

SSRP 2013

18. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

D. Muschick, A. Hofer, N. Dourdoumas (Hrsg.)

2. - 5. 9. 2013

Schloss Retzhof, Leibnitz, Österreich

ISBN: 978-3-901439-10-0

© Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz

<http://www.irt.tugraz.at>



Vorwort

Das Steirische Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung findet in diesem Jahr zum 18. Mal im Schloss Retzhof, dem Bildungshaus des Landes Steiermark, statt. Die Veranstaltung wird in zweijährigem Rhythmus vom Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz organisiert. Sie hat zum Ziel, aktuelle Arbeiten in Bereichen der Regelungs- und Prozessautomatisierungstechnik sowie der Regelungstheorie in universitärer und industrieller Forschung zur Diskussion zu stellen. Die Beiträge gehören also einem breiten Spektrum von Problemstellungen an. In dem vorliegenden Tagungsband sind die eingelangten Manuskripte zusammengefasst. Den Autoren sei an dieser Stelle für die Sorgfalt bei der Erstellung ihrer Beiträge herzlich gedankt.

Graz, im September 2013

Inhaltsverzeichnis

Christian Feller und Christian Ebenbauer <i>Ein zeitkontinuierlicher Optimierungsalgorithmus für die modell-prädiktive Regelung linearer Systeme</i>	1
Oliver König, Stefan Jakubek und Günter Prochart <i>Einschleifige Impedanzregelung für die Emulation von Traktionsbatterien auf Antriebsprüfständen</i>	29
Kurt Schlacher und Markus Schöberl <i>Zur Flachheit von AI-Systemen</i>	45
Michael Zeitz <i>Warum ist Minimalphasigkeit keine relevante Eigenschaft für die Regelungstechnik?</i>	57
Markus Reichhartinger und Martin Horn <i>Beobachterbasierte Regelung einer thermischen Regelstrecke mit Hilfe von Sliding-Mode Konzepten höherer Ordnung</i>	69
Sven-Olaf Lindert und Kurt Schlacher <i>Polplatzierung durch Ausgangsrückführung mit vorgegebener Struktur</i>	77
Alexander Weinmann <i>Manch Überraschendes bei der Analyse von Automatisierungssystemen</i>	91
Carsten Balewski und Felix Gausch <i>Realisierbarkeit von verkoppelten Deskriptormodellen</i>	97
Martin Benedikt und Anton Hofer <i>Ein systemorientierter Koppelansatz für die nicht-iterative Co-Simulation</i>	111
Christoph Schörghuber, Markus Gölles, Nicolaos Dourdoumas, Thomas Brunner und Ingwald Obernberger <i>Modellbildung von Luft- und Rauchgasrezirkulations-Zufuhren bei Biomasse-Feuerungsanlagen</i>	135

Ein zeitkontinuierlicher Optimierungsalgorithmus für die modellprädiktive Regelung linearer Systeme

Christian Feller, Christian Ebenbauer
Universität Stuttgart
Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik
Pfaffenwaldring 9, 70550 Stuttgart
`{christian.feller,ce}@ist.uni-stuttgart.de`

Zusammenfassung

Die modellprädiktive Regelung (engl.: Model Predictive Control, MPC) ist ein optimierungsbasiertes Konzept zur Regelung komplexer Prozesse mit Eingangs- und/oder Zustandsbeschränkungen. Hierzu wird basierend auf einem Modell des zu regelnden Systems in jedem Abtastschritt eine optimale Sequenz an Stellgrößen berechnet, die ein zuvor definiertes Gütefunktional unter Berücksichtigung eventueller Eingangs- und Zustandsbeschränkungen für den aktuellen Systemzustand minimiert. In diesem Beitrag wird ein neuer MPC-Algorithmus vorgestellt, der im Gegensatz zu üblichen MPC-Verfahren auf kontinuierlichen Optimierungsalgorithmen basiert und keine iterative Online-Optimierung erfordert. Darüber hinaus wird die Dynamik des Optimierungsalgorithmus explizit in der Stabilitätsanalyse für den geschlossenen Kreis berücksichtigt.

Der vorgestellte Algorithmus beruht auf der Minimierung einer modifizierten Kostenfunktion, in welcher geeignet gewählte Barrierefunktionen die Einhaltung der Stellgrößen- und Zustandsbeschränkungen sowie eventueller stabilisierender Endgebietsbeschränkungen sicherstellen. Es wird ein zeitkontinuierliches dynamisches System vorgestellt, dessen Lösung unter vergleichsweise schwachen Annahmen an den Anfangswert asymptotisch gegen den optimalen Vektor der Eingangsgrößen konvergiert, beziehungsweise diesem für eine optimale Initialisierung exakt nachfolgt. Das vorgestellte Verfahren stellt somit einen Ansatz für eine neue Klasse von modellprädiktiven Regelungsalgorithmen dar, welche die Dynamik der Regelstrecke und der unterlagerten Optimierung explizit berücksichtigen und die Stellgröße über die numerische Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen berechnen.

Zusätzlich werden die Anforderungen an die eingesetzten Barrierefunktionen diskutiert und ein neuer Entwurfsansatz vorgestellt, der die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises für beliebige positive Werte des Barrierefunktionsgewichtungsparameters garantiert.

1 Einleitung

In der modellprädiktiven Regelung (MPC) ergibt sich die verwendete Stellgröße durch wiederholtes Lösen eines Optimalsteuerungsproblems über einen endlichen Prädiktionshorizont, wobei sich sowohl die Systemdynamik des zu regelnden Systems als auch eventuelle Beschränkungen oder Nebenbedingungen explizit berücksichtigen lassen. Dank intensiver Forschung in den letzten Jahrzehnten steht heute eine Vielzahl von fundierten Konzepten und Methoden zur Verfügung, die einen systematischen MPC-Reglerentwurf sowie die Formulierung von Stabilitätsgarantien für den geschlossenen Regelkreis erlauben. Wir verweisen an dieser Stelle auf den exzellenten Beitrag [8], in welchem eine detaillierte Zusammenfassung der historischen und konzeptuellen Entwicklung der modellprädiktiven Regelung gegeben wird. Traditionell wurden MPC-Verfahren vor allem in der Prozesstechnik eingesetzt, wo meist ausreichend Zeit und Rechenkapazität für die wiederholte Lösung des unterlagerten Optimierungsproblems vorhanden ist. Heute finden diese, begründet durch die zunehmende Nachfrage nach spezialisierten Regelungsverfahren und unterstützt durch effizientere Optimierungsalgorithmen und leistungsfähigere Hardware-Komponenten, auch zunehmend Anwendung in der Regelung hochdynamischer und/oder eingebetteter Systeme. Aufgrund dieser Tatsache gibt es eine intensive Forschung im Bereich der algorithmischen Implementierung stabilisierender MPC-Konzepte, um eine möglichst schnelle Berechnung der optimalen Stellgröße oder zumindest einer hinreichend genauen Approximation derselben zu ermöglichen, die, wenn möglich, weiterhin die Stabilität des geschlossenen Regelkreises garantiert, siehe z.B. [1, 12, 10, 4, 3, 14].

Im vorliegenden Beitrag präsentieren wir einen neuen stabilisierenden MPC-Algorithmus für lineare Systeme mit Eingangs- und Zustandsbeschränkungen, welcher auf einem zeitkontinuierlichen, barrierefunktionenbasierten Algorithmus beruht, dessen Grundidee sich wie folgt zusammenfassen lässt. In der modellprädiktiven Regelung muss das unterlagerte Optimalsteuerungsproblem wiederholt mit einem sich ständig ändernden Anfangszustand für die Prädiktion gelöst werden. Vom Standpunkt der Implementierung aus bedeutet ein MPC-Verfahren somit nichts anderes als die Lösung eines parameterabhängigen oder zeitvarianten Optimierungsproblems. Die Idee dieser Arbeit ist es nun, die Tatsache auszunutzen, dass das Verhalten des initialen Prädiktionszustandes eindeutig durch die zugrunde liegende zeitkontinuierliche Systemdynamik der Regelstrecke definiert ist. Unter Verwendung des entsprechenden Streckenmodells lässt sich auf Grundlage dieser Idee ein zeitkontinuierlicher Newton-basierter Algorithmus entwerfen, der asymptotisch gegen die optimale Lösung eines zeitvarianten Optimierungsproblems, welches eine barrierefunktionenbasierte und daher geglättete Approximation des ursprünglichen MPC-Optimalsteuerungsproblems für die diskretisierte Systemdynamik darstellt, konvergiert und dieser exakt nachfolgt. Die resultierende Stellgröße ergibt sich als abgetasteter Ausgang eines dynamischen Systems und garantiert strikte Einhaltung aller vorhandenen Eingangs-, Zustands- und Endgebietsbeschränkungen. Wird der Algorithmus mit der optimalen Lösung initialisiert, so folgt er der parameterabhängigen optimalen Lö-

Diese Arbeit wurde unterstützt von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Emmy-Noether-Programm “Novel Ways in Control and Computation”, EB 425/2-1, und Exzellenzcluster Simulationstechnologie, EXC 310/1).

sung exakt nach. Im Falle einer zulässigen aber suboptimalen Initialisierung, wird eine direkte, Newton-basierte Methode für die Optimierung verwendet. Die vorgestellte Methode lässt sich daher auch als direktes Fortsetzungsverfahren oder Homotopieverfahren verstehen [11].

Es ist hervorzuheben, dass der vorgestellte zeitkontinuierliche Optimierungsalgorithmus explizit auf der zugrunde liegenden zeitkontinuierlichen Systemdynamik beruht, während Entwurf und Stabilitätsanalyse des untersuchten barrierefunktionenbasierten MPC-Verfahrens auf einem diskretisierten Modell der Regelstrecke basieren. Eine schematische Illustration des grundlegenden MPC-Prinzips sowie des diskutierten MPC-Implementierungsverfahrens ist in Abbildung 1 dargestellt.

In enger Verbindung zu dem hier vorgestellten Ansatz stehen die Arbeiten [10] und [3], welche sich mit Algorithmen für die Echtzeit-Implementierung von nichtlinearen MPC-Verfahren befassen. In [10] verwendet der Autor erfolgreich ein indirektes Fortsetzungsverfahren, um der Lösung eines Randwertproblems nachzufolgen, welches in direkter Beziehung zu den Euler-Lagrange-Gleichungen des diskretisierten Optimalsteuerungsproblems steht. Außerdem wird ein effizienter Integrationsalgorithmus sowie eine Fehleranalyse für die numerische Implementierung vorgestellt. Unglücklicherweise berücksichtigt die vorgeschlagene Methode allerdings keine Ungleichheitsnebenbedingungen und liefert keinerlei Garantien bezüglich der Stabilität des geschlossenen Regelkreises. In [3] präsentieren die Autoren ein Echtzeit-Verfahren für die modellprädiktive Regelung zeitkontinuierlicher nichtlinearer Systeme. Der vorgestellte Algorithmus basiert auf einer variablen und beliebig groben Parametrisierung der Eingangstrajektorie und verwendet einen barrierefunktionen- und gradientenbasierten Ansatz zur Berechnung der prädierten Stellgröße. Asymptotische Konvergenz des geschlossenen Regelkreises zu einer Umgebung um den Ursprung kann ebenso garantiert werden wie die punktweise strikte Einhaltung aller Nebenbedingungen. Allerdings wird die Optimalität der verwendeten Stellgröße nicht explizit betrachtet, so dass keine Aussagen bezüglich der erreichten Regelgüte in Bezug auf die zugrunde liegende Kostenfunktion gemacht werden können. Im Gegensatz zu diesen beiden Arbeiten beschränkt sich der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz auf lineare Systeme und garantiert, im Falle einer optimalen Initialisierung, sowohl die Zulässigkeit und Optimalität des resultierenden Regelgesetzes als auch die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises in Bezug auf ein diskretisiertes Streckenmodell.

Das diskutierte Verfahren lässt sich als systemtheoretischer MPC-Ansatz verstehen, welcher die Dynamik des Optimierungsalgorithmus explizit berücksichtigt und auf dieser Grundlage prinzipiell asymptotische Stabilität für beliebig schnelle Systemdynamiken garantiert. In gewisser Weise ist die einzige Einschränkung bezüglich der Implementierung, ob man in der Lage ist, den zeitkontinuierlichen Regelalgorithmus schnell und stabil zu integrieren. Das vorgeschlagene Verfahren könnte somit ein erster Schritt zu einem alternativen, systemtheoretischen Ansatz für effiziente und/oder eingebettete MPC-Anwendungen sein.

Außerdem stellen wir einen neuen Ansatz für stabilisierende MPC-Verfahren basierend auf logarithmischen Barrierefunktionen vor, dessen Anwendung nicht zwingend auf den hier diskutierten zeitkontinuierlichen Algorithmus beschränkt ist und es erlaubt, die Grö-

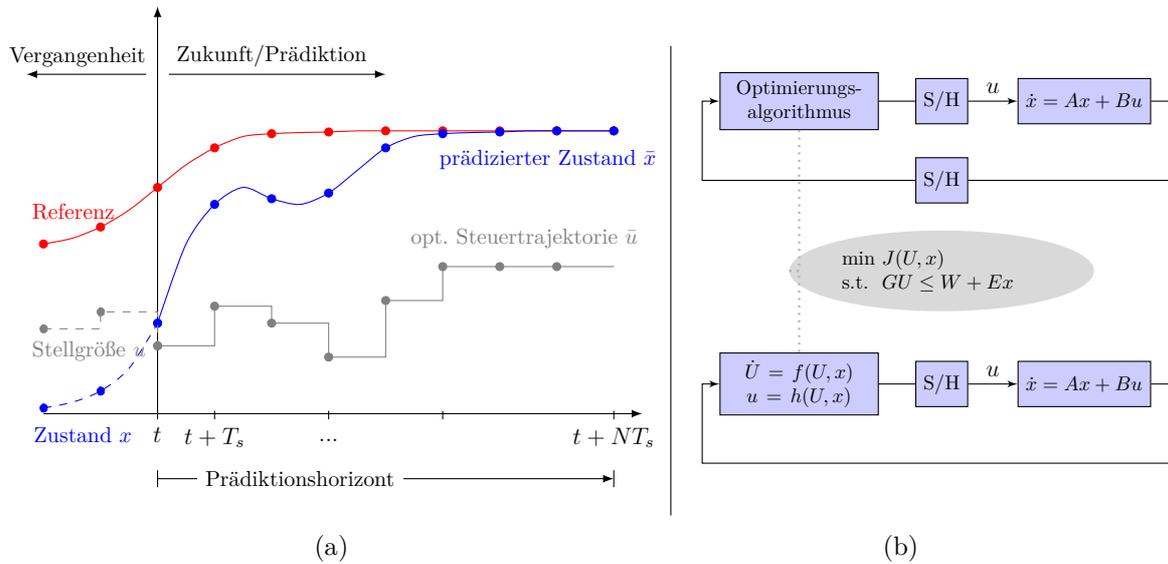


Abbildung 1: (a) MPC als wiederholtes Optimalsteuerungsproblem und (b) ein Vergleich von standardmäßiger Implementierung mittels Online-Optimierung und dem vorgeschlagenen Algorithmus auf Basis eines dynamischen Systems. Die Systemdynamik $f(U, x)$ sowie die Ausgangsfunktion $h(U, x)$ werden im Folgenden näher spezifiziert und erläutert.

ße der eingesetzten Endregion zu maximieren. Wie in Abschnitt 3 näher erläutert, finden sich einige interessante Ergebnisse zu barrierefunktionenbasierten MPC-Verfahren in [13]. Die theoretischen Grundlagen des im Folgenden präsentierten Algorithmus wurden zum Teil bereits auf der diesjährigen European Control Conference vorgestellt, siehe [5]. In der vorliegenden Arbeit gehen wir jedoch detaillierter auf die Motivation und Aspekte der Implementierung ein und präsentieren einige numerische Ergebnisse für ein neues Anwendungsbeispiel.

Im weiteren Verlauf definiert $\|x\|_M := \sqrt{x^T M x}$ die quadratische Matrixnorm für jede symmetrische, positiv semidefinite Matrix M , während S° und ∂S das offene Innere beziehungsweise den Rand einer gegebenen Menge S bezeichnen. Außerdem verwenden wir $\nabla f(\bar{y})$ und $\nabla^2 f(\bar{y})$ für den Gradienten beziehungsweise die Hesse-Matrix einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt \bar{y} und $\text{diag}([a(i)]_q) := \text{diag}(a(1), \dots, a(q))$ bezeichnet die Diagonalmatrix mit den Auswertungen $a(i)$, $i = 1, \dots, q$, eines indexabhängigen Ausdrucks $a(\cdot)$ auf der Hauptdiagonalen. Für eine gegebene quadratische Matrix M bezeichnet $\lambda(M)$ den Vektor der Eigenwerte sowie $\lambda_i(M)$ den i -ten Eigenwert und $\lambda_{\max}(M)$ den maximalen Eigenwert von M .

2 Grundlagen und Motivation

Zunächst fassen wir einige der benötigten theoretischen und praktischen Grundlagen der modellprädiktiven Regelung linearer Systeme zusammen. Wie bereits in der Einleitung erläutert, basieren modellprädiktive Regelverfahren auf einer modellbasierten Vorausplanung des Systemverhaltens und einer hierauf bezogenen Optimierung der zu verwenden-

den Sequenz an Stellgrößen. Prädiktion und Optimierung erfolgen in der Regel über einen festen Horizont N und werden in jedem diskreten Abtastschritt basierend auf dem aktuellen Systemzustand wiederholt, so dass jeweils nur das erste Element der optimalen Stellgrößentrajektorie auf die Regelstrecke angewandt wird. Beschränkungen auf Eingangs-, Zustands und Ausgangsgrößen lassen sich hierbei in Form von Nebenbedingungen recht einfach direkt in das zu lösende Optimierungsproblem integrieren. Während andere optimierungsbasierte Entwurfsverfahren wie zum Beispiel die lineare \mathcal{H}_2 - oder \mathcal{H}_∞ -optimale Regelung das optimale Regelgesetz für alle möglichen Systemzustände im Voraus bereit stellen, lösen MPC-Verfahren also *online* in jedem Schritt ein endlichdimensionales Optimalsteuerungsproblem für den aktuellen Systemzustand.

Betrachtet werden im Folgenden zeitdiskrete, lineare Systeme der Form

$$x(k+1) = A_D x(k) + B_D u(k), \quad (1)$$

wo $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^m$ die Vektoren der Zustands- und Eingangsgrößen bezeichnen. Ferner sind $A_D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit (A_D, B_D) stabilisierbar gegebene reelle Matrizen, die sich aus einer Diskretisierung der zugehörigen zeitkontinuierlichen Streckendynamik $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ mit einer Diskretisierungsschrittweite von $T_s > 0$ ergeben. Das Optimalsteuerungsproblem standardmäßiger linearer MPC-Verfahren lässt sich dann wie folgt formulieren

$$J^*(x) = \min_{\mathbf{u}} \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_k, u_k) + F(x_N)$$

unter

$$\begin{aligned} u_k &\in \mathcal{U}, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ x_k &\in \mathcal{X}, \quad k = 1, \dots, N, \\ x_N &\in \mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}, \quad x_0 = x(t_k) = x, \\ x_{k+1} &= A_D x_k + B_D u_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei die laufenden Kosten $\ell(x, u)$ sowie die Endzustandsgewichtung $F(x)$ durch $\ell(x, u) = \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2$ und $F(x) = \|x\|_P^2$ für geeignet gewählte Gewichtungsmatrizen $Q = Q^T \succeq 0$, $R = R^T \succ 0$ und $P = P^T \succ 0$ gegeben sind. Ferner bezeichnet $\mathbf{u} := \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ die Sequenz der (optimalen) Stellgrößen und \mathcal{X}_f eine abgeschlossene, konvexe Menge von zulässigen Endzuständen (Endregion). Um nominelle asymptotische Stabilität des geschlossenen MPC-Regelkreises zu zeigen, wird üblicherweise die optimale Kostenfunktion $J^*(x)$ als Lyapunov-Funktion verwendet. Wie in [8] erläutert, erfordert dies meist die Festlegung eines lokal stabilisierenden Reglers $u = Kx$ sowie den Entwurf von \mathcal{X}_f als eine invariante Untermenge des zulässigen Zustandsraumes \mathcal{X} , in welcher der lokale Regler die Stellgrößenbeschränkungen erfüllt. Außerdem muss die Endzustandsgewichtung $F(x)$ so gewählt werden, dass sie innerhalb der Endregion \mathcal{X}_f unter dem Regelgesetz $u = Kx$ eine lokale Kontroll-Lyapunov-Funktion (engl.: control Lyapunov function, CLF) darstellt. Im Hinblick auf zeitdiskrete lineare Systeme und eine beliebige Reglermatrix $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $|\lambda_i(A_D + B_D K)| < 1 \forall i$ sind die folgenden Bedingungen hinreichend für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

Definition 1 (MPC Stabilitätsbedingungen, [8]).

A1: $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}$, \mathcal{X}_f abgeschlossen, $0 \in \mathcal{X}_f$

A2: $Kx \in \mathcal{U} \forall x \in \mathcal{X}_f$

A3: $(A_D + B_D K)x \in \mathcal{X}_f \forall x \in \mathcal{X}_f$

A4: $F((A_D + B_D K)x) - F(x) \leq -\ell(x, Kx) \forall x \in \mathcal{X}_f$.

Für das obige Problem (2) sind diese Bedingungen zum Beispiel erfüllt, wenn die Reglermatrix K und die Endzustandsgewichtungsmatrix P als Lösungen der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung des unbeschränkten LQR-Problems und \mathcal{X}_f als die maximale positiv invariante Zustandsmenge für die lokale Dynamik $x_{k+1} = (A_D + B_D K)x_k$ gewählt werden.

Durch Definition des erweiterten Eingangsvektors $U := [u_0^T, \dots, u_{N-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{Nm}$ und Elimination der prädierten Zustände $x_k, k = 1, \dots, N$ mithilfe der iterierten Systemdynamik

$$x_k(U, x) = A_D^k x + \sum_{j=0}^{k-1} A_D^j B_D u_{k-j-1}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

lässt sich das MPC-Optimalsteuerungsproblem (2) als ein durch den aktuellen Systemzustand x parametrisiertes, gleichmäßig konvexes (engl.: strongly convex), quadratisches Optimierungsproblem (QP) formulieren:

$$J^*(x) = \min_U \frac{1}{2} U^T H U + x^T F U + x^T Y x \quad (4a)$$

$$\text{unter } G U \leq w + E x. \quad (4b)$$

Hierbei ergeben sich die Matrizen $0 \prec H = H^T \in \mathbb{R}^{n_U \times n_U}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n_U}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{q \times n_U}$, $w \in \mathbb{R}^q$ und $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$ mit $n_U = Nm$ ausgehend von Problem (2) durch einfache Matrixoperationen [1]. Im Hinblick auf die Berechnung des optimalen Stellgrößenvektors U kann der rein zustandsabhängige Term $x^T Y x$ in der Regel vernachlässigt werden.

Definition 2. Im Folgenden seien die zulässigen Mengen $\mathcal{U}_N(x)$ und \mathcal{X}_N definiert als $\mathcal{U}_N(x) := \{U \in \mathbb{R}^{n_U} : u_k \in \mathcal{U}, k = 0, \dots, N-1, x_k(U, x) \in \mathcal{X}, k = 1, \dots, N-1, x_N(U, x) \in \mathcal{X}_f\}$ beziehungsweise $\mathcal{X}_N := \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{U}_N(x) \neq \emptyset\}$.

Definition 3. Für $U \in \mathbb{R}^{n_U}$ mit $n_U = Nm$ sei die Projektion $\mathcal{P}(U) : \mathbb{R}^{n_U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert als $\mathcal{P}(U) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} U$.

Die Implementierung modellprädiktiver Regelverfahren wird dann üblicherweise wie folgt vorgenommen:

1. Messung des aktuellen Systemzustands $x = x(k)$.
2. Lösen des QP (4) zur Berechnung von $U^*(x)$.
3. Verwendung von $u(k) = u_0^*(x) = \mathcal{P}(U^*(x))$ in der Regelstrecke.
4. Rückkehr zu 1.

Standardmäßige MPC-Verfahren erfordern daher in jedem Abtastschritt die Lösung eines Optimierungsproblems, was ihr Einsatzgebiet üblicherweise auf Prozesse mit relativ niedrigen Abtastfrequenzen beschränkt und die Ausführung iterativer Optimierungsalgorithmen in der Zielanwendung erfordert. Zudem wird üblicherweise die exakte Berechnung der optimalen Lösung innerhalb der verfügbaren Zeit vorausgesetzt und die Dynamik der unterlagerten Optimierung nicht näher betrachtet. Insbesondere bei MPC-Anwendungen im Umfeld hochdynamischer und/oder eingebetteter Systeme sind diese Voraussetzungen jedoch in den seltensten Fällen gegeben, so dass ein stabilisierendes *MPC-Konzept* allein keine Garantie für die tatsächliche Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist. Bei restriktiven Echtzeit- oder Hardware-Spezifikationen sollte es also vielmehr das Ziel sein, *MPC-Algorithmen* zu entwerfen, welche die Dynamik der unterlagerten Optimierung explizit berücksichtigen und Stabilität des Regelkreises gewissermaßen auch auf der Ebene der Implementierung gewährleisten. In der vorliegenden Arbeit wird ein erster Ansatz für eine neue Klasse von linearen MPC-Algorithmen vorgestellt, die nicht auf iterativen Optimierungsalgorithmen beruhen, sondern die optimale Stellgröße basierend auf der numerischen Integration eines dynamischen Systems berechnen, siehe Abbildung 1(b). Im Folgenden werden zunächst barrierefunktionbasierte MPC-Entwurfsverfahren diskutiert, auf denen der später präsentierte Algorithmus zu großen Teilen aufbaut.

3 Stabilisierende MPC-Verfahren basierend auf logarithmischen Barrierefunktionen

Die grundlegende Idee der barrierefunktionbasierten modellprädiktiven Regelung basiert auf dem gleichen Ansatz wie die viel beachteten Innere-Punkte-Verfahren der konvexen Optimierung, in denen eventuell vorhandene Ungleichheitsnebenbedingungen unter Verwendung geeignet gewählter Strafterme, so genannter Barrierefunktionen, und einem zugehörigen Gewichtungsparemeter in die zu minimierende Kostenfunktion integriert werden. Im Gegensatz zum Ursprungsproblem enthält das resultierende Optimierungsproblem keine Nebenbedingungen und kann mithilfe effizienter Optimierungsverfahren, wie zum Beispiel der Newton-Methode, gelöst werden. Es kann zudem gezeigt werden, dass die Lösung des modifizierten Problems der exakten Lösung des ursprünglichen Problems entspricht, wenn der Barrierefunktionengewichtungsparemeter gegen Null konvergiert [2].

Unsere Motivation für den Einsatz barrierefunktionbasierter Methoden in der modellprädiktiven Regelung rührt von dem Wunsch her, dass der in Abschnitt 4 vorgestellte zeitkontinuierliche Algorithmus der Lösung des MPC-Optimalsteuerungsproblems, welches ja nichts anderes ist als ein parameterabhängiges beziehungsweise zeitvariantes Optimierungsproblem, asymptotisch nachfolgen soll. Dies bedeutet jedoch implizit, dass der Algorithmus in der Lage sein muss, der Lösung der unterlagerten Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingungen (KKT-Bedingungen) asymptotisch nachzueffolgen. Für das Ursprungsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingungen sind diese algebraischen Bedingungen jedoch nicht glatt, was den Entwurf eines asymptotischen Folgealgorithmus erheblich erschwert. Im Gegensatz hierzu führen barrierefunktionbasierte Problemformulierun-

gen zu einer *geglätteten* Version der KKT-Bedingungen, was uns in Abschnitt 4 erlaubt, einen zeitkontinuierlichen, gradientenbasierten Algorithmus mit asymptotischem Folgeverhalten zu entwerfen.

Um die Verwendung des Barriere-Verfahrens für die modellprädiktive Regelung linearer Systeme zu diskutieren, betrachten wir in Anlehnung an [13] das folgende modifizierte MPC-Optimalsteuerungsproblem.

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*(x) = \min_{\mathbf{u}} \left\{ \tilde{\ell}_0(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{\ell}(x_k, u_k) + \tilde{F}(x_N) \right\} \\ \text{unter } x_{k+1} = A_D x_k + B_D u_k, \quad x_0 = x(t_k) = x, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die modifizierten Kostenfunktionsterme durch

$$\tilde{\ell}_0(x, u) := \ell(x, u) + \varepsilon B_u(u) \quad (6a)$$

$$\tilde{\ell}(x, u) := \ell(x, u) + \varepsilon B_u(u) + \varepsilon B_x(x) \quad (6b)$$

$$\tilde{F}(x) := F(x) + \varepsilon B_f(x). \quad (6c)$$

gegeben sind. Hierbei sind $B_u(\cdot)$, $B_x(\cdot)$ und $B_f(\cdot)$ geeignet gewählte Barrierefunktionen mit Definitionsbereichen \mathcal{U}° , \mathcal{X}° und \mathcal{X}_f° und $B_u(u) \rightarrow \infty$ für $u \rightarrow \partial\mathcal{U}$, $B_x(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \partial\mathcal{X}$ und $B_f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \partial\mathcal{X}_f$. Der skalare Parameter $\varepsilon > 0$ bezeichnet den Barrierefunktionengewichtungsparameter, welcher den Einfluss der Barrierefunktionswerte auf die Kostenfunktion beeinflusst. Wie in [9] und [13] hervorgehoben, ist es meist sinnvoll, die Funktionen $B_u(\cdot)$, $B_x(\cdot)$ und $B_f(\cdot)$ aus der Klasse der selbstkonkordanten Barrierefunktionen zu wählen, welche einige hilfreiche theoretische Eigenschaften besitzen und sich sehr gut für die numerische Lösung des modifizierten Problems mittels Newton-basierter Verfahren eignen (Anm.: eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist selbstkonkordant, wenn $|f'''(x)| \leq 2f''(x)^{3/2} \forall x \in \text{dom } f$) [9]. Im Folgenden werden ausschließlich logarithmische Barrierefunktionen betrachtet, welche zur Klasse der stark selbstkonkordanten Funktionen gehören. Wie bereits erwähnt, konvergiert die Lösung des modifizierten Optimierungsproblems (5) für einen gegebenen Zustandsvektor x und $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Lösung des ursprünglichen Problems (2). Kleine Werte des Gewichtungsparmeters ε führen allerdings meist zu schlecht konditionierten Problemen und eignen sich daher nur bedingt für die praktische Implementierung [2]. Aus diesem Grund wäre es wünschenswert, die Endzustandsgewichtung P , die Endregion \mathcal{X}_f und die Barrierefunktionen $B_u(\cdot)$, $B_x(\cdot)$ und $B_f(\cdot)$ so zu wählen, dass die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei Einsatz eines auf (5) basierenden MPC-Verfahrens für beliebige Werte des Parameters $\varepsilon > 0$ garantiert ist. Im Hinblick auf die Verwendung standardmäßiger MPC-Stabilitätskonzepte, welche die optimalen Kosten $\tilde{J}^*(x)$ als Lyapunov-Funktion für den geschlossenen Regelkreis verwenden, ergeben sich direkt die folgenden Bedingungen: (i) $\tilde{J}(\mathbf{u}, x)$ muss eine positiv definite Funktion mit globalem Minimum $\tilde{J}(\mathbf{0}, 0) = 0$ sein; und (ii) die Bedingungen A1–A4 in Definition 1 müssen erfüllt sein, d.h. insbesondere muss $\tilde{F}(x) = x^T P x + \varepsilon B_f(x)$ eine lokale Kontroll-Lyapunov-Funktion für den lokalen Regler $u = Kx$ in der zugehörigen Endregion \mathcal{X}_f darstellen.

In Anlehnung an [13] führen wir das Konzept der gradientenzentrierten Barrierefunktionen ein, welches uns erlaubt, die Erfüllung der obigen Bedingung (i) für jede konvexe Barrierefunktion zu garantieren.

Definition 4 (Gradientenzentrierte Barrierefunktion). *Sei $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Barrierefunktion auf einer offenen konvexen Menge D mit $0 \in D$. Dann bezeichnen wir die als*

$$\bar{B}(z) = B(z) - B(0) - [\nabla B(0)]^T z \quad (7)$$

definierte Funktion $\bar{B} : D \rightarrow \mathbb{R}$ als die gradientenzentrierte Barrierefunktion von B um den Ursprung. Es ist offensichtlich, dass $\bar{B}(z)$ per Definition sowohl $\bar{B}(0) = 0$ als auch $\nabla \bar{B}(0) = 0$ erfüllt.

Im Folgenden nehmen wir $B_x(x)$, $B_u(u)$ und $B_f(x)$ als gradientenzentrierte Barrierefunktionen für die Definitionsbereiche \mathcal{U}° , \mathcal{X}° und \mathcal{X}_f° an, so dass $\tilde{J}(\mathbf{u}, x)$ eine positiv definite Funktion mit Minimum $\tilde{J}(\mathbf{0}, 0) = 0$ ist und somit Bedingung (i) erfüllt. Es ist hervorzuheben, dass dies für allgemeine, unzentrierte Barrierefunktionen nicht der Fall ist, so dass der Zustand des geregelten Systems für $\varepsilon > 0$ nicht zum Ursprung konvergiert, siehe [13] für ein Beispiel. Wie auch beim standardmäßigen MPC-Verfahren lassen sich die Stabilitätsbedingungen A1–A3 durch geeignete Wahl eines stabilisierenden lokalen Regelgesetzes und einer invarianten Endregion relativ einfach erfüllen. Wie im Folgenden näher erläutert, besteht die Herausforderung jedoch im Allgemeinen vor allem darin, die CLF-Bedingung an $\tilde{F}(x)$ zu erfüllen, da sowohl die Barrierefunktionen $B_x(x)$, $B_u(u)$ für die Zustands- und Eingangsgrößen als auch die Barrierefunktion $B_f(x)$ der Endzustandsbeschränkung mit in die Bedingung A4 eingehen.

Gegeben sei ein beliebiges stabilisierendes Regelgesetz $u = Kx$ mit $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Matrix A_K sei definiert als $A_K := A_D + B_D K$ mit $|\lambda_i(A_D + B_D K)| < 1 \forall i$ und

$$\mathcal{X}_K := \{x \in \mathcal{X} : Kx \in \mathcal{U}\} \quad (8)$$

sei die Menge der zulässigen Zustände für die gegebenen Reglermatrix K . Außerdem bezeichne die Funktion

$$B_K(x) = B_x(x) + B_u(Kx) \quad (9)$$

die gradientenzentrierte Barrierefunktion für die Menge \mathcal{X}_K° . Hiermit ergibt sich die Stabilitätsbedingung A4 für Problem (5) zu

$$\|A_K x\|_P^2 - \|x\|_P^2 + \|x\|_Q^2 + \|Kx\|_R^2 + \varepsilon B_f(A_K x) - \varepsilon B_f(x) + \varepsilon B_K(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_f^\circ. \quad (10)$$

Im Folgenden werden wir zeigen, wie sich Bedingung (10) und damit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises durch geeignete Wahl der Parameter K , P und X_f für beliebige $\varepsilon > 0$ garantieren lässt. Neben dem Design der Endregion \mathcal{X}_f ist ein maßgebliches Element hierbei die lokale Abschätzung der Barrierefunktion $B_K(x)$ durch eine quadratische Funktion, deren Einfluss dann in der Berechnung der Matrix P berücksichtigt werden kann. Wir fassen zunächst kurz einen ähnlichen, in [13] präsentierten, Ansatz zusammen, bevor wir ein neues Entwurfsverfahren vorstellen, welches unter anderem eine Maximierung der verwendeten Endregion \mathcal{X}_f erlaubt.

3.1 Selbstkonkordanzbasierter Ansatz von Wills & Heath [13]

In [13] präsentieren die Autoren ein stabilisierendes barrierefunktionenbasiertes MPC-Verfahren für zeitdiskrete nichtlineare Systeme, welches einige Eigenschaften selbstkonkordanter Funktionen und ihrer zugehörigen Dikin-Ellipsoide ausnutzt.

Definition 5 (Dikin-Ellipsoid [9]). *Sei $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine selbstkonkordante Barrierefunktion auf einer offenen Menge D und sei $\bar{z} \in D$. Dann bezeichnen wir die Menge*

$$W_{B,r}(\bar{z}) := \left\{ z : \|z - \bar{z}\|_{\nabla^2 B(\bar{z})}^2 \leq r^2 \right\} \quad (11)$$

als das Dikin-Ellipsoid von $B(\cdot)$ mit Radius r um den Punkt \bar{z} .

Die Autoren von [13] nutzen für den Entwurf ihres MPC-Verfahrens die für allgemeine selbstkonkordante Barrierefunktionen geltende Beziehung

$$B(z) \leq \frac{1}{2(1-r)^2} z^T \nabla^2 B(0) z \quad \forall z \in W_{B,r}(0), \quad r \in (0, 1), \quad (12)$$

siehe auch Theorem 2.1.1 in [9], welche es im vorliegenden Fall erlaubt, eine quadratische Abschätzung für die Barrierefunktion $B_K(x)$ anzugeben. Im Fall linearer Systeme lässt sich für gegebenes K und festes $\beta \in (0, 1)$ die Endregion \mathcal{X}_f basierend auf (12) als das Ellipsoid $\mathcal{X}_f(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_P^2 \leq \alpha^2\}$ mit zugehöriger gradientenzentrierter Barrierefunktion

$$B_f(x) = \ln(\alpha^2) - \ln(\alpha^2 - \|x\|_P^2). \quad (13)$$

wählen, wobei P die positiv definite Lösung der diskreten algebraischen Lyapunov-Gleichung

$$P = A_K^T P A_K + Q + K^T R K + \frac{\varepsilon}{2(1-\beta)^2} \nabla^2 B_K(0) \quad (14)$$

ist und $\alpha \leq \alpha^*$ mit $\alpha^* = \sqrt{\beta^2 / \lambda_{\max}(P^{-1} \nabla^2 B_K(0))}$ so gewählt wird, dass $\mathcal{X}_f(\alpha) \subset W_{B_K, \beta}(0) \subset X_K$ gilt [13]. Im Prinzip wird \mathcal{X}_f hier also als eine Untermenge des offenen Einheits-Dikin-Ellipsoids gewählt, in dem (12) verwendet werden kann, um die Barrierefunktion $B_K(x)$ lokal durch eine quadratische Funktion abzuschätzen. Indem P als Lösung der Lyapunov-Gleichung (14) gewählt wird, kann der Einfluss von $B_K(x)$ gewissermaßen durch die Gewichtung des Endzustands kompensiert und damit Invarianz der Endregion \mathcal{X}_f erreicht werden. Die Invarianz von \mathcal{X}_f garantiert zudem die Abnahmebedingung $B_f(A_K x) - B_f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}_f^\circ$ für die Barrierefunktion $B_f(x)$. Wie in [13] in größerer Ausführlichkeit gezeigt, garantiert diese Wahl der MPC-Parameter tatsächlich die Erfüllung der Stabilitätsbedingungen A1 – A4 und damit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Ein Nachteil des beschriebenen Ansatzes ist allerdings durch den Umstand gegeben, dass die Größe der Endregion \mathcal{X}_f durch die Größe des Dikin-Ellipsoids $W_{B_K, \beta}(0)$ begrenzt ist, welches unter Umständen erheblich kleiner sein kann als die maximal zulässige Menge \mathcal{X}_K . Dies wird in Abschnitt 5 anhand numerischer Beispiel-Systeme näher veranschaulicht. Durch geeignete Anpassung des Parameters α lässt sich der Ansatz auch für den Entwurf barrierefunktionenbasierter nichtlinearer MPC-Verfahren verwenden [13].

3.2 Ein neuer Ansatz mit vergrößerter Endregion

Im Folgenden präsentieren wir einen neuen Ansatz für den Entwurf stabilisierender MPC-Verfahren basierend auf gradientenzentrierten logarithmischen Barrierefunktionen. Im Gegensatz zu dem zuvor skizzierten Ansatz aus [13], beruht dieser nicht auf Verwendung des Dikin-Ellipsoids und erlaubt daher, die Endregion \mathcal{X}_f als das maximale positiv invariante und in der zulässigen Menge \mathcal{X}_K enthaltene Ellipsoid zu wählen. Prinzipiell ermöglichen die vorgestellten Ergebnisse einen Kompromiss zwischen der Größe der resultierenden Endregion und dem Einfluss der für die Stabilität nötigen Endzustandsgewichtung auf die zu minimierende Kostenfunktion. Solange die Nebenbedingungen in Form linearer Ungleichungen gegeben sind, lassen sich die folgenden Ergebnisse mit einigen kleinen Modifikationen auch auf den MPC-Entwurf für die Klasse der nichtlinearen Systeme erweitern.

Annahme 1. Die Zustands- und Eingangsbeschränkungen sind in Form kompakter, polytoper und den Ursprung enthaltender Mengen gegeben, d.h. $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : C_u u \leq d_u\}$ und $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : C_x x \leq d_x\}$ wobei $C_x \in \mathbb{R}^{q_x \times n}$, $C_u \in \mathbb{R}^{q_u \times m}$ und $d_u > 0$, $d_x > 0$. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die zulässigen Mengen \mathcal{X}_N und $\mathcal{U}_N(x)$ ein nichtleeres Inneres haben, d.h., $\mathcal{X}_N^\circ \neq \emptyset$ und $\mathcal{U}_N^\circ(x) \neq \emptyset \forall x \in \mathcal{X}_N^\circ$.

Betrachtet werden nun die folgenden gradientenzentrierten logarithmischen Barrierefunktionen für die gegebenen polytopen Zustands- und Eingangsbeschränkungen:

$$B_{x,i}(x) = -\ln(-c_{x,i}^T x + d_{x,i}) + \ln(d_{x,i}) - \frac{c_{x,i}^T x}{d_{x,i}} \quad (15a)$$

$$B_{u,j}(u) = -\ln(-c_{u,j}^T u + d_{u,j}) + \ln(d_{u,j}) - \frac{c_{u,j}^T u}{d_{u,j}} \quad (15b)$$

mit $i = 1, \dots, q_x$ und $j = 1, \dots, q_u$. Es ist direkt ersichtlich, dass die Barrierefunktionen für die Eingangsbeschränkungen (15b) sich bei Verwendung des lokalen Regelgesetzes $u = Kx$ mittels $c_x^T = c_u^T K$ als zustandsabhängige Barrierefunktionen der Form (15a) formulieren lassen. Wir betrachten zunächst das folgende Lemma, welches eine quadratische Abschätzung für allgemeine Barrierefunktionen der obigen Form auf einem zugehörigen, parametrisierten Halbraum liefert.

Lemma 1. Sei $B_i(x) = -\ln(-c_i^T x + d_i) + \ln(d_i) - \frac{1}{d_i} c_i^T x$ eine gradientenzentrierte Barrierefunktion für eine Nebenbedingung der Form $c_i^T x \leq d_i$ mit $c_i^T \neq 0$, $d_i > 0$ und sei $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix $M_i := c_i c_i^T$. Dann gilt für jeden skalaren Parameter $\gamma > \frac{1}{2d_i^2}$, dass

$$B_i(x) \leq \gamma x^T M_i x \quad \forall x \in \mathcal{H}_i, \quad (16)$$

wobei \mathcal{H}_i den Halbraum $\mathcal{H}_i := \{x \in \mathbb{R}^n : c_i^T x \leq d_i - \frac{1}{2\gamma d_i}\}$ bezeichnet.

Beweis. Einsetzen der Definitionen von $B_i(x)$ und M_i in (16) ergibt

$$-\ln(-c_i^T x + d_i) + \ln(d_i) - \frac{1}{d_i} c_i^T x \leq \gamma x^T c_i c_i^T x, \quad (17)$$

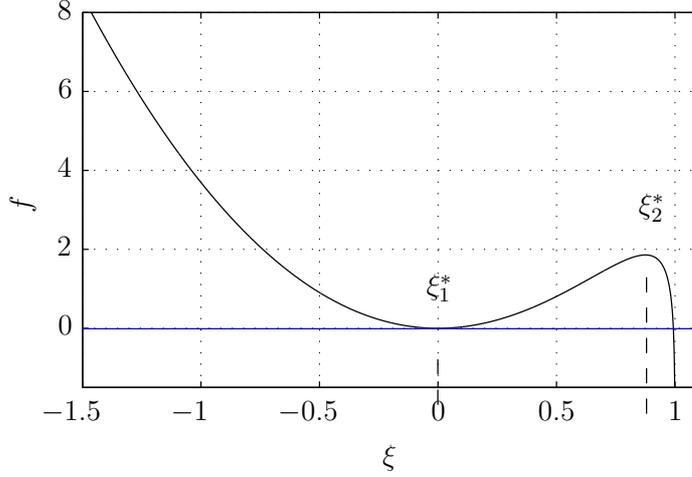


Abbildung 2: Die Funktion $f(\xi)$ für $d_i = 1$ und $\gamma = 4$.

oder nach Umformung

$$\ln\left(1 - \frac{1}{d_i} c_i^T x\right) + \frac{1}{d_i} c_i^T x + \gamma x^T c_i c_i^T x \geq 0. \quad (18)$$

Wir ersetzen nun $c_i^T x$ durch ξ und betrachten die Funktion $f : (-\infty, d_i) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$f(\xi) = \ln\left(1 - \frac{1}{d_i} \xi\right) + \frac{1}{d_i} \xi + \gamma \xi^2 \quad (19)$$

mit $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) = \infty$ sowie $\lim_{\xi \rightarrow d_i} f(\xi) = -\infty$. Für diese Funktion lassen sich mithilfe der ersten Ableitung direkt die beiden lokalen Extrema

$$\xi_1^* = 0 \quad \text{und} \quad \xi_2^* = d_i - \frac{1}{2\gamma d_i} \quad (20)$$

berechnen, welche für $\gamma > \frac{1}{2d_i^2}$ die Beziehung $0 = \xi_1^* < \xi_2^* < d_i$ erfüllen. Diese Wahl von γ garantiert zudem

$$f''(\xi_1^*) = 2\gamma - \frac{1}{d_i^2} > 0, \quad f''(\xi_2^*) = 1 - 2\gamma d_i^2 < 0, \quad (21)$$

so dass $\xi_1^* = 0$ ein lokales Minimum und $\xi_2^* = d_i - \frac{1}{2\gamma d_i}$ ein lokales Maximum der Funktion $f(\xi)$ darstellt. Hieraus folgt direkt, dass $f(\xi) \geq 0 \forall \xi \in (-\infty, \xi_2^*]$ gilt, siehe das Beispiel in Abbildung 2. Resubstitution von $c_i^T x$ für ξ zeigt letztendlich $\gamma x^T M_i x - B_i(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{H}_i$ und vollendet den Beweis. \square

Anmerkung 1. Durch Variation des Parameters γ kann die Grenze des Halbraumes \mathcal{H}_i gezielt verschoben werden. Eine Wahl von $\gamma \leq \frac{1}{2d_i^2}$ würde zu einem unerwünschten Halbraum der Form $\tilde{\mathcal{H}}_i := \{x \in \mathbb{R}^n : c_i^T x \leq 0\}$ führen, welcher den Ursprung nicht mehr im Inneren enthält. Andererseits kann die ursprüngliche Nebenbedingung $c_i^T x \leq d_i$ durch Erhöhung von γ beliebig nah approximiert werden. Entsprechend ist ein großes γ notwendig, wenn $d_i > 0$ nahe an Null liegt.

