]$$

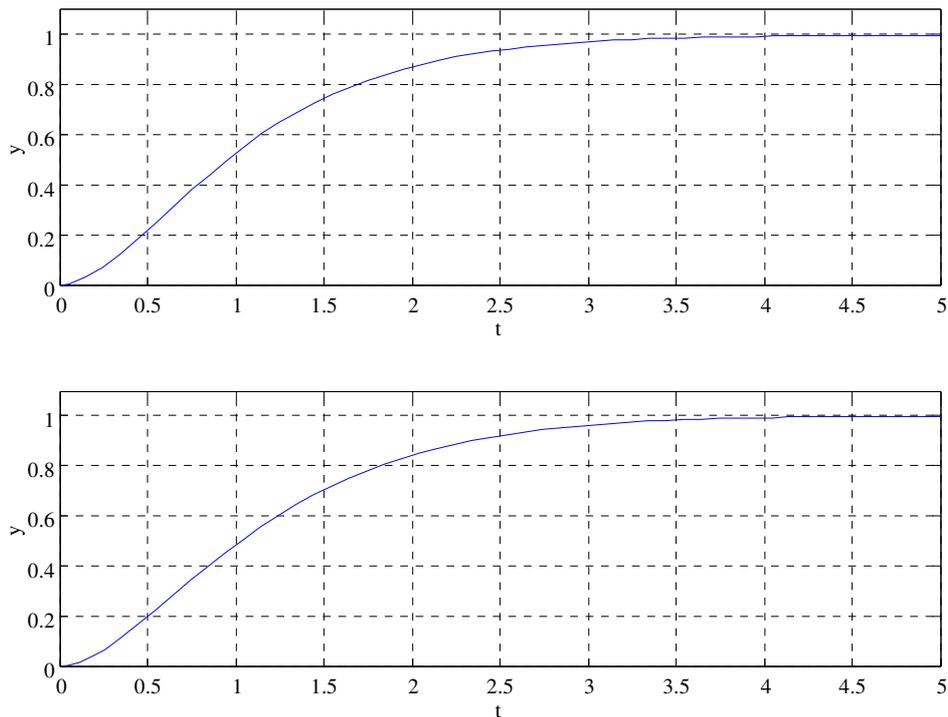


Bild 9.8: Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines PI-Zustandsreglers

ergibt. In Bild 9.8 ist der Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  dargestellt. Der oberen Abbildung ist zu entnehmen, dass  $y$  asymptotisch den Wert der Referenzgröße annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des gleichen Reglers im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt deutlich, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit erhalten bleibt. ■

Eine weitere Möglichkeit, einen PI-Zustandsregler auszulegen, besteht darin, seine  $(n + 2)$  Reglerparameter so zu bestimmen, dass die Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  derjenigen Führungsübertragungsfunktion entspricht, die sich mit einem klassischen Zustandsregler ergibt. Gemäß (9.41) soll also

$$T(s) \stackrel{!}{=} V \frac{\mu(s)}{w(s)} \quad (9.49)$$

gelten. Hierbei ist  $\mu(s)$  das Zählerpolynom der Regelstrecke und  $w(s)$  ist ein frei vorgegbares Hurwitzpolynom. Mit dem reellen Faktor  $V$  wird gewährleistet, dass  $T(0) = 1$  gilt, d.h.

$$V = \frac{w(0)}{\mu(0)}. \quad (9.50)$$

<sup>3</sup>dabei wird vorausgesetzt, dass die Strecke keinen Eigenwert bei  $s = 0$  besitzt, d.h.  $\mathbf{A}$  ist regulär.