Annahme 2. Die Barrierefunktionen $B_x(x)$ und $B_u(u)$ in Problem (5) sind als $B_x(x) = \sum_{i=1}^{q_x} B_{x,i}(x)$ und $B_u(u) = \sum_{j=1}^{q_u} B_{u,j}(u)$ gegeben, wobei $B_{x,i}(x)$ und $B_{u,j}(u)$ gradientenzentrierte Barrierefunktionen der Form (15) sind. Hieraus ergibt sich eine kombinierte Barrierefunktion $B_K(x)$ der Form $B_K(x) = \sum_{i=1}^{q_x} B_{x,i}(x) + \sum_{j=1}^{q_u} B_{u,j}(Kx)$.

Lemma 2. Annahme 2 sei erfüllt. Ferner seien die Matrizen $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $M_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definiert als $M_x := \sum_{i=1}^{q_x} c_{x,i} c_{x,i}^T$ beziehungsweise $M_u = \sum_{j=1}^{q_u} c_{u,j} c_{u,j}^T$ und $\bar{\gamma}$ sei ein positiver Skalar mit $\bar{\gamma} > \frac{1}{2d_{\min}^2}$, wobei $d_{\min} := \min\{d_{x,1}, \dots, d_{x,q_x}, d_{u,1}, \dots, d_{u,q_u}\}$. Dann gilt für die kombinierte Barrierefunktion $B_K(x)$ die folgende quadratische Abschätzung

$$B_K(x) \leq \bar{\gamma} x^T \left(M_x + K^T M_u K \right) x \quad \forall x \in \mathcal{P}_K, \quad (22)$$

wobei $\mathcal{P}_K \subset \mathcal{X}_K$ das konvexe Polytop

$$\mathcal{P}_K := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} c_{x,i}^T x \leq d_{x,i} - \frac{1}{2\bar{\gamma}d_{x,i}} \\ c_{u,j}^T Kx \leq d_{u,j} - \frac{1}{2\bar{\gamma}d_{u,j}} \end{array} \right\} \quad (23)$$

ist, welches den Durchschnitt aller Halbräume \mathcal{H}_i aus Lemma 1 mit $i = 1, \dots, q_x + q_u$ darstellt.

Beweis. Die obere Abschätzung ergibt sich aus direkter Anwendung von Lemma 1 auf die einzelnen Terme von $B_K(x)$, siehe Annahme 2, und Aufsummieren der jeweiligen quadratischen Ausdrücke. Zudem garantiert die Wahl von $\bar{\gamma}$, dass jede einzelne quadratische Abschätzung in der polytopen Region $\mathcal{P}_K = \bigcup_i^{q_x+q_u} \mathcal{H}_i$ gültig ist. \square

Anmerkung 2. In Anlehnung an Anmerkung 1 kann die Menge \mathcal{X}_K durch Erhöhung des Parameters $\bar{\gamma}$ beliebig genau durch das Polytop \mathcal{P}_K approximiert werden. Dieses Vorgehen führt allerdings auch zu einer Zunahme der Abschätzung für $B_K(x)$ und damit, wie im Folgenden ersichtlich, unter Umständen zu einer erhöhten Gewichtung des Endzustands. Natürlich ist es auch möglich, verschiedene γ_i anstelle eines einzelnen $\bar{\gamma}$ zu verwenden, was insbesondere im Falle stark unterschiedlicher d_i sinnvoll sein kann.

Im Folgenden benutzen wir die obige Abschätzung aus Lemma 2, um die Parameter K , P , \mathcal{X}_f und $B_f(x)$ so zu entwerfen, dass asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises für das zeitdiskrete System (1) garantiert ist. Im Gegensatz zu dem in [13] vorgestellten Ansatz verwenden wir für die Definition der Endregion \mathcal{X}_f nicht die Gewichtungsmatrix P , sondern eine separate Matrix P_f . Diese Trennung erlaubt eine Volumenmaximierung der Endregion \mathcal{X}_f innerhalb des für die benötigten Abschätzungen zulässigen Polytops \mathcal{P}_K .

Die Matrizen K und $P \succ 0$ seien durch die Lösungen der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung

$$\begin{aligned} K &= - \left(\tilde{R} + B_D^T P B_D \right)^{-1} B_D^T P A_D \\ P &= (A_D + B_D K)^T P (A_D + B_D K) + K^T \tilde{R} K + \tilde{Q} \end{aligned} \quad (24)$$

gegeben, wobei $\tilde{Q} = Q + \varepsilon\bar{\gamma}M_x$ und $\tilde{R} = R + \varepsilon\bar{\gamma}M_u$ für die in Lemma 2 definierten Matrizen M_x und M_u . Ferner sei die eingesetzte Endregion definiert als

$$\mathcal{X}_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{P_f} \leq 1 \right\} \quad (25)$$

für eine noch zu entwerfende Matrix $P_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_f = P_f^T \succ 0$. Um asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises garantieren zu können, soll die Matrix P_f nun so gewählt werden, dass die zugehörige Endregion \mathcal{X}_f invariant unter dem lokalen Regelgesetz $u = Kx$ ist.

Dafür muss P_f die Lyapunov-Ungleichung $A_K^T P_f A_K - P_f \preceq 0$ erfüllen, wobei A_K erneut als $A_K := A_D + B_D K$ definiert ist. Zusätzlich wäre es wünschenswert, das Volumen des Ellipsoids \mathcal{X}_f und damit die Größe der Endregion unter der Bedingung zu maximieren, dass diese im Polytop \mathcal{P}_K enthalten ist, in welchem ja unsere Abschätzung für $B_K(x)$ gilt, siehe (23). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Polytop \mathcal{P}_K in normierter Form gegeben, d.h. $\mathcal{P}_K = \{x \in \mathbb{R}^n : c_k^T x \leq 1, k = 1, \dots, r\}$. In diesem Fall lässt sich die Bedingung $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{P}_K$ als $c_k^T P_f^{-1} c_k \leq 1 \forall k = 1, \dots, r$ ausdrücken. Zudem ist das Volumen des Ellipsoids \mathcal{X}_f proportional zu $(\det P_f^{-1})^{\frac{1}{2}}$ und lässt sich somit durch Minimierung von $-\det P_f^{-1}$ maximieren. Durch Einführung der Variable $X := P_f^{-1}$ ergibt sich für die Berechnung der optimalen Ellipsoid-Matrix $P_f = X^{-1}$ somit das folgende konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & -\log \det X \\ \text{s.d.} \quad & c_k^T X c_k \leq 1, \forall k = 1, \dots, r \\ & X \succ 0, \begin{bmatrix} X & A_K X \\ X A_K^T & X \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Hierbei wurden das Schur-Komplement sowie die Monotonie der Logarithmus-Funktion verwendet, um die erwähnte Lyapunov-Ungleichung einzubinden und das Problem in konvexer Form zu formulieren ($\det(\cdot)$ ist eine logarithmisch-konkave Funktion).

Die gradientenzentrierte Barrierefunktion für die Endregion \mathcal{X}_f sei schließlich durch

$$B_f(x) = -\ln(1 - \|x\|_{P_f}^2) \quad (27)$$

gegeben, wobei die Matrix $P_f = X^{-1}$ über die positiv definite Lösung X von (26) definiert ist.

Theorem 1. *Annahme 1, Annahme 2 sowie die Annahmen in Lemma 2 seien erfüllt und die stabilisierende lokale Reglermatrix K und die Endzustandsgewichtungsmatrix P seien durch (24) definiert. Ferner seien die ellipsoide Endregion und die zugehörige Barrierefunktion $B_f(x)$ durch (25) beziehungsweise (27) gegeben. Dann ist der Ursprung des Systems (1) unter dem MPC-Regelgesetz $u(x) = u_0^*(x)$ basierend auf wiederholter Lösung des barrierefunktionenbasierten Optimalsteuerungsproblems (5) für beliebige Werte des Gewichtungsparameters $\varepsilon > 0$ asymptotisch stabil für alle $x_0 \in \mathcal{X}_N^0$.*

Beweis. Im Folgenden beweisen wir die asymptotische Stabilität des barrierefunktionenbasierten MPC-Verfahrens durch Verwendung der optimalen Kostenfunktion $\tilde{J}^*(x)$ als Lyapunov Funktion des geschlossenen Regelkreises, siehe [8] und [13]. Die Bedingungen A1, A2 und A3 aus Definition 1 sind aufgrund des gezielten Entwurfs der invarianten Endregion \mathcal{X}_f für jede beliebige Reglermatrix K erfüllt. Es sei nun $x^+ = (A_D + B_D K)x = A_K x$. Dann gilt ferner für alle $x \in \mathcal{X}_f^\circ$:

$$\tilde{F}(x^+) - \tilde{F}(x) + \tilde{\ell}(x, Kx) = \|x^+\|_P^2 - \|x\|_P^2 + \|x\|_Q^2 + \|Kx\|_R^2 + \varepsilon B_K(x) + \varepsilon B_f(x^+) - \varepsilon B_f(x) \quad (28)$$

Aufgrund von Lemma 2 und der geeigneten Wahl von K , P und \mathcal{X}_f in (24) beziehungsweise (25), haben wir $\|x^+\|_P^2 - \|x\|_P^2 + \|x\|_Q^2 + \|Kx\|_R^2 + \varepsilon B_K(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathcal{X}_f^\circ$ und damit

$$\tilde{F}(x^+) - \tilde{F}(x) + \tilde{\ell}(x, Kx) \leq \varepsilon B_f(x^+) - \varepsilon B_f(x) . \quad (29)$$

Da P_f als Lösung von (26) die Lyapunov-Ungleichung $A_K^T P_f A_K - P_f \leq 0$ erfüllt, gilt zudem

$$B_f(x^+) - B_f(x) = \ln \left(\frac{1 - \|x\|_{P_f}^2}{1 - \|x\|_{A_K^T P_f A_K}^2} \right) \leq \ln \left(\frac{1 - \|x\|_{P_f}^2}{1 - \|x\|_{P_f}^2} \right) = 0 \ \forall x \in \mathcal{X}_f^\circ . \quad (30)$$

Damit ergibt sich $\tilde{F}(x^+) - \tilde{F}(x) \leq -\tilde{\ell}(x, Kx) \ \forall x \in \mathcal{X}_f^\circ$ und die CLF-Bedingung A4 ist für beliebige $\varepsilon > 0$ erfüllt. Wie in [8] gezeigt, folgt hieraus direkt

$$\tilde{J}^*(x^+) - \tilde{J}^*(x) \leq -\tilde{\ell}_0(x, u_0^*(x)) , \quad (31)$$

womit $\tilde{J}^*(x)$ eine Lyapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises darstellt. \square

Unter Annahme der Existenz einer zulässigen initialen Lösung, also für $x_0 \in \mathcal{X}_N^\circ$, garantiert das vorgestellte barrierefunktionenbasierte MPC-Verfahren damit die asymptotische Stabilität des Ursprungs von System (1) für beliebige Werte des Gewichtungsparameters $\varepsilon > 0$. Wie in Bemerkung 2 erwähnt, erlaubt der diskutierte Ansatz durch Anpassung des Parameters $\bar{\gamma}$ grundsätzlich einen Kompromiss zwischen der Größe der verwendeten Endregion $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{P}_K \subset \mathcal{X}_K$ und dem Einfluss der Endzustandsgewichtung $x^T P x$. Es ist jedoch zu beachten, dass die Veränderung von $\bar{\gamma}$ auch die lokale Reglermatrix K und damit die Menge \mathcal{X}_K direkt beeinflusst. Ein höherer Wert für $\bar{\gamma}$ resultiert also nicht in allen Fällen in einer größeren Endregion. Für unbeschränkte Probleme gilt zudem $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ und damit $\tilde{Q} \rightarrow Q$, $\tilde{R} \rightarrow R$, womit K und P sich als die Lösungen des standardmäßigen LQR-Problems ergeben, siehe Gleichung (24).

4 Ein barrierefunktionenbasierter zeitkontinuierlicher MPC-Algorithmus

Im Folgenden präsentieren und diskutieren wir einen zeitkontinuierlichen Algorithmus, der die Implementierung des im obigen Abschnitt vorgestellten barrierefunktionenbasierten MPC-Ansatzes ohne den Einsatz iterativer Optimierungsverfahren erlaubt. Stattdessen ergibt sich die optimale Stellgröße als abgetasteter Ausgang eines zeitkontinuierlichen

dynamischen Systems, dessen Zustand der optimalen Lösung des Optimalsteuerungsproblems (5) asymptotisch nachfolgt. Wie bereits in der Einleitung erläutert, wird das zugrunde liegende asymptotische Folgeverhalten durch die Verwendung geeigneter Barrierefunktionen und der daraus resultierenden ‘‘Glättung’’ der Optimalitätsbedingungen für das ursprüngliche Problem (2) ermöglicht. Mit dem Ziel einer kompakteren Darstellung verwenden wir im Folgenden eine matrizenbasierte Formulierung von Problem (5), welche der QP-Formulierung (4) sehr ähnlich ist. Zu diesem Zweck lassen sich die Barrierefunktionen der Eingangs- und Zustandsbeschränkungen in der Form

$$B_c^{QP}(U, x) := - \sum_{i=1}^q \left(\ln(-G^i U + E^i x + w^i) - \ln(w^i) + \frac{G^i U - E^i x}{w^i} \right) \quad (32)$$

ausdrücken, wobei G , E und w analog zu den Matrizen der QP-Formulierung (4) definiert sind und M^i die i -te Zeile der jeweiligen Matrix M bezeichnet. Durch abermalige rekursive Anwendung der Systemgleichungen (1) lässt sich der quadratische Ausdruck $\|x_N\|_{P_f}^2$ zudem als Funktion der Optimierungsvariable U und des Zustandsvektors x schreiben:

$$\|x_N\|_{P_f}^2 = \varphi(U, x) := x^T D x + 2x^T L U + U^T S U, \quad (33)$$

wobei die Matrizen $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n_U}$ und $S \in \mathbb{R}^{n_U \times n_U}$ durch

$$\begin{aligned} D &:= A_D^{N^T} P_f A_D^N, & L &:= A_D^{N^T} P_f [A_D^{N-1} B_D, \dots, B_D] \\ S &:= [A_D^{N-1} B_D, \dots, B_D]^T P_f [A_D^{N-1} B_D, \dots, B_D]. \end{aligned}$$

gegeben sind. Die Barrierefunktion der Endregionsbeschränkung (25) kann somit als

$$B_f^{QP}(U, x) := - \ln(1 - \varphi(U, x)). \quad (34)$$

formuliert werden. Basierend hierauf ergibt sich folgende kompakte Darstellung des barrierefunktionenbasierten Optimalsteuerungsproblems

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*(x) &= \min_U \tilde{J}(U, x) \quad \text{mit} & (35) \\ \tilde{J}(U, x) &= \frac{1}{2} U^T H U + x^T F U + x^T Y x + \varepsilon B_c^{QP}(U, x) + \varepsilon B_f^{QP}(U, x). \end{aligned}$$

Im Hinblick auf den Vektor der optimalen Eingangsgrößen sind die Probleme (35) und (5) äquivalent, so dass die optimale Lösung $\tilde{U}^*(x)$ von (35) basierend auf Theorem 1 in einem asymptotisch stabilisierenden Regelgesetz $u(x) = u_0^*(x) = \mathcal{P}(\tilde{U}^*(x))$ resultiert. Das folgende Newton-basierte Verfahren erlaubt die Bestimmung von $\tilde{U}^*(x)$ als Lösung eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems und somit ohne den Einsatz iterativer Optimierungsalgorithmen.

Theorem 2. Für $x_0 \in \mathcal{X}_N^\circ$ sei angenommen, dass $x(t)$ sich entsprechend der Dynamik $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ verhält, wobei $u(t)$ eine beliebige (messbare) zeitabhängige Funktion sei, welche $x(t) \in \mathcal{X}_N^\circ \quad \forall t \geq t_0$ garantiert. Dann erfüllt die Lösung $U(t)$ des dynamischen Systems

$$\dot{U} = - \left(\frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial U^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{J}(U, x)}{\partial U} + \frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial x \partial U} \dot{x} \right) \quad (36)$$

für jeden zulässigen Startwert $U_0 \in \mathcal{U}_N^\circ(x_0)$ die Bedingung $U(t) \in \mathcal{U}_N^\circ(x(t)) \forall t \geq t_0$ und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen die eindeutige optimale Lösung $\tilde{U}^*(x(t))$ von (35). Für den optimalen Startwert $U_0 = \tilde{U}^*(x_0)$ folgt die Lösung $U(t)$ zudem der optimalen Lösung von (35) exakt nach, d.h. $U(t) \equiv \tilde{U}^*(x(t)) \forall t \geq t_0$.

Beweis. Betrachtet wird im Folgenden die positiv semidefinite Funktion

$$W(U, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{J}(U, x)^T}{\partial U} \frac{\partial \tilde{J}(U, x)}{\partial U}, \quad (37)$$

welche quadratisch in $\nabla_U \tilde{J}(U, x)$ ist und daher $W(U, x) \geq 0$, $W(U, x) = 0 \Leftrightarrow \nabla_U \tilde{J}(U, x) = 0$ erfüllt. Für jedes $x \in \mathcal{X}_N^\circ$ ist die Funktion $W(U, x) : \mathcal{U}_N^\circ(x) \rightarrow \mathbb{R}$ wohl-definiert und man kann zeigen, dass $W(U, x) \rightarrow \infty$ wann immer $U \rightarrow \partial \mathcal{U}_N(x)$. Die Lie-Ableitung von W entlang der Dynamiken für U und x ergibt sich zu

$$\dot{W} = \frac{\partial \tilde{J}(U, x)}{\partial U} \left(\frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial U^2} \dot{U} + \frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial x \partial U} \dot{x} \right). \quad (38)$$

Einsetzen der Dynamik $\dot{U} = f(U, x)$ aus Gleichung (36) liefert

$$\dot{W} = -\frac{\partial \tilde{J}(U, x)}{\partial U} \frac{\partial \tilde{J}(U, x)^T}{\partial U} = -2W(U, x) \leq 0. \quad (39)$$

Da $W(U_0, x_0) := W_0 < \infty$ gilt, haben wir $W(U(t), x(t)) \leq W_0 < \infty$ für $t \geq t_0$, womit $U(t)$ eine zulässige Lösung für $t \geq t_0$ ist, d.h. $U(t) \in \mathcal{U}_N^\circ(x(t))$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $U(t)$ für $x(t) \in \mathcal{X}_N^\circ$ genau dann existent und zulässig ist wenn $W(U(t), x(t)) < \infty$ gilt. Außerdem konvergiert $W(U, x)$ exponentiell gegen Null, siehe Gleichung (39), woraus sich aufgrund von $\dot{W} = 0 \Leftrightarrow \nabla_U \tilde{J}(U, x) = 0$ direkt $\nabla_U \tilde{J}(U, x) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ ergibt. Angesichts der gleichmäßigen Konvexität von Problem (35) impliziert dies automatisch $U(t) \rightarrow U^*(x(t))$ für $t \rightarrow \infty$. Für den optimalen Startwert $U_0 = \tilde{U}^*(x_0)$ gilt zudem $W(U, x) \equiv 0$ und damit $U(t) \equiv \tilde{U}^*(x(t)) \forall t \geq t_0$. \square

Es ist an dieser Stelle hervorzuheben, dass wir in der Formulierung des dynamischen Systems $\dot{U} = f(U, x)$ in (36) explizit Gebrauch von der zeitkontinuierlichen Streckendynamik $\dot{x} = Ax + Bu$ machen. Durch dieses Vorgehen wird vorhandenes Wissen über das zukünftige Verhalten des zu regelnden Systems ausgenutzt und direkt zur Bestimmung der optimalen Stellgrößen verwendet. Um den Abtastcharakter des der Stabilitätsanalyse zugrunde liegenden diskreten MPC-Ansatzes zu bewahren, muss die auf die Strecke eingeprägte Stellgröße stückweise konstant sein, d.h. $u(x(t)) = u_s = \text{konstant}$ für $t \in [t_k, t_k + T_s)$. Hiervon ausgehend schlagen wir den folgenden Algorithmus vor, der die Implementierung des diskutierten zeitdiskreten linearen MPC-Verfahrens auf Basis des soeben präsentierten zeitkontinuierlichen Systems $\dot{U} = f(U, x)$ erlaubt.

Algorithmus 1 (*Zeitkontinuierlicher MPC-Algorithmus*)

Initialisierung für $t = t_0$:

(i) setze $U(0) = U_0 \in \mathcal{U}_N(x_0)$ für $x_0 \in \mathcal{X}_N$

(ii) setze $u_s = \mathcal{P}(U(0))$

Integration für $t > t_0$:

⊥ verwende $u = u_s$ als Stellgröße für die Regelstrecke;

⊥ messe den aktuellen Zustand $x(t)$ und bestimme $U(t)$

durch Integrieren von (36) mit $\dot{x} = Ax + Bu_s$;

⊥ *Abtasten* wann immer $t = t_k = kT_s$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$:

⊥ setze $u_s = \mathcal{P}(U(t_k))$.

Annahme 3. *Die Zulässigkeit einer Zustandstrajektorie zu diskreten Abtastzeitpunkten impliziert auch die Zulässigkeit der zugehörigen Zustandstrajektorie zwischen den Abtastzeitpunkten, d.h. $x(t_k) \in \mathcal{X}_N^\circ$, $x(t_{k+1}) \in \mathcal{X}_N^\circ \Rightarrow x(t) \in \mathcal{X}_N^\circ \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$.*

Theorem 3. *Es sei angenommen, dass Annahme 3 gelte und dass die Kostenfunktion $\tilde{J}(U, x)$ und die Barrierefunktionen $B_c^{QP}(x)$ und $B_f^{QP}(x)$ in (35) die Bedingungen aus Theorem 1 erfüllen. Dann garantiert Algorithmus 1 für den optimalen Startwert $U_0 = \tilde{U}^*(x_0)$ nominelle asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises unter strikter Einhaltung aller Eingangs- und Zustandsbeschränkungen. Für jede zulässige suboptimale Initialisierung $U_0 \in \mathcal{U}_N^\circ(x_0)$ erreicht der Algorithmus zudem asymptotische Konvergenz des Systemzustands zum Ursprung, erneut unter strikter Einhaltung aller Nebenbedingungen.*

Beweis. Für den Fall $U_0 = \tilde{U}^*(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{X}_N^\circ$ impliziert Theorem 2, dass die Lösung $U(t)$ der optimalen Lösung des Problems (35), und damit des Optimalsteuerungsproblems (5), exakt nachfolgt. Außerdem garantiert $u(t) = u_s = \mathcal{P}(U(t_k))$, $t \in [t_k, t_k + T_s)$, durch Annahme 3 auch $x(t) \in \mathcal{X}_N^\circ$ für $t \in [t_k, t_k + T_s)$ und somit die Zulässigkeit aller zeitkontinuierlichen Trajektorien. Mit anderen Worten ist Algorithmus 1 in diesem Fall äquivalent zu einer standardmäßigen zeitdiskreten MPC-Implementierung basierend auf (5) und sowohl strikte Einhaltung aller Nebenbedingungen als auch asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises folgen direkt aus Theorem 1.

Für den Fall einer suboptimalen Initialisierung $U_0 \neq \tilde{U}^*(x_0)$, $U_0 \in \mathcal{U}_N^\circ(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{X}_N^\circ$, wissen wir durch Theorem 2, dass $U(x(t))$ immer strikt zulässig sein wird, d.h. $U(x(t)) \in \mathcal{U}_N^\circ(x(t))$ und $x(t) \in \mathcal{X}_N^\circ$ für $t \geq t_0$. Ferner ergibt sich durch die asymptotische Konvergenz von $U(x(t))$ zum optimalen Wert die Beziehung $U(x(t)) = U^*(x(t)) + R(t)$ mit $R(t)$ beschränkt und $R(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Algorithmus 1 erzeugt daher eine suboptimale Sequenz an Stellgrößen der Form $u_0(k) = u_0^*(k) + r(k)$ mit $r(k)$ beschränkt und $r(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Demzufolge ergibt sich die Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu

$$x(k+1) = A_D x(k) + B_D u_0^*(k) + B_D r(k), \quad x(k) := x(t_k), \quad (40)$$

und somit schließlich

$$\|x(k+l)\| \leq \|A_D^l x(k) + \sum_{j=0}^{l-1} A_D^j B_D u_0^*(k+l-j-1)\| + \left\| \sum_{j=0}^{l-1} A_D^j B_D r(k+l-j-1) \right\|. \quad (41)$$

Da i) $x(k+l) \in \mathcal{X}_N^\circ \forall k, l$, ii) die Stellgrößenfolge $u_0^*(\tilde{k})$ das nominelle zeitdiskrete System asymptotisch stabilisiert und iii) $r(\tilde{k}) \rightarrow 0$ für $\tilde{k} \rightarrow \infty$, zeigt sich, dass für jedes $l \geq 0$ und jede Konstante $\bar{c} > 0$ ein Index \tilde{k} existiert, so dass $\|x(k+l)\| \leq \bar{c} \forall k \geq \tilde{k}$. Oder ein wenig umformuliert:

$$\forall \bar{c} > 0 \exists \tilde{k}_l : \|x(\tilde{k})\| \leq \bar{c} \forall \tilde{k} \geq \tilde{k}_l \quad (42)$$

mit $\tilde{k}_l = \bar{k} + l$ für jedes endliche $l \geq 1$. Damit ergibt sich $\lim_{\tilde{k} \rightarrow \infty} \|x(\tilde{k})\| = 0$, woraus die Konvergenz des Systemzustandes zum Ursprung für jedes $U_0 \neq \tilde{U}^*(x_0)$, $U_0 \in \mathcal{U}_N^\circ(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{X}_N^\circ$, folgt. Dieses Resultat kann auch als “asymptotic gain property”, siehe [7], interpretiert werden, womit der geschlossene Regelkreis in gewisser Weise eingangszustandsstabil in Bezug auf die oben diskutierte spezielle Klasse von Störungen $r(k)$ ist. \square

Der vorgestellte Algorithmus erlaubt damit die Implementierung modellprädiktiver Regelverfahren auf Basis eines dynamischen Systems und ohne die Notwendigkeit nach spezialisierter Optimierungs-Software in der Zielanwendung, siehe Abbildung 1. Die Systemdynamik $f(U, x)$ ist dabei durch Gleichung (36) und die Ausgangsfunktion $h(U, x)$ durch die Projektion $\mathcal{P}(U)$ gemäß Definition 3 gegeben.

Im Folgenden betrachten wir die Kostenfunktion $\tilde{J}(U, x)$ und die für die Implementierung von Algorithmus 1 benötigten Matrizen aus Gleichung (36) ein wenig genauer. Zusammen mit (32) und (34) ergibt sich aus Gleichung (35)

$$\begin{aligned} \tilde{J}(U, x) = & \frac{1}{2} U^T H U + x^T F U - \varepsilon \ln \left(1 - x^T D x - 2x^T M U - U^T S U \right) \\ & - \varepsilon \sum_{i=1}^q \left(\ln \left(-G^i U + E^i x + w^i \right) + \ln \left(w^i \right) - \frac{G^i U - E^i x}{w^i} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Durch Differentiation der Kostenfunktion bezüglich U und x erhalten wir folgende Beziehungen für die Terme in (36):

$$\frac{\partial \tilde{J}(U, x)^T}{\partial U} = H U + F^T x + \varepsilon G^T \begin{bmatrix} \frac{1}{-G^1 U + E^1 x + w^1} - \frac{1}{w^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{-G^q U + E^q x + w^q} - \frac{1}{w^q} \end{bmatrix} + 2\varepsilon \frac{L^T x + S U}{1 - \varphi(U, x)} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J(U, x)}{\partial x \partial U} = & F^T - \varepsilon G^T \text{diag} \left(\left[\frac{1}{(-G^i U + E^i x + w^i)^2} \right]_q \right) E \\ & + 2\varepsilon \frac{(1 - \varphi(U, x)) L^T + 2(L^T x + S U)(x^T D + U^T L^T)}{(1 - \varphi(U, x))^2} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial U^2} = & H + \varepsilon G^T \text{diag} \left(\left[\frac{1}{(-G^i U + E^i x + w^i)^2} \right]_q \right) G \\ & + 2\varepsilon \frac{(1 - \varphi(U, x)) S + 2(L^T x + S U)(x^T L + U^T S)}{(1 - \varphi(U, x))^2} \end{aligned} \quad (46)$$

Es ist hervorzuheben, dass die Bedingungen $\tilde{J}(U, x)|_{(0,0)} = 0$ und $\nabla_U \tilde{J}(U, x)|_{(0,0)} = 0$ tatsächlich erfüllt sind und die barrierefunktionenbasierte Kostenfunktion somit eine positiv definite Funktion mit einem Minimum im Ursprung $(U, x) = (0, 0)$ darstellt. Zudem ist die Matrix S positiv semidefinit für jede positiv definite Matrix P_f und $1 - \varphi(U, x) > 0$ ist für alle strikt zulässigen Trajektorien stets erfüllt. Die zu invertierende Hesse-Matrix $\frac{\partial^2 \tilde{J}(U, x)}{\partial U^2}$ in Gleichung (46) ergibt sich somit als die Summe einer positiv definiten Matrix ($H \succ 0$) mit zwei positiv semidefiniten Matrizen und ist daher stets positiv definit. Dies bestätigt die gleichmäßige Konvexität von Problem (5) beziehungsweise (35) und garantiert die Invertierbarkeit der Hesse-Matrix für jede zulässige Trajektorie $(U(t), x(t))$.

Anmerkung 3. Die Zulässigkeit der zeitkontinuierlichen Zustandstrajektorien zu allen Zeitpunkten ist eine recht einschränkende und zudem schwer überprüfbare Annahme. In standardmäßigen zeitdiskreten MPC-Verfahren wird diese in der Regel nicht benötigt, da die Einhaltung der Nebenbedingungen zwischen den Abtastzeitpunkten dort üblicherweise gar nicht betrachtet wird. Wir benötigen diese technische Annahme allerdings, um garantieren zu können, dass sowohl das System (36) als auch die verwendete Lyapunov-Funktion $W(U(t), x(t))$ jederzeit wohl-definiert sind.

Ein intuitives Verfahren zur Handhabung leicht verletzter Nebenbedingung in der praktischen Implementierung wäre, die entsprechende Barrierefunktion einfach auf einen hohen Wert zu setzen. Allerdings zerstört dieses Vorgehen die glatte Struktur des unterlagerten Optimierungsproblems und kann insbesondere bei Initialisierung mit einer unzulässigen Lösung zu numerischen Problemen führen. Einen weitaus systematischeren Ansatz bietet hier die Verwendung sogenannter relaxierter (oder auch approximativer) Barrierefunktionen, welche die Verletzung einer Nebenbedingung zwar bestrafen, jedoch auch für unzulässige Lösungen definiert sind. Die folgende relaxierte Barrierefunktion, welche auf einer quadratischen Fortsetzung des natürlichen Logarithmus basiert, wurde von Hauser & Saccon für den Einsatz in der zeitkontinuierlichen Trajektorienoptimierung vorgeschlagen [6]

$$\hat{B}(z) = \begin{cases} -\ln(z) & z > \delta \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{z - 2\delta}{\delta} \right)^2 - 1 \right] - \ln(\delta) & z \leq \delta \end{cases}. \quad (47)$$

Die zweifach stetig differenzierbare Funktion $\hat{B}(z)$ ist für alle Werte von $z \in \mathbb{R}$ definiert und approximiert die ursprüngliche Barrierefunktion $B(z) = -\ln(z)$ für $\delta \rightarrow 0$ beliebig nah. Im Hinblick auf den obigen MPC-Algorithmus ermöglichte dieser Ansatz für bisher alle Beispiel-Systeme eine elegante Handhabung der Nebenbedingungen sowie eine effiziente und numerisch robuste Implementierung. Ein großer Nachteil bei der Verwendung relaxierter Barrierefunktionen ist allerdings, dass die strikte Einhaltung der jeweiligen Nebenbedingungen, und damit auch die Stabilität des geschlossenen Regelkreises, im Allgemeinen nicht garantiert ist. Diese Problemlage erfordert daher besonderes Augenmerk und wird im Rahmen der aktuell laufenden Forschungsarbeit näher untersucht.

5 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des zuvor präsentierte MPC-Algorithmus anhand numerischer Simulationen für zwei Beispiel-Systeme demonstriert. Neben dem Verhalten des geschlossenen Regelkreises liegt das Augenmerk hierbei auch auf den Ergebnissen für das zugrunde liegende barrierefunktionenbasierte Entwurfsverfahren.

5.1 Modellprädiktive Regelung eines Doppelintegrator-Systems

Betrachtet wird im Folgenden das zeitdiskrete Modell eines Doppelintegrators von der Form

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} u(k), \quad (48)$$

wobei die Abtastzeit zu $T_s = 0.1$ s gewählt wurde. Die Formulierung des zugehörigen MPC-Optimalsteuerungsproblems erfolgte für einen Prädiktionshorizont $N = 10$, eine quadratische Kostenfunktion mit den Gewichtungsmatrizen $Q = \text{diag}([1, 0.1])$, $R = 1$ und Eingangs- und Zustandsbeschränkungen der Form $|u| \leq 1$, $|x_1| \leq 2.8$, und $|x_2| \leq 0.8$. Basierend auf den in den Abschnitten 3 und 4 präsentierte Ergebnissen wurden der barrierefunktionenbasierte MPC-Entwurf sowie Algorithmus 1 in MATLAB für verschiedene Parameterkonfigurationen und Anfangswerte implementiert und getestet. Einige der Ergebnisse und Interpretationen sind in den Abbildungen 4, 5, 6 und 7 zu finden.

5.2 Modellprädiktive Regelung eines 3-Tank-Systems

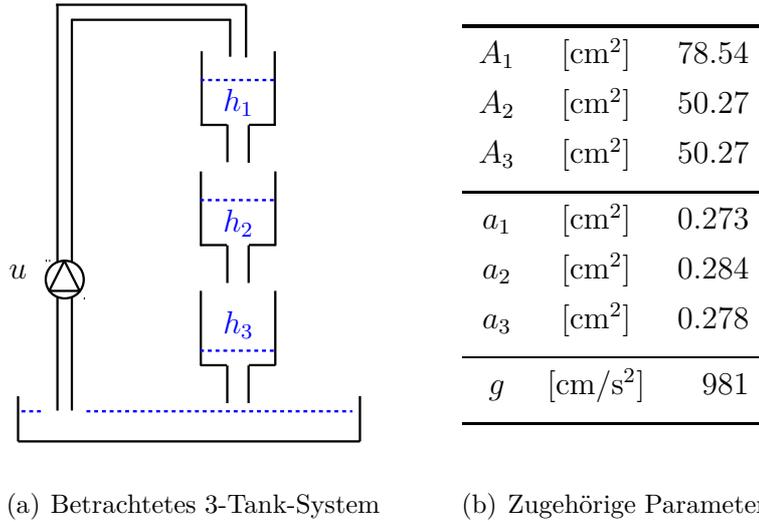
Als weiteres Beispiel betrachten wir im Folgenden die Regelung eines 3-Tank-Systems, welches ein allgemein bekanntes Standardbeispiel in Lehre und Forschung darstellt. Das System besteht aus drei vertikal übereinander angeordneten Wassertanks, wobei das Wasser durch entsprechende Öffnungen oder Leitungen vom oberen Tank über den mittleren Tank in den unteren Tank fließen kann. Eine elektrische Pumpe erlaubt es zudem, den obersten Tank mit Wasser aus einem gemeinsamen Reservoir zu versorgen. Eine schematische Darstellung des betrachteten Systems ist in Abbildung 3(a) gegeben. Mithilfe der Bernoulli-Gleichung ergeben sich die folgenden nichtlinearen Modellgleichungen

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{1}{A_1} v \quad (49a)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{2gh_1} \quad (49b)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{a_2}{A_3} \sqrt{2gh_2} \quad (49c)$$

für den Zustandsvektor $h = [h_1, h_2, h_3]$ der Füllstände. Hierbei bezeichnet v den Zufluss in Tank 1, g die Erdbeschleunigung und a_i beziehungsweise A_i den Ausflussquerschnitt sowie den Behälterquerschnitt von Tank i . Die im Folgenden verwendeten Parameter beziehen sich auf einen am Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität



(a) Betrachtetes 3-Tank-System

(b) Zugehörige Parameter

Abbildung 3: Schematische Darstellung und Parameter des 3-Tank-Systems.

Stuttgart vorhandenen, realen Versuchsstand und sind in Abbildung 3(b) zusammengefasst. In Abhängigkeit der gewünschten Füllhöhe h_3^0 von Tank 3 lassen sich der benötigte stationäre Zufluss v^0 sowie die stationären Höhen h_1^0 und h_2^0 zu

$$v^0 = a_3 \sqrt{2gh_3^0}, \quad h_1^0 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 h_3^0, \quad h_2^0 = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 h_3^0 \quad (50)$$

berechnen. Im Folgenden betrachten wir die Regelung auf eine gewünschte Füllhöhe von $h_3^0 = 10.80$ cm, woraus sich der stationäre Zufluss sowie die stationären Höhen zu $v^0 = 40.4675$ ml/s, $h_1^0 = 11.1991$ cm und $h_2^0 = 10.3485$ cm ergeben. Durch Einführung der Variablen $u = v - v_0$ sowie $x_i = h_i - h_i^0$ und Linearisierung der nichtlinearen Modellgleichungen (49) um den Arbeitspunkt (h^0, v^0) ergibt sich das zeitkontinuierliche lineare System

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{h_1^0}} & 0 & 0 \\ \frac{a_1 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_1^0}} & -\frac{a_2 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{h_2^0}} & 0 \\ 0 & \frac{a_2 \sqrt{2g}}{2A_3 \sqrt{h_2^0}} & -\frac{a_3 \sqrt{2g}}{2A_3 \sqrt{h_3^0}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (51)$$

Im Hinblick auf den zeitdiskreten MPC-Entwurf wurde das zeitkontinuierliche Modell mit einer Abtastzeit von $T_s = 5$ s diskretisiert. Aus der maximalen Tankhöhe von 28 cm und einer maximalen Pumpleistung von 60 ml/s ergeben sich zudem Eingangs- und Zustandsbeschränkungen der Form $-v^0 \leq u \leq 60 - v^0$, $-h_1^0 \leq x_1 \leq 28 - h_1^0$, $-h_2^0 \leq x_2 \leq 28 - h_2^0$, $-h_3^0 \leq x_3 \leq 28 - h_3^0$. Die Formulierung des zugehörigen MPC-Optimalsteuerungsproblems erfolgte für einen Prädiktionshorizont $N = 15$ und eine quadratische Kostenfunktion mit den Gewichtungsmatrizen $Q = \text{diag}([1, 1, 10])$, $R = 0.01$. Basierend auf der linearisierten Systemdarstellung und den in Abschnitt 3 und Abschnitt 4 präsentierten Ergebnissen wurden der barrierefunktionenbasierte MPC-Entwurf sowie Algorithmus 1 in MATLAB

für verschiedene Parameterkonfigurationen und Anfangswerte implementiert und getestet. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel wurde für die Simulation des geschlossenen Regelkreises jedoch das nichtlineare Modell der Regelstrecke verwendet, um die Robustheit des vorgeschlagenen Algorithmus gegen Modellunsicherheiten zu demonstrieren. Die Abbildungen 9 und 8 zeigen die resultierenden Endregionen des MPC-Entwurfs sowie das Verhalten der Regelstrecke für eine gegebene Startkonfiguration und die Entwurfparameter $\varepsilon = 0.01$ und $\bar{\gamma} = 15$. Erneut ergibt sich eine stark vergrößerte Endregion \mathcal{X}_f und Algorithmus 1 erreicht ebenso wie das idealisierte MPC-Verfahren asymptotische Stabilität der gewünschten Ruhelage auch für die nichtlineare Regelstrecke.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neuer zeitkontinuierlicher Algorithmus für Probleme der linearen modellprädiktiven Regelung präsentiert, der ohne den Einsatz iterativer Optimierungsverfahren auskommt und asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises sowie Einhaltung aller Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen garantiert. Der Algorithmus kann in Form eines dynamischen Systems realisiert werden, dessen interner Zustand der Lösung eines zeitvarianten, unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems asymptotisch nachfolgt. In Kombination mit einem ebenfalls präsentierten barrierefunktionenbasierten MPC-Ansatz lässt sich ein neuartiges Implementierungsverfahren formulieren, welches im Fall einer optimalen Initialisierung des Algorithmus die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises und im Fall einer zulässigen, suboptimalen Initialisierung zudem Konvergenz des geregelten Systemzustands zum Ursprung erreicht.

Das zugrunde liegende Fernziel unserer Forschung ist die Analyse und der Entwurf optimierungsbasierter Regelungsalgorithmen, welche die Stabilität des geschlossenen Regelkreises möglichst in der Form garantieren, in der sie auch implementiert werden. Zukünftige Forschungsthemen könnten daher die folgenden Schwerpunkte einschließen: geeignete Diskretisierungs- und Integrationsverfahren für den vorgeschlagenen zeitkontinuierlichen Algorithmus, Elimination der Annahme über die Zulässigkeit der zeitkontinuierlichen Zustandstrajektorien oder eine theoretisch fundierte Handhabung verletzter Nebenbedingungen, zum Beispiel auf der Basis relaxierter Barrierefunktionen. Ferner wäre es zudem interessant, die Verwendung polytopbasierter Endregionen zu untersuchen oder das zur Zeit benötigte Abtasten der Stellgröße zu umgehen und damit den Umstand auszunutzen, dass die Lösung des diskreten MPC-Optimalsteuerungsproblems in jedem Zeitpunkt verfügbar ist. Insbesondere der letzte Punkt beinhaltet eine gewisse Faszination, da er letztendlich die Implementierung modellprädiktiver Regelungsverfahren auf Basis rein zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme und ohne die ansonsten inhärent vorhandenen Schritte der Abtastung und iterativen Optimierung ermöglichen würde. Eine solche Darstellung in Form zeitkontinuierlicher dynamischer Regler könnte zudem weitere interessante Vorteile mit sich bringen, zum Beispiel bezüglich der Stabilitätsanalyse und Robustheit des geschlossenen Regelkreises sowie im Hinblick auf die Vereinbarkeit von modellprädiktiven Verfahren und Algorithmen mit anderen, zeitkontinuierlichen Regelungskonzepten.

— Doppelintegrator —

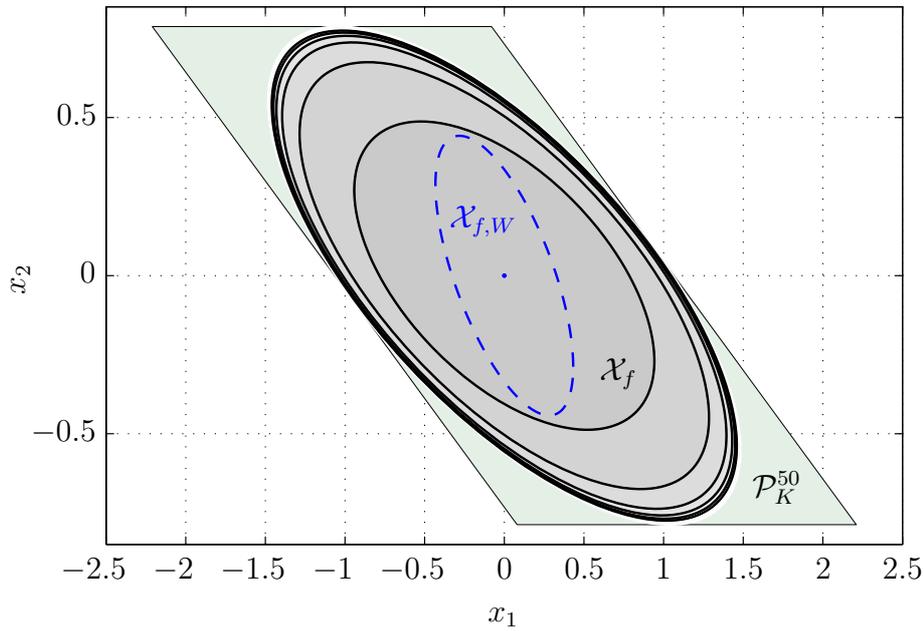


Abbildung 4: Die resultierende Endregion \mathcal{X}_f für $\bar{\gamma} \in \{2, 10, 15, 20, 25, 50\}$. Das blau gestrichelte Ellipsoid verdeutlicht die Endregion bei Verwendung des Ansatzes aus [13]. Ebenfalls abgebildet ist das Polytop \mathcal{P}_K für $\bar{\gamma} = 50$.