Der in Bild 9.7 dargestellte Regelkreis entspricht einem Standardregelkreis, bei dem der offene Kreis die Serienschaltung des PI-Reglers

$$R(s) = -\frac{k_p s + k_i}{s}$$

und der Regelstrecke mit Zustandsrückführung, also

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mu(s)}{\tilde{w}(s)}$$

ist. Das Zählerpolynom der ungekürzten Übertragungsfunktion  $G(s)$  entspricht dabei dem Zählerpolynom der Regelstrecke, das Polynom  $\tilde{w}(s)$  kann mittels  $\mathbf{k}^T$  beliebig vorgegeben werden. Für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises gilt somit

$$L(s) = R(s)G(s) = -\frac{(k_p s + k_i) \mu(s)}{s \tilde{w}(s)} = \frac{-k_p \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) \mu(s)}{s \tilde{w}(s)}. \quad (9.51)$$

Um die in (9.49) angegebene Forderung zu erfüllen, muss  $L(s)$  der Bedingung

$$L(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} \stackrel{!}{=} \frac{V \mu(s)}{w(s) - V \mu(s)} \quad (9.52)$$

genügen. Ein Vergleich von (9.51) und (9.52) verdeutlicht, dass

$$k_p \stackrel{!}{=} -V \quad (9.53)$$

und dass der Linearfaktor  $\left(s + \frac{k_i}{k_p}\right)$  ein Teiler von  $\tilde{w}(s)$  sein muss, d.h.

$$\tilde{w}(s) = \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) w^*(s). \quad (9.54)$$

Setzt man (9.53) und (9.54) in (9.51) ein, so erhält man

$$L(s) = \frac{V \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) \mu(s)}{s \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) w^*(s)} \stackrel{\text{Kürzung}}{=} \frac{V \mu(s)}{s w^*(s)}. \quad (9.55)$$

Man beachte, dass die in (9.55) angedeutete Kürzung natürlich nur dann zulässig ist, wenn die Bedingung

$$\gamma := \frac{k_i}{k_p} > 0 \quad (9.56)$$

erfüllt ist. Aus (9.52) und (9.55) folgt nun unmittelbar, dass

$$s w^*(s) \stackrel{!}{=} w(s) - V \mu(s)$$

gelten muss. Da das Polynom  $(w(s) - V \mu(s))$  wegen  $T(0) = 1$  eine Nullstelle bei  $s = 0$  besitzen muss, kann  $w^*(s)$  über die Relation

$$w^*(s) = \frac{w(s) - V \mu(s)}{s}. \quad (9.57)$$

ermittelt werden. Mit (9.54) gilt für das Polynom  $\tilde{w}(s)$  somit

$$\tilde{w}(s) = (s + \gamma) w^*(s) = (s + \gamma) \frac{w(s) - V \mu(s)}{s} \quad (9.58)$$

Der beschriebene Entwurfsprozess kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

- I) Setze  $k_p = -V = -\frac{w(0)}{\mu(0)}$
- II) Wähle  $\gamma > 0$  und berechne  $k_i = k_p \gamma$
- III) Setze  $\tilde{w}(s) = \frac{w(s) + k_p \mu(s)}{s} (s + \gamma)$
- IV) Berechne  $\mathbf{k}^T$  so, dass  $\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = \tilde{w}(s)$

**B** Gegeben sei das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad -10] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{10}{s^2 - 1}.$$

Es soll ein PI - Zustandsregler so entworfen werden, dass der Regelkreis die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{4}{s^2 + 2.4s + 4}$$

besitzt. Gemäß obigem Entwurfsschema (I) setzt man zunächst

$$k_p = -\frac{w(0)}{\mu(0)} = -\frac{4}{10} = -0.4.$$

Mit der Wahl  $\gamma = 2$  erhält man mit (II) dann

$$k_i = -0.8.$$

Für das Polynom  $\tilde{w}(s)$  ergibt sich nach (III)

$$\tilde{w}(s) = \frac{s^2 + 2.4s + 4 - 0.4 \cdot 10}{s} (s + 2) = (s + 2.4)(s + 2).$$