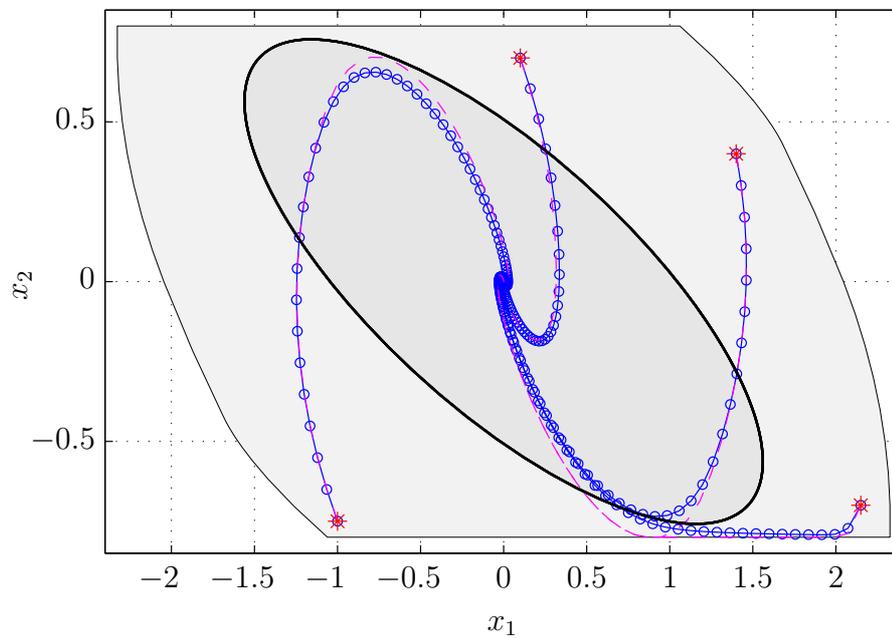


Abbildung 5: Verhalten des geschlossenen Regelkreises für Standard-MPC (—) und den vorgeschlagenen zeitkontinuierlichen Algorithmus (—○—) für $\bar{\gamma} = 15$ und $\varepsilon = 0.1$. Die Menge $\bar{\mathcal{X}}_N$ ist eine polytopbasierte innere Abschätzung der zulässigen Menge \mathcal{X}_N für die ellipsoide Endregion \mathcal{X}_f .

— Doppelintegrator —

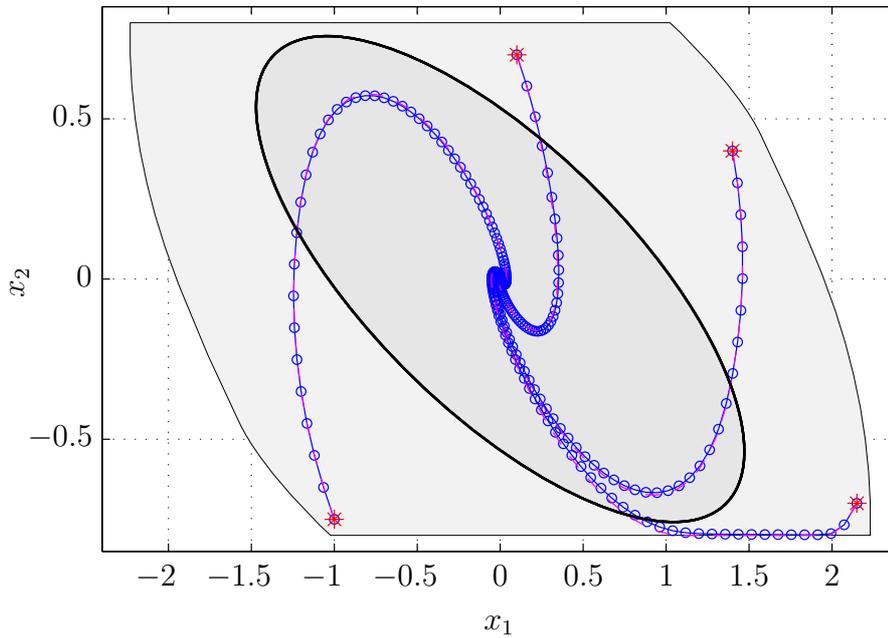


Abbildung 6: Verhalten des geschlossenen Regelkreises für Standard-MPC (--) und den vorgeschlagenen zeitkontinuierlichen Algorithmus ($-\circ-$) für $\bar{\gamma} = 15$ und $\varepsilon = 0.01$. Es treten deutlich geringere Abweichungen als für den Fall $\varepsilon = 0.1$ auf.

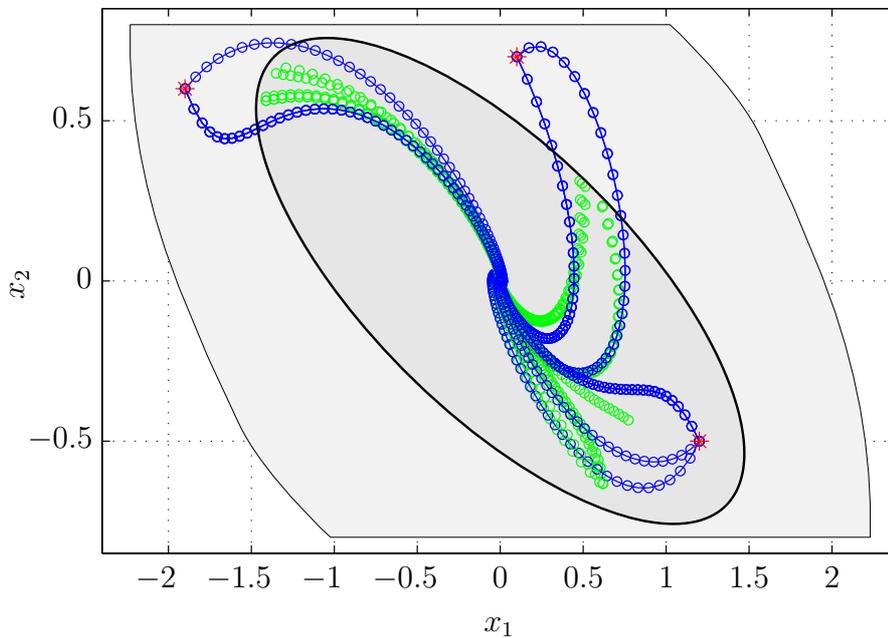


Abbildung 7: Verhalten des geschlossenen Regelkreises für Algorithmus 1 für drei verschiedene Anfangsbedingungen $x_{0,i}$, $i = 1, \dots, 3$ und jeweils fünf zufällige Anfangswerte $U_0 \in \mathcal{U}_N(x_{0,i})$, $i = 1, \dots, 3$. Es ist deutlich zu erkennen, dass die prädizierten Endzustände $x_N(t_k)$ (\circ) stets die Bedingung $x_N \in \mathcal{X}_f$ erfüllen und dass der Systemzustand für alle suboptimalen Initialisierungen zum Ursprung konvergiert.

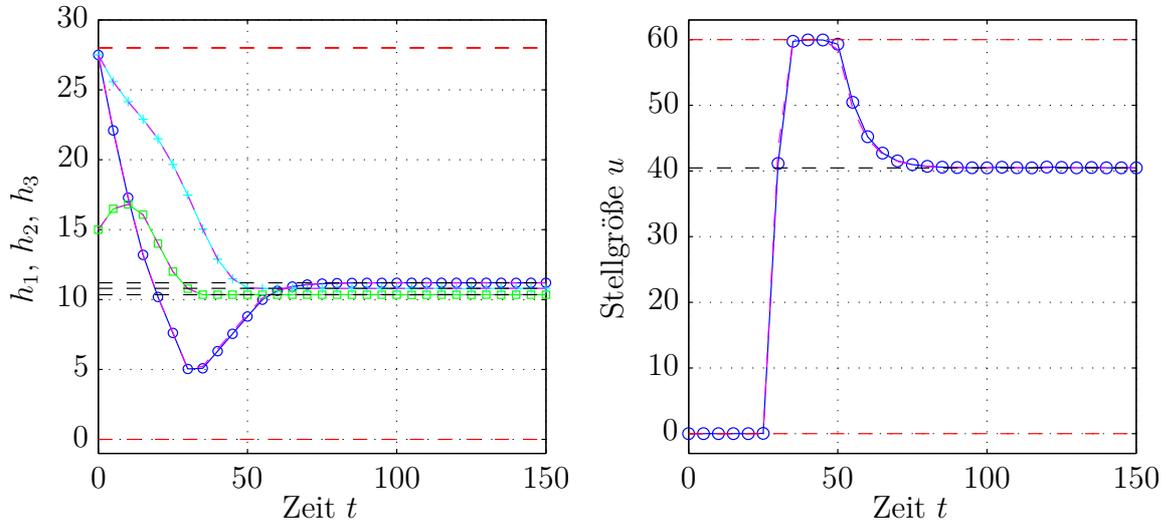


Abbildung 8: Zustands- und Eingangstrajektorien des geschlossenen Regelkreises für Standard-MPC (---) und den vorgeschlagenen zeitkontinuierlichen Algorithmus (—○—) für $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\gamma} = 15$ und den Anfangswert $h_0 = [27.5, 15, 27.5]^T$ angewendet auf das nichtlineare Dreitank-Modell (49). Beide Verfahren erreichen die gewünschte Stabilisierung des Arbeitspunktes \bar{h} (--) unter Einhaltung der gegebenen Eingangs- und Zustandsbeschränkungen (---).

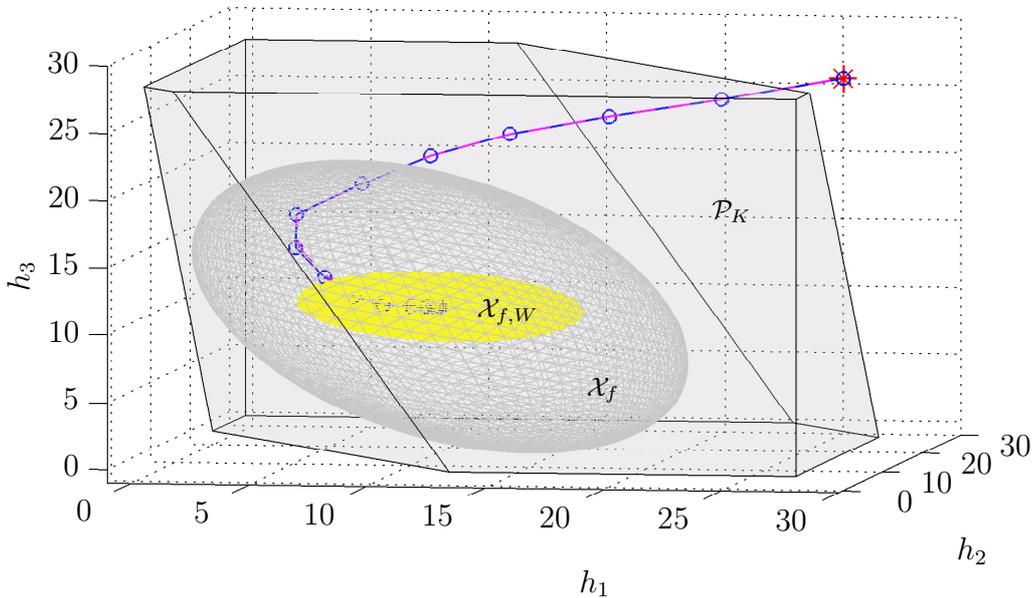


Abbildung 9: Darstellung der ellipsoiden Endregion \mathcal{X}_f (grau) sowie der konvergierenden Zustandstrajektorie $h(t_k)$ im dreidimensionalen Zustandsraum. Ebenfalls abgebildet sind das Polytop \mathcal{P}_K für die quadratische Abschätzung der Barrierefunktion B_K sowie die resultierende Endregion $\mathcal{X}_{f,W}$ bei Verwendung des Ansatzes aus [13] (gelb), welches eine deutlich geringere Größe aufweist.

Literatur

- [1] Bemporad, A., M. Morari, V. Dua und E. N. Pistikopoulos: *The explicit linear quadratic regulator for constrained systems*. Automatica, 38:3–20, 2002.
- [2] Boyd, S. und L. Vandenberghe: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] DeHaan, D. und M. Guay: *A Real-Time Framework for Model Predictive Control of Continuous-Time Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, 52(11):2047–2057, 2007.
- [4] Diehl, M., R. Findeisen, F. Allgöwer, H. Bock und J. Schlöder: *Nominal stability of real-time iteration scheme for nonlinear model predictive control*. IEEE proceedings – Control Theory and Applications, 152(3):296–308, 2005.
- [5] Feller, C. und Ebenbauer C.: *A barrier function based continuous-time algorithm for linear model predictive control*. In: *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Seiten 19–26, Zurich, Switzerland, 2013.
- [6] Hauser, J. und A. Saccon: *A Barrier Function Method for the Optimization of Trajectory Functionals with Constraints*. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, Seiten 864–869, San Diego, USA, 2006.
- [7] Jiang, Z. P. und J. Wang: *Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems*. Automatica, 37:857–869, 2001.
- [8] Mayne, D. Q., J. B. Rawlings, C. V. Rao und P. O. M. Scokaert: *Constrained model predictive control: Stability and optimality*. Automatica, 36:789–814, 2000.
- [9] Nesterov, Y. und A. Nemirovskii: *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [10] Ohtsuka, T.: *A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control*. Automatica, 40:563–574, 2004.
- [11] Richter, S. L. und R. A. DeCarlo: *Continuation Methods – Theory and Applications*. IEEE Trans. on Automatic Control, 28(6):660–665, 1983.
- [12] Tøndel, P., T. A. Johansen und A. Bemporad: *An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions*. Automatica, 39:489–497, 2003.
- [13] Wills, A. G. und W. P. Heath: *Barrier function based model predictive control*. Automatica, 40:1415–1422, 2004.
- [14] Zeilinger, M. N. und C. N. Jones: *Real-Time Suboptimal Model Predictive Control Using a Combination of Explicit MPC and Online Optimization*. IEEE Trans. on Automatic Control, 56(7):1524–1534, 2011.

Einschleifige Impedanzregelung für die Emulation von Traktionsbatterien auf Antriebsprüfständen

Oliver König¹, Stefan Jakubek², Günter Prochart¹

¹AVL List GmbH, Hans-List-Platz 1, 8010 Graz
oliver.koenig@avl.com, guenter.prochart@avl.com

²Technische Universität Wien, Inst. f. Mechanik und Mechatronik
Wiedner Hauptstraße 8-10, 1040 Wien
stefan.jakubek@tuwien.ac.at *

Zusammenfassung

Der Einsatz von Batterieemulatoren ermöglicht das Testen von Antriebssträngen für Elektro- und Hybridfahrzeuge unter reproduzierbaren Bedingungen. Dabei muss nicht nur die Energieversorgung der elektrischen Antriebskomponenten mit hoher Leistung gewährleistet, sondern auch das dynamische Verhalten der Traktionsbatterie nachgebildet werden. Um dies zu erreichen, bedarf es eines leistungsfähigen Reglers, der eine stabile Kopplung zwischen Prüfstand und simuliertem Batteriemodell gewährleistet.

Das Konzept der Impedanzregelung wird eingesetzt, wenn es darum geht, mit Hilfe von Aktuatoren eine solche Verbindung zwischen realer, physikalischer Welt und virtuellen Modellen zu schaffen, in diesem Falle auch für die Nachbildung der elektrischen Impedanz einer Batterie. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode auf Basis eines MPC-Entwurfs ermöglicht Impedanzregelung ohne die sonst übliche Kaskadierung von Regelkreisen und berücksichtigt Ein- und Ausgangsbeschränkungen der Regelstrecke. Dafür wird das Strecken- um eine Impedanzmodell erweitert und ein virtueller Impedanz-Ausgang als Regelgröße eingeführt. Eine besondere Herausforderung stellen dabei die Wechselrichter der elektrischen Fahrzeugantriebe dar, die sich gegenüber dem Batterieemulator als nichtlineare Konstantleistungslasten mit negativer differentieller Impedanz verhalten.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse.

Die hier beschriebene Arbeit war Teil des Projekts MEMBAT, gefördert in der Programmlinie "A3plus" vom österreichischen Bundesministerium für Verkehr, Innovation und Technologie unter der Projektnummer 824199.

1 Einleitung

In den vergangenen Jahren hat das Interesse an der Elektrifizierung von Fahrzeugantrieben stark zugenommen. Unabhängig davon, ob ein Antriebsstrang für rein elektrische oder für Hybridfahrzeuge ausgelegt ist, wird immer ein elektrischer Energiespeicher (meist eine Batterie) benötigt.

Für Tests des Antriebsstrangs in frühen Phasen der Entwicklung ist die Traktionsbatterie oft noch nicht einsatzbereit oder zu unhandlich um sie am Prüfstand aufzubauen. Folglich stieg auch die Nachfrage nach geeigneter Ausrüstung für Antriebsprüfstände, mit dem der elektrische Antrieb auch ohne eine Traktionsbatterie betrieben werden kann.

Ein Batterieemulator (BE) bietet dabei folgende Vorteile:

- Das Testen von elektrischen Antriebe wird ermöglicht, bevor ein Prototyp der Batterie verfügbar ist.
- Beliebige Veränderung des virtuellen Zustands der Batterie ohne Wartezeit.
- Exakte Wiederholbarkeit der Prüfläufe ohne Einflüsse durch Alterung der Batterie oder Umgebungsbedingungen.

Die Emulation einer Traktionsbatterie ist allerdings eine große Herausforderung. Folgende Teile müssen dafür integriert werden:

- Eine steuerbare Spannungsquelle geeignet für die benötigten hohen Spannungen und Ströme und mit hoher Stelldynamik.
- Ein genaues Modell der zu emulierenden Batterie. Komplexe und nichtlineare Effekte einer elektrochemischen Batterie müssen in Echtzeit simuliert werden können.
- Ein leistungsfähiger Regler, der in der Lage ist, das dynamische Verhalten einer Batterie nachzubilden, trotz der Lastrückwirkung und der Eigendynamik der Spannungsquelle als Stellglied.

Der BE fungiert als Schnittstelle zwischen dem Prüfling (Unit under Test, UUT) und einem virtuellen Batteriemodell. Die Interaktion findet nicht nur in einer Richtung statt, sondern der von der UUT verursachte Strom wird wieder in die Simulation der Batterie zurückgeführt. Aufgrund der begrenzten Dynamik des Stellgliedes kann das Verhalten dieser Rückführung mitunter stark vom gewünschten Verhalten abweichen oder zur Instabilität führen. Dies tritt besonders dann auf, wenn die Spannungsquelle eine niederimpedante Last mit großer Filterkapazität versorgen muss. Dieser Umstand ist für die meisten Testsysteme für Power-Hardware-in-the-Loop relevant und wird bspw. in [24] und [27] untersucht. Erschwerend kommt bei der vorliegenden Anwendung hinzu, dass das Verhalten der Prüflinge dem einer destabilisierenden Konstantleistungslast mit negativer Eingangsimpedanz entspricht [5].

Um die Qualität der Batterieemulation zu verbessern, ist ein Regler zu entwerfen, sodass sich der BE wie eine Spannungsquelle mit *endlicher Innenimpedanz* (ähnlich dem Ansatz in [3]) verhält und nicht, so wie in einer früheren Publikation der Autoren in [14]),

wie eine *ideale* Spannungsquelle. Dies ist nicht nur für die Batterieemulation von Nutzen, sondern auch für die Stabilisierung von Hochspannungs-DC-Bordnetzen mit Dämpfung durch virtuelle Impedanzen (siehe z.B. [22, 28]).

Für die Umsetzung der Impedanzemulation wird in dieser Arbeit das Prinzip der modellprädiktiven Regelung (model predictive control, MPC) verwendet. Damit ist es nicht nur möglich, die Dynamik des BE, der UUT und der zu emulierenden Batterieimpedanz in einem Reglerentwurfsmodell miteinander zu verknüpfen, sondern auch Stellgrößen- und Zustandsbeschränkungen zu berücksichtigen und damit den verfügbaren Stellbereich optimal auszunützen. Zahlreiche Publikationen zeigen, dass es inzwischen möglich ist, MPC auch für die Regelung schneller Systeme mit harten Echtzeitanforderungen wie z.B. elektronische Schaltwandler, einzusetzen (siehe z.B.: [6, 25]). In dieser Arbeit wird auf den heuristischen MPC-Algorithmus zurückgegriffen, der von den Autoren in [13] vorgestellt wird, und entsprechend für die Impedanzemulation adaptiert.

Natürlich wird für die Batterieemulation ein geeignetes Batteriemodell benötigt. Detaillierte elektrochemische Modelle von verschiedensten Batterietypen sind zwar verfügbar, diese sind aber schwierig zu parametrieren und eine Simulation in Echtzeit ist kaum möglich [1, 12, 7]. Lineare Ersatzschaltbildmodelle sind zwar effizient simulierbar, sind aber nicht in der Lage nichtlineare Effekte wie z.B. Hysterese oder Relaxation nachzubilden [2, 4]. Forschungsarbeiten mit dem Ziel der zuverlässigen Vorhersage des Ladezustands für den Einsatz in Batteriemanagementsystemen (BMS) von Traktionsbatterien haben zu datengetriebenen Modellierungskonzepten mit hoher Genauigkeit und geringem Rechenaufwand geführt; siehe z.B. [21, 10, 20]. In dieser Arbeit wird ein lokales Modellnetzwerk (local model network, LMN) [11] für die Batteriesimulation verwendet. LMNs sind generische, nichtlineare Modelle, mit denen im Prinzip nicht nur Batterien, sondern auch andere Energiespeicher wie z.B. Supercaps emuliert werden können. Zusätzlich sind LMNs lokal interpretierbar, sodass zur Laufzeit lokale, lineare Impedanzmodelle für die Integration in die modellbasierte Regelung extrahiert werden können.

Die hier vorgestellte Methodik beruht auf den Publikationen der Autoren in [15] und [16].

2 Batterieemulation

2.1 Systembeschreibung

Die elektrische Energieversorgung eines typischen Hybrid- oder Elektrofahrzeugs besteht im wesentlichen aus einer Batterie als Energiespeicher und einem Wechselrichter für den elektrischen Traktionsmotor. So wie in Abbildung 1 dargestellt, wird auf dem Prüfstand die Batterie durch einen Batterieemulator ersetzt.

Der Batterieemulator selbst besteht wiederum aus einer steuerbaren DC-Spannungsquelle mit der Ausgangsspannung v und einem digitalen Regler. Das virtuelle Batteriemodell wird mit dem gemessenen Laststrom i als Eingangsgröße simuliert. Die simulierte Batteriespannung dient als Sollwert v^* für den Regler der DC-Spannungsquelle. Der BE bildet somit zwischen der UUT und dem simulierten Batteriemodell eine Schnittstelle, die aber ihre eigene – möglicherweise unerwünschte – Dynamik aufweist. Die Folgeregelung des BE

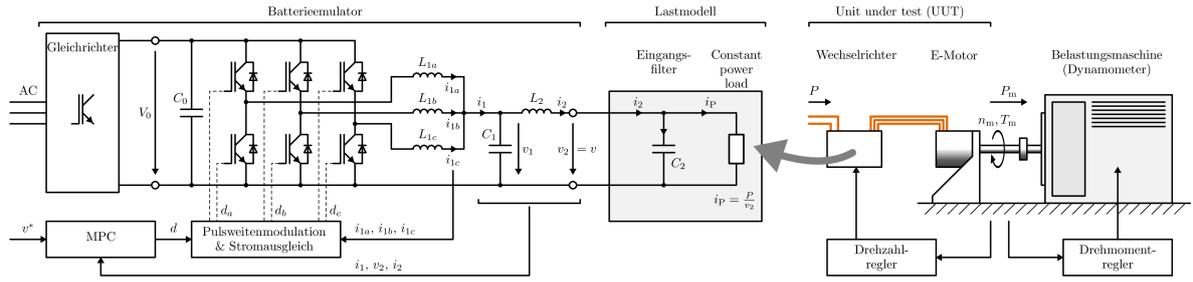


Abbildung 1: Aufbau eines Prüfstands für elektrische Fahrzeugantriebe bestehend aus Batterieemulator, Belastungsmaschine und den zu prüfenden Antriebskomponenten.

ist mit einer Verzögerung behaftet und der vom Prüfling verursachte Laststrom stellt für die Spannungsregelung eine Störung dar, die wiederum über die Dynamik des Prüflings mit der Spannung gekoppelt ist. Diese Effekte müssen beim Reglerentwurf berücksichtigt werden.

2.2 Modellierung der Batterie mittels LMN

LMNs haben sich als leistungsfähiges Modellierungswerkzeug erwiesen und finden breite Anwendung in der Automobilindustrie (siehe z.B. [19, 9]). Sie eignen sich auch ausgezeichnet für die effiziente Nachbildung der komplexen nichtlinearen Dynamik von Batterien. Dabei dienen der aktuelle und vergangene Werte des gemessenen Laststroms i als Eingangs- und die simulierte Klemmenspannung \hat{v} als Ausgangsgröße des LMN.

Die Spannung \hat{v}_k zum Zeitpunkt k wird als gewichtete Summe der Ausgangswerte einzelner linearer Teilmodelle gebildet. In Zustandsraumdarstellung mit dem Zustandsvektor (Regressor) $\mathbf{x}_{Z,k}$ ergeben sich folgende Gleichungen für den Zustandsübergang und den Modellausgang:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{Z,k+1} &= \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k}(\text{SOC}_k, T_k, i_k) \cdot (\mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{x}_{Z,k} + \mathbf{b}_{Z,j} i_k) \\ \hat{v}_k &= \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k}(\text{SOC}_k, T_k, i_k) \cdot (\mathbf{c}_{Z,j}^T \mathbf{x}_{Z,k} + d_{Z,j} i_k + v_{oc,j}). \end{aligned} \quad (1)$$

Der Regressor $\mathbf{x}_{Z,k}$ setzt sich zusammen aus vergangenen Modellausgangswerten \hat{v}_{k-l} und vergangenen Strommesswerten i_{k-l} . Die Matrizen $\mathbf{A}_{Z,j}$ und die Vektoren $\mathbf{b}_{Z,j}$, $\mathbf{c}_{Z,j}^T$ sind die Parameter und M entspricht der Anzahl der lokal linearen Impedanzmodelle. Die Gültigkeitsfunktionen (Diskriminanten) $\Phi_{j,k}$ sind abhängig vom Ladezustand SOC_k , der Temperatur T_k und dem Laststrom i_k . Diese Größen bilden den Vektor $\tilde{\mathbf{x}}_k$ im sogenannten Partitionierungsraum. Ein direkter Vergleich zwischen einem LMN-basierten Batteriemodell und der gemessenen Spannungsantwort einer Lithium-Ionen Zelle auf das selbe Stromprofil ist in Abb. 2 dargestellt.

Ein großer Vorteil von LMNs sind deren Transparenz und lokale Interpretierbarkeit. Das heißt, dass zu jedem Abtastzeitpunkt eine lokale Linearisierung des Batteriemodells

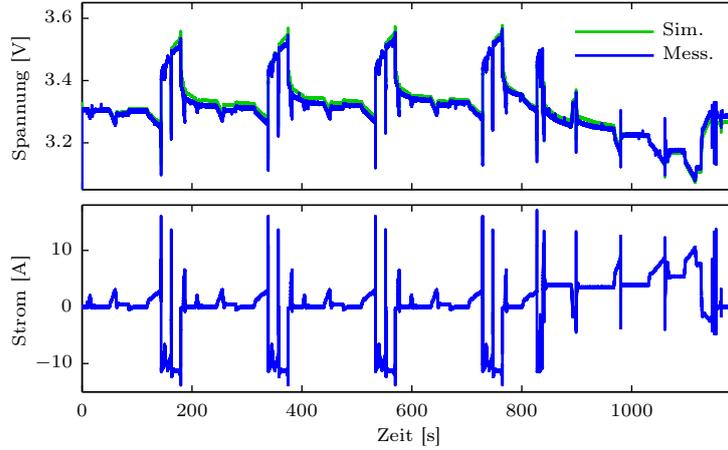


Abbildung 2: Vergleich zwischen LMN-basiertem Modell (Sim.) und einer echten Lithium-Ionen Zelle (Mess.).

auf folgende Weise gebildet werden kann:

$$\mathcal{Z} : \begin{cases} \mathbf{x}_{Z,k+1} = \mathbf{A}_Z \mathbf{x}_{Z,k} + \mathbf{b}_Z i_k \\ v_{Z,k} = \mathbf{c}_Z^T \mathbf{x}_{Z,k} + d_Z i_k, \end{cases} \quad (2)$$

wobei $\mathbf{A}_Z = \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k} \mathbf{A}_{Z,j}$, $\mathbf{b}_Z = \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k} \mathbf{b}_{Z,j}$, $\mathbf{c}_Z^T = \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k} \mathbf{c}_{Z,j}^T \mathbf{A}_{Z,j}$ und $d_Z = \sum_{j=1}^M \Phi_{j,k} \mathbf{c}_{Z,j}^T \mathbf{b}_{Z,j}$. Der affine Term des lokalen Modells muss noch addiert werden, damit man eine Näherung für die Ausgangsspannung erhält:

$$\hat{v}_k = v_{Z,k} + v_{oc}(\tilde{\mathbf{x}}(k)). \quad (3)$$

Diese lokale Interpretation wird in weiterer Folge für die Kopplung zwischen Batteriemodell und UUT verwendet.

2.3 Modellbildung für den Reglerentwurf

Die Ausgangsstufe des BE besteht aus einem Tiefsetzsteller mit drei IGBT-Halbbrücken (siehe Abb. 1), die mittels Pulsweitenmodulation (PWM) angesteuert werden. Das dynamische Führungs- und Störverhalten wird vom passiven Ausgangsfilter, bestehend aus der äquivalenten Induktivität $L_1 = 1/3 \cdot L_{1[a,b,c]}$ und dem Ausgangskondensator C_1 , bestimmt. Als Stellgröße dient die äquivalente Stellspannung u die dem Produkt aus Tastverhältnis d und Zwischenkreisspannung V_0 entspricht. Messbare Größen sind der Induktivitätsstrom $i_1 = i_{1a} + i_{1b} + i_{1c}$, die Ausgangsspannung v und der Laststrom i .

Für die Beschreibung des Prüflings muss ein möglichst generisches und einfach parametrierbares Modell verwendet werden, weil von den Herstellern der UUTs bzw. den Anwendern der BEs kaum Informationen über den inneren Aufbau der Wechselrichter preisgegeben werden. Wie sich herausstellte, ist zum einen die Invarianz des Leistungsbedarfs P gegenüber Änderungen der Versorgungsspannung v (Konstantleistungslast, CPL)

und zum anderen der Stützkondensator auf der Gleichspannungsseite der UUT maßgeblich für die Regelung des BE. Die Kapazität C_2 des Stützkondensators geht entweder als einer der wenigen Parameter aus den Spezifikationen der UUT hervor oder kann messtechnisch bestimmt werden. Mittels Linearisierung einer idealen CPL um den aktuellen Arbeitspunkt $v_k = v^0 + \Delta v_k$, $i_k = i^0 + \Delta i_k$ kann diese als Stromquelle bzw. -senke mit einem negativen differentiellen Innenwiderstand $r_{P,k} = -v^2/P$ approximiert werden [14, 8]. Das resultierende Ersatzschaltbild ist in Abb. 3 dargestellt. Zum Zwecke einer einfacheren Notation wird der Parameter $g_P = 1/r_P$ verwendet. Da sich P laufend verändert, muss g_P als unsicher angenommen werden. Mit der größten zu erwartenden Leistung \bar{P} und der kleinsten zulässigen Betriebsspannung \underline{v} des Prüflings kann der Parameterbereich folgendermaßen eingeschränkt werden:

$$g_P \geq \underline{g}_P = -\bar{P}/\underline{v}^2 \quad (4)$$

$$g_P \leq \bar{g}_P = \bar{P}/\underline{v}^2. \quad (5)$$

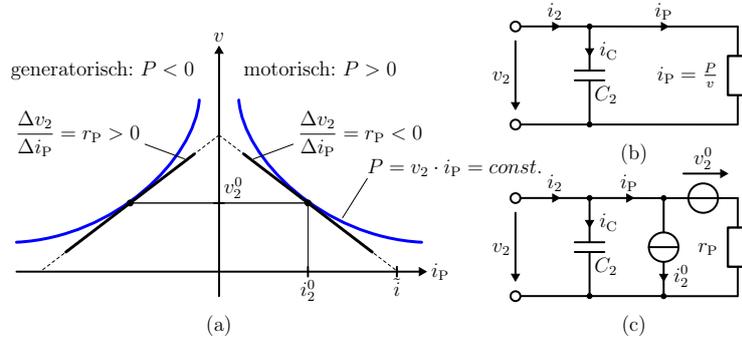


Abbildung 3: Modell einer Konstantleistungslast: Statische Kennlinie (a), nichtlineares Modell (b) und linearisiertes Ersatzschaltbild (c).

Werden Prüfling und BE miteinander verbunden entsteht ein gekoppeltes dynamisches System, das mit folgendem Zustandsraummodell beschrieben werden kann:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1+C_2} & \frac{-g_P}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{C_1+C_2} & \frac{g_P}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \mathbf{w} \quad (6)$$

$$i = \begin{bmatrix} \frac{C_2}{C_1+C_2} & \frac{C_1}{C_1+C_2} g_P \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} \frac{C_1}{C_1+C_2} & \frac{-C_1 g_P}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \mathbf{w}.$$

Dabei ist der Zustandsvektor $\mathbf{x}_c = [i_1 \ v]^T$ und der Arbeitspunkt $\mathbf{w} = [i^0 \ v^0]^T$.

Für die digitale Regelung wird das System mit der Rate $f_s = 1/T_s$ zu den Zeitpunkten $t_k = k \cdot T_s$ synchron zur PWM abgetastet. Dadurch kann die PWM vereinfacht als Abtast-Halteglied modelliert werden und das zeitdiskrete Reglerentwurfsmodell wird:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathbf{x}_{d,k+1} = \mathbf{A}_d(g_P) \mathbf{x}_{d,k} + \mathbf{b}_d(g_P) u_k + \mathbf{E}_d(g_P) \mathbf{w}_k \\ v_k = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_{d,k} \\ i_k = \mathbf{c}_d^{iT}(g_P) \mathbf{x}_{d,k} + \mathbf{f}_d^{iT} \mathbf{w}_k \end{cases} \quad (7)$$

Der Zustandsvektor bleibt unverändert mit $\mathbf{x}_{d,k} = [i_{1,k} \ v_k]^T$ und der zusätzliche Ausgang i_k dient als Eingang für das Batteriemodell.

3 MPC-basierte Impedanzemulation

Abbildung 4 zeigt den Batterieemulator als Schnittstelle zwischen Simulation und Prüfstand. Ziel der Impedanzemulation ist, den Einfluss der Aktuatoren und Signalwandler auf die Dynamik des Gesamtsystems möglichst verschwinden zu lassen; so als ob die beiden Teile direkt miteinander gekoppelt wären. Dass dies nicht vollständig möglich ist, liegt auf der Hand. Im Folgenden soll aber ein Weg für die praktische Umsetzung gezeigt werden.

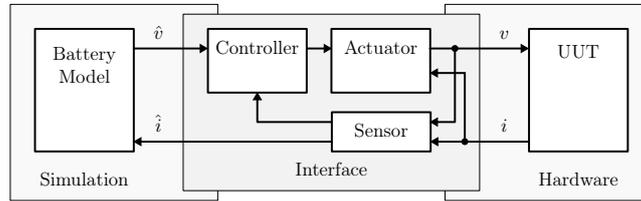


Abbildung 4: Schnittstelle zwischen der Echtzeit-Batteriesimulation und dem Prüfstand.

3.1 Erweiterung des Prädiktionsmodells

Es soll eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung $v_{oc,k}$ und der endlichen Innenimpedanz \mathcal{Z} emuliert werden. Ein modellbasierter Regler wird deshalb so ausgelegt, dass die Ausgangsspannung v_k des Anlagenmodells \mathcal{P} (7) der virtuellen Klemmenspannung \hat{v}_k des Impedanzmodells \mathcal{Z} (2) folgt. Durch Erweiterung des Zustandsvektors auf $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{d,k}^T \ \mathbf{x}_{Z,k}^T]^T$ können Anlagen- und Impedanzmodell zu einem Zustandsraummodell zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k+1} \\ \mathbf{x}_{Z,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{A}_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k} \\ \mathbf{x}_{Z,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{f}_d^{iT} \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ v_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k} \\ \mathbf{x}_{Z,k} \end{bmatrix} \\ i_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d,k} \\ \mathbf{x}_{Z,k} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_d^{iT} \mathbf{w}_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Anhand von (2) und (3) ist ersichtlich, dass der Spannungswert

$$\hat{v}_k = \mathbf{c}_Z^T \mathbf{x}_{Z,k} + d_Z i_k + v_{oc}(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \quad (9)$$

vom Zustand des zu regelnden Systems abhängt. Dadurch entsteht jedoch eine unerwünschte, zusätzliche Rückkopplung. Um diese zu vermeiden, wird die virtuelle Leerlaufspannung

$$v_k - v_{Z,k} = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_{d,k} - d_Z \mathbf{c}_d^{iT} \mathbf{x}_{d,k} - \mathbf{c}_Z^T \mathbf{x}_{Z,k} - d_Z \mathbf{f}_d^{iT} \mathbf{w}_k \quad (10)$$

als neue Regelgröße y_k eingeführt, deren Sollwert $v_{oc,k}$ vom Zustand unabhängig ist (siehe Abb. 5).

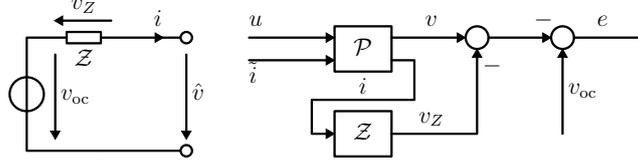


Abbildung 5: Definition der Leerlaufspannung und des Regelfehlers für die Impedanzemulation.

3.2 Steuerbarkeit

Zur Beurteilung der neu geschaffenen, virtuellen Regelgröße soll deren Steuerbarkeit ausgewertet werden. In [18] wird das Energiemaß als ein praktikables und numerisch robustes Maß für die Steuerbarkeit einzelner Zustandsvariablen beschrieben. Um die Regelgröße als Zustand bewertbar zu machen, wird das Modell für die Analyse nochmals erweitert zu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{dk+1} \\ \mathbf{x}_{Z,k+1} \\ v_{oc,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{A}_Z & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_d^T + \mathbf{d}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{c}_Z^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{dk} \\ \mathbf{x}_{Z,k} \\ v_{oc,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} u_k \quad (11)$$

Die zeitdiskrete Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{W}_C^{N_G}$ für ein Intervall mit der Länge N_G wird berechnet mittels:

$$\mathbf{W}_C^{N_G} = \sum_{k=0}^{N_G} \Phi_k \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^T \Phi_k^T \quad \text{mit} \quad \Phi_k = \prod_{i=0}^k \tilde{\mathbf{A}}^i. \quad (12)$$

Die Diagonalelemente der Inversen sind dann ein Steuerbarkeitsmaß für die einzelnen Zustandsvariablen:

$$m_n = 1 / \sqrt{\left((\mathbf{W}_C^{N_G})^{-1} \right)_{nn}} \quad (13)$$

Für den einfachen Fall einer rein Ohm'schen Impedanz $v_{Z,k} = R_Z \cdot i_k$ zeigt Abb. 6 die Steuerbarkeit m_Z der Variable v_{oc} über R_Z und g_P für $N_G = 5$. Deutlich erkennbar ist, dass entlang der Hyperbel $R_Z \cdot g_P = -1$ gilt: $m_Z = 0$. Folglich ist die Regelgröße dort nicht steuerbar. Um den Verlust der Steuerbarkeit zu verhindern, darf R_Z also nur so gewählt werden, dass $R_Z < -1/g_P$ (wenn $R_Z > 0$) bzw. $R_Z > -1/g_P$ (wenn $R_Z < 0$) für den gesamten Betriebsbereich des Prüflings erfüllt ist. Mit den Grenzwerten aus (4) und (5) muss deshalb Folgendes gelten:

$$R_Z < -1/g_P = \underline{v}^2 / \bar{P} \quad \text{wenn} \quad R_Z > 0 \quad (14)$$

$$R_Z > -1/\bar{g}_P = -\underline{v}^2 / \bar{P} \quad \text{wenn} \quad R_Z < 0. \quad (15)$$

Dies stellt keine praktische Einschränkung dar. Bei Verwendung einer Batterie mit so hohem Innenwiderstand würde bei voller Leistung die Spannung auf die Hälfte der Leerlaufspannung einbrechen und bei Überlastung vollständig zusammenbrechen, sodass ein sinnvoller Betrieb ohnehin nicht möglich wäre. Der Sonderfall $R_Z = 0$ entspricht der reinen Spannungsregelung und ist immer möglich.

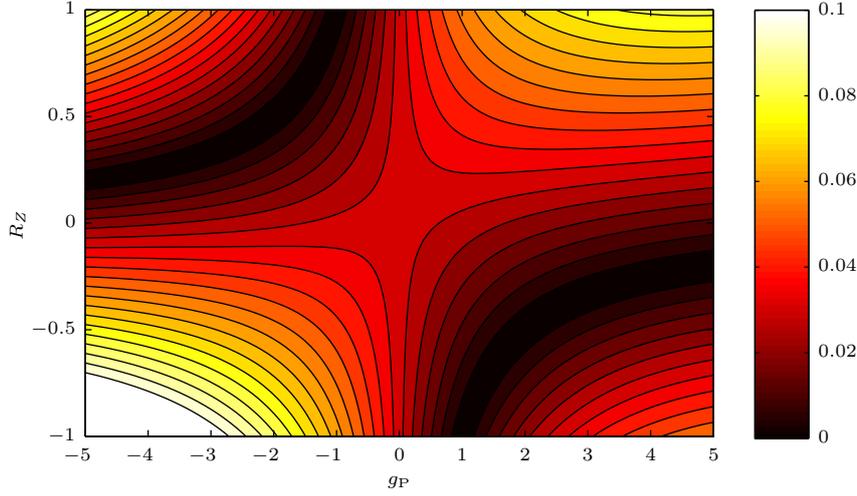


Abbildung 6: Steuerbarkeit des virtuellen Impedanzausgangs in Abhängigkeit von virtueller Impedanz R_Z und Arbeitspunktparameter des Prüflings g_P .

3.3 Implementierung mittels MPC

Für die Implementierung der Impedanzemulation wird eine MPC-Variante mit kontinuierlich veränderlicher Stellgröße und quadratischer Kostenfunktion verwendet (siehe z.B.: [17]). Bei gegebenem Prädiktionsmodell mit inkrementeller Stellgröße $d_k V_0 = u_k = u_{k-1} + \Delta u_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}\Delta u_k, \quad (16)$$

liegt die Aufgabe darin, eine Stellsequenz $\Delta \mathbf{U}_k = [\Delta u_{k|k} \ \cdots \ \Delta u_{k+N_c-1|k}]^T$ zu finden, welche die Kostenfunktion mit einem Horizont von N_c Abtastschritten:

$$J_k = \sum_{j=0}^{N_c-1} \left(\|\Delta u_{k+j}\|_R^2 + \|y_{k+j} - v_{oc}\|_Q^2 \right) = \min_{\Delta \mathbf{U}_k}! \quad (17)$$

minimiert; unter Einhaltung von Ungleichungsbeschränkungen in der Form von:

$$\mathbf{M}\Delta \mathbf{U}_k \leq \boldsymbol{\gamma}. \quad (18)$$

Die Stellgrößengewichtung R bestraft dabei den Stellaufwand.

Für die vorliegende Anwendung wird das erweiterte Modell (8) zur Erstellung des Prädiktionsmodells verwendet und nochmals um den Arbeitspunkt $\mathbf{w}_k = [i^0 \ v^0]^\top$ als Störgröße erweitert:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} & \mathbf{b}_d & \mathbf{E}_d \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{i\top} & \mathbf{A}_Z & \mathbf{0} & \mathbf{b}_Z \mathbf{f}_d^{i\top} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & a\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Delta u_k \quad (19)$$

$$v_k - v_{Z,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{c}_d^\top - d_Z \mathbf{c}_d^{i\top}) & -\mathbf{c}_Z^\top & 0 & -d_Z \mathbf{f}_d^{i\top} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^\top} \mathbf{x}_k \quad (20)$$

mit

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{d,k}^\top \ \mathbf{x}_{Z,k}^\top \ u_{k-1} \ \mathbf{w}_k^\top]^\top. \quad (21)$$

Damit das System stabilisierbar ist, wird die Störgrößendynamik mit $a = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, angenommen.

Für die Lösung des MPC-Problems in Echtzeit wird ein heuristisches Verfahren verwendet, wie es in [13] beschrieben wird.

3.4 Simulationsergebnisse

Abbildung 7 zeigt simulierte Trajektorien nach unterschiedlichen Auslenkungen vom Arbeitspunkt x^* , der sich aufgrund der Leerlaufspannung $v_{oc} = 250 \text{ V}$, der virtuellen Impedanz $R_Z = 0.2 \Omega$ und der momentanen Belastung durch den Prüfling mit $P = 75 \text{ kW}$ einstellt. In der Abbildung zusätzlich dargestellt ist jene Kurve \mathcal{Z} , die der geforderten Impedanz entspricht:

$$v = v_{oc} - R_Z \left(\frac{P}{v} + \left(i_1 - \frac{P}{v} \right) \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right). \quad (22)$$

Der MPC versucht nicht, auf direktem Wege wieder den stationären Arbeitspunkt zu erreichen, sondern bewegt das System durch Sättigung der Stellgröße so schnell wie möglich zur Kurve \mathcal{Z} und folgt dieser dann zum Arbeitspunkt.

Der Vorteil der beschriebenen Impedanzemulation wird deutlich, wenn der MPC zum Vergleich als reiner Spannungsregler – mit sonst identischen Parametern – ausgelegt und der gemessene Laststrom rückgekoppelt wird, um über das Impedanzmodell den Sollwert für die Klemmenspannung zu berechnen. Die resultierenden Trajektorien sind in Abb. 8 dargestellt. Das System bleibt zwar stabil, aber die zusätzliche Rückkopplung führt zu starken Oszillationen. Obwohl schlussendlich der Sollwert erreicht wird, ist die dynamische Abweichung sehr deutlich.

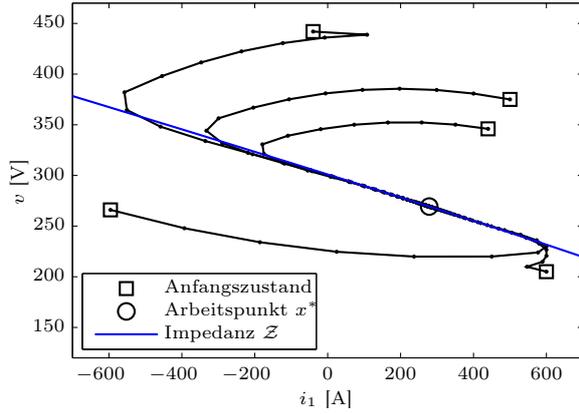


Abbildung 7: Trajektorienverlauf bei Impedanzemulation.