Aus (IV) folgt dann

$$\mathbf{k}^T = [5.8 \quad -1.4].$$

■

# Kapitel 10

## Zustandsbeobachter

### 10.1 Einführung

Bei den Überlegungen im vorigen Kapitel wurde stets angenommen, dass *alle* Zustandsgrößen der Regelstrecke messbar sind, d.h. der gesamte Vektor  $\mathbf{x}$  steht dem Regler zur Verfügung. Bei praktischen Anwendungen ist diese Annahme häufig nicht gerechtfertigt. Oft ist die messtechnische Erfassung bestimmter Zustandsgrößen aufgrund kostspieliger Sensorik unwirtschaftlich oder sie ist technisch sogar unmöglich. Die Grundidee des so genannten **Zustandsbeobachters** besteht nun darin, auf Basis des mathematischen Modells  $n$ -ter Ordnung der Regelstrecke

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & \text{mit } \mathbf{x}_0 \dots \text{ unbekannt} \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (10.1)$$

*nicht*-messbare Zustandsgrößen zu rekonstruieren.

Im vorliegenden Fall wird angenommen, dass die Ausgangsgröße  $y$  messbar ist und *alle*  $n$  Zustandsgrößen mit Hilfe eines Beobachters geschätzt werden müssen. Der Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters soll sich *asymptotisch* dem Streckenzustand nähern, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t).$$

Anstelle der bisher als messbar vorausgesetzten Zustandsgrößen  $x_i$  werden deren Schätzwerte  $\hat{x}_i$  im Regelgesetz verwendet, d.h. der Zustandsregler (9.34) lautet nun

$$u = - \sum_{i=1}^n k_i \hat{x}_i + V r = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + V r. \quad (10.2)$$

### 10.2 Trivialer Beobachter

Eine sehr naheliegende Idee zur Rekonstruktion des Zustandsvektors besteht darin, den Beobachter als Kopie des Streckenmodells anzusetzen, d.h.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u. \quad (10.3)$$

Wie in Bild 10.1 angedeutet, wird dieses Modell mit der gleichen Stellgröße  $u$  wie die Regelstrecke angesteuert und zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}$  genutzt, wobei üblicherweise  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  gesetzt wird. Der Schätzfehler

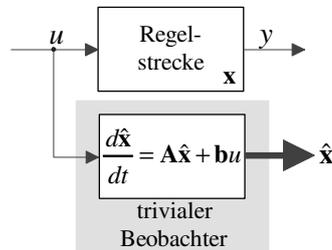


Bild 10.1: Prinzip des trivialen Beobachters

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (10.4)$$

charakterisiert die Abweichung des Schätzwertes  $\hat{\mathbf{x}}$  vom tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$ . Sein zeitliches Verhalten wird durch

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \stackrel{(10.1.)}{=} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}u = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (10.5)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$  gilt. Aus der Schätzfehlerdynamik (10.5) folgt unmittelbar, dass der Schätzfehler ausgehend von beliebigem  $\mathbf{e}_0$  genau dann asymptotisch gegen Null strebt, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0},$$

wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  eine Hurwitzmatrix ist. Das bedeutet, dass die Zustandsgrößen des **trivialen Beobachters** (10.3) genau dann asymptotisch gegen die Zustandsgrößen der Regelstrecke konvergieren, wenn die Regelstrecke (10.1) asymptotisch stabil ist, d.h. die Schätzfehlerdynamik ist starr vorgegeben. Weiters besteht keinerlei Möglichkeit, bei der Beobachtung den Einfluss von Störungen, Parameterschwankungen und Modellierungsfehlern zu berücksichtigen. All diese Tatsachen schränken die Anwendbarkeit des trivialen Beobachters sehr stark ein, er ist daher für den praktischen Einsatz de facto ungeeignet.

### 10.3 Luenberger-Beobachter

Auch der so genannte Luenberger-Beobachter nützt das mathematische Modell (10.1) zur Schätzung des Streckenzustandes. Im Gegensatz zum trivialen Beobachter wird hier aber auch die messbare Ausgangsgröße  $y$  für die Ermittlung von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Dazu wird  $y$  mit der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters verglichen und die Differenz  $(y - \hat{y})$  zur „Korrektur“ von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Wie in Bild 10.2 zu erkennen ist, entsteht so eine Rückkopplung innerhalb des Beobachters.

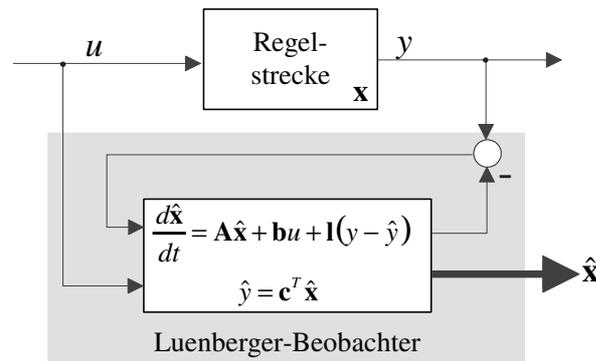


Bild 10.2: Beobachter nach Luenberger

Das mathematische Modell des Beobachters lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (10.6)$$

bzw.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y \quad (10.7)$$

wobei

$$\mathbf{l}^T = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n] \quad (10.8)$$

der geeignet zu bestimmende Vektor der Beobachterparameter bzw. „Beobachterverstärkungen“ ist. Setzt man nun  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  in (10.6) ein, so erhält man

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Für die Dynamik des Schätzfehlers (10.4) ergibt sich damit

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}u = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{x} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e} \quad (10.9)$$

Wie zu erkennen ist, kann die Schätzfehlerdynamik (10.9) über der Vektor  $\mathbf{l}$  gezielt beeinflusst werden. Analog zum Zustandsreglerentwurf soll der Vektor  $\mathbf{l}$  so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig vorgebbare Eigenwerte besitzt.

Ein Vergleich von (10.9) mit (9.4) verdeutlicht, dass der Beobachterentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{l}$ , sehr ähnlich strukturiert ist wie der Zustandsreglerentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$ . In der Tat unterscheiden sich die Dynamikmatrizen des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  und des geschlossenen Regelkreises  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  nur dadurch, dass der Vektor  $\mathbf{l}$  der „linke Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  ist, während  $\mathbf{k}^T$  der „rechte Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Sehr hilfreich erweist sich an dieser Stelle die Tatsache, dass die Eigenwerte einer quadratischen Matrix  $\mathbf{W}$  identisch sind mit den Eigenwerten der transponierten

Matrix  $\mathbf{W}^T$ . Wenn man also bei der Eigenwertvorgabe anstelle von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^T = (\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  betrachtet, dann sind Beobachterentwurf und Zustandsreglerentwurf strukturell identisch! Der Beobachterentwurf kann somit auch so interpretiert werden, dass für das so genannte **duale System**

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{c} v \quad (10.10)$$

ein Zustandsregler der Form

$$v = -\mathbf{l}^T \mathbf{z} \quad (10.11)$$

ermittelt wird. Alle Überlegungen aus dem vorigen Kapitel zum Zustandsreglerentwurf können also unverändert auf den Beobachterentwurf übertragen werden.

Notwendig und hinreichend dafür, dass die Eigenwerte von  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  bzw.  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig platziert werden können, ist die Steuerbarkeit des dualen Systems (10.10). Das bedeutet, dass die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

regulär sein muss. Durch Bildung der transponierten Matrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{(3.22)}{=} \mathbf{B}_y \quad (10.13)$$

erkennt man, dass das duale System genau dann steuerbar ist, wenn die Regelstrecke (10.1) beobachtbar ist.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Es soll ein Zustandsbeobachter der Form (10.7) so entworfen werden, dass die Dynamikmatrix der Schätzfehlerdynamik (10.9) zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzt.

Zunächst wird mit Hilfe der regulären Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gezeigt, dass die Beobachtbarkeit des Streckenmodells gegeben ist. Die Eigenwerte der Matrix

$$(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ 1 - l_2 & 2 \end{bmatrix}$$

können somit beliebig platziert werden. Die reellen Konstanten  $l_1$  und  $l_2$  müssen so bestimmt werden, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  dem Wunschpolynom

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

entspricht, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 + (l_1 - 2)s + (l_2 - 2l_1 - 1) \stackrel{!}{=} s^2 + 2s + 1.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $l_1 = 4$  und  $l_2 = 10$ , d.h. das Beobachtermodell ist durch

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} y$$

gegeben. ■

Natürlich kann auch die im vorigen Kapitel hergeleitete Formel von Ackermann für den Beobachterentwurf eingesetzt werden. Hierfür sind in (9.27) die entsprechenden Größen des dualen Systems (10.10) einzusetzen, d.h.