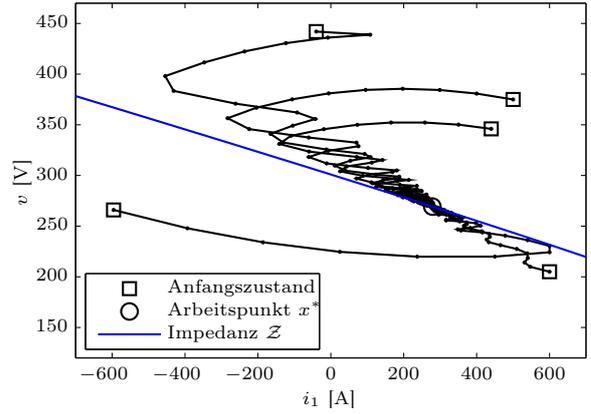


Abbildung 8: Folgeregelung mit Sollwertvorgabe durch ein Impedanzmodell.

4 Robuste Stabilität

4.1 Stabilisierung mittels infinite horizon und terminal weight

Ein häufig verwendetes Mittel für die Implementierung eines stabilisierenden MPC ist die Einführung eines sog. „terminal weight“ in der Kostenfunktion (siehe z.B.: [23, 26]):

$$J_k = \sum_{j=0}^{N_c-1} (\|\Delta u_{k+j}\|_R^2 + \|y_{k+j} - v_{oc}\|) + \|\tilde{\mathbf{x}}_{k+N_c}\|_{\mathbf{P}}^2 = \min_{\Delta \mathbf{U}_k} \quad (23)$$

Das terminal weight bestraft am Ende des Horizonts die verbleibende Abweichung $\tilde{\mathbf{x}}_{k+N_c} = \mathbf{x}_{k+N_c} - \mathbf{x}^*$ der prädictierten Trajektorie \mathbf{x}_{k+N_c} vom gewünschten Arbeitspunkt \mathbf{x}^* .

Die terminal weight-Matrix \mathbf{P} wird durch Lösen der zeitdiskreten, algebraischen Riccati-Gleichung bestimmt, mit den wählbaren Parametern \mathbf{Q} und R :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{K}^T (R + \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}) \mathbf{K} \quad (24)$$

mit $\mathbf{K} = \bar{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ und $\bar{R} = R + \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}$

Dadurch wird nach dem expliziten Horizont N_c das Verhalten eines linear quadratic regulator (LQR) impliziert und damit der Horizont bis ins Unendliche verlängert, unter der Annahme, dass nach N_c keine Beschränkungen mehr aktiv sind. Dadurch übernimmt der MPC auch die stabilisierenden Eigenschaften eines LQR.

4.2 Robuste Ausführung des MPC

Um den MPC robust gegen Änderungen des Lastparameters g_P zu machen, werden zwei Modelle mit den extremen Parametern \underline{g}_P und \bar{g}_P zu einem dualen Prädiktionsmodell zusammengefügt. Mit

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d(\bar{g}_P) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d(\underline{g}_P) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d(\bar{g}_P) \\ \mathbf{b}_d(\underline{g}_P) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d(\bar{g}_P) \\ \mathbf{E}_d(\underline{g}_P) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_r^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{c}_d^T & \frac{1}{2} \mathbf{c}_d^T \end{bmatrix}$$

und durch Stapeln der Zustandsvektoren beider Modelle zu $\mathbf{x}_{r,k} = [\bar{\mathbf{x}}_{d,k}^T \quad \underline{\mathbf{x}}_{d,k}^T]^T$ entsteht folgendes Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{r,k+1} &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_{r,k} + \mathbf{b}_r u_k + \mathbf{E}_r \mathbf{w}_k \\ v_k &= \mathbf{c}_r^T \mathbf{x}_{r,k}.\end{aligned}\quad (25)$$

Beide Modelle werden mit der selben Stellgröße angesteuert und die beiden prädizierten Regelgrößen werden gemittelt. Die Destabilisierung eines der beiden Modelle würde bei unendlich langem Horizont zu unendlich hohen Kosten führen¹. Dies wird durch das terminal weight verhindert².

Das duale Prädiktionsmodell ist in Abb. 9 als Blockbild dargestellt. Dieses kann genauso wie das ursprüngliche Modell in das erweiterte System 8 eingefügt werden.

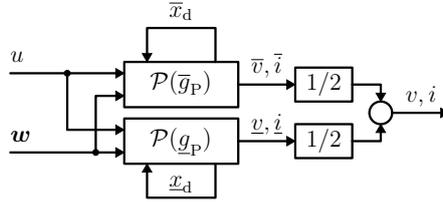


Abbildung 9: Doppeltes Prädiktionsmodell des robusten MPC.

Aus Platzgründen sei für eine detaillierte Beschreibung der robusten Stabilität auf die Veröffentlichungen der Autoren in [13] und [16] verwiesen.

5 Stationäre und dynamische Abweichung

Weil der virtuelle Impedanzausgang $v_k - v_{Z,k}$ seinem Sollwert folgen soll, wird die Zustandsgewichtung mit $\mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T$ gewählt. Das daraus resultierende terminal weight \mathbf{P} gewichtet aber nicht nur den virtuellen Impedanzausgang, sondern den gesamten Zustandsvektor. Damit es dadurch nicht zu einer bleibenden Regelabweichung kommt, muss der Ursprung des Zustandsraums zum Arbeitspunkt x^* hin verschoben werden.

Der Offset $\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_d^{*T} \quad \mathbf{x}_Z^{*T} \quad u^* \quad \mathbf{0}]^T$ entsprechend dem Sollwert $y^* = v_{oc}$ unter der Bedingung $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ kann durch Lösen der Gleichung (19) im stationären Zustand $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ berechnet werden:

$$u^* = \left\{ [(\mathbf{c}_d^T + d_Z \mathbf{c}_d^{iT}) \quad \mathbf{c}_Z^T] \cdot \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{A}_Z \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot y^* \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_d^* \\ \mathbf{x}_Z^* \end{bmatrix} \Big|_{\bar{i}=0} = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{A}_Z \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u^* \quad (27)$$

¹Wenn das System detektierbar ist.

²Wenn das System stabilisierbar ist.

Bei Belastung mit $\mathbf{w}_k \neq 0$, wird ein zusätzlicher Offset benötigt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_d^* \\ \mathbf{x}_Z^* \end{bmatrix} \Big|_{u=0} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{c}_d^{iT} & \mathbf{I} - \mathbf{A}_Z \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{\Gamma}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{b}_Z \mathbf{f}_d^{iT} \end{bmatrix} \mathbf{w}_k. \quad (28)$$

Diese Störgrößenkompensation kann dem MPC hinzugefügt werden, indem die Gewichtungsmatrix \mathbf{Q} verändert wird, sodass $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_x^T (\mathbf{c} \mathbf{c}^T) \mathbf{C}_x$ mit:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Die Arbeitspunktkorrektur ist aber nur für den stationären Zustand exakt. Weil durch \mathbf{P} alle Zustände Richtung Arbeitspunkt gezogen werden, entsteht bei transienten Vorgängen eine Abweichung von der gewünschten Impedanz. Dies ist in Abb. 10 daran erkennbar, dass die simulierten Trajektorien gegenüber der Kurve \mathcal{Z} etwas verdreht sind.

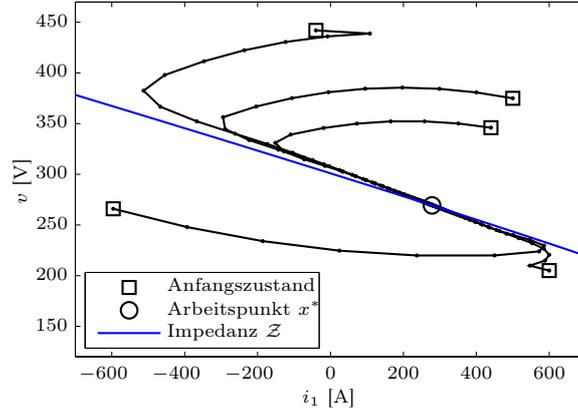


Abbildung 10: Impedanzemulation: MPC mit terminal weight \mathbf{P} .

6 Versuchsergebnisse

Mit einem Prüfstands Aufbau wie in Abb. 1 wurde das Belastungsprofil des Elektromotors eines simulierten Hybridfahrzeugs während des neuen europäischen Fahrzyklus (NEFZ) nachgebildet. Dabei wurde das in Abb. 2 gezeigte Zellenmodell verwendet um eine virtuelle Batterie aus 80 in Serie geschalteten Modulen mit je 16 parallel geschalteten Zellen zu emulieren.

Für die schnelle Dynamik der virtuellen Batterie wurde der Durchgriffsterm d_Z aus dem aktuellen lokal linearen Modell (2) als Innenwiderstand interpretiert und per Impedanzemulation mittels MPC nachgebildet. Für die langsame Dynamik wurde die Leerlaufspannung v_{oc} anhand des vollständigen Batteriemodells (1) nachgeführt.

Die am Prüfstand gemessene Spannung und die vom Batteriemodell vorgegebene Spannung sind in Abb. 11 gegenübergestellt. Auch bei transienten Vorgängen während des Prüflaufs folgt der Prüfstand exakt der Vorgabe durch das Batteriemodell.

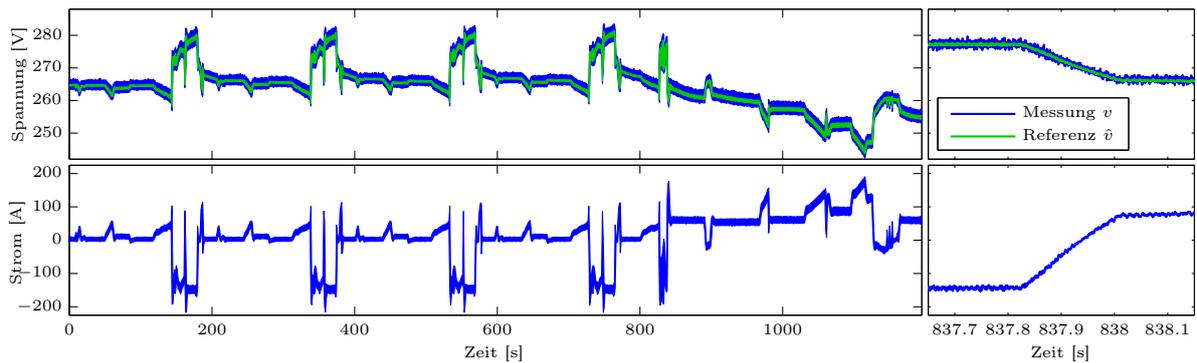


Abbildung 11: Prüfstandsversuch mit LMN-Batteriemodell und Impedanzemulation. Vergleich zwischen gemessener Spannung und Referenzspannung vom Batteriemodell.

7 Schlussbemerkung

Die vorgestellte Methode ermöglicht die realitätsgetreue Nachbildung des elektrischen Verhaltens von Traktionsbatterien auf Prüfständen für elektrifizierte Fahrzeugantriebe. Dabei wird mittels modellprädiktiver Impedanzemulation die endliche Dynamik der Kopplung zwischen Simulationsmodell und Prüfstand explizit berücksichtigt. Durch den systematischen Ansatz kann sowohl die Realisierbarkeit der virtuellen Impedanz in Form der Steuerbarkeit als auch die Stabilität des gesamten, gekoppelten Systems untersucht werden. Maßgeblichen Einfluss auf die Stabilität haben das nichtlineare Verhalten der Last und die physikalisch begrenzte Stellgröße des Batterieemulators.

Für einen stabilisierenden MPC wird üblicherweise ein terminal weight in die Kostenfunktion eingefügt. Dies ist auch bei dieser Anwendung möglich. Bei entsprechender Korrektur des Arbeitspunkts bleibt zwar die stationäre Genauigkeit erhalten; die Dynamik der emulierten Impedanz wird jedoch durch das terminal weight geringfügig verändert. Bisher konnten in Versuchen aber noch keine negativen Auswirkungen festgestellt werden.

Literatur

- [1] Arora, Pankaj, Marc Doyle, Antoni S. Gozdz, Ralph E. White und John Newman: *Comparison between computer simulations and experimental data for high-rate discharges of plastic lithium-ion batteries*. Journal of Power Sources, 88(2):219–231, 2000, ISSN 0378-7753.
- [2] Buller, Stephan, Marc Thele, Eckhard Karden und Rik W. De Doncker: *Impedance-based non-linear dynamic battery modeling for automotive applications*. Journal of Power Sources, 113(2):422–430, 2003, ISSN 0378-7753.
- [3] De Brabandere, K., B. Bolsens, J. Van den Keybus, A. Woyte, J. Driesen und R. Belmans: *A Voltage and Frequency Droop Control Method for Parallel Inverters*. IEEE Transactions on Power Electronics, 22(4):1107–1115, Juli 2007, ISSN 0885-8993.

- [4] Do, Dinh Vinh, C. Forgez, K. El Kadri Benkara und G. Friedrich: *Impedance Observer for a Li-Ion Battery Using Kalman Filter*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 58(8):3930–3937, Oktober 2009, ISSN 0018-9545.
- [5] Emadi, A., A. Khaligh, C.H. Rivetta und G.A. Williamson: *Constant power loads and negative impedance instability in automotive systems: definition, modeling, stability, and control of power electronic converters and motor drives*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 55(4):1112–1125, Juli 2006, ISSN 0018-9545.
- [6] Geyer, T., G. Papafotiou, R. Frasca und M. Morari: *Constrained Optimal Control of the Step-Down DC-DC Converter*. IEEE Transactions on Power Electronics, 23(5):2454–2464, September 2008, ISSN 0885-8993.
- [7] Gomadam, Parthasarathy M., John W. Weidner, Roger A. Dougal und Ralph E. White: *Mathematical modeling of lithium-ion and nickel battery systems*. Journal of Power Sources, 110(2):267–284, 2002, ISSN 0378-7753.
- [8] Grigore, V., J. Hatonen, J. Kyyra und T. Suntio: *Dynamics of a buck converter with a constant power load*. In: *Power Electronics Specialists Conference, 1998. PESC 98 Record. 29th Annual IEEE*, Band 1, Seiten 72–78vol.1, 1998.
- [9] Hametner, C. und S. Jakubek: *Combustion Engine Modelling using an Evolving Local Model Network*. In: *Proceedings of the 2011 International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ IEEE 2011)*, June 2011.
- [10] Hametner, C., J. Unger und S. Jakubek: *Local model network based dynamic battery cell model identification*. In: *Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Instrumentation, Measurement, Circuits and Systems*, Seiten 116–123. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2012.
- [11] Jakubek, S. und C. Hametner: *Identification of Neurofuzzy Models Using GTLS Parameter Estimation*. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics, 39(5):1121–1133, Oktober 2009, ISSN 1083-4419.
- [12] Klein, R., N.A. Chaturvedi, J. Christensen, J. Ahmed, R. Findeisen und A. Kojic: *State estimation of a reduced electrochemical model of a lithium-ion battery*. In: *American Control Conference (ACC), 2010*, Seiten 6618–6623, 30 2010-july 2 2010.
- [13] König, Oliver, Gregor Gregorčič und Stefan Jakubek: *Model Predictive Control of a DC-DC Converter for Battery Emulation*. Control Engineering Practice, 21(4):428–440, 2013, ISSN 0967-0661.
- [14] König, Oliver, Stefan Jakubek und Günter Prochart: *Model Predictive Control of a Battery Emulator for Testing of Hybrid and Electric Powertrains*. In: *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2011 IEEE*, September 2011.
- [15] König, Oliver, Stefan Jakubek und Günter Prochart: *Battery Impedance Emulation for Hybrid and Electric Powertrain Testing*. In: *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2012 IEEE*, Seiten 627–632, Oktober 2012.

- [16] König, Oliver, Günter Prochart, Christoph Hametner und Stefan Jakubek: *Battery Emulation for Power-HIL Using Local Model Networks and Robust Impedance Control*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, ISSN 0278-0046. Early access article.
- [17] Maciejowski, J.M.: *Predictive control: with constraints*. Pearson education, 2002.
- [18] Moschik, S. und N. Dourdoumas: *Steuerbarkeitsmaße für lineare zeitinvariante Systeme - Ein Überblick*. INTERNATIONAL JOURNAL AUTOMATION AUSTRIA, 19(1):1–14, 2011.
- [19] Nelles, O.: *Nonlinear System Identification*. Springer Verlag, 1. Auflage, 2002.
- [20] Orchard, M., P. Hevia-Koch, B. Zhang und L. Tang: *Risk Measures for Particle-filtering-based State-of-Charge Prognosis in Lithium-Ion Batteries*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, ISSN 0278-0046. Early access article.
- [21] Plett, G.L.: *High-performance battery-pack power estimation using a dynamic cell model*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 53(5):1586–1593, September 2004, ISSN 0018-9545.
- [22] Rahimi, A.M. und A. Emadi: *Active Damping in DC/DC Power Electronic Converters: A Novel Method to Overcome the Problems of Constant Power Loads*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 56(5):1428–1439, Mai 2009, ISSN 0278-0046.
- [23] Rawlings, J.B. und D.Q. Mayne: *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob Hill Pub, Llc, 2009, ISBN 9780975937709.
- [24] Ren, Wei, M. Steurer und T.L. Baldwin: *Improve the Stability and the Accuracy of Power Hardware-in-the-Loop Simulation by Selecting Appropriate Interface Algorithms*. IEEE Transactions on Industry Applications, 44(4):1286–1294, 7–8 2008, ISSN 0093-9994.
- [25] Rojas, C., J. Rodriguez, F. Villarroel, J. Espinoza, C. Silva und M. Trincado: *Predictive Torque and Flux Control Without Weighting Factors*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, PP(99):1, 2012, ISSN 0278-0046.
- [26] Rojas, Osvaldo J., Graham C. Goodwin, María M. Serón und Arie Feuer: *An SVD based strategy for receding horizon control of input constrained linear systems*. Int. J. Robust Nonlinear Control, 14(13-14):1207–1226, 2004, ISSN 1099-1239.
- [27] Steurer, M., C.S. Edrington, M. Sloderbeck, Wei Ren und J. Langston: *A Megawatt-Scale Power Hardware-in-the-Loop Simulation Setup for Motor Drives*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 57(4):1254 –1260, April 2010, ISSN 0278-0046.
- [28] Zhang, X., D.M. Vilathgamuwa, K. J. Tseng, B.S. Bhangu und C.J. Gajanayake: *Power Buffer With Model Predictive Control for Stability of Vehicular Power Systems With Constant Power Loads*. IEEE Transactions on Power Electronics, 28(12):5804–5812, 2013, ISSN 0885-8993.

Zur Flachheit von AI-Systemen

Kurt Schlacher, Markus Schöberl
Johannes Kepler Universität
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung
Altenberger Straße 69, Linz, 4040
Kurt.Schlacher@jku.at,^{*} Markus.Schoeberl@jku.at,[†]

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Darstellung nichtlinear konzentriert parametrischer Regelstrecken als Pfaffsche Systeme verwendet, um flache Ausgänge zu konstruieren. Die Konstruktion nutzt dabei die Eigenschaft aus, dass diese Systeme genau dann flach sind, wenn sie sich auf eine geeignete Jet-Mannigfaltigkeit so transformieren lassen, dass sie dort rein vertikal sind. Dazu wird ein Algorithmus diskutiert, der schrittweise den vertikalen Anteil des Systems erhöht. Er basiert auf AI-Systemen, und es wird gezeigt, dass dies keine Einschränkung ist. Außerdem verlangt er gegebenenfalls die Erweiterung der Systeme mit Kontaktformen, was einer Eingangs/Zustands-Linearisierung mit dynamischer Rückführung entspricht. Tritt diese Erweiterung nicht auf, dann vereinfacht sich das Verfahren zu den bekannten für die Eingangs/Zustands-Linearisierung mit statischer Rückführung.

1 Einleitung

Entwurfsmethoden zur Regelkreissynthese, welche die Eigenschaft der Flachheit ausnutzen, wurden seit ihrer Einführung vor ca. 25 Jahren, siehe z.B. [1] und die dortigen Zitate, sehr populär. Die wichtigsten Gründe dafür sind, dass sich im Falle konzentriert parametrischer Systeme, Aufgaben der Trajektorienplanung und deren Stabilisierung unter Ausnutzung dieser Eigenschaft wesentlich vereinfachen, oder im Falle verteilt parametrischer Systeme zumindest die Trajektorienplanung wesentlich einfacher wird. Abgesehen von speziellen Fällen ist aber das Problem, die systematische Konstruktion flacher Ausgänge selbst für nichtlineare konzentriert parametrische Systeme, noch offen. So findet man in [2, 3] notwendige Bedingungen für die Klasse der nichtlinearen konzentriert parametrischen Systeme, aber es gibt keine Entwicklung hin zu Algorithmen oder zu hinreichenden Bedingungen. Hinreichende und notwendige Bedingungen findet man in [4]. Allerdings sind diese in sehr vielen Fällen nicht systematisch anwendbar und damit kaum

^{*}Korrespondenz bitte an diese Adresse

[†]Markus Schöberl ist APART Stipendiat der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

überprüfbar. Ein konstruktives Verfahren für Pfaffsche Systeme findet man bereits in [5], führt dieses Verfahren allerdings nicht zum Ziel, dann ist keine Aussage möglich.

Ein Verfahren für Pfaffsche Systeme modelliert auf Jet-Mannigfaltigkeiten wird in [6] präsentiert. Dort wird gezeigt, dass Pfaffsche Systeme modelliert auf gewissen Jet-Mannigfaltigkeiten genau dann flach sind, wenn sie vertikal sind. Dazu wird ein Algorithmus vorgeschlagen, der es erlaubt, schrittweise Jet-Mannigfaltigkeiten so zu konstruieren, dass in jedem Schritt der vertikale Teil des Systems vergrößert wird. Das Verfahren benutzt eine modifizierte AI-Darstellung, wobei gezeigt wird, dass dies keine Einschränkung der Allgemeinheit ist. Vom Standpunkt der Eliminationstheorie aus gesehen ist es verwandt zu Methoden von [7, 8], wo eine implizite Dreiecksform für die Klasse der 1-flachen Pfaffschen Systeme vorgeschlagen wird. Die Verfahren von [6] und [7, 8] sind im gewissen Sinne eine Weiterentwicklung von Ideen, die in [9] präsentiert worden sind, aber gleichzeitig auch Spezialisierung auf den Fall Pfaffscher Systeme. Sie vereinfachen sich zu den wohl bekannten für Eingangs/Zustands linearisierbare Systeme mit statischer Rückführung, siehe z.B. [10], [11], [12]. Sie gestatten es aber auch wohl bekannte Resultate für spezielle Fälle sehr einfach herzuleiten, z.B. die für Systeme mit einem Eingang, siehe [13], oder die für AI-Systeme mit n Zuständen und $n - 1$ Eingängen. siehe [14].

Da dieser Beitrag im Wesentlichen auf [6] beruht, und dort ein intensiver Gebrauch von Jet-Mannigfaltigkeiten erfolgt, werden die Grundlagen dazu im Abschnitt 2 kurz vorgestellt. Im Abschnitt 2 findet man Kontaktsysteme, die es im Abschnitt 4 dann erlauben, die Flachheit Pfaffscher Systeme einfach zu charakterisieren. Im Abschnitt 5 werden dann einfache Beispiele zur Motivation präsentiert. Einige Fakten über Pfaffsche Systeme werden im Abschnitt 6 wiederholt, sie erlauben es dann das etwas aufwendigere Beispiel von Abschnitt 7 zu lösen. Dieser Beitrag benutzt ausgiebig Methoden der Differentialgeometrie und die Tensornotation, Einsteinsche Summenkonvention, etc., um mathematische Ausdrücke möglichst übersichtlich zu halten. Der interessierte Leser findet diese Notation und noch viel mehr z.B. in [15].

2 Grundlagen und Notation

In diesem Beitrag werden dynamische Systeme mit Hilfe von Mannigfaltigkeiten, Bündeln, etc. beschrieben, um zu deren Untersuchung Methoden der Differentialgeometrie verwenden zu können, siehe auch [15]. Es sei \mathcal{M} eine m dimensionale Mannigfaltigkeit mit lokalen Koordinaten (z^1, \dots, z^m) , dann bezeichnen $\mathcal{T}(\mathcal{M})$, $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$ das zugehörige Tangential- und Kotangentialbündel mit Koordinaten $(z^1, \dots, z^m, \dot{z}^1, \dots, \dot{z}^m)$, $(z^1, \dots, z^m, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_m)$ und den üblichen holonomen Basen $\{\partial_{z^1}, \dots, \partial_{z^m}\}$, $\{dz^1, \dots, dz^m\}$.

Es sei $\mathcal{Z} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ ein Bündel mit Basismannigfaltigkeit \mathcal{B} , totaler Mannigfaltigkeit \mathcal{Z} und Projektion π . Die Zeit t ist die globale Koordinate für \mathcal{B} , (t, z^1, \dots, z^m) sind lokale Koordinaten für \mathcal{Z} . Für die erste Jet-Mannigfaltigkeit $J^1(\mathcal{Z})$ von \mathcal{Z} werden die Koordinaten $(t, z^1, \dots, z^m, z_1^1, \dots, z_1^m)$ verwendet. Das erste Jet-Bündel $J_0^1(\mathcal{Z})$ ist durch $J(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\pi_0^1} \mathcal{Z}$ gegeben. Die Prolongation $j(\sigma)$ eines Schnitts $\sigma \in \Gamma(\mathcal{Z})$, also einer Zuweisung $t = t$, $z^i = \sigma^i(t)$, auf $J^1(\mathcal{Z})$ ist durch $z_1^i = \partial_t \sigma^i(t)$ gegeben. Diese Konstruktion kann geradlinig auf Jet-Mannigfaltigkeiten $J^k(\mathcal{Z})$ der Ordnung k erweitert werden. Das vertikale

Bündel $\mathcal{V}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{Z})$ ist das Unterbündel mit $\dot{t} = 0$. Das horizontale Bündel $\mathcal{H}^*(\mathcal{Z})$ ist durch die Beziehungen $\dot{z}_1 = 0, \dots, \dot{z}_m = 0$ gegeben. Beide Bündel annullieren einander. Allerdings besitzen sie ohne Wahl eines Zusammenhangs kein Komplement, dessen Struktur bei Bündelisomorphismen erhalten bleibt. Betrachtet man aber die zurückgezogenen Bündel $\pi_0^{1,*}(\mathcal{T}(\mathcal{Z})), \pi_0^{1,*}(\mathcal{T}^*(\mathcal{Z}))$ mit $\mathcal{H}(\mathcal{Z}) = \text{span}(\{d_t\})$ der totalen Zeitableitung erster Ordnung

$$d_t = \partial_t + z_1^i \partial_i$$

und $\mathcal{V}^*(\mathcal{Z}) = \text{span}(\{\varpi^1, \dots, \varpi^m\})$ mit den Kontaktformen

$$d\varpi^i = dz^i - z_1^i dt, \quad (1)$$

dann erhält man die gewünschten Komplemente. Ein Schnitt $\rho \in \Gamma(J_0^1(\mathcal{Z}))$ ist nun genau dann die Prolongation eines Schnitts $\sigma \in \Gamma(\mathcal{Z})$, wenn $\rho^*(\varpi^i) = d\rho^i - \rho_1^i dt = 0$ gilt. Mit Hilfe von Kontaktformen lassen sich folglich prolongierte Schnitte einfach charakterisieren.

In Weiteren schreiben wir $v \lrcorner \omega$ für die Kontraktion einer p -Form ω und einem Vektorfeld v , $d\omega$ bezeichnet die äußere Ableitung einer p -Form und $[v, w]$ ist die Lie-Klammer der Vektorfelder v, w . Kontaktsysteme

3 Kontaktsysteme

Die Erweiterung von Jet-Mannigfaltigkeiten erster Ordnung, siehe Abschnitt 2 mit Kontaktformen erster Ordnung (1) auf höhere Jet-Mannigfaltigkeiten ist nun geradlinig. Dazu wird der spezielle Fall mit $\mathcal{Y}_\tau, \tau = 1, \dots, l$ von l Bündel $\mathcal{Y}_\tau \rightarrow \mathcal{B}$ mit Koordinaten (t, y^τ) betrachtet. Die Koordinaten der r_τ -ten Jet-Mannigfaltigkeit $J^{r_\tau}(\mathcal{Y}_\tau)$ werden mit $(t, y_0^\tau, \dots, y_{r_\tau}^\tau)$, es gilt $y^\tau = y_0^\tau$, bezeichnet. Das gefaserte Produkt $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathcal{Y}_l$ kann nun einfach auf $J^I(\mathcal{Y}) = J^{r_1}(\mathcal{Y}_1) \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} J^{r_l}(\mathcal{Y}_{n_y})$ erweitert werden, wobei I die Folge $I = r_1, \dots, r_l$ der Zahlen r_τ ist. Das Symbol $y_{[I]}$ bezeichnet alle Koordinaten von $J^I(\mathcal{Y})$ abgesehen von t , und y_I die Koordinaten der höchsten Ableitungen $y_{r_1}^1, \dots, y_{r_{n_y}}^{n_y}$. Mit Hilfe der Kontaktsysteme der Faktoren

$$K_\tau^* = \text{span}(\{dy_0^\tau - y_1^\tau dt, \dots, y_{r_\tau-1}^\tau - y_{r_\tau}^\tau dt\})$$

erhalten wir das Kontaktsystem

$$K^*(J^I(\mathcal{Y})) = \sum_{\tau=1}^l K_\tau^*$$

von $J^I(\mathcal{Y})$. Falls $r_\tau < 1$ gilt, wird $K_\tau^* = \text{span}(\{0\})$ gesetzt. Mit Hilfe von Kontaktsystemen kann man nun einfach Abbildungen zwischen Jet-Mannigfaltigen charakterisieren. Eine derartige Abbildung T ist genau dann die Prolongation eines Bündelmorphismus des gefaserten Produktes der totalen Mannigfaltigkeiten, wenn gilt $T^*(\omega) \in K^*(J^{\bar{I}}(\bar{\mathcal{Y}}))$ für alle $\omega \in K^*(J^I(\mathcal{Y}))$, oder einfach ausgedrückt T^* bildet Kontaktformen wieder auf solche ab.

4 Flachheit spezieller Pfaffscher Systeme

Gegeben sei das dynamische System

$$\dot{x}_1^i = f^i(x, u), \quad i = 1, \dots, n$$

mit n Zuständen und l Stellgrößen, wobei wir annehmen, dass keine Stellgröße redundant ist, d.h. die Matrix $\partial_u f(x, u)$ hat maximalen Rang. Man überzeugt sich nun, dass mit Hilfe der Kodistribution $P^* = \text{span}(\{\omega^1, \dots, \omega^n\})$,

$$\omega^i = dx^i - f^i(x, u)dt \quad (2)$$

obiges dynamisches System als Pfaffsches System auf einem Bündel $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ mit Koordinaten $(t, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m)$ für \mathcal{X} und (t) für \mathcal{B} dargestellt wird, denn es gilt $P^* \subset \mathcal{T}^*(\mathcal{X})$. Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass man nun die Eigenschaft der Flachheit von (2) einfach definieren kann.

Das Pfaffsche System P^* von (4) ist flach, wenn es ein Kontaktsystem $K^*(J^l(\mathcal{Y}))$ mit minimaler Anzahl von Koordinaten und eine Submersion $F: J^l(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Z}$, $(x, u) = F(y_{[l]})$ so gibt, dass gilt

$$F^*(P^*) \subset K^*(J^l(\mathcal{Y})).$$

Die Größen $y = y^1, \dots, y^l$ heißen flache Ausgänge.

Diese Definition legt auch eine Strategie zur Bestimmung von F nahe. Man wird versuchen Teile eines Pfaffschen Systems ausschließlich mit Hilfe von Kontaktformen darzustellen und sich dabei auf Transformationen einschränken, die Kontaktformen wieder auf Kontaktformen abbilden. Dazu werden nun ein paar einfache Beispiele untersucht.

5 Einfache Beispiele

Man betrachte folgendes einfache System mit einem Zustand x und einer Stellgröße beschrieben durch die Form

$$\dot{x} - f(x, u)dt \quad (3)$$

auf einem Bündel \mathcal{X} mit lokalen Koordinaten $(t, x, u) \mapsto (t)$. Ist das Gleichungssystem

$$x_1 = f(x, u) \quad (4)$$

nach $u = f^{-1}(x, x_1)$ auflösbar, dann ist (3) äquivalent zur Kontaktform

$$dy - y_1 dt$$

auf $J^1(\mathcal{Y})$ mit der Transformation F , siehe Definition 4,

$$\begin{aligned} x &= y \\ u &= f^{-1}(x, x_1). \end{aligned}$$

Die Form (3) beschreibt folglich ein flaches System, das mit statischer Rückführung Eingangs/Zustands linearisierbar ist. Falls die Gleichung (4) nicht auflösbar ist, beschreibt (3) ein autonomes System. Als nächstes wird ein System mit zwei Zuständen x^1 , x^2 und einer Stellgröße u beschrieben durch

$$\begin{aligned} dx^1 &= f^1(x, u) dt \\ dx^2 &= f^2(x, u) dt \end{aligned} \quad (5)$$

auf einem Bündel \mathcal{X} mit lokalen Koordinaten $(t, x^1, x^2, u) \mapsto (t)$ betrachtet. Es wird angenommen, dass eine Transformation $u = g(x, v)$ existiert, die der Bedingung

$$f(x, g(x, v)) = a(x) + b(x)v \quad (6)$$

genügt. Dann existiert eine weitere Transformation $\bar{x} = T(x)$ so, dass das transformierte System die Gestalt

$$d\bar{x}^1 = \bar{a}^1(\bar{x}) dt \quad (7)$$

$$d\bar{x}^2 = (\bar{a}^2(\bar{x}) + v) dt, \quad (8)$$

annimmt. Mit der Transformation

$$\bar{x}_1^2 = \bar{a}^2(\bar{x}) + v \quad (9)$$

wird (8) wieder in eine Kontaktform übergeführt. Die Form (7) kann dann wieder nach den obigen Methoden untersucht werden. Ist das System (7) erreichbar, dann ist das Gleichungssystem

$$\bar{x}_1^1 = \bar{a}^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$$

nach $\bar{x}^2 = (\bar{a}^1)^{-1}(\bar{x}^1, \bar{x}_1^1)$ auflösbar, und man erhält die Darstellung

$$\begin{aligned} & (d\bar{x}^1 - \bar{x}_1^1 dt) \\ & \partial_{\bar{x}^1} (\bar{a}^1)^{-1} (d\bar{x}^1 - \bar{x}_1^1 dt) + \partial_{\bar{x}_1^1} (\bar{a}^1)^{-1} (d\bar{x}_1^1 - \bar{x}_2^1 dt) \end{aligned}$$

mit dem flachen Ausgang \bar{x}^1 . Die Transformation F , siehe Definition 4, folgt dann in der Form

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= y \\ \bar{x}^2 &= (\bar{a}^1)^{-1}(y, y_1) \\ v &= \partial_y (\bar{a}^1)^{-1} y_1 + \partial_{y_1} (\bar{a}^1)^{-1} y_2 - \bar{a}^2 \left(y, (\bar{a}^1)^{-1}(y, y_1) \right). \end{aligned}$$

Falls die Transformation (6) nicht existiert, dann kann das System nicht flach sein. Dazu nehme man an, es existiere ein flacher Ausgang y und Funktionen α , β und eine Transformation

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha^1(y_0, \dots, y_{n_1}) \\ x^2 &= \alpha^2(y_0, \dots, y_{n_2}) \\ u &= \beta(y_0, \dots, y_m) \end{aligned}$$

so, dass

$$\sum_{j=0}^{n_i} \partial^j \alpha^i (dy_j - y_{j+1} dt) + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n_i} \partial^j \alpha^i y_{j+1} - f^i(\alpha, \beta) \right)}_{=0} dt$$

gilt. Da die Funktionen $\sum_{j=0}^{n_i} \partial^j \alpha^i y_{j+1}$ affin in y_{n_i+1} sind, muss dies auch für $f^i(\alpha, \beta)$ gelten. Das kann aber nur zutreffen, wenn $n_i < m$ gilt, und eine Transformation mit der Eigenschaft (6) existiert. Das ist eine sehr vereinfachte Version eines Lemmas, siehe dazu [6], das eine notwendige Bedingung für Flachheit gibt. Ähnliche Versionen findet man in [2, 4]. Hier kann nun die Existenz dieser Transformation einfach überprüft werden. Dazu bilde man die Distribution $D = \text{span}(\{\partial_u, [\partial_u, f]\})$. Ist D involutiv, dann existiert sie. Man überzeugt sich nun einfach, dass diese Betrachtungen auf Systeme mit n Zuständen und einem Eingang geradlinig erweiterbar sind. Auch hier fallen Flachheit und Eingangs/Zustandslinearisierbarkeit mit statischer Rückführung zusammen, siehe dazu auch [13].

Der nächste interessante Fall ist ein System mit drei Zuständen und zwei Eingängen der Art

$$dx^i - f^i(x, u^1, u^2) dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

auf einem Bündel \mathcal{X} mit lokalen Koordinaten $(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) \mapsto (t)$. Wir betrachten zuerst den Fall, es existiere eine Transformation $u = g(x, v)$, die der Bedingung

$$f(x, g(x, v)) = a(x) + b_1(x)v^1 + b_2(x)v^2 \quad (11)$$

genügt. Ist die Distribution $D = \text{span}(\{b_1, b_2\})$ involutiv, dann existiert eine Basis von $D = \text{span}(\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\})$ so, dass $[\bar{b}_1, \bar{b}_2] = 0$ gilt. Weiters existiert eine geeignete Zustandstransformation $\bar{x} = T(x)$ und eine Stellgrößentransformation $\bar{v} = M(x)v$ so, dass (10) die Form

$$\begin{aligned} d\bar{x}^1 &- \bar{a}^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2) dt \\ d\bar{x}^2 &- \underbrace{(\bar{a}^2(\bar{x}) + \bar{v}^1)}_{\bar{x}_1^2} dt \\ d\bar{x}^3 &- \underbrace{(\bar{a}^3(\bar{x}) + \bar{v}^2)}_{\bar{x}_1^3} dt \end{aligned}$$

annimmt. Ist noch die Gleichung $\bar{a}^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \bar{x}_1^1$ nach $\bar{x}^2 = (\bar{a}^1)^{-1}(\bar{x}^1, \bar{x}_1^1)$ auflösbar, dann ist dieses System offensichtlich flach und Eingangs/Zustands linearisierbar, wobei \bar{x}^1 und \bar{x}^3 flache Ausgänge sind. Mit diesen flachen Ausgängen erhält man dann die Darstellung

$$\begin{aligned} & (d\bar{x}^1 - \bar{x}_1^1 dt) \\ \partial_{\bar{x}^1} (\bar{a}^1)^{-1} (d\bar{x}^1 - \bar{x}_1^1 dt) &+ \partial_{\bar{x}^1} (\bar{a}^1)^{-1} (d\bar{x}_1^1 - \bar{x}_2^1 dt) \\ & (d\bar{x}^3 - \bar{x}_1^3 dt) . \end{aligned}$$

Auf die einfache Herleitung der Transformation F wird hier verzichtet. Ist die Distribution D nicht involutiv, dann existieren eine Zustandstransformation $\bar{x} = T(x)$ und eine Stellgrößentransformation $\bar{v} = M(x)v$ so, dass (10) die Form

$$\begin{aligned} d\bar{x}^1 &= (\bar{a}^1(\bar{x}) + b^1(\bar{x})\bar{v}^1) dt \\ d\bar{x}^2 &= (\bar{a}^2(\bar{x}) + \bar{v}^1) dt \\ d\bar{x}^3 &= (\bar{a}^3(\bar{x}) + \bar{v}^2) dt \end{aligned}$$

annimmt. Man überzeugt sich leicht, dass \bar{x}^1, \bar{x}^2 flache Ausgänge sind, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^1 &= \bar{a}^1(\bar{x}) + b^1(\bar{x})\bar{v}^1 \\ \bar{x}_1^2 &= \bar{a}^2(\bar{x}) + \bar{v}^1 \end{aligned}$$

nach \bar{x}^3, \bar{v}^1 auflösbar sind. Da die Berechnungen für den allgemeinen Fall zu unübersichtlich werden, wird der spezielle Fall

$$\begin{aligned} d\bar{x}^1 &= \bar{x}^3\bar{v}^1 dt \\ d\bar{x}^2 &= \bar{v}^1 dt \\ d\bar{x}^3 &= \bar{v}^2 dt \end{aligned}$$

betrachtet. Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{x}^3 &= \frac{\bar{x}_1^1}{\bar{x}_1^2} \\ \bar{v}^1 &= \bar{x}_1^2, \end{aligned}$$

und man erhält die Darstellung

$$\begin{aligned} (d\bar{x}^1 - \bar{x}_1^1 dt) & \\ (d\bar{x}^2 - \bar{x}_1^2 dt) & \\ \frac{1}{\bar{x}_1^2} (d\bar{x}_1^1 - \bar{x}_2^1 dt) &= \frac{\bar{x}_1^1}{(\bar{x}_1^2)^2} (d\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 dt) \end{aligned}$$

mittels Kontaktformen. Da nun vier Kontaktformen für ein System dritter Ordnung benötigt werden, ist es flach aber nicht Eingangs/Zustands linearisierbar. Durch Hinzunahme einer geeigneten Kontaktform erhält man dann ein vollständiges Kontaktsystem. Dies entspricht dann der Eingangs/Zustands-Linearisierung mit dynamischer Rückführung. Dieser Fall ist einfach erweiterbar auf Systeme mit n Zuständen und $(n-1)$ Stellgrößen in AI-Form. Sind sie erreichbar, dann sind sie auf jeden Fall flach. Sie sind sogar Eingangs/Zustands linearisierbar, wenn die Distribution $D = \text{span}(\{b_1, \dots, b_{n-1}\})$ involutiv ist.

Den nächsten interessanten Fall erhält man, wenn zwar die Transformation (11) nicht existiert aber die weniger restriktive Version

$$f(x, g(x, v, w)) = a(x, w) + b(x, w)v. \quad (12)$$

Das mit einer Kontaktform erweiterte System

$$\begin{aligned} dx^i &= (a^i(x, w) + b^i(x, w)v) dt, \quad i = 1, 2, 3 \\ dw &= -w_1 dt \end{aligned} \quad (13)$$

hat nun wieder AI-Struktur, sodass man wieder mit einem AI-System arbeiten kann, wobei die Hinzunahme dieser Kontaktform nicht den Lösungsraum von (13) verändert. Das System muss dann mit den obigen Methoden weiter untersucht werden. Keinesfalls darf die Hinzunahme von Kontaktformen mit der Erweiterung durch Integratoren verwechselt werden. Ersteres ist eine von den speziellen Koordinaten unabhängige Erweiterung, die den Lösungsraum nicht einschränkt, während dies auf die Erweiterung mit Integratoren nicht zutrifft.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden beruhen auf der Anwendung von speziellen Koordinatentransformationen, wie diese gefunden werden, wird im nächsten Abschnitt gezeigt, wobei die dynamischen Systeme mittels Pfaffscher Systeme beschrieben werden.

6 Pfaffsche Systeme

Ein Pfaffsches System ist ein Unterraum P^* des Kotangentialbündels $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$ einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Es wird angenommen, dass P^* konstante Dimension hat. Eine Menge von 1-Formen $B = \{w^1, \dots, w^n\}$ heißt *Generator* von P^* , wenn $P^* = \text{span}(B^*)$ gilt. Ist n minimal, dann ist B^* eine Basis.

Ein Pfaffsches System auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit Koordinaten (z^1, \dots, z^m) heißt *integrabel*, wenn eine Submersion $x^i = f^i(z)$, $i = 1, \dots, n$ so existiert, dass $B^* = \{df^1, \dots, df^n\}$ gilt. Mit $dP^* = \text{span}(\{dw^1, \dots, dw^i, \dots, dw^n\})$ als linearer Unterraum von $\bigwedge^2(\mathcal{T}^*(\mathcal{Z}))$ ist die Bedingung $dP^* \subset P^* \wedge \mathcal{T}^*(\mathcal{Z})$ lokal hinreichend und notwendig für die Integrabilität von P^* . Integrabilität kann auch mittels Vektorfelder überprüft werden. Es bezeichne $P = A(P^*)$ den Annulator von P^* . Ist nun P involutiv, es gilt $[P, P] \subset P$, dann ist P^* integrabel. In adaptierten Koordinaten mit $x^i = f^i(z)$, $x^j = f^j(z)$, $j = n+1, \dots, m$ nimmt dann P die einfache Gestalt $\text{span}(\{\partial_{x^{n+1}}, \dots, \partial_{x^m}\})$ an, siehe z.B [11].

Als nächstes werden Pfaffsche Systeme auf Bündeln der Art $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}$, mit Koordinaten (t, z^1, \dots, z^m) für \mathcal{Z} und (t) für \mathcal{B} betrachtet. Es heißt *nicht degeneriert*, falls $P^* \cap \mathcal{H}^*(\mathcal{Z}) = 0$ gilt. Es heißt *minimal*, wenn die Anzahl der Koordinaten z minimal ist. Die Cauchy-Charakteristik $C(P^*)$ von P^* ist der maximale Unterraum $C(P^*) \subset A(P^*)$ für den gilt $C(P^*) \lrcorner dP^* \subset P^*$. Die Cauchy-Charakteristik ist immer involutiv. P^* ist minimal, wenn $C(P^*)$ trivial ist, andernfalls erlaubt es eine Darstellung mit weniger Koordinaten z .

Man sagt P^* gestattet eine *Zustandsdarstellung*, wenn eine Basis der Form $\omega^i = dx^i - f^i(x, u)dt$, $x^i, u^j \in C^\infty(\mathcal{Z})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, l = m - n$ existiert. Man überzeugt sich leicht, dass P^* genau dann auf eine Zustandsform überführbar ist, wenn $P^* \oplus \mathcal{H}^*(\mathcal{Z})$ integrabel ist. Man sagt P^* erlaubt eine *AI-Darstellung*, wenn es die spezielle Zustandsdarstellung mit $f^i = a^i(t, x) + B_j^i(t, x)u^j$ zulässt., siehe [3]. Mit Hilfe des Feldes $f = f^i \partial_{x^i}$ kann man einfach überprüfen ob so eine Darstellung möglich ist, denn es muss

gelten

$$\begin{aligned} U &= \text{span}(\{\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^l}\}) \\ [f, U] &= \text{span}(\{[f, \partial_{u^1}], \dots, [f, \partial_{u^l}]\}) \\ [U, [f, U]] &\subset U + [f, U]. \end{aligned} \quad (14)$$

Mit Hilfe dieses Tests kann z.B. geprüft werden ob die Transformationen (6) oder (11) existieren. Für die Existenz der Transformation (12) ist den Autoren kein vergleichbar einfaches Kriterium bekannt.

Man nennt ein Pfaffsches System P^* auf \mathcal{Z} mit Koordinaten $(t, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^l)$ in AI-Darstellung *vertikal*, wenn eine Transformation $u = T(x, x_1)$ so existiert, dass $T^*(P^*) \subset \mathcal{V}^*(\mathcal{X})$ gilt mit dem Bündel $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ und Koordinaten (t, x^1, \dots, x^n) . In Koordinaten folgt aus

$$\begin{aligned} \omega^i &= dx^i - (a^i(t, x) + B_j^i(t, x)u^j)dt \\ &= dx^i - x_1^i dt + (x_1^i - (a^i(t, x) + B_j^i(t, x)u^j))dt, \end{aligned} \quad (15)$$

dass das Gleichungssystem $x_1^i = a^i + B_j^i u^j$ lösbar nach u sein muss. Man beachte, dass T kein Bündelmorphismus ist, da Jet-Koordinaten mit denen der Grundmannigfaltigkeit gemischt werden.

Betrachtet man nochmals die Beispiele von Abschnitt 5, dann sieht man das abgesehen vom ersten Beispiel keines der Systeme vertikal war, aber es konnten vertikale Teile gefunden werden. Schrittweise wurden dann diese solange erweitert, bis kein horizontaler Teil mehr existierte. Diese Strategie wird nochmals in einem Beispiel untersucht.

7 Ein weiteres Beispiel

Gegeben sei das System, siehe [5], [6],

$$dx^1 - u^1 dt \quad dx^2 - u^2 dt, \quad dx^3 - \sqrt{u^1 u^2} dt$$

in Zustands- aber nicht in AI-Darstellung. Das Kriterium (2) besagt, dass eine Transformation der Art (11) nicht existiert. Es könnte aber einer Transformation der Art (12) existieren. Dazu müsste man eine Distribution $D \subset U$ so finden, dass $[D, [f, D]] \subset D + [f, D]$ gilt. Die Überprüfung dieser Bedingung führt im Allgemeinen auf partielle Differentialgleichungen. Wir geben uns daher mit der notwendigen Bedingung $[D, [f, D]] \subset [f, U]$ zufrieden, bei der nur die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen zu testen ist. Auf diesem Wege gelangt man zur Transformation

$$\begin{aligned} u^1 &= v \\ u^2 &= w^2 v \end{aligned}$$

und zum erweiterten System

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= dx^1 - u^1 dt & \alpha^2 &= dx^2 - (w)^2 u^1 dt \\ \alpha^3 &= dx^3 - w u^1 dt & \alpha^4 &= dw - w_1 dt \end{aligned} \quad (16)$$

in AI-Darstellung, siehe auch (13). Im nächsten Schritt suchen wir Koordinaten so, dass $\partial_{x^1} + (x^4)^2 \partial_{x^2} + x^4 \partial_{x^3}$ auf $\partial_{\hat{x}^1}$ abgebildet wird. Dies erledigt die Transformation

$$\begin{aligned} x^1 &= \hat{x}^1 & x^2 &= (\hat{w})^2 \hat{x}^1 + \hat{x}^2 \\ x^3 &= \hat{w} \hat{x}^1 + \bar{x}^2 & w &= \hat{w} . \end{aligned}$$

Man erhält dann das transformierte System

$$\begin{aligned} dx^2 + 2x^1 x^4 x_1^4 dt & & dx^1 - x_1^1 dt \\ dx^3 + x^1 x_1^4 dt & & u^1 = x_1^1 \\ dx^4 - x_1^4 dt , & & \end{aligned}$$

wobei $w = x^4$ gesetzt und auf die Kennzeichnung der Symbole mit $\hat{}$ verzichtet wurde. Auf der linken Seite findet man nun die neu gewonnene Kontaktform mit der zugehörigen Transformation, siehe dazu (15). Das System auf der rechten Seite hat nur eine triviale Cauchy-Charakteristik. Folglich treten keine redundanten Größen, die Kandidaten für flache Ausgänge wären, auf, siehe dazu [6]. Jetzt gibt es für die Transformation (12) die Möglichkeiten $v^1 = x_1^4$, $w^1 = x^1$ und $v^1 = x^1$, $w^1 = x_1^4$. Da letztere zu einem Zirkel führt, wählen wir eine Transformation so, dass $-2x^4 x_1^4 \partial_{x^2} - x_1^4 \partial_{x^3}$ auf $\partial_{\hat{x}^3}$ abgebildet wird. Mit

$$\begin{aligned} x^2 &= -2\hat{x}^4 \hat{x}_1^4 \hat{x}^3 + \hat{x}^2 & x^3 &= -\hat{x}_1^4 \hat{x}^3 \\ x^4 &= \hat{x}^4 . \end{aligned}$$

erhält man dann das transformierte System

$$\begin{aligned} dx^2 - 2x^3 (x_1^4)^2 dt & & dx^1 - x_1^1 dt \\ dx^4 - x_1^4 dt & & u^1 = x_1^1 \\ dx_1^4 - x_2^4 dt & & dx^3 - x_1^3 dt \\ & & x^1 = x_1^3 + \frac{x^3 x_2^4}{x_1^4} . \end{aligned}$$

Im Prinzip könnte man noch mit dem Verfahren fortsetzen, aber hier kann man die flachen Ausgänge

$$y^1 = x^2 , \quad y^2 = x^4 \quad \text{mit} \quad x^3 = \frac{x_1^2}{2(x_1^4)^2}$$

in den Koordinaten des obigen Systems schon direkt ablesen. Die Abbildung F , siehe Definition 4, in den ursprünglichen Koordinaten von (16) lautet dann

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{-y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2}{2 (y_1^2)^3} \\ x^2 &= \frac{-y_1^1 (y^2)^2 y_2^2 + 2 y^1 (y_1^2)^3 - 2 y_1^1 y^2 (y_1^2)^2 + y_2^1 (y^2)^2 y_1^2}{2 (y_1^2)^3} \\ x^3 &= \frac{-y_1^1 y^2 y_2^2 - y_1^1 (y_1^2)^2 + y_2^1 y^2 y_1^2}{2 (y_1^2)^3} \\ w &= y^2 \\ u^1 &= \frac{-y_1^1 y_1^2 y_3^2 + 3 y_1^1 (y_2^2)^2 - 3 y_2^1 y_1^2 y_2^2 + y_3^1 (y_1^2)^2}{2 (y_1^2)^4} , \end{aligned}$$

wobei der Wert von u^2 aus der Beziehung $u^2 = x^4 u^1$ folgt.

8 Zusammenfassung

Dieser Beitrag stellt eine Skizze eines Verfahrens, siehe auch [6] vor, das es erlaubt konstruktiv die flachen Ausgänge dynamischer Systeme zu bestimmen. Das Verfahren beruht auf der Beobachtung, dass flache Systeme, modelliert auf gewissen Jet-Mannigfaltigkeiten, rein vertikal sind. Es gilt folglich, diese Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Das vorgeschlagene Verfahren geht dabei so schrittweise vor, dass der vertikale Anteil immer vergrößert wird. Dazu muss man wie beim Problem der Eingangs/Zustands-Linearisierung mit statischer Rückführung partielle Differentialgleichungen vom Frobenius Typus lösen. Zusätzlich treten aber noch nichtlineare algebraische Gleichungen auf. Diese verschwinden aber wieder, wenn das System Eingangs/Zustands linearisierbar mit statischer Rückführung ist. Damit fällt die Komplexität dieses Verfahrens in diesem Fall mit der aller bekannten Verfahren zusammen. Man darf also festhalten, dass die vorgestellte Methode eine geeignete Erweiterung von der Eingangs/Zustands-Linearisierung mit statischer Rückführung auf die mit dynamischer Rückführung ist.

Literatur

- [1] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon, “Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples,” *Int. Journal of Control*, vol. 61, pp. 1327–1361, 1995.
- [2] P. Rouchon, “Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization,” *Journal of Mathematics and Systems, Estimation, and Control*, vol. 4, no. 2, pp. 1–14, 1994.
- [3] W. Sluis, “A necessary condition for dynamic feedback linearization,” *System and Control Letters*, vol. 21, pp. 277–283, October 1993.
- [4] J. Levine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach*. Springer, Berlin, 2009.
- [5] M. Schöberl, K. Rieger, and K. Schlacher, “System parametrization using affine derivative systems,” in *Proceedings 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks & Systems (MTNS)*, pp. 1737–1743, 2010.
- [6] K. Schlacher and M. Schöberl, “A jet space approach to check pfaffian systems for flatness,” in *52-nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, accepted, 2013.
- [7] M. Schöberl and K. Schlacher, “On calculating flat outputs for pfaffian systems by a reduction procedure - demonstrated by means of the vtol example,” in *9th IEEE International Conference on Control & Automation (ICCA11)*, pp. 477–482, 2011.
- [8] M. Schöberl and K. Schlacher, “On an implicit triangular decomposition of nonlinear control systems that are 1-flat - a constructive approach,” *Submitted to AUTOMATICA*, arxiv.org/abs/1209.2306, 2012.

- [9] K. Schlacher and M. Schöberl, “Construction of flat outputs by reduction and elimination,” *Proceedings 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, 2007.
- [10] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. London: Springer, 1995.
- [11] H. Nijmeijer and A. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer, 1990.
- [12] S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Springer, 1999.
- [13] B. Charlet and J. Levine, “On dynamic feedback linearization,” *System and Control Letters* 13, pp. 143–151, 1989.
- [14] P. Martin, “A geometric sufficient condition for flatness of systems with m inputs and $m + 1$ states,” *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on CDC*, pp. 3431–3436, 1993.
- [15] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*. Singapore: World Scientific, 1997.

Warum ist Minimalphasigkeit keine relevante Eigenschaft für die Regelungstechnik?

Michael Zeitz

Universität Stuttgart, Institut für Systemdynamik

Pfaffenwaldring 9, D-70569 Stuttgart

zeitz@isys.uni-stuttgart.de

Zusammenfassung

Die auf H.W. Bode (1945) zurückgehende Definition *minimalphasiger* Systeme hat im Laufe der Zeit einige neue Verwendungen und damit verbundene Änderungen erfahren. Ursprünglich wurde die Minimalphasigkeit für lineare zeitinvariante Systeme eingeführt, um den eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Amplituden- und dem Phasengang zu definieren. Nachwievort gültig ist die Definition von *Allpässen* als eine spezielle Klasse *nicht-minimalphasiger* Systeme mit einer zur imaginären Achse symmetrischen Anordnung von Pol- und Nullstellen. Systeme mit einem Allpassteil zeichnen sich durch ein *Wrong way behavior* der Sprungantwort aus. Beim Entwurf von (digitalen) Filtern wird manchmal eine andere Definition der Minimalphasigkeit verwendet und ein asymptotisch stabiles System wird als *minimalphasig* bezeichnet, wenn auch das inverse System asymptotisch stabil ist. Durch die Einführung des Konzepts der Nulldynamik (engl. *zero dynamics*) von C. Byrnes und A. Isidori (1984) hat der Minimalphasigkeits-Begriff in der Regelungstechnik eine gewisse Renaissance erfahren und zugleich eine neue Definition erhalten. Danach besitzt ein *minimalphasiges* System eine asymptotisch stabile Nulldynamik. Wegen der (leider!) nicht konsistenten Minimalphasigkeits-Definitionen wird in dem Beitrag dafür plädiert, den aus der Nachrichtentechnik kommenden Minimalphasigkeits-Begriff in der regelungstechnischen Grundausbildung zu vermeiden und die Stabilität von Filtern oder der Nulldynamik mit den wohl definierten Kriterien z. B. von Hurwitz oder Ljapunow zu beschreiben. Demgegenüber gehört das eindeutig definierte und praktisch relevante *Wrong way behavior* der Sprungantwort von Systemen mit Allpassverhalten zum regelungstechnischen Grundwissen.

1 Einleitung

Im Unterschied zu den eindeutig definierten Systemeigenschaften Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gibt es für die Minimalphasigkeit bzw. die Nicht-Minimalphasigkeit von linearen zeitinvarianten Systemen unterschiedliche Definitionen. Während die Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sich auf die Lage und Vorgabe der Pole bzw. Eigenwerte von linearen zeitinvarianten Systemen beziehen, verbindet man mit den Eigenschaften *minimalphasig/nicht-minimalphasig* in erster Linie den Einfluss der Übertragungsnullstellen auf die Systemdynamik. Allerdings hängen die Minimalphasigkeitseigenschaften auch von der Lage der Pole ab.

Ursprünglich wurde der Begriff *minimalphasig* von H.W. Bode (1945) für lineare zeitinvariante Systeme (mit einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion) eingeführt, um den eindeutigen Zusammenhang zwischen der Phase und der Amplitude des Frequenzgangs zu definieren [2]. Die aus der Nachrichtentechnik kommende Definition betrifft die minimale Phasenverschiebung eines minimalphasigen Systems im Vergleich zu allen anderen Systemen mit dem gleichen Amplitudengang. Die Minimalphasigkeit von linearen zeitinvarianten SISO-Systemen verlangt, dass die Übertragungsfunktion keine Pol- und Nullstellen mit einem positiven Realteil besitzt. Allerdings wird diese Minimalphasigkeits-Definition nicht von allen Autoren in der gleichen Weise übernommen, siehe z. B. die Übersicht in [10].

Die Minimalphasigkeits-Definition von H.W. Bode ist stark mathematisch orientiert und spielt in der Regelungstechnik nur eine Nebenrolle. Beim Entwurf von (digitalen) Filtern wird eine andere Definition der Minimalphasigkeit verwendet und ein stabiles System als *minimalphasig* bezeichnet, wenn auch das inverse System stabil und realisierbar ist. Für lineare zeitkontinuierliche Filter und Systeme bedeutet diese Definition, dass die gleich vielen Pol- und Nullstellen einen negativen Realteil besitzen [17], [19].

Der Minimalphasigkeits-Begriff hat in der Regelungstechnik durch die Einführung des Konzepts der Nulldynamik (engl. *zero dynamics*) von C. Byrnes und A. Isidori eine gewisse Renaissance erfahren [3]. In [12] wird die Einführung der Nulldynamik, die für lineare zeitinvariante SISO-Systeme durch die Nullstellen der Übertragungsfunktion definiert ist, als eine Erfolgsstory bezeichnet. Das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik spielt eine wichtige Rolle beim Entwurf einer Vorsteuerung und von Ausgangsregelungen linearer und nichtlinearer Systeme.

Für eine sprachlich abgekürzte Charakterisierung der Stabilitätseigenschaften der Nulldynamik werden in [3] die Minimalphasigkeit und die Nicht-Minimalphasigkeit des Systems verwendet. Hierzu wird die Minimalphasigkeit neu definiert. Nach [3] besitzt ein *minimalphasiges* System eine asymptotisch stabile Nulldynamik. Für lineare zeitinvariante Systeme bedeutet die Minimalphasigkeits-Definition, dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben. Diese Definition hat eine weite Verbreitung in der Regelungstheorie gefunden, ist aber genauso wie die Definition von minimalphasigen Filtern (leider!) nicht konsistent mit der ursprünglichen Definition von H.W. Bode.

In dem Beitrag werden die unterschiedlichen Definitionen und Verwendungen des Minimalphasigkeits-Begriffs erläutert und gegenübergestellt. Als Ausgangspunkt wird

die Minimalphasigkeits-Definition von H.W. Bode auf der Grundlage des *Gain/Phase Theorems* für lineare zeitinvariante SISO-Systeme betrachtet. Einen Spezialfall für nicht-minimalphasige Systeme bilden Allpässe mit einer zur imaginären Achse symmetrischen Anordnung der Pol- und Nullstellen. Ein typisches Merkmal von Systemen mit einem Allpassteil ist ein *Wrong way behavior* der Sprungantwort, wofür die Bedingungen erläutert werden. Als Beispiele für die veränderten Minimalphasigkeits-Definitionen werden sogenannte minimalphasige Filter und die nicht gegebene Äquivalenz zwischen der Minimalphasigkeit eines Systems und der Stabilität der Nulldynamik betrachtet. Den Abschluss bilden eine tabellarische Zusammenstellung und Diskussion der betrachteten Definitionen.

2 Minimalphasigkeits-Definition von H.W. Bode

Ausgangspunkt für die Definition der Minimalphasigkeit von linearen zeitinvarianten Systemen durch H.W. Bode ist die Darstellung im Frequenzbereich. Dabei wird für ein SISO-System mit dem Eingang $u(t)$ und dem Ausgang $y(t)$ angenommen, dass das Ein-/Ausgangsverhalten im Bildbereich der Laplace-Transformation¹ durch die teilerfremde Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = K \frac{b_0 + b_1s + \dots + s^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n} \quad (K > 0) \quad (1)$$

beschrieben wird. Die Zähler- und Nennergrade $m \geq 0$ und $n \geq 0$ der Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ sind bei der Minimalphasigkeits-Definition von H.W. Bode nicht festgelegt. Daher gilt die Definition auch für einen Nullstellen-Überschuss $m > n$. Die Wurzeln $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ der Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ sind die Null- bzw. Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$. Die in dem Beitrag betrachteten Minimalphasigkeits-Definitionen beziehen sich ausschließlich auf den Realteil der Pol- und Nullstellen. Zu der Übertragungsfunktion (1) gehört der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2)$$

mit der Amplitude $A(\omega) = |G(j\omega)|$ und der Phase $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$. Die doppelt- bzw. halb-logarithmische Darstellung von Amplituden- und Phasengang

$$\log A(\omega) = F_A(\log \omega), \quad \varphi(\omega) = F_\varphi(\log \omega), \quad \omega > 0 \quad (3)$$

wird als Bode-Diagramm bezeichnet und bildet die Basis für die mathematische Definition der Minimalphasigkeit.

¹Die Bezeichnungen im Bildbereich orientieren sich an [13] mit der komplexen Bildvariablen $s = \sigma + j\omega$ und den Großbuchstaben für die transformierten Größen.

2.1 Gain/Phase Theorem

Die Minimalphasigkeits-Definition von H.W. Bode [2] betrifft den Zusammenhang zwischen der Amplitude $A(\omega)$ und der Phase $\varphi(\omega)$ des Frequenzgangs (2). Die Grundlage der Definition bildet das nur in wenigen regelungstechnischen Textbüchern [1], [9], [14], [20] behandelte *Gain/Phase Theorem* von H.W. Bode für Systeme (1) ohne Pol- und Nullstellen mit einem positiven Realteil:

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{d \ln A(\omega_0 e^u)}{du}}_{\frac{d \log A(\omega)}{d \log \omega}} \cdot \underbrace{\ln \coth \frac{|u|}{2}}_{f(u)} du \quad \text{mit } u = \ln \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (4)$$

Daraus folgt, dass die Phase $\varphi(\omega)$ als gewichteter Mittelwert von der Steigung des Amplitudengangs im Bode-Diagramm definiert ist. Die Gewichtung erfolgt mit der in (4) eingeführten Funktion $f(u)$. Allerdings ist der Zusammenhang (4) recht kompliziert und die Phase $\varphi(\omega)$ kann nur für einfache Funktionen $A(\omega)$ bzw. konstante Steigungen $d \log A(\omega)/d \log \omega$ analytisch bestimmt werden. Daher kommt dem *Gain/Phase Theorem* (4) keine praktische Bedeutung für die Berechnung der Phase $\varphi(\omega)$ aus $A(\omega)$ zu.

Die systemtheoretische Bedeutung des *Gain/Phase Theorems* (4) liegt darin, dass die Systemklasse für einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Phase $\varphi(\omega)$ und dem Amplitudengang $A(\omega)$ definiert wird. Diese Systeme werden in der folgenden Definition als *minimalphasig* bezeichnet [1], [2], [14], [20].

Definition 1: Lineare zeitinvariante Systeme mit der Übertragungsfunktion (1) werden *minimalphasig* (engl. *minimum phase systems*) genannt, wenn die Pol- und Nullstellen λ_i und ν_i keinen positiven Realteil besitzen:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \nu_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Dabei sind die Anzahlen $n \geq 0$ und $m \geq 0$ der Pol- und Nullstellen nicht festgelegt. Wenn die Bedingungen (5) nicht erfüllt sind, heißt das System (1) *nicht-minimalphasig* (engl. *non-minimum phase system*). ■

Die Definition 1 lässt auch einfache und mehrfache Pol- und Nullstellen auf der imaginären Achse zu. Deshalb kann (und sollte!) die Minimalphasigkeit nicht für die Beschreibung der Stabilität der Pol- und Nullstellen des Systems (1) verwendet werden.

Die Anwendung des *Gain/Phase Theorems* (4) soll – wie in [1] und [2] – für die Übertragungsfunktion $G(s) = s^k$ erläutert werden, welche für $k > 0$ einen k -fachen Differenzierer und für $k < 0$ einen k -fachen Integrator beschreibt. In beiden Fällen erfüllen die k -fachen Pol- bzw. Nullstellen $s_i = 0$, $i = 1, \dots, k$ die Voraussetzungen (5) für das *Gain/Phase Theorem*. Für den Amplitudengang $A(\omega) = \omega^k$ vereinfacht sich wegen $d \log A(\omega) = k \cdot d \log \omega$ die Gleichung (4) auf das Integral² über die Gewichtsfunktion $f(u)$:

$$G(j\omega) = \omega^k \cdot e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \coth \frac{|u|}{2} du = \frac{k\pi}{2}. \quad (6)$$

²Das in mathematischen Tabellenwerken abgelegte Ergebnis $\pi^2/2$ für das uneigentliche Integral erhält man auch mit einem Computer-Algebra-System.

Die konstante Phase $\varphi = k\pi/2$ bekommt man auch direkt aus dem Frequenzgang $G(j\omega) = (j\omega)^k$ für positive und negative Exponenten k . Schließlich dient die Gleichung (6) als Näherungsformel für die Berechnung der Phase φ in Abhängigkeit von einer konstanten Steigung $d \log A(\omega)/d \log \omega = k$ des Amplitudengangs im Bodediagramm (3).

Die Minimalphasigkeits-Bedingungen in (5) werden in vielen Textbüchern ohne einen genaueren Bezug zu dem *Gain/Phase Theorem* (4) übernommen, siehe z. B. [5], [6], [15]. Dabei werden meist stabile Systeme betrachtet und die Bedingungen (5) beschränken sich auf die Nullstellen. In [10] werden die Nullstellen-Bedingungen in (5) aus den Differenzialquotienten der Phasengänge von zwei amplitudengleichen (stabilen) Frequenzgängen mit $m \leq n$ hergeleitet, wobei die Polstellen-Bedingungen in (5) als gegeben vorausgesetzt werden.

Die Anwendungen der Minimalphasigkeits-Eigenschaft betreffen die Bestimmung des Phasen- bzw. des Frequenzgangs aus einem bekannten (gemessenen) Amplitudengang – am einfachsten in den logarithmischen Koordinaten (3) des Bode-Diagramms. Für den Entwurf von Filtern bedeutet die Minimalphasigkeit eine Einschränkung, da der Amplituden- und der Phasengang nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können [7].

2.2 Allpassverhalten

Eine spezielle Klasse von nicht-minimalphasigen Systemen sind *Allpässe* mit der folgenden Definition [6], [13], [20]:

Definition 2: Ein *Allpass* der Ordnung n besitzt die Übertragungsfunktion

$$G_{A,n}(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - \nu_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)}, \quad \sigma_i = \operatorname{Re} \nu_i = -\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0, \quad \omega_i = \operatorname{Im} \nu_i = \operatorname{Im} \lambda_i \quad (7)$$

mit der gleichen Anzahl n von Pol- und Nullstellen λ_i und ν_i , $i = 1, \dots, n$, die symmetrisch zur imaginären Achse angeordnet sind. Für $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ ist der Allpass asymptotisch stabil. Die inverse Übertragungsfunktion $G_{A,n}^{-1}(s)$ beschreibt ebenfalls einen Allpass. ■

Die Bezeichnung *Allpass* wird aus dessen Frequenzgang bzw. Amplituden- und Phasengang verständlich:

$$G_{A,n}(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (-\sigma_i + j(\omega + \omega_i))}{\prod_{i=1}^n (\sigma_i + j(\omega + \omega_i))} \quad (8)$$

mit $|G_{A,n}(j\omega)| = K$, $\varphi_{A,n}(\omega) = -2 \sum_{i=1}^n \arctan \frac{\omega + \omega_i}{\sigma_i}$.

Aus dem Amplitudengang $|G_{A,n}(j\omega)| = K$, $\forall \omega$ folgt, dass ein Allpass (engl. *all-pass*) mit der Übertragungsfunktion $G_{A,n}(s)$ alle harmonische Anregungen beliebiger Frequenzen ungehindert passieren lässt³. Für stabile Allpässe ($\sigma_i > 0$) ist die Phase $\varphi_{A,n}(\omega)$ für alle Frequenzen $\omega > 0$ negativ.

³Aus $|G_{A,n}(j\omega)| = K$, $\forall \omega$ folgt auch, dass der Allpass (7) – wie in der Definition 2 angenommen – keine Pol- und Nullstellen auf der imaginären Achse besitzt.

Wie eingangs erwähnt, ist der Allpass n -ter Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G_{A,n}(s)$ in (7) ein nicht-minimalphasiges System. Das zugehörige minimalphasige System mit der Übertragungsfunktion $G_{A,0}(s) = K$ besitzt denselben Amplitudengang $|G_{A,0}(j\omega)| = |G_{A,n}(j\omega)| = K$ und kann auch als Allpass 0-ter Ordnung bezeichnet werden. Durch den Vergleich der beiden Phasenverschiebungen $\varphi_{A,n}(\omega) \neq 0$ und $\varphi_{A,0}(\omega) = 0$ wird die Nicht-Minimalphasigkeit eines Allpasses der Ordnung $n > 0$ bestätigt.

In der Praxis kommen Allpässe selten in der reinen Form (7) vor. Vielmehr lässt sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines nicht-minimalphasigen Systems als Produkt der Übertragungsfunktionen $G_{min}(s)$ und $G_{A,n_A}(s)$ von einem Minimalphasensystem nach Definition 1 und einem Allpass darstellen [10], [13]:

$$G(s) \Rightarrow G_{min}(s) \cdot G_{A,n_A}(s). \quad (9)$$

Die Allpass-Ordnung $n_A = n^+ + m^+$ ergibt sich als Summe der Anzahlen n^+ und m^+ von Pol- bzw. Nullstellen von $G(s)$ mit einem positiven Realteil. Gegenüber der minimalphasigen Übertragungsfunktion $G_{min}(s)$ mit der Ordnung n besitzt die Faktorisierung (9) eine durch den Allpass $G_{A,n_A}(s)$ erhöhte Ordnung $n + n_A$ und ist daher nicht mehr teilerfremd.

Die in einem Filter enthaltenen Allpassanteile sind deshalb interessant, weil dadurch der Amplituden- und der Phasengang unabhängig voneinander entworfen werden können [7]. Beim Steuerungs- und Reglerentwurf müssen bei Systemen mit Allpass-Verhalten und reellen positiven Nullstellen die im nächsten Abschnitt erläuterte Gegenläufigkeit der Sprungantwort (engl. *Wrong way behavior* oder *Inverse response behavior*) berücksichtigt werden.

2.3 Nonminimum phase zeros: Wrong way behavior

Das typische Verhalten von Systemen mit einem Allpassteil bzw. mit instabilen Nullstellen (engl. Nonminimum phase zeros) sind gegenläufige bzw. unterschwingende Sprungantworten [8]. Die folgende Definition wurde erstmals in dem Kurzbeitrag [21] angegeben und erläutert.

Definition 3: Das asymptotisch stabile SISO-System (1) mit dem Differenzgrad $r = n - m \geq 0$ besitzt eine Sprungantwort $y(t)$ mit einem anfangs gegenläufigen Verhalten in der r -ten Ableitung $\text{sign } y^{(r)}(0+) = -\text{sign } y(t \rightarrow \infty)$, wenn die Übertragungsfunktion $G(s)$ eine ungerade Anzahl von positiv-reellen Nullstellen besitzt:

$$\text{Re } \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu_i = \text{Re } \nu_i > 0, \quad i = 1, \dots, m^+ \quad \text{mit } m^+ = \text{ungerade}. \quad (10)$$

■

Der Beweis dieser Eigenschaft basiert auf der Anwendung der Grenzwertsätze für die Laplace-Transformation. Außerdem wird anstelle von (1) die auf $G(0) = 1$ normierte Produktdarstellung

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{s}{\nu_i}\right)}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{s}{\lambda_i}\right)} \quad (11)$$

in Abhängigkeit von den Pol- und Nullstellen $\nu_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$ und $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ verwendet. Nach dem Endwertsatz der Laplace-Transformation konvergiert die (stabile) Sprungantwort $y(t)$ von (11) gegen den Grenzwert $y(t \rightarrow \infty) = G(0) = 1$. Zur Bestimmung des Anfangswerts der r -ten Ableitung der Sprungantwort $y(t)$ wird der Anfangswertsatz benutzt:

$$y^{(r)}(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s), \quad r \geq 0. \quad (12)$$

Bei der Bildung des Grenzwerts müssen für die Nullstellen bzw. die Faktoren des Zählerpolynoms in (11) die folgenden drei Fälle unterschieden werden:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \nu_i = \operatorname{Re} \nu_i > 0: & \quad \left(1 - \frac{s}{\nu_i}\right) = 1 - \alpha_i s, \\ \text{II.} \quad \nu_i = \operatorname{Re} \nu_i < 0: & \quad \left(1 - \frac{s}{\nu_i}\right) = 1 + \alpha_i s, \\ \text{III.} \quad \nu_i \in \mathbb{C}: & \quad \left(1 - \frac{s}{\nu_i}\right)\left(1 - \frac{s}{\bar{\nu}_i}\right) = 1 + \beta_i s + \alpha_i s^2, \quad \beta_i^2 < 4\alpha_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Dabei ist der Parameter $\alpha_i > 0$ positiv, während β_i betragsmäßig begrenzt ist und auch negativ sein kann. Wegen der vorausgesetzten Stabilität des Systems (1) kommen für die Faktoren des Nennerpolynoms in (11) nur die Fälle II. und III. in Frage.

Bei der Durchführung des Grenzübergangs (12) mit (11) und (13) sieht man, dass das Vorzeichen des Grenzwerts ausschließlich durch die Faktoren vom Typ I. in (13) bestimmt wird. Konkret bedeutet dies, dass die Sprungantwort für eine ungerade Anzahl von positiv-reellen Nullstellen mit einer negativen r -ten Ableitung $y^{(r)}(0+) < 0$ beginnt, während dieser Wert für eine gerade Anzahl von positiv-reellen Nullstellen positiv ist. Wegen des positiven Endwerts $y(t \rightarrow \infty) = 1$ der Sprungantwort $y(t)$ führt eine ungerade Anzahl von positiv-reellen Nullstellen – wie in der Definition 3 angegeben – zu einem *Wrong way behavior* bzw. *Inverse response behavior*. Im Fall von einer geraden Anzahl von Nullstellen mit einem positiven Realteil macht sich die Gegenläufigkeit in der Sprungantwort erst nach $t = 0$ bemerkbar [8].

Das in Lehrbüchern [13] meistens behandelte Beispiel für ein *Wrong way behavior* betrifft einen stabilen Allpass erster Ordnung $G_{A,1}(s)$ mit $m = n = 1$ und der positiv-reellen Nullstelle $\nu_1 = \operatorname{Re} \nu_1 = -\lambda_1 > 0$ in Gleichung (11). Nach der Definition 3 folgt für $r = 0$ das *Wrong way behavior* der Sprungantwort $y(t)$ mit dem Anfangswert $y(0+) = -1$ und dem stationären Endwert $y(t \rightarrow \infty) = 1$.

Das gegenläufige Verhalten eines Systems mit Allpassteil ist kritisch im Fall von Begrenzungen des Ausgangs z. B. durch mechanische Anschläge. Da die Lage der Nullstellen bei einer Ausgangsregelung nicht verändert werden kann, bleibt das gegenläufige Verhalten der Regelstrecke im geschlossenen Kreis erhalten und muss beim Reglerentwurf beachtet werden.

3 Andere Minimalphasigkeits-Definitionen

Die auf H.W. Bode (1945) zurückgehende Definition von *minimalphasigen Systemen* hat im Laufe der Zeit einige neue Verwendungen und damit verbundene Änderungen erfahren. Die veränderten Minimalphasigkeits-Definitionen beziehen sich nicht mehr auf den Zusammenhang zwischen dem Phasen- und Amplitudengang sondern auf den Realteil bzw.

die Stabilität der Pol- und Nullstellen. Allerdings entsteht dadurch eine Inkonsistenz mit der ursprünglichen Definition.

3.1 Minimalphasige Filter

Der Entwurf von (digitalen) Filtern verlangt oft auch die Stabilität und Realisierbarkeit des inversen Filters, was für lineare zeitinvariante Filter die Stabilität und gleiche Anzahl der Pol- und der Nullstellen voraussetzt. Unglücklicher Weise werden beim Filterentwurf ausschließlich (asymptotisch) stabile Filter mit (asymptotisch) stabilen Nullstellen als *minimalphasig* bezeichnet [17]⁴:

Definition 4: Lineare zeitinvariante Filter mit einer (asymptotisch) stabilen Übertragungsfunktion $G(s)$ werden *minimalphasig* genannt, wenn auch die inverse Übertragungsfunktion $G^{-1}(s)$ (asymptotisch) stabil ist; dies bedeutet, dass die Pol- und Nullstellen λ_i und ν_i einen negativen Realteil besitzen:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} \nu_i < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Dabei wird $m = n$ wegen der Realisierbarkeit von $G(s)$ und $G^{-1}(s)$ vorausgesetzt. ■

In [17] wird kritisch angemerkt, dass der Name *minimalphasig* für diese Filtereigenschaft nicht passt und letztlich als ein Entwurfsziel für bestimmte Filter zu verstehen ist. Allerdings wird in dem Lehrbuch [7] die Bezeichnung *minimalphasig* bei Filtern auch im Sinne von H.W. Bode verwendet.

Beim Filterentwurf ist es möglich, Pol- und Nullstellen auf der imaginären Achse – wie in den Bedingungen (14) angegeben – auszuschließen. Demgegenüber ist der Apriori-Ausschluss von rein imaginären Pol- und Nullstellen bei der Klassifikation von Systemmodellen als *minimalphasig* oder als *nicht-minimalphasig* entsprechend der Definition 4 nicht sinnvoll. Trotzdem werden von manchen regelungstechnischen Autoren die Pol-Nullstellen-Bedingungen (14) für die Definition von *minimalphasigen* Systemen (ohne eine weitere Begründung) benutzt und wegen der Realisierbarkeit der Übertragungsfunktion (1) die Einschränkung $m \leq n$ gemacht, siehe z. B. [4], [9], [13], [16], [18]. Dies führt dazu, dass bei der Faktorisierung (11) von *nicht-minimalphasigen* Systemen durch ein Phasenminimum-System und einen Allpass weder Pol- noch Nullstellen auf der imaginären Achse berücksichtigt werden können bzw. vorkommen dürfen⁵.

3.2 Nulldynamik und Minimalphasigkeit

Der Minimalphasigkeits-Begriff hat im Zusammenhang mit dem in [3] eingeführten Konzept der Nulldynamik (engl. *zero dynamics*) eine neue Bedeutung erhalten. In [12] wird die Einführung der Nulldynamik als Erfolgsstory bezeichnet und erläutert, dass die Stabilität

⁴Auch in [19] werden *Phasenminimum*-Systeme – allerdings ohne einen Bezug zum Filterentwurf – durch die asymptotische Stabilität der Übertragungsfunktionen $G(s)$ und $G^{-1}(s)$ definiert.

⁵In einer Mail-Korrespondenz wurde von dem Zweitautor des Lehrbuchs [4] die mit dem Bode-Theorem nicht verträgliche Definition eingeräumt und die Richtigstellung für die nächste Auflage angekündigt.

bzw. Instabilität der Nulldynamik eine wichtige Rolle beim Entwurf einer Vorsteuerung und von Ausgangsregelungen linearer und nichtlinearer Systeme spielt.

Die in [3] eingeführte Minimalphasigkeits-Definition zur Charakterisierung der Stabilität der Nulldynamik soll für lineare zeitinvariante SISO-Systeme mit der Übertragungsfunktion (1) und dem Differenzgrad (engl. *relative degree*) $r = n - m \geq 0$ erläutert werden. Die Nulldynamik ist durch das Zählerpolynom $Z(s)$ und die Nullstellen $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$ mit $m = n - r$ definiert [11]. Im Zeitbereich wird die Nulldynamik durch den Zustand $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^m$ und die lineare Zustandsdarstellung beschrieben:

$$\Sigma_\emptyset : \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{m-1} \end{pmatrix}}_{A_\emptyset} \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0 \in \mathbb{R}^m. \quad (15)$$

In der letzten Zeile der Matrix A_\emptyset stehen die Koeffizienten b_i , $i = 0, \dots, m - 1$ des Zählerpolynoms $Z(s)$ und es gilt der Zusammenhang $\det(sI_m - A_\emptyset) = Z(s)/K$. Der Sonderfall $r = n$ bzw. $m = 0$ bedeutet, dass keine Nullstellen im Endlichen existieren.

Für eine sprachlich abgekürzte Charakterisierung der Stabilitätseigenschaften der Nulldynamik Σ_\emptyset werden in [3] die *Minimalphasigkeit* und die *Nicht-Minimalphasigkeit* des Systems verwendet und in der folgenden Weise neu definiert⁶.

Definition 5: Lineare und nichtlineare Systeme werden *minimalphasig* genannt, wenn die Nulldynamik asymptotisch stabil ist. Falls die Nulldynamik instabil ist, heißt das System *nicht-minimalphasig*. Diese Definitionen gelten gleichermaßen für stabile und instabile Systeme. Lineare zeitinvariante SISO-Systeme (1) mit dem Differenzgrad $r = n - m \geq 0$ werden unabhängig von der Lage der Pole *minimalphasig* genannt, wenn die Eigenwerte der Nulldynamik (15) bzw. die Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ einen negativen Realteil haben:

$$\operatorname{Re} \nu_i < 0, \quad i = 1, \dots, n - r, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

In dem Sonderfall $r = n$ ist das System (1) strukturell minimalphasig. ■

Diese Minimalphasigkeits-Definition hat eine weite Verbreitung in der Regelungstheorie gefunden, siehe u. a. die Literaturliste in [12]⁷. Allerdings ist die Definition 5 in doppelter Weise nicht mehr konsistent mit dem ursprünglichen Minimalphasigkeits-Begriff von H.W. Bode für lineare zeitinvariante Systeme:

- In der Definition 5 werden Nullstellen auf der imaginären Achse entgegen der Definition 1 als *nicht-minimalphasig* eingestuft.

⁶In einer Mail-Korrespondenz mit dem Autor erläutert A. Isidori dazu: *Instead of using each time the long phrase “the system has a zero dynamics possessing a globally asymptotically stable equilibrium“, the shortened terminology “the (nonlinear) system is minimum phase“ was preferred.*

⁷Auch der Autor hat den Minimalphasigkeits-Begriff entsprechend der Definition 5 in [22] und in früheren Arbeiten verwendet und in [23] – wie in diesem Beitrag vorgeschlagen – durch die Hurwitz-Bedingungen für die Stabilität der Nulldynamik ersetzt.

- Nach der Definition 5 ist die *Minimalphasigkeit* unabhängig vom Realteil der Pole. Dies bedeutet, dass entgegen der Definition 1 instabile Systeme mit Polen in der rechten Halbebene als *minimalphasig* klassifiziert werden.

Das Problem der Definitionen 4 und 5 ist, dass die durch die Pol-/Nullstellen-Bedingungen (5) definierte Minimalphasigkeit für die Klassifikation von Systemen mit anderen Konfigurationen von Pol- und Nullstellen (14) bzw. (16) verwendet wird. Die Verwendung von nicht konsistenten Minimalphasigkeits-Definitionen führt leicht zu Missverständnissen und ist insbesondere in der Lehre nicht sinnvoll, wenn alternativ wohl definierte Eigenschaften zur Verfügung stehen. So lassen sich die Pol- und Nullstellen-Bedingungen (14) und (16) für *sogenannte* minimalphasige Filter bzw. Systeme eindeutig mit den Hurwitz-Kriterien beschreiben und benötigen nicht die neu eingeführten Bezeichnungen *minimalphasig* und *nicht-minimalphasig*.

3.3 Tabelle der Minimalphasigkeits-Definitionen

In der folgenden Tabelle werden die in dem Beitrag erläuterten drei Minimalphasigkeits-Definitionen gegenübergestellt. Die Inkonsistenz der drei Definitionen wird durch die unterschiedlichen Bedingungen für die Pol- und Nullstellen in der dritten Spalte deutlich. Im Unterschied dazu sind die Bedingungen (7) und (10) für einen Allpass bzw. das gegenläufige Verhalten einer Sprungantwort (*Wrong way behavior*) eindeutig definiert und auch praktisch von Bedeutung.

	Definition	Bedingungen	Literatur
Minimalphasigkeit (H.W. Bode)	$\varphi(\omega) \iff A(\omega)$ (Gain/Phase Theorem)	<ul style="list-style-type: none"> • $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ • $\operatorname{Re} \nu_i \leq 0, i = 1, \dots, m$ mit $n \geq 0, m \geq 0$ 	[1], [6], [10], [14], [15], [20]
Minimalphasige Filter	$G(s) \ \& \ G^{-1}(s) \ (m = n)$ = asymptotisch stabil	<ul style="list-style-type: none"> • $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ • $\operatorname{Re} \nu_i < 0$ $i = 1, \dots, n$	[17]
Minimalphasigkeit (Byrnes/Isidori)	$r = n - m \geq 0$ (relative degree) $Z(s) = 0$ (zero dynamics) = asymptotisch stabil	<ul style="list-style-type: none"> • $\operatorname{Re} \nu_i < 0, i = 1, \dots, n - r$ • $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$ ($r = n \Rightarrow$ minimum phase)	[3], [12]

4 Schlussfolgerung

Die im Laufe der Zeit entstandenen Abwandlungen der von H.W. Bode eingeführten Minimalphasigkeits-Definition haben dazu geführt, dass der Minimalphasigkeits-Begriff nicht mehr eindeutig verwendbar ist. Die neuen Minimalphasigkeits-Begriffe beziehen sich nicht auf den Zusammenhang zwischen dem Phasen- und Amplitudengang sondern auf die Stabilität der Pol- und Nullstellen bzw. der Nulldynamik. Dadurch ist eine Inkonsistenz zwischen den Minimalphasigkeits-Definitionen entstanden. Da außerdem minimalphasige Systeme in der Regelungstechnik nur eine Nebenrolle spielen, wird dafür plädiert, in der regelungstechnischen Grundausbildung den aus der Nachrichtentechnik kommenden Minimalphasigkeits-Begriff zu vermeiden und für die Stabilität von Systemen/Filtern bzw. Nullstellen/Polstellen die wohl definierten Kriterien von Hurwitz zu verwenden. Im Nichtlinearen kommt für die Stabilität der Nulldynamik die Methode von Ljapunow in Frage. Demgegenüber ist ein *Wrong way behavior* der Sprungantwort von Systemen mit Allpassverhalten eindeutig definiert und sollte wegen der praktischen Relevanz für die regelungstechnische Analyse und Synthese in der Lehre vermittelt werden.

Danksagung: Das Beitragsthema resultiert aus einer Diskussion mit Dipl.-Ing. Ulf Schaper – Mitarbeiter und Doktorand von Prof. Dr.-Ing. Oliver Sawodny – im Zusammenhang mit der Behandlung der in [3] eingeführten Nulldynamik in der Vorlesung „Flache Systeme“. Der Beitrag basiert auf Literatur-Recherchen und Diskussionen mit regelungstechnischen Kollegen (hierfür ein ”herzlich danke“!) über die unterschiedlichen Minimalphasigkeits-Definitionen. Die nicht konsistente Verwendung des Minimalphasigkeits-Begriffs in [3] war auch Gegenstand einer längeren Mail-Korrespondenz mit dem Erstautor beim Entstehen von [10].

Literatur

- [1] K.J. Aström, R.M. Murray: Feedback Systems. Princeton University Press 2012, 282–285.
- [2] H.W. Bode: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. D. Van Nostrand Company 1945, 312–318.
- [3] C.I. Byrnes, A. Isidori: A Frequency Domain Philosophy for Nonlinear Systems. IEEE Conf. Dec. Contr. 23 (1984), 1569–1573.
- [4] R.C. Dorf, R.H. Bishop: Moderne Regelungssysteme. Pearson Studium 2006, 605–607.
- [5] J. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum: Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co. 1990, 90–91.
- [6] O. Föllinger: Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. Hüthig 2008, 192–196.

- [7] T. Frey, M. Bossert: Signal- und Systemtheorie. Vieweg + Teubner 2008, 229-232.
- [8] J.B. Hoagg, D.S. Bernstein: Nonminimum-Phase Zeros. IEEE Control Systems Magazine 27 (2007), 45–57.
- [9] M. Horn, N. Dourdoumas: Regelungstechnik. Pearson Studium 2004, 185–188.
- [10] A. Ilchmann, F. Wirth: On Minimum Phase. Automatisierungstechnik 61 (2013),
- [11] A. Isidori: Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag 1995.
- [12] A. Isidori: The Zero Dynamics of a Nonlinear System: from the Origin to the Latest Progress of a Long Successful Story. 30th Chinese Control Conference 2011, 18–25.
- [13] J. Lunze: Regelungstechnik – 1. Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. Springer 2010, 314–326.
- [14] J.L. Melsa, D.G. Schultz: Linear Control Systems. McGraw-Hill Book 1969, 208–217.
- [15] K. Ogata: Modern Control Engineering. Prentice-Hall International 2004, 445–446.
- [16] W. Oppelt: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Verlag Chemie 1964, 124–125.
- [17] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, R. Buck: Zeitdiskrete Signalverarbeitung. Pearson Studium 2004, 355–367.
- [18] G. Schmidt: Grundlagen der Regelungstechnik. Springer-Verlag 1982, 117–121.
- [19] H. Schwarz: Einführung in die moderne Systemtheorie. Friedr. Vieweg & Sohn 1969, 10–11.
- [20] H. Unbehauen: Regelungstechnik 1. Vieweg + Teubner 2008, 127–132.
- [21] M. Vidyasagar: On undershoot and nonminimum phase zeros. IEEE Transactions on Automatic Control 31 (1986), 440.
- [22] M. Zeitz: Vorsteuerungs-Entwurf im Frequenzbereich. In: S.Moschik, N.Dourdoumas (Hrsg.): 17. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung 2011, Schloss Retzhof, Leibnitz/Österreich, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz, 1–15.
- [23] M. Zeitz: Vorsteuerungs-Entwurf im Frequenzbereich: Offline oder Online. Automatisierungstechnik 60 (2012), 375–383.