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T w(\mathbf{A}^T), \quad (10.14)$$

wobei  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  die letzte Zeile der inversen „dualen“ Steuerbarkeitsmatrix (10.12) ist.

**■ Fortsetzung.** Verwendet man zur Lösung des vorigen Beispiels die Formel von Ackermann, so ist zunächst  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  zu ermitteln, d.h.

$$\hat{\mathbf{t}}_1^T = [0 \ 1] \hat{\mathbf{S}}_u^{-1} = [0 \ 1] (\mathbf{B}_y^T)^{-1} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [0 \ 1].$$

Mit (10.14) folgt dann

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T \left( (\mathbf{A}^T)^2 + 2\mathbf{A}^T + \mathbf{E} \right) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = [4 \ 10].$$

.

## 10.4 Der Beobachter im Regelkreis

Der Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}$  für den tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$  der Regelstrecke wird nun zur Regelung der steuerbaren und beobachtbaren Strecke mittels eines Zustandsreglers der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + Vr \quad (10.15)$$

verwendet. Der resultierende Regelkreis, bestehend aus Strecke, Beobachter und Zustandsregler ist in Bild 10.3 dargestellt.

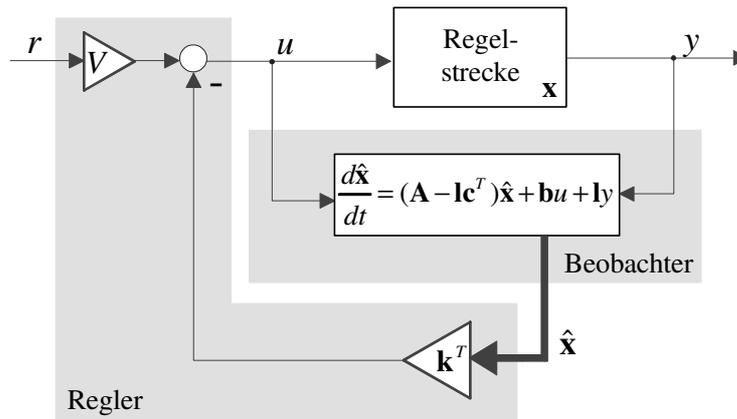


Bild 10.3: Regelkreis, bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Beobachter

Setzt man das Regelgesetz (10.15) in das Streckenmodell (10.1) und den Beobachter (10.7) ein, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}Vr, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

und

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}Vr.$$

Das mathematische Modell des Gesamtsystems kann auch in der kompakten Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{l}\mathbf{c}^T & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} Vr \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.16)$$

angeschrieben werden. Die Systemordnung des Regelkreises beträgt also  $2n$ , entspricht also der doppelten Streckenordnung. Die Dynamikmatrix des Gesamtsystems wird offensichtlich maßgeblich von den Vektoren  $\mathbf{k}^T$  und  $\mathbf{l}$  beeinflusst. Es ist eine äußerst bemerkenswerte Eigenschaft dieser Matrix, dass sich ihre  $2n$  Eigenwerte aus den Eigenwerten von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  zusammensetzen. Das bedeutet, dass man Zustandsregler- und Beobachterentwurf *voneinander unabhängig* durchführen kann! Dies ist das so genannte Separationstheorem, das im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

### 10.4.1 Separationstheorem

Zur Herleitung des Separationstheorems wird das System (10.16) der regulären Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

unterworfen, d.h. in (10.16) wird  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{e}$  gesetzt. Daraus folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(\mathbf{x} - \mathbf{e}) + \mathbf{b}Vr = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{e} + \mathbf{b}Vr,$$

die Schätzfehlerdynamik lautet nach (10.9)