Beobachterbasierte Regelung einer thermischen Regelstrecke mit Hilfe von Sliding-Mode Konzepten höherer Ordnung

Markus Reichhartinger, Martin Horn
Alpen-Adria Universität Klagenfurt
Lehrstuhl für Regelungstechnik und mechatronische Systeme
Universitätsstraße 65-67
9020 Klagenfurt
markus.reichhartinger@aau.at

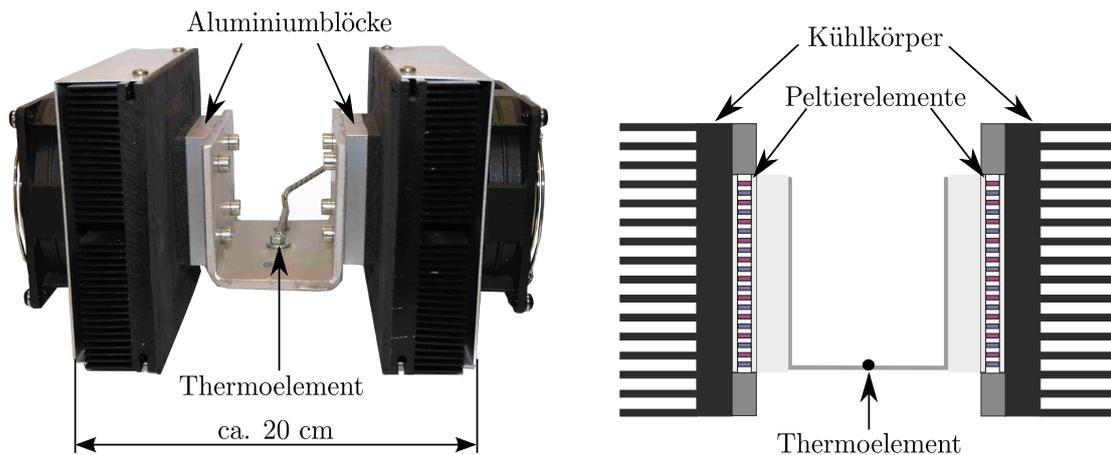
1 Einleitung

Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der beobachterbasierten Regelung einer thermischen Regelstrecke. Sowohl der Zustandsbeobachter als auch das Regelgesetz basieren auf so genannten Sliding-Mode¹ Konzepten zweiter Ordnung. Die Besonderheiten des vorgestellten Verfahrens bestehen darin, dass nur sehr wenige Informationen über die Regelstrecke bekannt sein müssen und die Zahl der Entwurfsparameter für Regler und Beobachter überschaubar bleibt.

2 Beschreibung der Regelstrecke

Die in Abbildung 1(a) dargestellte Regelstrecke besteht aus zwei Peltierelementen, die über Aluminiumblöcke und ein u-förmig gebogenes Aluminiumblech verbunden sind. Abbildung 1(b) zeigt eine schematische Darstellung dieser Anordnung, diejenige Stelle an der die interessierende Temperatur y mittels eines Thermoelements gemessen wird, ist mit einem schwarzen Punkt markiert. Der Wert der Regelgröße y kann über die Peltierelemente, die als Stellglieder fungieren, beeinflusst werden. Peltierelemente bestehen im Wesentlichen aus zwei gegenüberliegenden Platten, die mit so genannten thermoelektrischen Paaren verbunden sind. Diese Thermopaare sind elektrisch in Serie und thermisch parallel geschaltet, so dass ein elektrischer Strom durch das Peltierelement zur Erwärmung einer Platte und zur Abkühlung der anderen Platte führt. Die Polarität der elektrischen Spannung am Peltierelement gibt an, welche der beiden Platten erwärmt bzw. abgekühlt

¹Die Autoren verwenden bewusst den englischen Begriff „Sliding-Mode“ da die deutschen Bezeichnungen „Gleitzustand“ bzw. „Gleitmodus“ in der Fachliteratur nur wenig etabliert sind.



(a) Foto der thermischen Regelstrecke: die Peltier-elemente sind an den Aluminiumblöcken befestigt und mit einer thermischen Isolierung ummantelt.

(b) Schema der thermischen Regelstrecke: die Peltier-elemente sind zwischen Kühlkörper und Aluminiumblock platziert.

Abbildung 1: Foto und schematische Darstellung der thermischen Regelstrecke.

wird. In diesem Beitrag werden die beiden Peltier-elemente zu *einem* Stellglied zusammengefasst, d.h. an den Klemmen der beiden Peltier-elemente liegt die gleiche Spannung u an. Diese muss der harten Stellgrößenbeschränkung

$$|u(t)| \leq 10V \quad \forall t \geq 0 \quad (1)$$

genügen.

Das Ziel der zu entwerfenden Regelung besteht darin, die Temperatur y einer vorgegebenen (glatten) Führungsgröße r nachzuführen.

3 Idee für einen beobachterbasierten Reglerentwurf

Selbstverständlich kann die Praktikerin oder der Praktiker auf eine Vielzahl verschiedener Methoden zur Lösung der vorliegenden Aufgabenstellung zurückgreifen, siehe z.B. [1, 3, 4]. Als dem Reglerentwurf zugrunde liegendes Streckenmodell könnte beispielsweise ein Verzögerungsglied zweiter Ordnung dienen. Im vorliegenden Beitrag wird hingegen eine vergleichsweise unkonventionelle Herangehensweise vorgeschlagen. Die in Abbildung 2 dargestellte „Sprungantwort“ der Regelstrecke wird zunächst dazu verwendet, die Ordnung eines strukturell einfachen mathematischen Modells zur Nachbildung des Eingangs-Ausgangsverhaltens zu ermitteln. Hierzu wird die aufgezeichnete Temperatur y mehrfach numerisch nach der Zeit abgeleitet. Wie in Abbildung 3 deutlich zu erkennen ist, ist die erste Ableitung eine stetige Funktion der Zeit. Im Gegensatz dazu weist die zweite Ableitung zum Zeitpunkt, bei dem sich das Eingangssignal sprunghaft ändert, eine Unstetigkeit auf. Aus diesem Systemverhalten kann gefolgert werden, dass es von der Eingangsgröße u einen *direkten* Durchgriff auf die zweite Ableitung der Ausgangsgröße

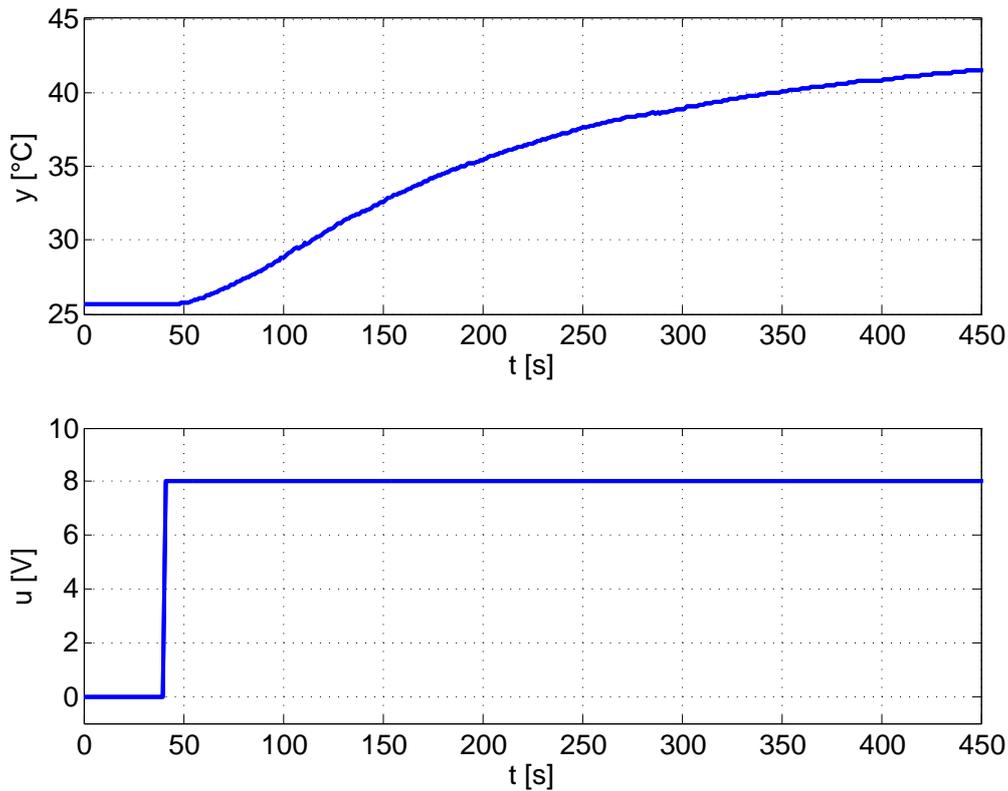


Abbildung 2: Gemessener Verlauf der Temperatur y bei sprunghafter Änderung der Eingangsspannung u .

y gibt. Der sogenannte praktische relative Grad der Regelstrecke beträgt somit 2, siehe hierzu auch [5, 6]. Eine Möglichkeit das Eingangs-Ausgangsverhalten der Regelstrecke zu beschreiben ist nun

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, u, t), \quad (3)$$

$$y = x_1, \quad (4)$$

wobei die unbekannte Funktion f von den beiden Zustandsgrößen x_1 und x_2 sowie von der Eingangsgröße u abhängt. Die explizite Zeitabhängigkeit der Funktion f erfasst den Einfluss unberücksichtigter dynamischer Effekte und unbekannter Störgrößen wie sie z.B. die Umgebungstemperatur darstellt. Weiters wird vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x_1, x_2, u, t)$ betragsmäßig beschränkt ist, d.h.

$$|f(x_1, x_2, u, t)| \leq F \quad \forall x_1, x_2, u, t, \quad (5)$$

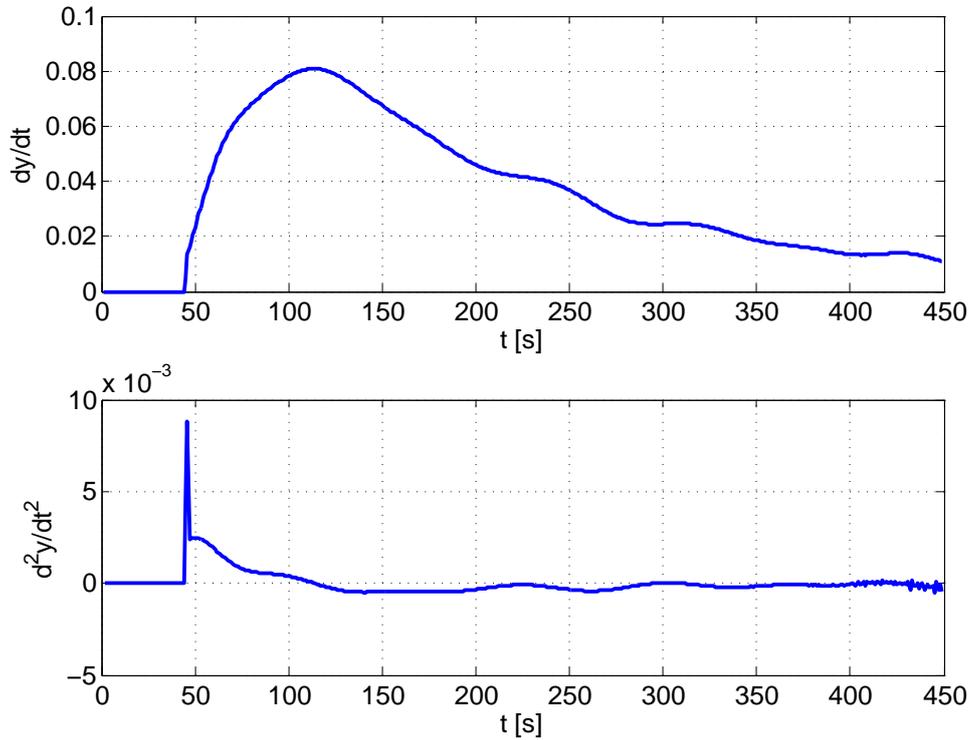


Abbildung 3: Zeitliche Ableitungen der Temperatur y

wobei F eine positive Konstante ist. Da die Zustandsvariable x_2 messtechnisch nicht zur Verfügung steht, wird ein Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 + l_1 \sqrt{|x_1 - \hat{x}_1|} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = l_2 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (7)$$

entworfen. Hierbei repräsentieren \hat{x}_1 und \hat{x}_2 die Schätzwerte für die Zustandsvariablen der Regelstrecke, die positiven Konstanten l_1 und l_2 sind Entwurfparameter. Führt man nun die Schätzfehler

$$\tilde{x}_1 := x_1 - \hat{x}_1 \quad \text{und} \quad \tilde{x}_2 := x_2 - \hat{x}_2 \quad (8)$$

ein, so kann mit Hilfe von (2), (3), (6) und (7) die Schätzfehlerdynamik

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = \tilde{x}_2 - l_1 \sqrt{|\tilde{x}_1|} \text{sign}(\tilde{x}_1), \quad (9)$$

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = f(x_1, x_2, u, t) - l_2 \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (10)$$

angeschrieben werden. Wählt man die Parameter l_1 und l_2 hinreichend groß² (siehe z.B. [2]), so ist gewährleistet, dass beide Schätzfehler in *endlicher* Zeit gegen Null konvergieren,

²Hierbei muss jedenfalls $l_1 > l_2$ gelten.

d.h.

$$\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_2(t) = 0 \quad \forall t \geq T_0, \quad (11)$$

wobei T_0 eine positive reelle Konstante ist.

Für den Reglerentwurf wird eine ähnliche Vorgangsweise wie beim Beobachterentwurf gewählt. Zunächst werden der Regelfehler und seine zeitliche Ableitung gemäß

$$\varepsilon_1 := y - r \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad (12)$$

eingeführt. Aus (2), (3) und (12) folgen dann unmittelbar die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_2, \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = f(x_1, x_2, u, t) - \frac{d^2 r}{dt^2}. \quad (14)$$

Der Reglerentwurf basiert auf der Annahme, dass die Funktion $f(x_1, x_2, u, t)$ in der Form

$$f(x_1, x_2, t, u) = a(x_1, x_2, t) + b(x_1, x_2, t) u \quad (15)$$

dargestellt werden kann, wobei $a(x_1, x_2, t)$ und $b(x_1, x_2, t)$ unbekannte Funktionen sind. Lediglich das Vorzeichen von $b(x_1, x_2, t)$ wird als bekannt vorausgesetzt. Für den Reglerentwurf wird zunächst die Hilfsgröße

$$\sigma_1 := \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_1 \quad \alpha > 0 \quad (16)$$

definiert, wobei α ein Entwurfsparameter ist. Für $\sigma_1 = 0$ genügt der Regelfehler offensichtlich der Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\alpha \varepsilon_1, \quad (17)$$

d.h. ε_1 klingt asymptotisch ab. Mit dem Regelgesetz

$$u = -\beta \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1) + u_1, \quad (18)$$

$$\frac{du_1}{dt} = -\gamma \text{sign}(\sigma_1) \quad (19)$$

und bei entsprechender Definition der Hilfsgröße σ_2 erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \sigma_2 - \beta b(x_1, x_2, t) \sqrt{|\sigma_1|} \text{sign}(\sigma_1), \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = \delta(x_1, x_2, t) - \gamma b(x_1, x_2, t) \text{sign}(\sigma_1). \quad (21)$$

Hierbei sind β und γ Reglerparameter, δ ist eine unbekannte, aber beschränkte Funktion, d.h.

$$|\delta(x_1, x_2, t)| \leq \Delta \quad \forall x_1, x_2, t, \quad (22)$$

wobei Δ eine positive reelle Konstante ist. Man beachte, dass die Struktur des Differentialgleichungssystems (20), (21) exakt die gleiche Struktur wie die Schätzfehlerdynamik (9), (10) besitzt. Dem zufolge kann gezeigt werden, dass die Parameter β und γ so gewählt werden können, dass auch σ_1 und σ_2 in endlicher Zeit gegen Null konvergieren.

4 Ergebnisse

Beobachter und Regelgesetz werden auf einem Steuergerät der Firma Bernecker & Rainer mit einer Zykluszeit von $100ms$ ausgeführt. Für die Implementierung wird eine automatische Codegenerierung eingesetzt, die aus einem Simulink Koppelplan C-Code erzeugt [7]. In Tabelle 1 sind die verwendeten Entwurfparameter angegeben.

Beobachter	Regler
$l_1 = 1$	$\alpha = 1$
$l_2 = 0.1$	$\beta = 2$
	$\gamma = 0.01$

Tabelle 1: Entwurfparameter

Zunächst werden die Beobachterparameter l_1 und l_2 eingestellt. Dazu wird die Regelstrecke mit Hilfe der Eingangsgröße u ausreichend angeregt. Die Beobachterparameter werden so gewählt, dass die gemessene Temperatur $y = x_1$ mit dem Schätzwert \hat{x}_1 zufriedenstellend gut übereinstimmt. In einem zweiten Schritt werden die Reglerparameter experimentell ermittelt. Den Autoren ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt leider keine systematische Vorgangsweise zur Reglerauslegung bekannt. Aus diesem Grund ist dieser Verfahrensschritt im Allgemeinen zeitaufwändig. In Abbildung 4 sind exemplarisch die Verläufe einer vorgegebenen Referenzgröße r und der resultierenden Regelgröße y dargestellt. Es ist zu erkennen, dass y trotz unbekannter Streckendaten und Umgebungstem-

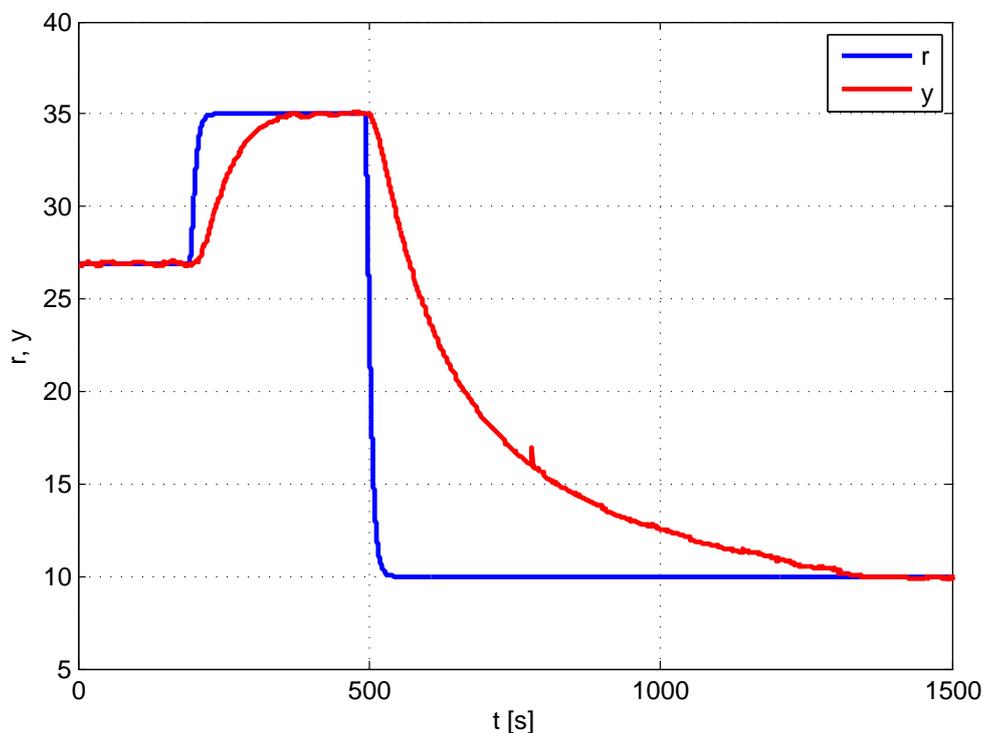


Abbildung 4: Verlauf von Referenz- und Regelgröße

peratur dem Wunschverlauf r asymptotisch folgt. In Abbildung 5 sind die Zustandsvariablen des Beobachters dargestellt. Die Zustandsgröße \hat{x}_1 verläuft nahezu deckungsgleich mit der messbaren Zustandsgröße x_1 der Regelstrecke, die Zustandsgröße \hat{x}_2 approximiert die zeitliche Ableitung von x_1 auf zufriedenstellende Weise.

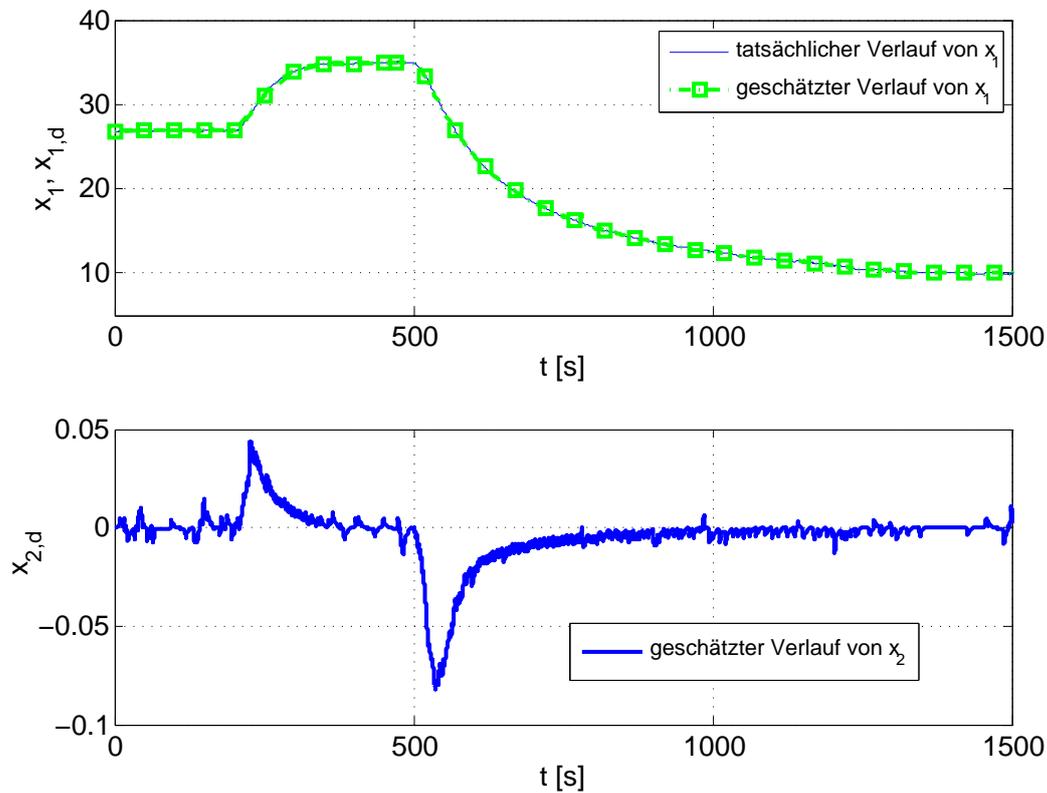


Abbildung 5: Verläufe von x_1 , \hat{x}_1 und \hat{x}_2

5 Zusammenfassung

Das in diesem Beitrag vorgeschlagene Konzept setzt zur Zustandsbeobachtung und zur Regelung Sliding-Mode Algorithmen zweiter Ordnung ein. Aufgrund der erstaunlichen Robustheitseigenschaften dieser Methoden werden nur wenige Streckeninformationen benötigt. Die Einstellung der Regler- und Beobachterparameter erfolgt üblicherweise experimentell, was die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens natürlich einschränkt.

Literatur

- [1] Aström, K. J. und T. Hägglund: *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America ISA, 1995.
- [2] Davila, J., L. Fridman und A. Levant: *Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50, 2005.
- [3] Fliess, M. und C. Join: *Intelligent PID Controllers*. In: *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France 2008.
- [4] Horn, M. und M. Reichhartinger: *Model-free control of a thermal plant*. In: *IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Christchurch, New Zealand 2009.
- [5] Levant, A.: *Practical relative degree in black-box control*. In: *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, Maui, USA 2012.
- [6] Levant, A.: *Practical Relative Degree Approach in Sliding-Mode Control*. In: Bandyopadhyay, B, S Janardhanan und Sarah K. Spurgeon (Herausgeber): *Advances in Sliding Mode Control*, Band 440 der Reihe *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Seiten 97–115. Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN 978-3-642-36985-8.
- [7] Reichhartinger, M. und M. Horn: *Automatisierte Codegenerierung im Laborversuch*. Automotion, 2, 2008.

Polplatzierung durch Ausgangsrückführung mit vorgegebener Struktur

Sven-Olaf Lindert, Kurt Schlacher
Johannes Kepler Universität Linz,
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung,
Altenberger Straße 69, Linz
Sven-Olaf.Lindert@jku.at,* Kurt.Schlacher@jku.at

Zusammenfassung

In diesem Vortrag werden lineare zeitinvariante endlichdimensionale Systeme (LTI-Systeme) mit mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen untersucht, sogenannte MIMO-Systeme. Diese lassen sich durch lineare Gleichungen mit Matrizen, deren Einträge Polynome im Ableitungsoperator sind, darstellen. Damit lässt sich das Problem der Polplatzierung als Aufgabe formulieren, zwei weitere Matrizen für die Matrizendarstellung des Reglers zu suchen, so dass die Pole an gewünschter Stelle liegen und der Regler realisierbar ist. Es werden Bedingungen für die Lösbarkeit diskutiert. Es wird deutlich, dass das Problem der beliebigen Polplatzierung mit Reglern weitaus niedrigerer Ordnung, als der durch klassische (reduzierte) Beobachter und Zustandsrückführung erzeugten, lösbar ist.

1 Einleitung

Die moderne lineare Regelungstheorie kennt verschiedene Verfahren, im Mehrgrößenfall regelungstechnische Ziele zu erreichen (z.B. beobachterbasierte Zustandsregler, Regelung mit Unbestimmtheiten, μ -Synthese ...). Mit der Youla-Kucera Parametrierung können sämtliche stabilisierenden Regler angegeben werden. Dabei entstehen jedoch oft aufwendige Regler mit hoher dynamischer Ordnung, die in der Praxis schwer Akzeptanz finden, weil sie von dem Anlagenpersonal nicht verstanden werden und nicht mehr gepflegt werden können. Daher schlägt dieser Artikel eine Methode vor, mit der bei vorgegebener Reglerstruktur (z.B. P oder PI-Regler) im Mehrgrößenfall die Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises platziert werden können.

In [11] wird die strengste Strukturbeschränkung, die konstante Ausgangsrückführung, mit geometrischen Methoden untersucht. Für zeitdiskrete Rückwärtsmodelle wird in [3] eine Lösung angegeben. Der Fall dezentralisierter Regler, also mehrerer paralleler Regler

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

mit je einer Mess- und Stellgröße, wird in [5] und [6] behandelt. Weitere Untersuchungen finden man in [4]. Der vorliegende Artikel verwendet Gröbner-Basen, um bei vorgegebenen Strukturen die verbleibenden Unbekannten zu bestimmen. Falls entweder nur eine Stellgröße oder nur eine Messgröße zur Verfügung stehen, genügen Methoden der linearen Algebra.

Dieser Artikel beruht ganz wesentlich auf [7]. Ferner wird auf algebraische Grundlagen zurückgegriffen, die unter anderem in [10], [9], [2] oder [13] nachzulesen sind. Eine sehr kompakte Darstellung aus Sicht der Mathematik findet sich in [8].

Bis Abschnitt 3.1 handelt es sich um eine Übernahme aus [7]. Die nachfolgenden Abschnitte stellen jedoch Ergänzungen dar. Allerdings muss der Autor vorausschicken, dass er sich mit den in Abschnitt 4 vorgestellten Methoden erst seit kurzem befasst, so dass es sich hier lediglich um einen ersten vielversprechenden Erfahrungsbericht handelt.

1.1 Streckenbeschreibung

Bei der mathematischen Modellierung von regelungstechnischen Systemen stößt man im Allgemeinen auf ein nichtlineares System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(k_A)}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k_B)}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(k_C)}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k_D)}) &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Darin sind die m Stellgrößen im Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, im Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die p Ausgangsgrößen, und im Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ alle übrigen (inneren) Systemgrößen zusammengefasst. In der Funktion \mathbf{f} sind r , in der Funktion \mathbf{g} sind p Differentialgleichungen zusammengefasst. Gegenstand dieses Artikels sind LTI-Systeme. Daher werden die Gleichungen um eine Ruhelage (\mathbf{x}^{ss} , \mathbf{u}^{ss}) linearisiert. Dabei entstehen lineare Differentialgleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^{k_A} A_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{x} + \sum_{\kappa=0}^{k_B} B_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \sum_{\kappa=0}^{k_C} C_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{x} + \sum_{\kappa=0}^{k_D} D_{\kappa} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\kappa} \mathbf{u} &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Zur Lösung der Differentialgleichungen soll die Laplace-Transformation verwendet werden. Daher werden die Gleichungen Laplace-transformiert und man erhält

$$A_P(s) \cdot \mathbf{X} + B_P(s) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{a}(s) \quad A_P(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, B_P(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m} \quad (1a)$$

$$C_P(s) \cdot \mathbf{X} + D_P(s) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Y} + \mathbf{b}(s) \quad C_P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}, D_P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (1b)$$

mit Matrizen, deren Einträge Polynome in dem Laplace-Operator s sind:

$$A_P(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_A} A_{\kappa} s^{\kappa} \quad B_P(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_B} B_{\kappa} s^{\kappa} \quad C_P(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_C} C_{\kappa} s^{\kappa} \quad D_P(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_D} D_{\kappa} s^{\kappa}.$$

Die Anfangswerte von \mathbf{x} und \mathbf{u} resultieren in den Vektoren $\mathbf{a}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$, deren Einträge ebenfalls Polynome in s sind. Dieses Gleichungssystem (1) soll die zentrale Streckenbeschreibung des vorliegenden Artikels sein. Die klassische Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} & (sI - A)\mathbf{X} - B\mathbf{U} &= \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} & C\mathbf{X} + D\mathbf{U} &= \mathbf{Y} \end{aligned}$$

ist in der Streckenbeschreibung (1) enthalten, aber nicht vorausgesetzt. Beispielsweise können auch nicht realisierbare Strecken mit den Gleichungen. (1) behandelt werden.

Beschreibung des Reglers

Der Regler ist ebenfalls ein LTI-System, das die Abweichung des Messsignals \mathbf{y} von dem gewünschten Signal \mathbf{y}^d in Stellensignale überführt. Mit Regler ist in diesem Artikel das System sämtlicher durch den Ingenieur entworfenen Einrichtungen gemeint, z. B. Vorfilter, Beobachter, etc. Die Laplace-Transformierte des Reglers sei

$$N_P(s)\mathbf{U} + Z_P(s)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^d) = \mathbf{c}(s)$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{c}(s)$.

1.2 Geschlossener Kreis

Das geschlossene System hat somit die Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_P & B_P & 0 \\ C_P & D_P & -I_p \\ 0 & N_P & Z_P \end{pmatrix}}_{A_{CL}} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Z_P \end{pmatrix}}_{B_{CL}} \mathbf{Y}^d = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(s) \\ \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{c}(s) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Löst man das Gleichungssystem mittels der Laplace-Transformation, so erhält man die Übertragungsmatrix $G_{CL}(s) = -A_{CL}^{-1}(s) \cdot B_{CL}(s)$ von den Eingangsgrößen zu den inneren Größen. Ist das Matrizenpaar (A_{CL}, B_{CL}) linksteilerfremd, so ist der Hauptnenner sämtlicher Übertragungsfunktionen $\det A_{CL}(s)$. Ferner handelt es sich bei den Anfangsbedingungen um Polynome in s . Die aus ihnen resultierenden Signale haben daher ebenfalls als gemeinsamen Nenner $\det A_{CL}(s)$. Daher gilt:

Satz 1 *Der geschlossene Kreis ist genau dann stabil, wenn sämtliche Nullstellen von*

$$\det A_{CL}(s) = \det \begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) & 0 \\ C_P(s) & D_P(s) & -I_p \\ 0 & N_P(s) & Z_P(s) \end{pmatrix} =: \text{CLCP}(s)$$

in der linken offenen Halbebene liegen. Daher heißt die Determinante $\det A_{CL}(s)$ „charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises“, kurz CLCP (closed loop characteristic polynomial).

An dieser Stelle wurden ausschließlich Störungen aufgrund unbekannter Anfangswerte und veränderlicher gewünschter Größen angenommen. Man kann jedoch die Diskussion um ein externes Störsignal ergänzen, was das Ergebnis nicht ändert (siehe [7]).

2 Problem der Nullstellenzuweisung

Aufgrund von Satz 1 spielt die Determinante $\det A_{CL}$, Gl. (2), für das Verhalten des geschlossenen Systems eine entscheidende Rolle. Die Frage, ob die Pole eines Systems beliebig platziert werden können, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob zu den konstruktiv vorgegebenen oberen $(p+r)$ Zeilen der Matrix $A_{CL}(s)$ weitere m Zeilen geeignet ergänzt werden können, so dass die Nullstellen des $CLCP(s)$ an gewünschten Stellen in der offenen linken Halbebene liegen. Dem $CLCP(s)$ sollen durch geschickte Wahl von $(0, N_P, Z_P)$ Nullstellen *zugewiesen* werden.

2.1 Entkoppelungsnullstellen oder fixe Nullstellen

Eine Bedingung für die beliebige Nullstellenzuweisbarkeit findet sich bereits in [2], fußend auf dem Konzept der „Entkoppelungsnullstellen“ (decoupling zeros) von [12]. Wenn das Paar (A_P, B_P) nicht linksteilerfremd ist, so gibt es nach Satz 6.2 in [10], bzw. Lemma 6.3-3 in [2], mindestens eine Zahl $s_0 \in \mathbb{C}$, für die der Rang von $(A_P(s_0), B_P(s_0), 0)$ nicht voll ist und daher linear abhängige Zeilen vorhanden sind. Das bedeutet aber, dass

$$\det \begin{pmatrix} A_P(s_0) & B_P(s_0) & 0 \\ C_P(s_0) & D_P(s_0) & -I_p \\ 0 & N_P(s_0) & Z_P(s_0) \end{pmatrix} = CLCP(s_0) = 0 \quad (3)$$

ist, und zwar unabhängig von (Z_P, N_P) . Diese Nullstelle kann durch Wahl eines Reglers nicht verschoben werden, sie ist eine Entkoppelungsnullstelle bzw. *fixe* Nullstelle. Dasselbe gilt für ein nicht rechtsteilerfremdes Paar $\begin{pmatrix} A_P \\ C_P \end{pmatrix}$. Dann gibt es mindestens eine Zahl s_0 , für die der Rang von $\begin{pmatrix} A_P(s_0) \\ C_P(s_0) \end{pmatrix}$ nicht voll ist, was gleichbedeutend mit linear abhängigen Spalten ist und ebenfalls Gl. (3) zur Folge hat. Im Rahmen der Zustandsdarstellung werden solche Systeme als nicht erreichbar bzw. nicht beobachtbar bezeichnet und das Kriterium für Links- und Rechtsteilerfremdheit wird zum Hautus-Kriterium.

Wenn keine speziellen Forderungen an die Struktur oder die dynamische Ordnung des Reglers gestellt werden, so ist die Teilerfremdheit der entsprechenden Matrizenpaare, bzw. Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit der Zustandsdarstellung, bereits notwendig und hinreichend für die Existenz eines Reglers, der die Pole des geschlossenen Systems beliebig platziert.

3 Nullstellenzuweisung durch Ergänzung einer Zeile

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, wie mit vorgegebener dynamischer Ordnung und Reglerstruktur die Pole beliebig platziert werden können. Dabei soll der Regler generell realisierbar sein. Da das Paar (N_P, Z_P) gezielt entworfen wird, kann man grundsätzlich voraussetzen, dass die Matrizen N_P und Z_P linksteilerfremd sind.

3.1 Nullstellenzuweisung bei einer skalaren Stellgröße

Ist die Anzahl m der Stellgrößen eins, so lässt sich die eine fehlende Zeile über einen Koeffizientenvergleich finden. In diesem Fall ist das Paar (N_P, Z_P) lediglich ein Zeilenvektor und die Matrix N_P wird zu einem skalaren Polynom $n_P(s)$. Dann ist die dynamische Ordnung $\text{grad } n_P(s)$ und die Grade von $\mathbf{z}_P^T(s)$ dürfen den Grad von $n_P(s)$ nicht übersteigen. Die Methode folgt im Wesentlichen der Vorgehensweise in [10], Abschnitt 6.3.1.1. Man fasst (n_P, \mathbf{z}_P^T) zu einem polynomialen Zeilenvektor $\mathbf{f}_P^T(s)$ mit dem Grad k_f zusammen,

$$(n_P \quad \mathbf{z}_P^T) =: \mathbf{f}_P^T(s) = \sum_{\kappa=0}^{k_f} \mathbf{f}_\kappa^T s^\kappa. \quad (4)$$

Das CLCP soll k_C Nullstellen mit den Werten s_κ für $\kappa = 1, \dots, k_C$ haben. Die Forderung lautet also

$$\det \begin{pmatrix} A_P(s) & \mathbf{b}_P(s) & 0 \\ C_P(s) & \mathbf{d}_P(s) & -I_p \\ 0 & \mathbf{f}_P^T(s) & \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=1}^{k_C} (s - s_\kappa). \quad (5)$$

mit der dynamischen Ordnung k_C des geschlossenen Systems, $k_C = \text{grad det } A_{CL}$. Genau genommen kann das Sollpolynom $\prod (s - s_\kappa)$ noch mit jedem reellen Faktor multipliziert werden, ohne die Nullstellen zu verändern. Jedoch kann darauf o. B. d. A. verzichtet werden, wie man am Ende dieses Abschnitts sehen wird. Die Determinante der linken Seite der Forderung (5) wird mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der letzten Zeile $(0 \quad \mathbf{f}_P^T(s))$ entwickelt:

$$\sum_{\kappa=1}^{p+m} \left(\sum_{\ell=0}^{k_f} f_\ell^\kappa s^\ell \right) p_\kappa(s) = s^{k_C} + \sum_{\kappa=0}^{k_C-1} c_\kappa s^\kappa,$$

mit den nach dem Wurzelsatz von Vieta berechneten Koeffizienten c_κ und den komplexitären $((p+r) \times (p+r))$ Minoren

$$p_\kappa = \det \begin{pmatrix} A_P(s) & \mathbf{b}_P(s) & 0 \\ C_P(s) & \mathbf{d}_P(s) & -I_p \\ 0 & \mathbf{e}_\kappa^T & \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Darin ist \mathbf{e}_κ ein Einheitsvektor, der an der κ -ten Stelle eins und sonst null ist. Die Koeffizienten c_κ werden in einem Vektor

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{k_C-2}, c_{k_C-1}, 1)^T \quad (7)$$

zusammengefasst. In gleicher Weise fasst man auch die Koeffizienten $c_\mu^{p_\kappa}$ der Polynome $p_\kappa(s)$ in einer Matrix M zusammen:

$$M = \begin{pmatrix} c_0^{p_1} & c_0^{p_2} & \dots & c_0^{p_p} & c_0^{p_{p+1}} \\ c_1^{p_1} & c_1^{p_2} & \dots & c_1^{p_p} & c_1^{p_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k_p}^{p_1} & c_{k_p}^{p_2} & \dots & c_{k_p}^{p_p} & c_{k_p}^{p_{p+1}} \end{pmatrix},$$

mit k_p als dem maximalen Grad aller Minoren $p_\kappa(s)$. Wenn man mit dem Vergleich der nullten Potenz beginnt, erhält man aus dem Koeffizientenvergleich von Gl. (5) das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{M} & \boxed{\mathbf{0}^T} & \cdots & \boxed{0} \\ \boxed{M} & \boxed{M} & \cdots & \boxed{M} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \cdots & \boxed{M} \end{pmatrix}}_{\widetilde{M}} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{k_f} \end{pmatrix} = \mathbf{c}. \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem muss nach den Regeln der linearen Algebra lösbar sein, das bedeutet, dass

$$\text{Rang } \widetilde{M} = \text{Rang} \left(\widetilde{M}, \mathbf{c} \right) \quad (9)$$

gelten muss. Beliebige Polplatzierbarkeit bedeutet nun, dass die Matrix \widetilde{M} Maximalrang haben muss. Forderungen an die Struktur bedeuten, dass einzelne Einträge in \mathbf{f}_κ^T festliegende Werte, z. B. Null, annehmen müssen. Dies kann durch ein entsprechend unterbestimmtes Gleichungssystem (8) sichergestellt werden. Verbleibende Freiheitsgrade können in einem zweiten Schritt nach weiteren Gesichtspunkten genutzt werden.

Abschließend wird die Behauptung belegt, dass das Multiplizieren des Sollpolynoms $\prod(s - s_\kappa)$ mit einem reellen Faktor k keine Auswirkungen auf den Regler hat und damit o. B. d. A. $k = 1$ gewählt werden kann. Ein Faktor $k \neq 1$ stünde in Gleichung (8) als Linearfaktor vor \mathbf{c}

$$\widetilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{k_f} \end{pmatrix} = k\mathbf{c},$$

woraus eine um den Faktor k gestreckte Lösung

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}_{k_f} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{k_f} \end{pmatrix}$$

folgt. Man erhält damit aus Gl. (4) ein anderes Matrizenpaar

$$\left(\tilde{n}_P(s) \quad \tilde{\mathbf{z}}_P^T(s) \right) = \left(kn_P(s) \quad k\mathbf{z}_P^T(s) \right),$$

aber der daraus resultierende Regler bleibt für alle k derselbe, denn

$$K(s) = \left(\tilde{n}_P(s) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_P^T(s) = \left(kn_P(s) \right)^{-1} k\mathbf{z}_P^T(s) = \left(n_P(s) \right)^{-1} \mathbf{z}_P^T(s).$$

3.2 Nullstellenzuweisung bei einer skalaren Messgröße

Liegt nur eine Messgröße bei mehreren Stellgrößen vor, so kann man das Problem auf ein lineares zurück führen und analog zum vorigen Abschnitt lösen. Die Forderung nach

Nullstellen der Determinante einer polynomialen Matrix ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Zeilen der Matrix für bestimmte $s = s_\kappa$ linear abhängig sind. Dies gilt jedoch dann auch für deren Normaldarstellung. Man sucht also m Spaltenvektoren, die auf $\begin{pmatrix} A_P & B_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_P^T & \mathbf{d}_P^T & -1 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen. Diese gewinnt man aus der Überführung in die Hermitesche Normalform¹

$$\begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_P^T(s) & \mathbf{d}_P^T(s) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \\ \mathbf{u}_{31}^T(s) & \mathbf{u}_{32}^T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Nun lautet das Problem: Suche eine polynomialen Matrix $F_P(s)$, so dass

$$\det \begin{pmatrix} F_P(s) & U_{12}(s) \\ U_{22}(s) & \mathbf{u}_{32}^T(s) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=1}^{k_C} (s - s_\kappa).$$

Es ist allerdings noch zu beachten, dass die zu $F_P(s)$ normale Matrix $\begin{pmatrix} 0 & N_P & \mathbf{z}_P \end{pmatrix}$ mit einer $(m \times r)$ Nullmatrix beginnen muss. Hieraus folgt, dass $F_P(s)$ folgende Struktur haben muss:

$$F_P(s) = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_P(s) \end{pmatrix},$$

was zur Forderung

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{f}_P(s) & U_{22}(s) \\ \mathbf{u}_{32}^T(s) & \mathbf{u}_{32}^T(s) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=1}^{k_C} (s - s_\kappa)$$

führt. Dies ist wieder ein lineares Problem. Man kann die Teile von \mathbf{f}_P direkt nehmen, um eine rechte Matrizenbruchdarstellung des Reglers zu gewinnen, oder durch Überführen von \mathbf{f}_P in die Hermitesche Normalform das Paar (N_P, \mathbf{z}_P) bestimmen.

4 Nullstellenzuweisung im MIMO-Fall

Bei $m > 1$ wird aus dem zu ergänzenden Zeilenvektor $\mathbf{f}_P^T(s)$, Gl. (4), eine polynomialen Matrix $F_P(s)$. Mit ihr kann das Problem analog zu Gleichung (5) formuliert werden

$$\det \begin{pmatrix} A_P(s) & B_P(s) & 0 \\ C_P(s) & D_P(s) & -I_p \\ 0 & F_P(s) & \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \prod_{\kappa=0}^{k_C} (s - s_\kappa). \quad (10)$$

Doch kann diese Forderung nicht einfach über einen linearen Koeffizientenvergleich gelöst werden, da die Koeffizienten nicht mehr linear auftreten. Vielmehr handelt es sich dann um ein multilineares Problem, dem man jetzt wegen $p > 1$ auch nicht mehr ausweichen kann. Untersuchungen dazu finden sich in [11], [5] oder [6] bzw. dort angegebener Literatur. In [7] wurde ein Weg beschritten, der mit den Mitteln der linearen Algebra auskommt. Allerdings konnte dort keine Aussage über die Gesamtheit der Lösungen gemacht werden.

¹siehe [10] oder [2]

4.1 Formulierung als Varietät

Ein multilineares Problem kann auch als polynomiales Problem mit Polynomen in mehreren Unbekannten aufgefasst werden. Durch den Koeffizientenvergleich in s verschwindet s als Unbekannte. Die neuen Unbekannten sind die Koeffizienten f_{ij}^k von $F_P(s)$, als Polynom in s aufgefasst. Im Folgenden soll f_{ij}^k den Koeffizienten in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der s^k -Potenz bezeichnen. Die Besonderheit dabei ist, dass die Polynome in den einzelnen Unbekannten f_{ij}^k immer den Grad eins haben. Durch die Art, wie Determinanten gebildet werden, treten immer Produkte von m Unbekannten auf, in denen jeweils sämtliche i und sämtliche j untereinander verschieden sind, von diesen Produkten jedoch sämtliche möglichen Kombinationen. In [10] und [11] ist die Entstehung der Polynome genau beschrieben. Aus (10) erhält man mit (7) die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_0 &= c_0 \\ \vdots &= \vdots & P_0 \dots P_{k_c-1} &\in \mathbb{R}[f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f}] \\ P_{k_c-1} &= c_{k_c-1} & (c_0 \dots c_{k_c-1})^T &\in \mathbb{R}^{k_c}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Frage nach der beliebigen Polplatzierbarkeit stellt sich dann wie folgt. Man fasst die linke Seite von (11), die Polynome $P_0 \dots P_{k_c-1}$, als Parameterdarstellung einer Varietät im \mathbb{R}^{k_c} auf und fragt, ob diese Varietät den gesamten \mathbb{R}^{k_c} ausfüllt, bzw. ob eine implizite Darstellung existiert. Dies wird in [1] (Kapitel 2, §8) als „Implicitization Problem“ diskutiert. Die Lösung würde Zwangsbedingungen der Art $P(c_0 \dots c_{k_c-1})$ offenbaren. Nach bisheriger Erfahrung des Autors liefern die symbolischen Rechenprogramme *Maxima* und *Maple*, die auf der Berechnung von reduzierten Gröbner-Basen beruhen, allerdings keine Lösung. Einen Ausweg mit schwächerer Aussage bietet der Satz über implizite Funktionen, der keine globale Aussage ermöglicht. Erfüllt ein Satz $\overline{f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f}}$ und $\overline{c_0 \dots c_{k_c-1}}$ die Gleichungen (11) und hat die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(P_0 \dots P_{k_c-1})}{\partial(f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f})}$ an dieser Stelle vollen Zeilenrang, so existiert in einer offenen Umgebung eine explizite Funktion $(f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f}) = P(c_0 \dots c_{k_c-1})$. Damit wäre in dieser offenen Umgebung beliebige Polplatzierbarkeit gegeben. Daher scheint es sinnvoller zunächst zu prüfen,

1. ob sämtliche Dimensionen von mindestens einer Unbekannten f_{ij}^k angesprochen werden (kein P darf zu einer Konstanten entarten).
2. ob mindestens so viele Unbekannte wie Dimensionen vorhanden sind.
3. ob die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(P_0 \dots P_{k_c-1})}{\partial(f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f})}$ vollen Zeilenrang hat, zumindest für fast alle Werte der Unbekannten $f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f}$.