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}.$$

In kompakter Schreibweise lautet das transformierte System somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Die transformierte Dynamikmatrix besitzt eine so genannte Block-Dreieckstruktur, d.h. für ihr charakteristisches Polynom  $\Delta(s)$  gilt

$$\Delta(s) = \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)] \cdot \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)].$$

Da die Eigenwerte der Block-Dreiecksmatrix identisch sind mit den Eigenwerten der Dynamikmatrix des Originalsystems (10.16), ist damit das Separationstheorem bewiesen.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (9.2) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen. Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, besitzt der Zustandsregler die Parameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zur Schätzung der Zustandsgrößen wird ein Zustandsbeobachter der Form (10.7) eingesetzt. Der Vektor  $\mathbf{l}$  wird so bestimmt, dass die Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik (10.9) bei  $s_3 = s_4 = -6$  liegen, man findet

$$\mathbf{l}^T = \begin{bmatrix} 4.9 & 3.7 \end{bmatrix}.$$

In Bild 10.4 sind die Verläufe der Zustandsgrößen der Regelstrecke für

$$\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$$

dargestellt, die zugehörigen Schätzwerte sind punktiert eingezeichnet. ■

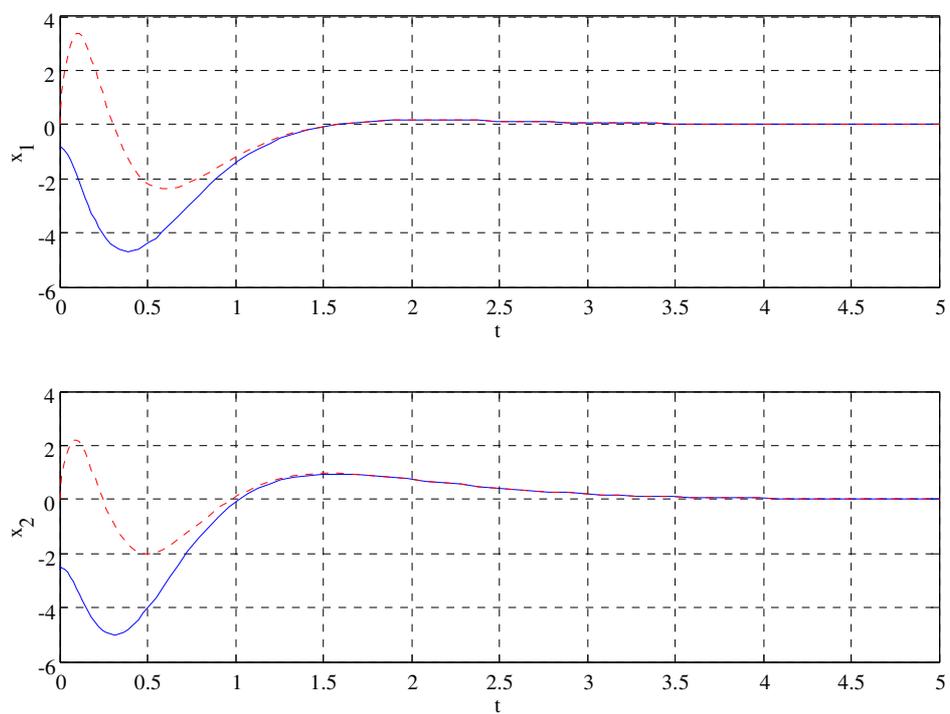


Bild 10.4: Verläufe der Zustandsgrößen  $x_1$ ,  $x_2$  der Regelstrecke und der zugehörigen Schätzwerte (punktiert).

# Literatur

- [1] ACKERMANN J.: Abtastregelung, 3. Auflage, Springer Verlag, 1988
- [2] CHEN C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993
- [3] FÖLLINGER \_ O.: Regelungstechnik, 6.Auflage, Hüthig Verlag, 1990
- [4] FÖLLINGER \_ O.: Lineare Abtastsysteme, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1990
- [5] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004
- [6] LUNZE J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001