Sind die Bedingungen erfüllt, so bestehen nach Erfahrung des Autors gute Chancen, dass man für beliebige Pole zu einer Lösung kommt. Fordert man bestimmte Pole, so wird aus

(11) die Varietät

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ \tilde{P}_{k_c-1} &= 0 \quad \tilde{P}_0 \dots \tilde{P}_{k_c-1} \in \mathbb{R}[f_{11}^0 \dots f_{m,m+p}^{k_f}] . \end{aligned} \tag{12}$$

in impliziter Darstellung. Die gesuchte Lösung ist dann die Menge aller auf der Varietät liegenden Punkte. Das kann man durch Elimination mithilfe von Gröbner-Basen geschlossen berechnen. Es kann dabei abzählbar viele isolierte Punkte oder aber mehrere Mannigfaltigkeiten als Lösungen geben.

An dieser Stelle werden Gröbner-Basen lediglich als Werkzeug benutzt. Eine ausführliche Lehrdarstellung ist in [1] zu finden.

4.2 Ansatz des Reglers

Da die Berechnung der reduzierten Gröbner-Basis bereits bei relativ wenigen Unbekannten so aufwendig wird, dass Computeralgebraprogramme keine Lösung mehr liefern, empfiehlt es sich, nicht mehr Unbekannte f_{ij}^k einzuführen als bei gegebener Struktur und dynamischer Ordnung unbedingt nötig. Bei dem Ansatz der Matrizen $F_P(s) = (N_P, Z_P)$ ist zu bedenken, dass eine Multiplikation mit einer unimodularen Matrix U von links an der Übertragungsfunktion nichts ändert, denn

$$K(s) = -N_P^{-1}Z_P = -(UN_P)^{-1}UZ_P .$$

Um also nicht mehr Unbekannte einzuführen als in der Übertragungsfunktion wirksam werden, empfiehlt es sich, die komplementär zu dem bereits gegebenen Minor mit dem höchsten Grad in s stehende Matrix in Hermitescher Zeilennormalform anzusetzen. Damit ist der höchste Koeffizient des CLCP(s) festgelegt und man vermeidet wie auch schon in Abschnitt 3.1 das Arbeiten im projektiven Raum $\mathbb{P}\mathbb{R}^{k_c}$. Wenn die Regelstrecke sprungfähig ist, so kann es mehrere Minoren höchsten Grades geben. Auch dann sollte man F_P in Hermitescher Zeilennormalform ansetzen, jedoch kann man dann den projektiven Raum nicht mehr vermeiden.

4.3 Lösung an einem Beispiel

Als Beispiel diene das aufrecht stehende verschiebliche Zweifachpendel aus [7], Beispiel 4.1. (Skizze in Abbildung 1). An einem Wagen auf einer waagerechten Schiene seien zwei Pendelkörper an einander hängend montiert. Stelleingriffe seien die Kraft f_{wag} auf den Wagen und ein Drehmoment d_{wag} auf den ersten Pendelkörper. Die Linearisierung erfolgt um die aufrechte Ruhelage und ergebe mit normierten beispielhaften Werten die Systembeschreibung (1a)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}s^2 & -\frac{3}{40}s^2 & -\frac{1}{25}s^2 \\ -\frac{3}{40}s^2 & \frac{13}{800}s^2 - \frac{3}{4} & \frac{1}{100}s^2 \\ -\frac{1}{25}s^2 & \frac{1}{100}s^2 & \frac{2}{125}s^2 - \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\text{wag}} \\ D_{\text{wag}} \end{pmatrix} = \mathbf{a}(s) .$$

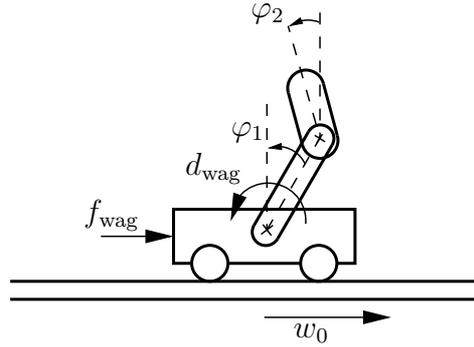


Abbildung 1: Skizze des verschieblichen Zweifachpendels

Die Messgrößen seien die Position w_0 des Wagens und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$. Damit lautet die Ausgangsgleichung (1b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \dot{\Phi}_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(s) \end{pmatrix}.$$

Die Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$ lautet damit

$$G(s) = -C_P A_P^{-1} B_P = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{25}s^4 - \frac{37}{8}s^2 + 75}{\frac{1}{100}s^6 - \frac{153}{80}s^4 + 45s^2} & \frac{\frac{1}{5}s^2 - \frac{15}{2}}{\frac{1}{100}s^4 - \frac{153}{80}s^2 + 45} \\ \frac{\frac{1}{5}s^3 - \frac{15}{2}s}{\frac{1}{100}s^4 - \frac{153}{80}s^2 + 45} & \frac{2s^3 - 60s}{\frac{1}{100}s^4 - \frac{153}{80}s^2 + 45} \end{pmatrix}.$$

Als Regler soll ein 2×2 PI-Regler mit der dynamischen Ordnung eins gewählt werden. Seine Übertragungsfunktionsmatrix $K(s)$ sei

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{k_{11}^p s + k_{11}^I}{s} & \frac{k_{12}^p s + k_{12}^I}{s} \\ \frac{k_{21}^p s + k_{21}^I}{s} & \frac{k_{22}^p s + k_{22}^I}{s} \end{pmatrix}.$$

Dieser Regler hat genau sieben Freiheitsgrade. Das mag zunächst verwundern, weil acht Parameter angesetzt sind, jedoch folgt aus der Forderung nach der dynamischen Ordnung eins, dass seine linke Matrizenbruchdarstellung

$$K(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_{11}^p s + k_{11}^I & k_{12}^p s + k_{12}^I \\ k_{21}^p s + k_{21}^I & k_{22}^p s + k_{22}^I \end{pmatrix}$$

nicht linksteilerfremd sein darf, was für $s = 0$ einen Rangabfall bedeutet, mithin

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{11}^I & k_{12}^I \\ 0 & 0 & k_{21}^I & k_{22}^I \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad k_{11}^I k_{22}^I - k_{21}^I k_{12}^I \stackrel{!}{=} 0.$$

Der Minor mit höchstem Grad ist $\det A_P(s)$, wie üblich bei streng properen System. Also wird N_P in Hermitescher Normalform angesetzt:

$$F_P(s) = (N_P, Z_P) = \begin{pmatrix} 25000 & f_{12}^0 & f_{13}^0 & f_{14}^0 \\ 0 & s & f_{23}^1 s + f_{23}^0 & f_{24}^1 s + f_{24}^0 \end{pmatrix}$$

mit den notwendigen sieben Unbekannten. Durch die Zahl 25000 wird der höchste Koeffizient des CLCP auf eins normiert. Die Pole sollen beispielhaft sämtlich bei -1 liegen. Damit erhält man die Varietät (11) zu

$$\begin{aligned} -\frac{3f_{12}^0 f_{23}^0}{10} &= 1 \\ -\frac{2f_{13}^0 f_{24}^0}{5} + \frac{2f_{14}^0 f_{23}^0}{5} - \frac{3f_{12}^0 f_{23}^1}{10} + \frac{3f_{13}^0}{10} &= 7 \\ -\frac{2f_{13}^0 f_{24}^1}{5} + \frac{37f_{12}^0 f_{23}^0}{2000} - 750f_{23}^0 + \frac{2f_{14}^0 f_{23}^1}{5} &= 21 \\ \frac{2f_{13}^0 f_{24}^0}{125} + \frac{3f_{12}^0 f_{24}^0}{100} - 6000f_{24}^0 - \frac{2f_{14}^0 f_{23}^0}{125} + \frac{37f_{12}^0 f_{23}^1}{2000} - 750f_{23}^1 - \frac{37f_{13}^0}{2000} + 4500 &= 35 \\ \frac{2f_{13}^0 f_{24}^1}{125} + \frac{3f_{12}^0 f_{24}^1}{100} - 6000f_{24}^1 - \frac{f_{12}^0 f_{23}^0}{6250} + 20f_{23}^0 - \frac{2f_{14}^0 f_{23}^1}{125} - \frac{3f_{14}^0}{100} &= 35 \\ -\frac{f_{12}^0 f_{24}^0}{1250} + 200f_{24}^0 - \frac{f_{12}^0 f_{23}^1}{6250} + 20f_{23}^1 + \frac{f_{13}^0}{6250} - \frac{765}{4} &= 21 \\ -\frac{f_{12}^0 f_{24}^1}{1250} + 200f_{24}^1 + \frac{f_{14}^0}{1250} &= 7 \end{aligned}$$

Die drei genannten Bedingungen sind erfüllt und die Suche nach einer Lösung scheint sinnvoll. Für die lexikographische Monomordnung

$$f_{12}^0 > f_{13}^0 > f_{14}^0 > f_{23}^1 > f_{23}^0 > f_{24}^1 > f_{24}^0$$

erhält man die folgende Gröbner-Basis. Dabei wurden zur besseren Übersicht Zahlenwerte nur durch \circ angedeutet:

$$\begin{aligned} g_1 &= \circ f_{24}^0{}^5 - \circ f_{24}^0{}^4 + \circ f_{24}^0{}^3 - \circ f_{24}^0{}^2 + \circ f_{24}^0 + \circ f_{24}^1 - \circ \\ g_2 &= -\circ f_{24}^0{}^6 + \circ f_{24}^0{}^5 - \circ f_{24}^0{}^4 + \circ f_{24}^0{}^3 - \circ f_{24}^0{}^2 + \circ f_{24}^0 - \circ \\ g_3 &= \circ f_{24}^0{}^5 - \circ f_{24}^0{}^4 + \circ f_{24}^0{}^3 - \circ f_{24}^0{}^2 + \circ f_{24}^0 + \circ f_{23}^0 - \circ \\ g_4 &= \circ f_{24}^0{}^5 - \circ f_{24}^0{}^4 + \circ f_{24}^0{}^3 - \circ f_{24}^0{}^2 + \circ f_{24}^0 + \circ f_{12}^0 - \circ \\ g_5 &= -\circ f_{24}^0{}^5 + \circ f_{24}^0{}^4 - \circ f_{24}^0{}^3 + \circ f_{24}^0{}^2 - \circ f_{24}^0 - \circ f_{13}^0 + \circ \\ g_6 &= -\circ f_{24}^0{}^5 + \circ f_{24}^0{}^4 - \circ f_{24}^0{}^3 + \circ f_{24}^0{}^2 - \circ f_{24}^0 - \circ f_{23}^1 + \circ \\ g_7 &= \circ f_{24}^0{}^5 - \circ f_{24}^0{}^4 + \circ f_{24}^0{}^3 - \circ f_{24}^0{}^2 + \circ f_{24}^0 - \circ f_{14}^0 - \circ . \end{aligned}$$

Das Polynom g_2 stellt das letzte Eliminationsideal dar und ist, wie erwartet, ein Polynom in nur einer Unbekannten f_{24}^0 , der letzten Unbekannten in der Monomordnung. Die Nullstellen $\overline{f_{24}^0}$ dieses Polynoms können mit gängigen numerischen Methoden bestimmt werden. Es handelt sich um

$$\overline{f_{24}^0} = 0.7144, 1.742, 1.929, 2.304, 2.333, 2.356.$$

Die übrigen Polynome g sind jeweils in f_{24}^0 und *einer* weiteren Unbekannten. In dieser sind sie außerdem linear². Hat man also f_{24}^0 festgelegt, ergeben sich die übrigen Unbekannten. Es gibt daher genau sechs mögliche Regler, die die hier gewünschten Pole erzeugen. Es ist selbstverständlich nicht gesichert, dass ein Polynom sechster Ordnung sechs reelle Nullstellen hat. Man muss also für jeden Polwunsch erneut feststellen, wie viele Regler es gibt. Da die Ordnung gerade ist, könnte es auch keinen Regler geben. Wählt man $f_{24}^0 = 0.7144$ erhält man

$$F_P(s) = (N_P, Z_P) = \begin{pmatrix} 25000 & 0.1737 & -4846121 & -8994 \\ 0 & s & 42.24s - 19.19 & 0.07098s + 0.7144 \end{pmatrix}$$

und

$$K(s) = \begin{pmatrix} 193.8 - \frac{1.333 \cdot 10^{-4}}{s} & 0.3598 + \frac{4.964 \cdot 10^{-6}}{s} \\ -42.24 + \frac{19.19}{s} & -0.07098 - \frac{0.7144}{s} \end{pmatrix}.$$

Ein (2×2) PI-Regler mit dynamischer Ordnung eins ist also in der Tat ausreichend, um im Beispiel die Pole des geschlossenen Systems zu platzieren. Dem gegenüber hätte ein klassischer, auf einem reduzierten Beobachter basierender Zustandsregler mit I-Anteil die dynamische Ordnung fünf. Man sieht, dass zur Platzierung von Polen allein recht einfache Regler genügen.

Literatur

- [1] Cox, David, John Little und Donal O’Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1992. ISBN 0-387-97847-X.
- [2] Kailath, Thomas: *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [3] Lampe, Bernhard und Efim Rosenwasser: *Allgemeine Polvorgabe für zeitdiskrete Systeme*. Automatisierungstechnik, 55:634–640, 2007.
- [4] Lampe, Bernhard P. und Efim N. Rosenwasser: *Strukturierte Polvorgabe für PMD Prozesse*. Automatisierungstechnik, 51:119–127, 2003.
- [5] Leventides, J. und N. Karcanias: *Sufficient Conditions for Arbitrary Pole Assignment by Constant Decentralized Output Feedback*. Math. Control Signals Systems, 8:222–240, 1995.
- [6] Leventides, J. und N. Karcanias: *Decentralized dynamic pole assignment with low-order compensators*. Journal of Mathematical Control and Information, 24:395–410, 2007.
- [7] Lindert, Sven Olaf: *Beiträge zur Steuerung und Regelung von mehrvariablen linearen zeitinvarianten Systemen in polynomialer Darstellung*. Nummer 1164 in *Fortschritt-Bericht VDI Reihe 8*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2009. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-24944>, ISBN 978-3-18-516408-8.

²Dieser Umstand ist ausschließlich dem Beispiel geschuldet.

- [8] MacDuffee, C. C.: *The Theory of Matrices*, Band 2 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1933.
- [9] Raisch, J.: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1994. ISBN 3-486-21796-8.
- [10] Reinschke, Kurt: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1. auflage Auflage, 2006. ISBN 3-540-21886-6.
- [11] Reinschke, Kurt und Oliver Fritsche: *Geometrischer Zugang zur Polzuweisbarkeit mittels konstanter Ausgangsrückführungen*. *Automatisierungstechnik*, 52(9):432–439, 2004.
- [12] Rosenbrock, H. H.: *State-space and Multivariable Theory*. Nelson, London, 1970.
- [13] Wolovich, W. A.: *Linear Multivariable Systems*, Band 11 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

Manch Überraschendes bei der Analyse von Automatisierungssystemen

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE

Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control

Gusshausstrasse 27-29/376, 1040 Vienna / Austria

email: `weinmann@acin.tuwien.ac.at`

August 11, 2013

Der kurze Beitrag widmet sich so manchem überraschenden, teils angenehmen und teils unangenehmen Ergebnis bei der analytischen Behandlung von Automatisierungssystemen. Die Präsentation ist überwiegend an einfachen, gut überschaubaren Beispielen orientiert. Diese sind zumeist auf ganz einfache Struktur abgemagert, wo fast nur mehr das leicht verwunderliche Resultat oder der besondere Effekt übrigbleibt. An komplexeren Aufgabenstellungen kann es sein, dass der Effekt genauso auftritt oder aber stark verdeckt ist, sodass man die Ursache nicht so leicht entdecken kann; durch höhere Ordnung und überlagerte Verzögerungen mag er auch gar nicht mehr zum Vorschein kommen.

1 Ortskurven

Frequenzgangs-Ortskurven mit Spitze oder Schlinge $F_o(s) = \frac{(1-s)^3}{2+s^3} \Big|_{s=j\omega \rightarrow j1.4}$? (1)

Welche serielle Totzeit lässt sich vermuten, und zwar aufgrund des Phasenrands von $F_o(s) = \frac{1+ks}{3+s}$? (*Bhattacharyya, S.P. et al., 2009*).

Wurzelortskurve mit Unendlichkeitsstelle bei endlichem V , etwa bei $V = 1$, für

$$F_o(s) = V \frac{1-s}{s+2} \quad \text{oder} \quad F_o(s) = V \frac{1-s-s^2-s^3}{1+s+s^2+s^3}, \quad (2)$$

letztere samt Viertelkreisbögen im Unendlichen.

2 Anfangsbedingungen

$$\sum_0^n \alpha_i x_a^{(i)}(t) = \sum_0^n \beta_i x_e^{(i)}(t) \quad G(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_a(t) \triangleq (x_a(t) \quad \dot{x}_a(t) \quad \ddot{x}_a(t) \dots x_a^{(n-1)}(t))^T \quad \mathbf{x}_e(t) \triangleq (x_e(t) \quad \dot{x}_e(t) \quad \ddot{x}_e(t) \dots x_e^{(n-1)}(t))^T \quad (4)$$

$$\text{z.B. } n = 3 \quad \mathbf{A}_D \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_D \triangleq \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Natürliche Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{x}_a(0^+) = \underbrace{\mathbf{A}_D^{-1} \mathbf{B}_D}_{\mathbf{L}_{ae} \triangleq \mathbf{A}_D^{-1} \mathbf{B}_D} \cdot \mathbf{x}_e(0^+) + \mathbf{x}_a(0^-) = \mathbf{L}_{ae} \cdot \mathbf{x}_e(0^+) + \mathbf{x}_a(0^-) \quad (6)$$

(Föllinger, 0., 1961; Wunsch, G., 1971; Weinmann, A., 1988). Sie verwenden in Matrixschreibung die Anfangswert-Übergabematrix \mathbf{L}_{ae} .

$$\text{Im Zustandsraum} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad u(t) = x_e(t) \quad (7)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t) \quad y(t) = x_a(t) \quad (8)$$

$$\text{ergibt sich } \mathbf{L}_{ae} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{b} & d & 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & d \end{pmatrix} \quad (9)$$

und für die Anfangswerte der Zustandsvariablen, die der Anregung $\mathbf{x}_e(0^+)$ und den normalen Anfangswerten äquivalent sind,

$$\mathbf{x}(0^+) = - \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{L}_{ae} \mathbf{x}_e(0^+) = \mathcal{O}^{-1} \mathbf{L}_{ae} \mathbf{x}_e(0^+) . \quad (10)$$

3 Träger Restanteil der Sprungantwort

Der Standardregelkreis mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$F_o(s) = K(s)G(s) = \frac{20(s + 0.15)}{(s + 0.03)(s + 2)} \quad (11)$$

zeigt unerwartetes Verhalten der Sprungantwort (Chen, K., 1957).

4 Realisierbare Tilgung einer Verkopplung

$$\text{Strecke } \mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Rückführung } \mathbf{K}(s) \quad \mathbf{T}(s) \triangleq \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{T}^{-1}(s) - \mathbf{G}^{-1}(s). \quad (13)$$

Die fallweise physikalische Realisierbarkeit würde man aufgrund der Inversen von \mathbf{T} , \mathbf{G} nicht vermuten.

5 Determinanten-Dynamik

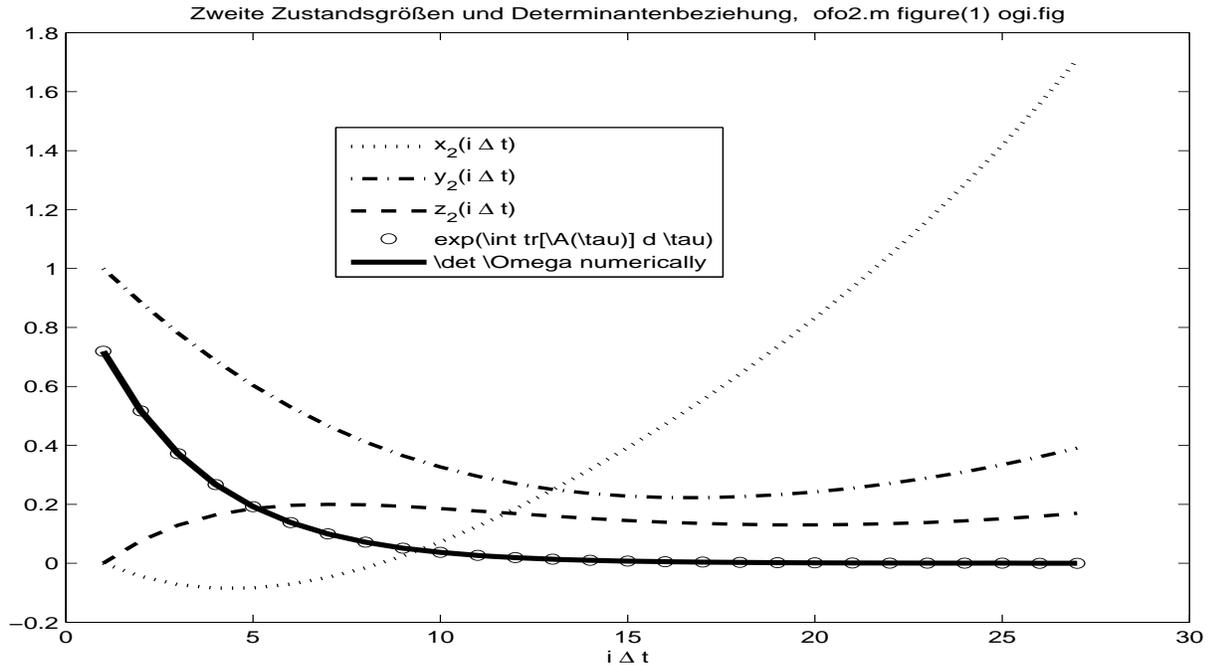


Figure 1: Numerisch ermittelte Zustandsgrößen, ausgewählt nur die jeweils zweiten.

Übereinstimmung der Ergebnisse

Für die zeitabhängige Systemmatrix $\mathbf{A}(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \quad \left[\text{wobei } \mathbf{x}(t) \neq e^{\mathbf{A}(t)t} \mathbf{x}_0 \right]. \quad (14)$$

Gl. (14) (bei z.B. $n = 3$) auf weitere Variable $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ etc. mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen angewandt (*Bellman, R., 1970*)

$$\mathbf{\Omega}(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det \mathbf{\Omega}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \det \mathbf{\Omega}(t) = \dots = \{\text{tr}[\mathbf{A}(t)]\} \cdot \det \mathbf{\Omega}(t). \quad (15)$$

In den $n^2 \cdot (n!)$ Elementen heben sich $[n(n-1)]^2 \cdot [(n-2)!]$ auf. Die verbleibenden enthalten nur die Spur $\text{tr}[\mathbf{A}(t)]$ und $\det \mathbf{\Omega}(t)$. Wegen $\frac{d}{dt} e^{\int_0^t \text{tr}[\mathbf{A}(\tau)] d\tau} = e^{\int_0^t \text{tr}[\mathbf{A}(\tau)] d\tau} \cdot \text{tr}[\mathbf{A}(t)]$ lautet die Lösung

$$\det \mathbf{\Omega}(t) = e^{\int_0^t \text{tr}[\mathbf{A}(\tau)] d\tau} \cdot \det \mathbf{\Omega}(0) . \quad (16)$$

Dann ein LTI-Ergebnis, wenn $\mathbf{A}(t)$ nur außerhalb der Hauptdiagonale Zeitabhängigkeiten aufweist.

6 Matrizenoperationen in Dreifachvariante

Statt

$$T = A + B K ; \quad \frac{\partial T}{\partial K} = B ; \quad \Delta T = B \Delta K \quad \text{verlangt} \quad \mathbf{T}^{[n \times n]} = \mathbf{A} + \mathbf{B}^{[n \times m]} \mathbf{K}^{[m \times n]} \quad (17)$$

die Erweiterungen laut Fig. 2:

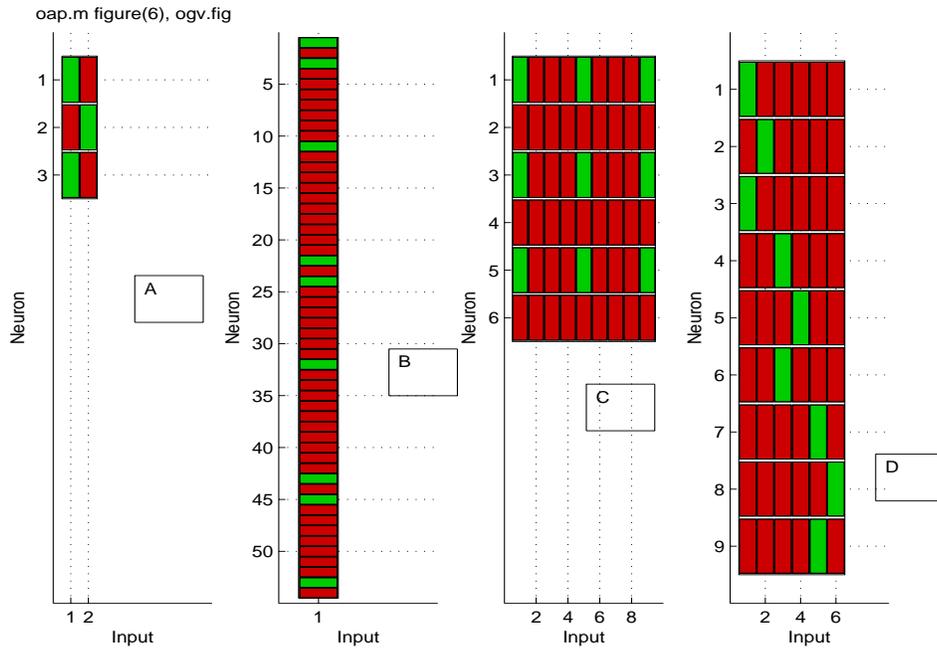


Figure 2: Graphische Interpretation der Details der Koeffizienten-Matrix für

$$n = 3, m = 2, \text{ Subfigure A: } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Subfigure B: } \frac{\partial \text{col} \mathbf{T}}{\partial \text{col} \mathbf{K}} = \boxed{(\mathbf{I}_{18} \otimes \mathbf{B}) \bar{\mathbf{U}}_{6,1}} ;$$

$$\text{Subfigure C: } \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{K}} = \boxed{(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{B}) \bar{\mathbf{U}}_{2,3}} ; \quad \text{Subfigure D: } \Delta \text{col} \mathbf{T} = \boxed{(\mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{B})} \Delta \text{col} \mathbf{K}.$$

Verwendet wurde die Kronecker-Matrix \mathbf{E}_{ij} und

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{(k \times l)}}{\partial \mathbf{M}} \triangleq \bar{\mathbf{U}}_{k,l} = \bar{\mathbf{U}}_{k,l}^{(k^2 \times l^2)} \triangleq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} ; \quad (18)$$

weilers ein graphisches Hilfsmittel aus der Neural Network Toolbox.

7 Auffallende Matrix-Korrespondenzen

Neben der allgemeinen und meist sehr aufwändigen Analysis mit matrixwertigen Variablen bzw. Funktionen

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{k \times l}, \quad \mathbf{M} \in \mathcal{R}^{r \times s}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{A}[\mathbf{B}(\mathbf{M})] \in \mathcal{R}^{nr \times ms} .$$

reichen in der Regelungstechnik oft solche, die wesentlich übersichtlicher sind, wie etwa

$$\frac{\partial a[b(\mathbf{M})]}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial a}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial \mathbf{M}} . \quad (19)$$

Manche Formeln sehen so aus, als hätte man fälschlicherweise solche für Skalare übernommen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(f) \quad \frac{\partial \text{tr}[\mathbf{A}^{-1}]}{\partial f} = -\text{tr}[\mathbf{A}^{-2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial f}] ; \quad \frac{\partial \text{tr}[\mathbf{A}^{-1}]}{\partial \mathbf{A}} = -(\mathbf{A}^{-2})^T \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{tr} [(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}] = -\mathbf{B}^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-2T} . \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \text{tr} [e^{\mathbf{M}}] = e^{(\mathbf{M}^T)} = (e^{\mathbf{M}})^T . \quad (22)$$

Unter Verwendung der speziellen Matrix $\mathbf{H} \triangleq s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{BK}\mathbf{C} \equiv [\Phi(s)]^{-1}$ (23)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{BK}\mathbf{C}) = -\mathbf{B}^T [\text{adj}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{BK}\mathbf{C})]^T \mathbf{C}^T \quad (24)$$

$$\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{H}^{-1}]}{\partial s} = -\text{tr}[\mathbf{H}^{-2}] \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \text{tr}[\Phi(s)]}{\partial s} = -\text{tr}[\Phi(s)^2] \quad (25)$$

$$\frac{\partial \text{tr}[\Phi(s)^i]}{\partial s} = -i \text{tr}[\Phi(s)^{i+1}] \quad \text{Potenzieren statt Differenzieren} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \text{tr}[\Phi(s)] = (-1)^n n! \text{tr}[\Phi(s)^{n+1}] \quad \text{für mehrfaches Differenzieren} . \quad (27)$$

8 Innere Matrix-Abhängigkeiten

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \det \mathbf{M} = \mathbf{adj}^T(\mathbf{M}) \quad \text{ungültig bei } \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad (\text{Geering, H.P., 1976}), \quad (28)$$

$$\text{jedoch } \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \det \mathbf{M} = (2\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{diag} \{ \mathbf{M}^{-1} \}) \det \mathbf{M} . \quad (29)$$

Literaturverzeichnis

- Bellman, R., 1970,* Introduction to Matrix Analysis, 2nd edition, New York, McGraw-Hill, p. 271
- Bhattacharyya, S.P., Datta, A., and Keel, L.H., 2009,* Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization. Boca Raton, London, New York, CRC Press (Taylor & Francis Group)
- Chen, K., 1957,* A quick method for estimating closed-loop poles of control systems, *Trans. AIEE* **76, Part 2**, S. 80-87
- Föllinger, O., 1961,* Über die Anfangsbedingungen bei linearen Übertragungsgliedern, *Regelungstechnik* **9**, S. 149-153
- Weinmann, A., 1988,* Die Anfangswertübergabe in Matrizendarstellung, *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* **105**, S. 313-314
- Weinmann, A., 1999,* Computerunterstützung für Regelungsaufgaben, mit Beispielen und Lösungen. Wien New York: Springer-Verlag
- Weinmann, A., 2012,* Performance gradients in automatic control analysis. A catalogue of correspondences. Second Edition. *Int. J. Automation Austria* **20**, pp. 1-100
See <http://www.acin.tuwien.ac.at/de/Publikationen/Zeitschriften/IJAA>
- Wunsch, G., 1971,* Systemtheorie der Informationstechnik. Leipzig, Geest und Portig

Realisierbarkeit von verkoppelten Deskriptormodellen

Carsten Balewski, Felix Gausch
Universität Paderborn,
Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik
Pohlweg 47-49, 33098 Paderborn
carsten.balewski@uni-paderborn.de*, gausch@uni-paderborn.de

Zusammenfassung

Dieser Beitrag befasst sich mit der Verkopplung von regulären und realisierbaren semi-expliziten Deskriptormodellen, welche zu einem Gesamtsystem in Deskriptorform zusammengefügt werden. Durch die Formulierung eines geeigneten Kriteriums soll das Gesamtsystem auf interne Realisierbarkeit überprüft werden können. Dazu werden Erkenntnisse aus der statischen Rückkopplung von Mehrgrößensystemen aufgegriffen und auf semi-explizite Deskriptormodelle ausgeweitet.

1 Einleitung

Heutzutage ist es in vielen Bereichen üblich, größere Aufgaben in viele kleine Teilaufgaben zu zerlegen und das Ergebnis über definierte Schnittstellen zusammenzufügen. In der Systemtheorie ist diese Methode sehr verbreitet, so wie auch in der Verfahrenstechnik, Biologie, Regelungstechnik usw. Auch viele Modellbildungen finden auf diesem Wege statt. Die so entstandenen Teilsysteme werden dann über Verkopplungen zu Gesamtsystemen zusammengefügt. Dadurch können Gesamtsysteme entstehen, die die Forderung nach der internen Realisierbarkeit nicht erfüllen.

In dieser Arbeit soll es darum gehen, reguläre, realisierbare und nichtlineare semi-explizite Deskriptormodelle zu verkoppeln und das sich ergebende Deskriptormodell des Gesamtsystems auf interne Realisierbarkeit zu überprüfen bzw. ein dafür geeignetes Kriterium zu formulieren.

Zu Beginn dieser Arbeit wird in Kapitel 2 ein Weg aufgezeigt, wie realisierbare nichtlineare Mehrgrößensysteme über eine nichtlineare statische Rückkopplung verbunden werden und wie das sich ergebende Gesamtsystem, welches die Struktur eines semi-expliziten Deskriptormodells aufweist, auf interne Realisierbarkeit überprüft werden kann. Die aus diesen Betrachtungen gewonnenen Erkenntnisse werden anschließend in Kapitel 3 über die

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

Betrachtung der Regularität und Realisierbarkeit von semi-expliziten Deskriptormodellen auf diese Systemklasse übertragen. Das daraufhin hergeleitete hinreichende Kriterium wird anschließend an einer Verkopplung von zwei linearen Systemen in Kapitel 5 angewendet und das Ergebnis mit den bekannten Kriterien für das Eingangs-Ausgangsverhalten von linearen Systemen verglichen.

2 Verkopplung dynamischer Systeme

Die Eigenschaft der internen Realisierbarkeit von verkoppelten Systemen wurde schon in [2] für den Fall der statischen Verkopplung von nichtlinearen Mehrgrößensystemen behandelt und dort beispielhaft auf Systeme in Deskriptorform ausgeweitet. Mit Hilfe der Eigenschaften von semi-expliziten Deskriptormodellen (Kapitel 3) werden diese Betrachtungen in Kapitel 4 auf die statische Verkopplung von semi-expliziten Deskriptormodellen verallgemeinert.

Zunächst aber sollen die elementaren Ergebnisse der genannten Arbeit [2] zum besseren Verständnis der folgenden Kapitel wiedergegeben werden.

Ausgegangen wird dort von nichtlinearen und zeitinvarianten dynamischen Mehrgrößensystemen der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)\end{aligned}\quad i = 1, \dots, s$$

mit n_i Zustandsgrößen \mathbf{x}_i , m_i Eingangsgrößen \mathbf{u}_i und q_i Ausgangsgrößen \mathbf{y}_i , deren statische Verkopplung über die Bedingung

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s) + \mathbf{v}_i,$$

beschrieben wird. Der Vektor \mathbf{v}_i repräsentiert dabei die Testgrößen, welche zur späteren Überprüfung der internen Realisierbarkeit den Eingangsgrößen additiv überlagert werden. Um eine kompaktere Schreibweise zu erreichen, werden die Größen wie folgt zusammengefasst:

$$\mathbf{x} := [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_s^T]^T \quad \dim \mathbf{x} = n = \sum_{i=1}^s n_i, \quad (1)$$

ebenso gilt die Schreibweise der Gleichung (1) auch für die Eingangsgröße \mathbf{u} , die Ausgangsgröße \mathbf{y} , die Testgröße \mathbf{v} und für die hinreichend oft differenzierbaren vektorwertigen Funktionen \mathbf{c} , \mathbf{f} und \mathbf{w} mit den entsprechenden Dimensionen. Daraus ergibt sich nun das verkoppelte Gesamtmodell zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \mathbf{v} .\end{aligned}\quad (2)$$

Mit der Zusammenführung der beiden algebraischen Beziehungen (2), also $\mathbf{u} = \mathbf{w}(\mathbf{y}) + \mathbf{v} = \mathbf{w}(\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u})) + \mathbf{v}$, kann das verkoppelte Gesamtsystem (2) in die Form eines semi-

expliziten Deskriptormodells (3)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\end{aligned}\quad (3)$$

überführt werden. In diesem Zusammenhang wird dann von den differentiellen Variablen \mathbf{x} , den algebraischen Variablen \mathbf{u} und den Deskriptorvariablen

$$\mathbf{z} := [\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T]^T \quad (4)$$

gesprochen.

Durch die vorher durchgeführten Betrachtungen ist die Frage der internen Realisierbarkeit des verkoppelten Gesamtsystems auf die Frage heruntergebrochen, welche Bedingungen ein differential-algebraisches System in der Form eines semi-explizites Deskriptormodells (3) erfüllen muss, um intern realisierbar zu sein, wobei die interne Realisierbarkeit nach [2] wie folgt definiert sein soll:

Definition 1. *Das Deskriptormodell (3) heißt intern realisierbar, wenn die Deskriptorvariablen $\mathbf{z}(t)$ nach (4) nur von den Eingangsgrößen $\mathbf{v}(t)$ und/oder einem Zeitintegral über sie, nicht jedoch von deren zeitlichen Ableitungen abhängen.*

Zur Beurteilung der so definierten Eigenschaft der internen Realisierbarkeit wird auf das zu (3) gehörende explizite Deskriptormodell (5)

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \dots, \overset{(k)}{\mathbf{v}}) \quad (5)$$

zurückgegriffen.

Nach [6] existiert unter gewissen Stetigkeitsbedingungen für das Differentialgleichungssystem (5) eine eindeutige Lösung, welche auch für das zugrunde liegende Deskriptormodell (3) gilt, falls die Anfangswerte konsistent sind [1].

Aus diesen Gründen können die in der Definition 1 geforderten Eigenschaften der Lösung $\mathbf{z}(t)$ des semi-expliziten Modells (3) an die Lösung $\mathbf{z}(t)$ des expliziten Modells (5) geknüpft werden. Deswegen sind explizite Deskriptormodelle die Grundlage für die weiteren Untersuchungen der internen Realisierbarkeit.

Durch einen geeigneten rekursiven Algorithmus, wie z.B. den Shuffle-Algorithmus¹, wird das System (3) nun auf die explizite Form (5) transformiert, die die detaillierte Struktur (6) besitzt¹:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ - \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{u}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \overset{(k-1)}{\mathbf{v}}} \overset{(k)}{\mathbf{v}} \right) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Darin ist k die höchste auftretende zeitliche Ableitung der einzelnen algebraischen Gleichungen in der vektorwertigen algebraischen Gleichung g_i in (3), also in $\mathbf{0} = \mathbf{g} = \{g_i\}$

¹siehe z.B. [4] und [5]

$(i = 1, \dots, m)^2$. Diese zeitlichen Ableitungen werden mit dem Ziel gebildet, ein modifiziertes Gleichungssystem $\mathbf{0} = \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, \overset{(k-1)}{\mathbf{v}})$ mit einer regulären Jacobi-Matrix bezüglich der algebraischen Variablen \mathbf{u} zu erhalten. Ein solches Gleichungssystem existiert für reguläre Deskriptormodelle [3].

Details zu den Berechnungen bezüglich der Realisierbarkeit des mit dem Modell (2) beschriebenen verkoppelten Gesamtsystems finden sich in [2]; es wird nur das Ergebnis angegeben. Es ergibt sich, dass aus der Regularität der Matrix (7)

$$\left[\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{u}} \right] \text{ regulär} \quad (7)$$

die interne Realisierbarkeit des verkoppelten Gesamtsystems folgt. Die Matrix \mathbf{E} ist hierbei die $[m \times m]$ -dimensionale Einheitsmatrix.

Auf analogem Wege wird in Kapitel 4 ein hinreichendes Kriterium für die interne Realisierbarkeit von verkoppelten semi-expliziten Deskriptormodellen hergeleitet.

3 Regularität und Realisierbarkeit von semi-expliziten Deskriptormodellen

Im vorherigen Kapitel 2 ist die Prüfung der internen Realisierbarkeit von zusammengesetzten Mehrgrößensystemen in Form von Zustandsmodellen anhand des Gesamtmodells in Deskriptorform durchgeführt worden. Im Kapitel 4 sollen semi-explizite Deskriptormodelle zusammengesetzt werden, die selbstverständlich dann wieder ein Deskriptormodell als Gesamtsystem bilden. Deswegen werden im Folgenden einige wichtige Eigenschaften von semi-expliziten Deskriptormodellen aufgegriffen.

Gegeben ist das nichtlineare semi-explizite Deskriptormodell (8)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (8)$$

mit den differentiellen Variablen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, den algebraischen Variablen $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p]^T$, den Eingangsgrößen $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ und den Ausgangsgrößen $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_q]^T$. Die hinreichend oft differenzierbare Vektorfunktion $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_i, \dots, g_p]^T$ besitzt die Dimension p .

Nun ist es wieder das Ziel, das semi-explizite Deskriptormodell (8) weiter in ein explizites Deskriptormodell (9)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \dots, \overset{(d)}{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (9)$$

²Die Bedeutung der Variablen k bezüglich Deskriptorsysteme wird in Kapitel 3 erläutert.

mit der Deskriptorvariablen $\boldsymbol{\xi} := [\mathbf{x}^T, \mathbf{z}^T]^T$ zu transformieren.

Um dieses Ziel zu erreichen, werden die einzelnen algebraischen Gleichungen g_i solange abgeleitet, bis die algebraische Variable \mathbf{z} in allen Gleichungen $g_i = 0$ ($i = 1, \dots, p$) aufscheint. Es ergibt sich nun die neue algebraische Gleichung (10)

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} g_{1,k_1-1} \\ \vdots \\ g_{p,k_p-1} \end{bmatrix} =: \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \overset{(d-1)}{\mathbf{u}}), \quad (10)$$

wobei g_{i,k_i-1} bedeutet, dass in der i -ten algebraischen Gleichung nach der $(k_i - 1)$ -ten Ableitung die algebraische Variable \mathbf{z} vorkommt.

Um auf das Differentialgleichungssystem in (9) zu kommen, wird die Gleichung (10) noch einmal nach der Zeit abgeleitet:

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{g}}_{k-1} = \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \overset{(d-1)}{\mathbf{u}}} \overset{(d)}{\mathbf{u}}. \quad (11)$$

Für die Variable d gilt dann:

$$d \leq k = \max_{i=1, \dots, p} \{k_i\} < \infty$$

Die höchste vorkommende Ableitung, also die d -te Ableitung der Eingangsgröße \mathbf{u} ist kleiner gleich dem differentiellen Index k des Deskriptormodells (8).

Unter der Annahme, dass das Gleichungssystem (10) eine reguläre Jacobi-Matrix bezüglich \mathbf{z} besitzt, also

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{z}} \text{ regulär}$$

ist, kann Gleichung (11) nach

$$\dot{\mathbf{z}} = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \overset{(d-1)}{\mathbf{u}}} \overset{(d)}{\mathbf{u}} \right) \quad (12)$$

umgestellt werden. Damit existiert das explizite Deskriptormodell (9) und das semiexplizite Deskriptormodell (8) besitzt gemäß Definition 2 die Eigenschaft der Regularität:

Definition 2. Ein semiexplizites Deskriptormodell (8) mit dem expliziten Deskriptormodell (9) wird regulär genannt.

Im Zusammenhang mit der internen Realisierbarkeit ergibt sich nach Definition 1, dass die Lösung der Deskriptorvariablen $\boldsymbol{\xi}$ nur von der Eingangsgröße \mathbf{u} und/oder deren Zeitintegral abhängig sein darf. Dieses wird nach Gleichung (12) erreicht, wenn für die Größe

$$d \leq 1$$

gilt. Für ein realisierbares Deskriptormodell (8) bzw. (9) ergibt sich also für die Ableitung der Deskriptorvariablen $\boldsymbol{\xi}$ folgende Beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) \\ - \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}_{k-1}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \right) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Abschließend lässt sich aus obigen Betrachtungen den für das folgende Kapitel wichtigen Satz 1 formulieren:

Satz 1. *Es existiert zu einem semi-expliziten Deskriptormodell (8) **genau dann** ein explizites Deskriptormodell (9), wenn die Jacobi-Matrix $\frac{\partial \mathbf{g}^{k-1}}{\partial \mathbf{z}}$ regulär ist.*

4 Realisierbarkeit verkoppelter Deskriptormodelle

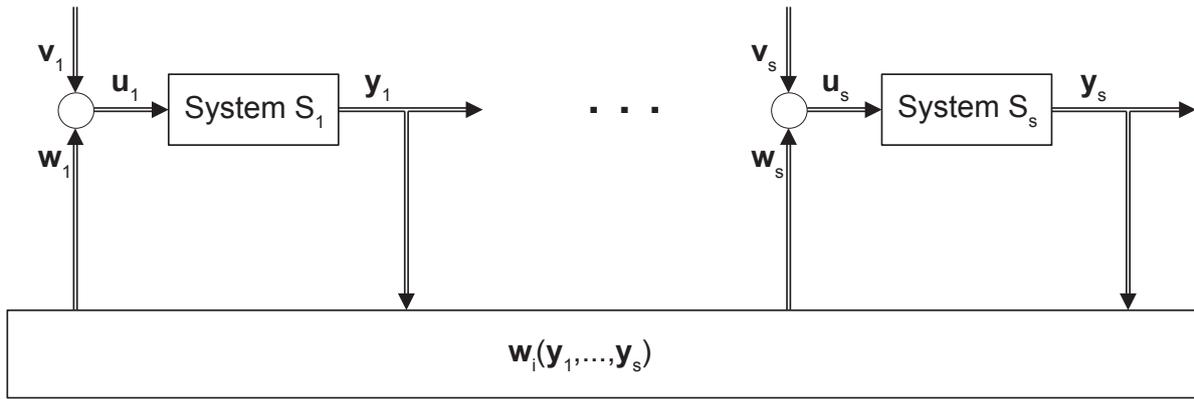


Abbildung 1: Struktur der verkoppelten Deskriptormodelle

In diesem Kapitel wird anhand der vorherigen Betrachtungen nun ein Kriterium zur Überprüfung der internen Realisierbarkeit von verkoppelten Deskriptormodellen hergeleitet.

Ausgegangen wird von folgenden regulären und realisierbaren semi-expliziten Deskriptormodellen S_i , im weiteren Verlauf auch Teilsysteme genannt,

$$\begin{aligned}
 S_i : \quad & \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i) \\
 & \mathbf{0} = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i) \\
 & \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i)
 \end{aligned} \quad i = 1, \dots, s \quad (14)$$

mit den differentiellen Variablen \mathbf{x}_i , ($\dim \mathbf{x}_i = n_i$), den algebraischen Variablen \mathbf{z}_i , ($\dim \mathbf{z}_i = p_i$), den Eingangsgrößen \mathbf{u}_i , ($\dim \mathbf{u}_i = m_i$) und den Ausgangsgrößen \mathbf{y}_i , ($\dim \mathbf{y}_i = q_i$). Da hier von regulären realisierbaren Teilsystemen ausgegangen wird, gilt nach Satz 1, dass die Jacobi-Matrix der algebraischen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \text{ regulär} \quad (15)$$

ist und dass nach Gleichung (13) in der Ableitung der algebraischen Variablen \mathbf{z}_i maximal die erste Ableitung der Eingangsgröße \mathbf{u}_i aufscheint.

Nun werden die Teilsysteme über die Eingangsgrößen \mathbf{u}_i und die Ausgangsgrößen \mathbf{y}_1 bis

\mathbf{y}_s mit den externen Eingangsgrößen \mathbf{v}_i über die Koppelgleichung (16) gemäß Abb. 1 untereinander verbunden:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s) + \mathbf{v}_i \quad (16)$$

Durch die Verkopplung ergeben sich neue algebraische Gleichungen $\hat{\mathbf{g}}_i$ (17)

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s, \mathbf{u}_s) + \mathbf{v}_i) =: \hat{\mathbf{g}}_i \quad (17)$$

für die Teilsysteme des verkoppelten Deskriptormodells. Entsprechend den Betrachtungen in Kapitel 3 muss die Jacobi-Matrix der algebraischen Gleichungen bezüglich der algebraischen Variablen \mathbf{z}_i weiterhin regulär sein. Diese lässt sich unter Berücksichtigung der Koppelgleichung (16) berechnen, womit die Regularitätsbedingung ausführlich lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{z}_i} &= \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}_i} + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}_i} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \\ &= \dots \\ &= \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}_i} + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}_i} \left[\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{u}_i} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \quad \text{regulär} \end{aligned} \quad (18)$$

Nun wird der Blick auf die Prüfung der Realisierbarkeit für das verkoppelte Gesamtsystem in Deskriptorform gerichtet.

Durch die Bedingung (18) ist garantiert, dass die abgeleiteten algebraischen Variablen $\dot{\mathbf{z}}_i$ in den Teilsystemen explizit vorliegen und in ihren rechten Seiten die externen Eingangsgrößen \mathbf{v}_i und höchstens ihre ersten Ableitungen $\dot{\mathbf{v}}_i$ auftreten. Ein Blick auf die Beziehungen (14) und (16) zeigt, dass in den rechten Seiten von $\dot{\mathbf{x}}_i$ nur die Eingangsgrößen \mathbf{v}_i vorkommen. Damit ist in Analogie zu Definition 1 die Realisierbarkeit der Teilsysteme auch nach der Verkopplung sichergestellt.

Mit den Deskriptorvariablen $\boldsymbol{\xi}_i := [\mathbf{x}_i^T, \mathbf{z}_i^T]^T$ können nun die differential-algebraischen Gleichungen der Teilmodelle (14) in Form von expliziten Differentialgleichungen (19)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = \mathbf{F}_i(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_s, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \dot{\mathbf{u}}_1, \dots, \dot{\mathbf{u}}_s, \dot{\mathbf{v}}_i) \quad i = 1, \dots, s \quad (19)$$

umgeschrieben werden. Diesen werden nun zur Beschreibung der Verkopplung die algebraischen Gleichungen (16)

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}_i(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s) + \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i \quad (20)$$

hinzugefügt. Für die Untersuchung der Realisierbarkeit des Gesamtsystems reicht es offensichtlich nach Kapitel 3 aus, sich nur der algebraischen Variablen \mathbf{u} des verkoppelten Systems zu widmen, so dass auch hier gelten muss, dass maximal die ersten Ableitungen der externen Eingangsgrößen \mathbf{v}_i in der abgeleiteten algebraischen Variablen $\dot{\mathbf{u}}_i$ des verkoppelten Systems vorkommen dürfen.

Um dieses zu überprüfen, werden nun die Koppelgleichungen (16) nach der Zeit abgeleitet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_i &= \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_1} \dot{\mathbf{y}}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_s} \dot{\mathbf{y}}_s + \dot{\mathbf{v}}_i \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_1} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \dot{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \dot{\mathbf{z}}_1 + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \dot{\mathbf{u}}_1 \right]}_{=\dot{\mathbf{y}}_1} + \dots + \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_s} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{x}_s} \dot{\mathbf{x}}_s + \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{z}_s} \dot{\mathbf{z}}_s + \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{u}_s} \dot{\mathbf{u}}_s \right]}_{=\dot{\mathbf{y}}_s} + \dot{\mathbf{v}}_i\end{aligned}$$

Nach (14) gilt $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i$ und mit dem Ausdruck für $\dot{\mathbf{z}}$ aus (13) ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_i &= \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_1} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \dot{\mathbf{u}}_1 \right)}_{=-\dot{\mathbf{z}}_1} + \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \dot{\mathbf{u}}_1 \right] + \dots + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_s} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{x}_s} \mathbf{f}_s - \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{z}_s} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \mathbf{x}_s} \right]^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \mathbf{x}_s} \mathbf{f}_s + \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \mathbf{u}_s} \dot{\mathbf{u}}_s \right)}_{=-\dot{\mathbf{z}}_s} + \frac{\partial \mathbf{c}_s}{\partial \mathbf{u}_s} \dot{\mathbf{u}}_s \right] + \dot{\mathbf{v}}_i.\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird anschließend matrixwertig in (21)

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_s \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{v}}_s \end{bmatrix} \quad (21)$$

zusammengefasst. Die Elemente der Matrix $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$ mit $i, j = 1, \dots, s$ ergeben sich zu

$$m_{ij} = \begin{cases} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}_i} - \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{u}_i} \right], & i = j \\ -\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_j} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{z}_j} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{z}_j} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{u}_j} - \frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{u}_j} \right], & i \neq j \end{cases} \quad (22)$$

und die Elemente der Matrix $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}$ mit $i, j = 1, \dots, s$ zu

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right], & i = j \\ \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{y}_j} \left[\frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{x}_j} - \frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{z}_j} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{z}_j} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{x}_j} \right], & i \neq j. \end{cases} \quad (23)$$

An Gleichung (21) ist direkt zu sehen, dass mit regulärer Matrix \mathbf{M} das verkoppelte Deskriptormodell (19) und (20) auch explizit in $\dot{\mathbf{u}}_i$ dargestellt ist, wobei höchstens die ersten Ableitungen $\dot{\mathbf{v}}_1, \dots, \dot{\mathbf{v}}_s$ auftreten. Der Definition 1 ist damit entsprochen und als Ergebnis kann nun das folgende hinreichende Kriterium angegeben werden:

Satz 2. Das durch Verkopplung (16) von regulären und realisierbaren semi-expliziten Deskriptormodellen (14) entstandene Gesamtsystem in Deskriptorform ist **dann** intern realisierbar, wenn die Jacobi-Matrizen der durch Verkopplung entstandenen algebraischen Gleichungen $\hat{\mathbf{g}}_i$ (17) bezüglich der Deskriptorvariablen \mathbf{z}_i , also die Matrizen $\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{z}_i}$ (18) und die Matrix \mathbf{M} der Gleichung (21) regulär sind. Es gilt also

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \quad i = 1, \dots, s \quad \text{regulär und}$$

$$\mathbf{M} = \{m_{ij}\} \quad i, j = 1, \dots, s \quad \text{regulär.}$$

In [4] ist ein Sonderfall der Verkopplung eines dynamischen Deskriptormodells behandelt worden, nämlich der der statischen Rückführung. Dort ist bewiesen worden, dass die Invarianz des sogenannten Summenindexes der algebraischen Gleichungen bei Verkopplung notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit des Gesamtsystems ist.

Eine Übertragung dieses Gedankens soll im Verlauf weiterer Arbeiten auch auf das vorliegende Problem der statischen Verkopplung von mehreren dynamischen Deskriptormodellen erweitert werden.

5 Abschließendes Beispiel

Abschließend wird das in Kapitel 4 formulierte Kriterium auf lineare Systeme angewendet, um seine Aussagekraft anhand der für die Eingangs-Ausgangsbeschreibung von linearen Systemen bekannten Kriterien zu verdeutlichen.

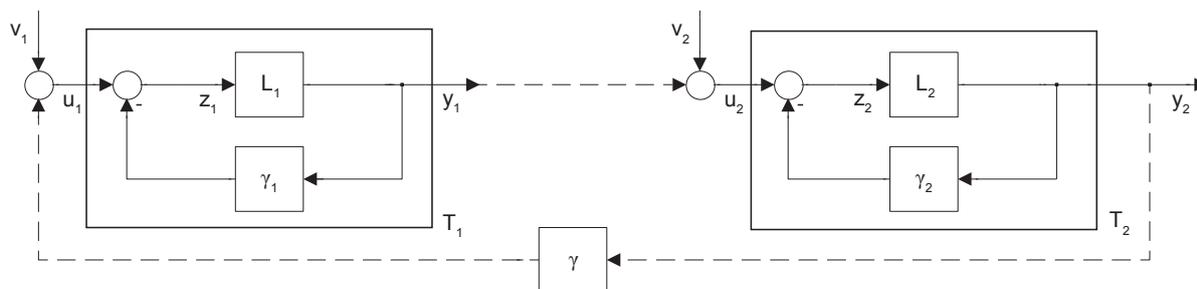


Abbildung 2: Beispiel von verkoppelten Deskriptormodellen; die strichlierten Linien stellen die Verkopplung der Teilsysteme T_1 und T_2 dar.

5.1 Lösungsweg über verkoppelte Deskriptormodelle

Den sprungfähigen Übertragungssystemen L_i ($i = 1, 2$) liegen die Zustandsdifferentialgleichungen $\dot{x}_i = a_i x_i + b_i z_i$ und die Ausgangsgleichungen $y_i = \tilde{c}_i x_i + d_i z_i$ ($d_i \neq 0$) zugrunde.

Ihre Verkopplung mit der statischen Rückführung nach Abb. 2 wird mit den algebraischen

Gleichungen $0 = g_i = -z_i + u_i - \gamma_i y_i$ beschrieben. Die Deskriptormodelle der einzelnen Übertragungssysteme T_i lautet somit (vgl. (14) mit $s = 2$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= a_i x_i + b_i z_i = f_i(x_i, z_i) \\ 0 &= -z_i + u_i - \gamma_i y_i = g_i(x_i, z_i, u_i) \\ y_i &= \tilde{c}_i x_i + d_i z_i = c_i(x_i, z_i) \end{aligned} \quad (24)$$

Die Verkopplung der beiden Teilsysteme T_i zum Gesamtsystem T mit den externen Eingangsgrößen v_1 und v_2 gemäß Abb. 2 (strichlinierte Darstellung) wird beschrieben durch (vgl. 16)

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma y_2 + v_1 = w_1(y_2) + v_1 \\ u_2 &= y_1 + v_1 = w_2(y_1) + v_2 . \end{aligned} \quad (25)$$

Nach Satz 2 sind die Matrizen $\frac{\partial \hat{g}_i}{\partial z_i}$, $i = 1, 2$ nach (18) und \mathbf{M} mit den Elementen m_{ij} , $i, j = 1, 2$ (vgl. (22)) auszuwerten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial z_i} &= \frac{\partial g_i}{\partial z_i} + \frac{\partial g_i}{\partial u_i} \left[1 - \frac{\partial w_i}{\partial y_i} \frac{\partial c_i}{\partial u_i} \right]^{-1} \frac{\partial w_i}{\partial y_i} \frac{\partial c_i}{\partial z_i} \\ &= (-1 - \gamma_i d_i) + 1 \cdot (1 - 0 \cdot 0)^{-1} 0 \cdot d_i = (-1 - \gamma_i d_i) \end{aligned} \quad (26)$$

$$m_{11} = 1 + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \left[\frac{\partial c_1}{\partial z_1} \left[\frac{\partial g_1}{\partial z_1} \right]^{-1} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} - \frac{\partial c_1}{\partial u_1} \right] = 1 + 0 \cdot [\dots] = 1$$

$$m_{22} = 1 + \frac{\partial w_2}{\partial y_2} \left[\frac{\partial c_2}{\partial z_2} \left[\frac{\partial g_2}{\partial z_2} \right]^{-1} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} - \frac{\partial c_2}{\partial u_2} \right] = 1 + 0 \cdot [\dots] = 1$$

$$m_{12} = -\frac{\partial w_1}{\partial y_2} \left[\frac{\partial c_2}{\partial z_2} \left[\frac{\partial g_2}{\partial z_2} \right]^{-1} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} - \frac{\partial c_2}{\partial u_2} \right] = -\gamma \left[\frac{d_2}{(-1 - \gamma_2 d_2)} - 0 \right] = \frac{\gamma d_2}{1 + \gamma_2 d_2}$$

$$m_{21} = -\frac{\partial w_2}{\partial y_1} \left[\frac{\partial c_1}{\partial z_1} \left[\frac{\partial g_1}{\partial z_1} \right]^{-1} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} - \frac{\partial c_1}{\partial u_1} \right] = -\left[\frac{d_1}{(-1 - \gamma_1 d_1)} - 0 \right] = \frac{d_1}{1 + \gamma_1 d_1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma d_2}{1 + \gamma_2 d_2} \\ \frac{d_1}{1 + \gamma_1 d_1} & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Gemäß Satz 2 ist für die Ausdrücke (26) und (27) zu fordern, dass

$$\begin{aligned} 1 + \gamma_i d_i &\neq 0 \\ 1 - \left(\frac{d_1}{1 + \gamma_1 d_1} \right) \left(\frac{\gamma d_2}{1 + \gamma_2 d_2} \right) &\neq 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\gamma_i &\neq -\frac{1}{d_i} \\ \gamma &\neq \frac{(1 + \gamma_1 d_1)(1 + \gamma_2 d_2)}{d_1 d_2}\end{aligned}\quad (28)$$

ist.

Nach Satz 2 ist das durch die Verkopplung entstandene Gesamtsystem in Deskriptorform also dann intern realisierbar, wenn die Bedingungen (28) erfüllt sind.

5.2 Lösungsweg über Übertragungsfunktionen

Für das Eingangs-Ausgangsverhalten von linearen Systemen mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{z(s)}{n(s)}$ gilt, dass sie **genau dann** realisierbar sind, wenn

$$\text{grad } z(s) \leq \text{grad } n(s) \quad (29)$$

gilt.

Die Übertragungsfunktionen der realisierbaren Teilsysteme S_i , $i = 1, 2$ lauten

$$L_i(s) = d_i + \frac{b_i \tilde{c}_i}{s - a_i} = \frac{d_i s - a_i d_i + b_i \tilde{c}_i}{s - a_i}.$$

Mit der statischen Rückkopplung $u_i = z_i + \gamma_i y_i$ ergeben sich die Übertragungsfunktionen der rückgekoppelten Teilsysteme zu

$$T_i(s) = \frac{L_i}{1 + \gamma_i L_i} = \dots = \frac{d_i s - a_i d_i + b_i \tilde{c}_i}{(1 + \gamma_i d_i) s - a_i d_i + b_i \tilde{c}_i - a_i} = \frac{\hat{b}_{i1} s + \hat{b}_{i0}}{\hat{a}_{i1} s + \hat{a}_{i0}}.$$

Damit die Übertragungsfunktionen $T_i(s)$ nach Bedingung (29) realisierbar sind, muss der Koeffizient

$$\hat{a}_{i1} = (1 + \gamma_i d_i) \neq 0$$

bzw.

$$\gamma_i \neq -\frac{1}{d_i} \quad (30)$$

sein.

Die Verkopplung der beiden Teilsysteme nach Abb. 2 (strichlinierte Darstellung) ergibt das Gesamtsystem $T(s)$ zu³

$$T(s) = \frac{T_1 T_2}{1 - \gamma T_1 T_2} = \frac{\tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}.$$

³Hier wird nur das Gesamtsystem bezüglich des Eingangs-Ausgangsverhaltens von v_1 nach y_2 betrachtet. Das Eingangs-Ausgangsverhalten v_1 nach y_1 bzw. v_2 nach y_2 besitzt ebenfalls Zählergrad gleich Nennergrad, wobei die Nenner beider Übertragungsfunktionen identisch sind, so dass auch hier der Realisierbarkeitsbedingung genüge getan wird.

Nach Bedingung (29) muss für die Übertragungsfunktion $T(s)$ gelten, dass der Koeffizient

$$\tilde{a}_2 = \gamma d_1 d_2 - \gamma_1 \gamma_2 d_1 d_2 - \gamma_1 d_1 - \gamma_2 d_2 - 1 \neq 0$$

ist. Dadurch ergibt sich die Bedingung für die Realisierbarkeit zu

$$\gamma \neq \frac{(1 + \gamma_1 d_1)(1 + \gamma_2 d_2)}{d_1 d_2}. \quad (31)$$

Die auf diesem Wege gefundenen Ergebnisse (30) und (31) stimmen mit den Ergebnissen (28) aus dem Abschnitt 5.1 überein.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel wurde gezeigt, wie verkoppelte Deskriptormodelle auf interne Realisierbarkeit untersucht werden können. Dazu wurde von regulären und realisierbaren semiexpliziten Deskriptormodellen ausgegangen. Diese wurden dann zu einem Gesamtsystem in Deskriptorform über Verkopplungen zusammengefügt. Durch die Überführung sowohl der regulären verkoppelten Teilmodelle als auch des Gesamtmodells in ihre expliziten Deskriptormodelle konnte die interne Realisierbarkeit anhand des Auftretens höchstens der ersten Ableitungen der externen Eingangsgrößen in den expliziten Differentialgleichungen beurteilt werden; als Ergebnis ist ein hinreichendes Kriterium formuliert worden, mit welchem die interne Realisierbarkeit von verkoppelten Deskriptormodellen überprüft werden kann. Die Gültigkeit dieses Kriteriums wurde dann an einer Verkopplung von linearen System veranschaulicht.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung der internen Realisierbarkeit sollen notwendige Kriterien formuliert werden. Weiterhin sollen die gefundenen Kriterien auf den sogenannten Summenindex von Deskriptormodellen, wie in [4] definiert, ausgeweitet werden.

Literatur

- [1] Deuffhard, P., A. Hohmann, F. Bornemann und M. Weiser: *Numerische Mathematik. Bd. 2. Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.* de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [2] Gausch, F.: *Die Realisierbarkeit verkoppelter dynamischer Systeme.* e & i Elektrotechnik und Informationstechnik, 122(9):314–318, 2005.
- [3] Gausch, F. und N. Vhrovac: *Feedback Linearization of Descriptor Systems - A Classification Approach.* IJAA - International Journal Automation Austria, 18(1):1–18, 2010.
- [4] Müller, P.: *Linearisierung und Entkopplung von Deskriptorsystemen.* Shaker-Verlag, 2000.

- [5] Vrhovac, N. und F. Gausch: *MAPLE-Prozeduren zur exakten Linearisierung von Deskriptorsystemen*. Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik, Universität Paderborn, 2004.
- [6] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer DE, 1986.

Ein systemorientierter Koppelansatz für die nicht-iterative Co-Simulation

Martin Benedikt
Virtual Vehicle Research Center
Area E - Electric/Electronic & Software
Inffeldgasse 21A/I, 8010 Graz
`martin.benedikt@v2c2.at`*

Anton Hofer
Technische Universität Graz
Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik
Kopernikusgasse 24/II, 8010 Graz
`anton.hofer@tugraz.at`

Zusammenfassung

Die notwendige Extrapolation von bestimmten Koppelgrößen ist eine charakteristische Eigenheit bei nicht-iterativer Co-Simulation. Diese Extrapolation entspricht einer Schätzung und ist direkt mit einem Schätzfehler assoziiert, was zu Ungenauigkeiten führt und das simulierte Verhalten des Gesamtsystems beeinflusst. Neben dem Extrapolationsfehler treten beim nicht-iterativen Koppelprozess zusätzlich hochfrequente Störungen und eventuell Aliasing-Effekte auf. Tiefpassfilter werden typischerweise aufgrund ihrer Phasendrehung nicht eingesetzt. Eine systemtheoretische Modellierung und Analyse der unterschiedlichen Kopplungsverfahren zeigt die wesentlichen Probleme auf. Die Formulierung der Koppelproblematik als regelungstechnische Problemstellung und die anschließende Erweiterung der Kopplung führt zur nahezu vollständigen Kompensation der eingebrachten Störungen im interessierenden Frequenzbereich. Darüber hinausgehend erlaubt der vorgeschlagene Kompensationsansatz die Anwendung von Tiefpassfiltern, was infolge die Leistungsfähigkeit der Kopplung erhöht. Zusätzlich kann durch den systemtheoretischen Zugang eine Relation zwischen der Koppelsignalbandbreite und der Koppelschrittweite angegeben werden. Aus dieser vorteiligen Eigenschaft lässt sich eine sinnvoll gewählte Koppelschrittweite und eine - bislang unmögliche - qualitative Bewertung der Kopplung ableiten.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

1 Einleitung

In der Automobilindustrie ist heute eine fachspezifische virtuelle Entwicklung Stand der Technik, um Zeit und Kosten zu sparen. Dabei werden in jeder Ingenieurs-Disziplin (z.B. Mechanik, Thermodynamik, Akustik, Elektrotechnik) spezifische Modelle für die einzelnen Komponenten entwickelt und für sich simuliert. Einflüsse von anderen Systemen im Fahrzeug werden nur eingeschränkt mitbetrachtet. Im Gegensatz dazu erfordert die Entwicklung moderner Fahrzeuge allerdings ein Zusammenspiel aller technischen Disziplinen. Diese Interaktionen müssen auch auf virtueller Ebene abgebildet werden, was durch zwei Lösungsansätze erfolgen kann: Entweder werden alle Simulationsmodelle in einem Simulator abgebildet (Monosimulation) oder die verwendeten Modelle werden mittels einer sogenannten Co-Simulationsplattform zusammengeführt [1]. Ersterer Ansatz ist aus Zeitgründen und der enormen Komplexität praktisch nicht machbar. Außerdem werden von den Ingenieuren für ihre Zwecke hochspezialisierte Simulationswerkzeuge verwendet, die für die gegebene Aufgabe optimiert sind (z.B. Finite Elemente Modelle FEM, Mehrkörper Systeme MKS, Strömungssimulation CFD, ...). Mit einem einzelnen Simulator ist es technisch kaum möglich, alle relevanten Aspekte abzubilden. Daher ist die Co-Simulation der einzig praktikable Weg für eine Gesamtsimulation des Fahrzeuges.

Der Gedanke der Co-Simulation ist nicht neu [3]. Es existiert bereits ein Standard für die Anbindung der Simulatoren [2]. Modelle werden unabhängig voneinander über ein definiertes Zeitintervall mit Hilfe unterschiedlicher Simulationswerkzeuge simuliert; zum sogenannten Koppelzeitpunkt werden Daten mit anderen Simulationswerkzeugen ausgetauscht. Dieser Prozess wiederholt sich bis zum Ende der Simulationen. Bereits seit Jahren wird daran gearbeitet und es kristallisierten sich zwei Ansätze, iterative und nicht-iterative Methoden, zur Kopplung heraus [7]. Iterative Ansätze erfordern mehrmaliges Rücksetzen der involvierten Simulationswerkzeuge (interne Variablen, Systemzustände, Simulationszeit, ...) auf einen speziellen Zustand. Das ist jedoch aufgrund der Eigenheiten der Simulationswerkzeuge gesamtheitlich nicht möglich! Dem gegenüber stehen nicht-iterative Ansätze, wobei jedes Teilsystem genau einmal über den aktuellen Zeitschritt simuliert und die Simulationen meist nur angehalten werden. Im Falle von bidirektional abhängigen Teilsystemen erfordert diese Methodik zum Datenaustausch jedoch eine Extrapolation von Koppelgrößen über den aktuell zu berechnenden Zeitschritt. Dies führt zu Ungenauigkeiten. Ist eine Energiebetrachtung zwischen Teilsystemen zulässig, so manifestiert sich dieser Fehler als ab- oder zugeführte Energie, verursacht durch die Kopplung [6].

Bislang wurden im Rahmen nicht-iterativer Co-Simulation Koppelgrößen notwendigerweise extrapoliert (z.B. der Endwert des vorherigen Zeitschrittes konstant gehalten), was zu einer unerwünschten Zeitverschiebung und somit im Falle von geschlossenen Regelkreisen zu Stabilitätsproblemen führen kann! Der klassische Ansatz ist es, die Kopplungsschrittweite zu reduzieren, um den eingebrachten Fehler in einem akzeptablen Bereich zu halten. Eine allgemeine Problematik ist die sinnvolle Wahl der Kopplungsschrittweite, da diese von der Dynamik der gekoppelten Teilsysteme abhängt. Bislang wurde die Kopplungsschrittweite mit Hilfe von Expertenwissen oder über naives, zeitaufwändiges Probieren mittels numerischer Tests bestimmt. Eine Aussage über die Qualität der Si-

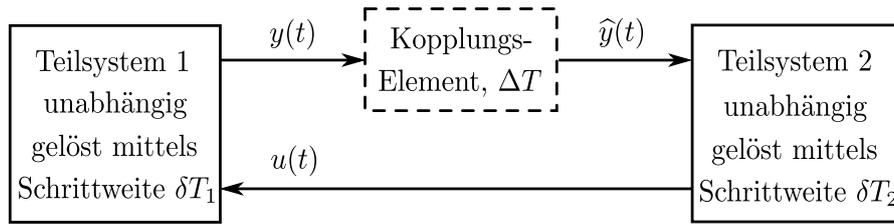


Abbildung 1: Sequentielle nicht-iterative Co-Simulation (Teilsystem 2 vor Teilsystem 1)

Simulationsergebnisse bei nicht-iterativer Co-Simulation ist jedoch auch dabei nicht möglich! Dieser Beitrag greift die Probleme bei nicht-iterativer Co-Simulation auf und beschreibt einen regelungstechnischen Ansatz zu deren Lösung [4]. Dabei wird die nicht-iterative Kopplung als ein Kopplungsprozess betrachtet und systemtechnisch analysiert. Basierend auf diesen Überlegungen lassen sich Ansätze zur Fehlerkompensation, zur adaptiven Bestimmung der Koppelschrittweite und zur qualitativen Bewertung von Resultaten der nicht-iterativen Co-Simulation ableiten.

1.1 Prinzip der nicht-iterativen Co-Simulation

Bei der nicht-iterativen Co-Simulation werden die Teilsysteme unabhängig voneinander simuliert und zu diskreten Zeitpunkten synchronisiert. Die problemspezifischen Schrittweiten der unterlagerten Solver werden als Mikro-Schrittweiten $\delta T^{<l>}$ bezeichnet, wobei l den Iterationsindex spezifiziert. Demzufolge findet eine Auswertung eines Teilsystems zum Zeitpunkt $t_\delta^{<L>}$ statt:

$$t_\delta^{<L>} = \sum_{l=1}^L \delta T^{<l>} \quad (1)$$

Selbige Notation kann auch für die Koppelschrittweiten zur Synchronisation der Teilsysteme eingeführt werden, den sogenannten Makro-Zeitschritten ΔT (vgl. Abb. 2 [4, 6]). Die M -te Synchronisation erfolgt demnach zum Zeitpunkt $t_\Delta^{<M>}$:

$$t_\Delta^{<M>} = \sum_{m=1}^M \Delta T^{<m>} \quad (2)$$

Generell versteht man unter Synchronisation den Austausch von Ein- bzw. Ausgangsgrößen der gekoppelten Teilsysteme. Zu den Koppelzeitpunkten werden die numerisch bestimmten Lösungswerte den angekoppelten Teilsystemen zur Verfügung gestellt. Existieren jedoch wechselseitige Abhängigkeiten - interne Schleifen - zwischen den gekoppelten Teilsystemen, ist eine solche Konfiguration durch den nicht-iterativen Kopplungsansatz *nicht* lösbar! Unabhängig von der Ausführungsreihenfolge steht zu wenig Information über die Eingangsdaten im aktuellen und zu simulierenden Makro-Zeitschritt zur Verfügung. Ein Ausweg aus diesem Dilemma führt über eine Extrapolation bzw. Schätzung der unbekanntenen Koppelgrößen über den aktuellen Makro-Zeitschritt $\Delta T^{<m+1>}$. In Abb. 1 ist dieser Fall illustriert [6]. Beide Teilsysteme sind direkt voneinander abhängig.

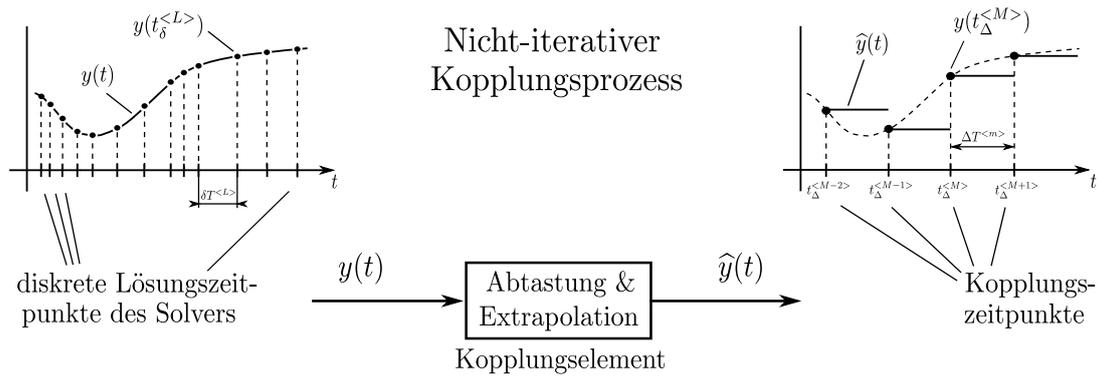


Abbildung 2: Repräsentation der nicht-iterativen Kopplung als Kopplungsprozesses

Wird Teilsystem 2 zeitlich vor Teilsystem 1 simuliert, so sind für jeden Makro-Zeitschritt die Eingangsdaten $y(t)$ für Teilsystem 2 nicht verfügbar. Zum Lösen werden hierfür über das sog. *Koppelement*, basierend auf der Historie der Koppeldaten $y(t \leq t_{\Delta}^{<M>})$, zukünftige Werte $\hat{y}(t > t_{\Delta}^{<M>})$ geschätzt. Die Schleife kann damit zwar aufgelöst werden, jedoch wird ein unumgänglicher Kopplungsfehler durch die Extrapolation in das System eingebracht. Die drei wesentlichen Kopplungsprobleme lauten [4]:

1. **Extrapolationsfehler** verfälschen das Systemverhalten.
2. **Aliasing-Effekte** bzgl. der Makro-Schrittweite führen zur Anregung träger Systemdynamiken.
3. **Unstetigkeiten** an den Koppelzeitpunkten können evtl. existierende, schnelle Systemdynamiken anregen und sich auf die numerische Genauigkeit der unterlagerten Solver auswirken.

2 Systemorientierte Betrachtung der Kopplung

Die Bewertung einer Simulation erfolgt typischerweise im Zeitbereich. Im Gegensatz zur klassischen Simulation ist bei der nicht-iterativen Co-Simulation eine systemorientierte Betrachtung des übergeordneten expliziten Solvers - dem Kopplungsprozess - zulässig. Speziell erlaubt eine Betrachtung der Kopplung im Frequenzbereich allgemein gültige Aussagen.

2.1 Zeitkontinuierliche Analyse

Grundsätzlich werden bei der numerischen Simulation zu diskreten Zeitpunkten Funktionswerte bestimmt, welche die exakte Lösung approximieren (Abb. 2). Bei der Co-Simulation werden diese Werte zwischen den Simulatoren zu den Koppelzeitpunkten ausgetauscht. Auf den ersten Blick würde sich hierfür eine Analyse der Kopplung im zeitdiskreten Bereich anbieten. Komplexe Co-Simulationsanwendungen erfordern jedoch

die Kopplung von Teilsystemen mit sehr unterschiedlichen Systemdynamiken, wodurch auch die einzelnen Teilsysteme mit unterschiedlichen Mikro-Schrittweiten (unterschiedliche feste oder variable Schrittweiten) numerisch gelöst werden müssen. Im Allgemeinen führt dies zu einer sehr aufwändigen Analyse eines Multiraten-Abtastsystems. Interpretiert man hingegen die zeitdiskreten Funktionswerte $y(t_\delta^{<L>})$ als Stützstellen zeitkontinuierlicher Signale $y(t)$ (Abb. 2), so können die Mikro-Schrittweiten $\delta T^{<L>}$ vernachlässigt und eine Analyse der Kopplung im kontinuierlichen Zeit- oder Frequenzbereich durchgeführt werden. Eine solche Interpretation ist i. A. möglich, da bei der Co-Simulation generell die Annahme getroffen wird, dass die Mikro-Schrittweiten systembezogen bzw. geeignet gewählt wurden. D. h. die Koppelsignale werden ausreichend oft abgetastet, sodass keine Aliasing-Effekte bzgl. der Mikro-Schrittweite existieren. Die kontinuierlichen Koppelsignale werden eindeutig durch die zeitdiskreten Funktionswerte repräsentiert.

2.2 Modellierung und Analyse der Kopplung

Aus systemorientierter Sicht repräsentiert der Kopplungsprozess ein *künstlich* eingeführtes Teilsystem. Dessen Übertragungsverhalten kann durch die Übertragungsfunktion $H(s)$ beschrieben werden:

$$H(s) := \frac{\hat{y}(s)}{y(s)} \quad (3)$$

Grundsätzlich soll dieses künstlich eingeführte Teilsystem das Gesamtsystemverhalten *nicht* beeinflussen. D. h., das Übertragungsverhalten der Kopplung ist im Idealfall durch folgenden Frequenzgang charakterisiert:

$$H(j\omega) \stackrel{!}{=} 1 + j0, \quad \forall \omega \quad (4)$$

Um die tatsächlichen Eigenschaften der Kopplung zu bestimmen, ist eine Repräsentation des Kopplungsprozesses im Frequenzbereich günstig. Hierzu sind zwei wesentliche Schritte zu beachten. Zum einen wird das kontinuierliche Koppelsignal mit der Makro-Schrittweite zu den Koppelzeitpunkten abgetastet. Zum anderen wird eine polynomiale Extrapolation durchgeführt. Unter der Annahme, dass kein Aliasing bzgl. der Makro-Schrittweite auftritt, bewirkt die Abtastung ausschließlich eine Skalierung mit $1/\Delta T$ des Frequenzspektrums $Y(j\omega)$ des Eingangssignals $y(t)$ [8]. Im Frequenzbereich gilt für das abgetastete Eingangssignal $y_s(t)$ somit:

$$Y_s(j\omega) = \frac{1}{\Delta T} Y(j\omega) \quad (5)$$

Erfolgt z. B. die Schätzung der Koppelgrößen durch polynomiale Extrapolation nullter Ordnung (ZOH), so führt dies unter Beachtung der Signalabtastung (5) zur nachfolgenden Beschreibung des Kopplungsprozesses als Übertragungsfunktion [14]:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta T}}{\Delta T s} \quad (6)$$

Typischerweise kommen bei der nicht-iterativen Co-Simulation auch polynomiale Extrapolationsverfahren erster, zweiter oder höherer Ordnung zur Anwendung. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen sind in [5] angeführt. Abb. 3 zeigt die korrespondierenden Betrags-

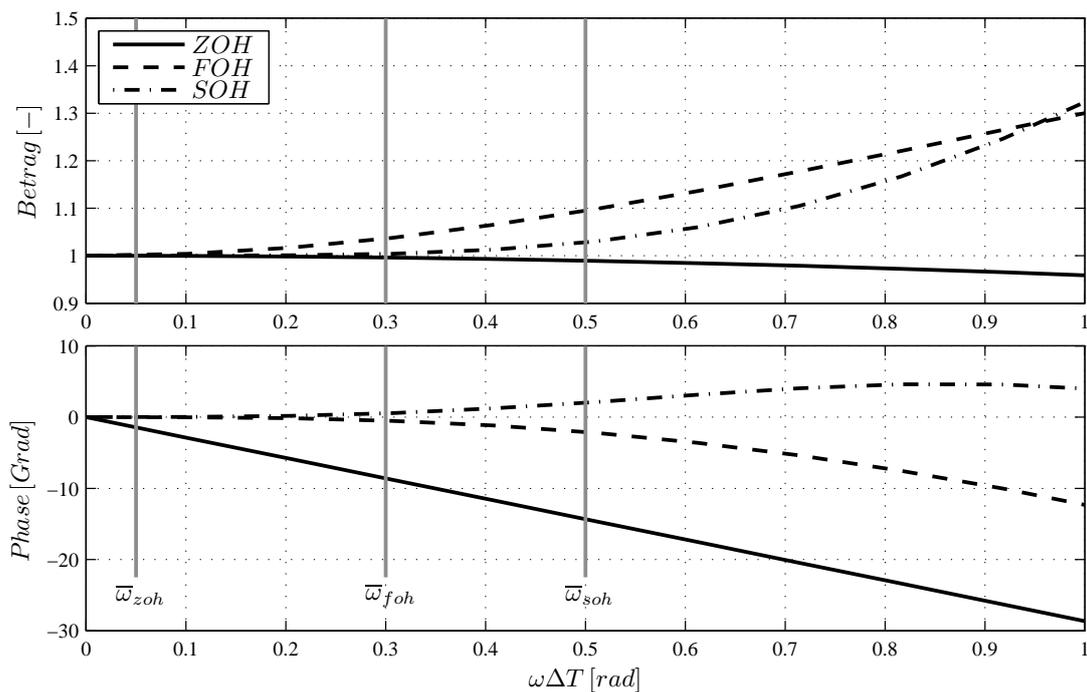


Abbildung 3: Betrags und Phasengang der Kopplungselemente in Abhängigkeit der *normierten Frequenz* $\omega\Delta T$. Zusätzlich sind für die Kopplung *effektive Bandbreiten* $\bar{\omega}_{zoh}$, $\bar{\omega}_{foh}$ und $\bar{\omega}_{soh}$ für ZOH, FOH und SOH Extrapolation eingetragen [4].

und Phasengänge für polynomiale Extrapolation nullter Ordnung (*zero-order-hold*, ZOH), erster Ordnung (*first-order-hold*, FOH) und zweiter Ordnung (*second-order-hold*, SOH) in Abhängigkeit einer *normierten Frequenz* $\omega\Delta T$.

3 Ein regelungstechnischer Kompensationsansatz

Die notwendige Extrapolation von Koppelgrößen entspricht einer Schätzung und ist direkt mit einem Schätzfehler assoziiert. Dieser Fehler kann als *lokaler Diskretisierungsfehler* interpretiert werden. Eine geeignete Definition des sog. Kopplungsfehlers lautet daher:

$$\epsilon(t) := y(t) - \hat{y}(t) \quad (7)$$

Dieser Kopplungsfehler wirkt als Störung an den Eingängen der gekoppelten Teilsysteme und beeinflusst dadurch das Verhalten bzw. die numerische Lösung des co-simulierten Gesamtsystems. Ohne Meta-Information¹ über die gekoppelten Teilsysteme liefert ausschließlich dieser Koppelfehler Information über Koppelprobleme. Die grundlegende Idee

¹Detailliertes Modellwissen oder spezielle mathematische Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen der gekoppelten Teilsysteme.

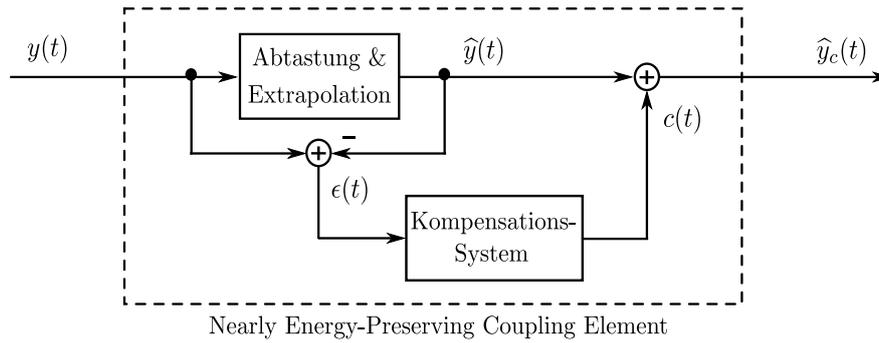


Abbildung 4: Struktur des nahezu energieerhaltenden Kopplungselementes (NEPCE)

ist es nun, diesen Koppelfehler $\epsilon(t)$ für Kompensationszwecke zu verwenden. Im Zuge dessen wird der extrapolierte Verlauf \hat{y} der Koppelgröße über ein sog. Korrektursignal $c(t)$ zu einer korrigierten Extrapolation $\hat{y}_c(t)$ modifiziert:

$$\hat{y}_c(t) = \hat{y}(t) + c(t) \quad (8)$$

Im Idealfall (4) entspricht das Korrektursignal exakt dem Koppelfehler:

$$c(t) \stackrel{!}{=} \epsilon(t) \quad (9)$$

Dieser Idealfall ist jedoch aufgrund des nicht-iterativen Prinzips der Co-Simulation *nicht* umsetzbar! Der Koppelfehler kann ausschließlich zu den Koppelzeitpunkten bestimmt werden. Für eine exakte Fehlerkompensation müssten daher zukünftige Koppelfehler vorab bekannt sein, was ein akausales Kompensationssystem benötigen würde. Aufgrund dieser Tatsache ist eine exakte Kompensation ausgeschlossen. Unumstrittenes Ziel ist es aber trotzdem, die ideale Kompensation (9) bestmöglich anzunähern. Regelungstechnisch formuliert bedeutet dies: *Das Korrektursignal soll dem Koppelfehler nachgeführt werden* (9). In Abb. 4 ist die grundlegende Struktur des Kopplungselementes samt Kompensationspfad mit Kompensationsystem dargestellt. Die Bezeichnung *“nearly energy-preserving coupling element”*, kurz NEPCE, ist durch die nahezu energieerhaltende Eigenschaft der Kopplung motiviert [6].

3.1 Vorschlag eines Kompensationssystems

Aufgrund des Prinzips der nicht-iterativen Co-Simulation ist die Bestimmung des Koppelfehlers und die Festlegung eines Korrektursignals zu den Koppelzeitpunkten festgelegt. Konkret bedeutet das, dass das Korrektursignal über den nachfolgenden Makrozeitschritt bereits zum aktuellen Koppelzeitpunkt bestimmt werden muss. Zusätzlich soll das Korrektursignal möglichst einfach durch diskrete Werte repräsentiert werden können, um einen erhöhten Datenaustausch zwischen den Simulatoren zu vermeiden. Basierend auf diesen Argumenten ist somit eine geeignete Realisierung der Korrektur vorzunehmen. Zwei Ausprägungen werden vorgeschlagen: *konstante* oder *lineare* Korrektur. Bei

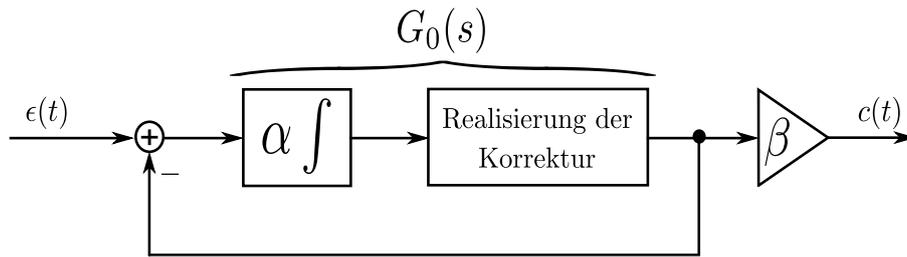


Abbildung 5: Mögliche Struktur des Kompensationssystems

einer konstanten Realisierung der Korrektur wird ein *Offset* und im Falle einer *linearen* Realisierung der Korrektur wird eine lineare Funktion zum extrapolierten Verlauf addiert [4]. Aus regelungstechnischer Sicht repräsentiert diese *Realisierung der Korrektur* die Regelstrecke. Eine mögliche Struktur eines Kompensationssystems ist in Abb. 5 skizziert. Betrachtet man rein den Vorwärtspfad, so wird der Koppelfehler aufintegriert und z. B. die resultierende *Fehlerfläche* über den nachfolgenden Makro-Zeitschritt gleichverteilt (*konstante Korrektur*). Die Rückkopplung bewirkt ein entsprechendes Rücksetzen des Integrators.

3.2 Stabilitätsanalyse des Kompensationssystems

Das vorgeschlagene Kompensationssystem (Abb. 5) besitzt eine Rückkopplung, sodass für die praktische Anwendung eine Stabilitätsuntersuchung unerlässlich ist. Die Stabilität des Kompensationssystems wird dabei durch eine geeignete Festlegung des Verstärkungsfaktors α gewährleistet. Die Stabilitätsanalyse ist für konstante sowie auch zeitlich variable Makro-Schrittweiten durchzuführen.

3.2.1 Konstante Makro-Schrittweite

Bei Verwendung einer konstanten Makro-Schrittweite repräsentiert das vorgeschlagene Kompensationssystem ein lineares zeitinvariantes (LTI) System. Damit steht eine große Auswahl an mächtigen Methoden zur Verfügung, um Kompensationssysteme stabil auslegen zu können [12]. Trotzdem enthalten die Kompensationssysteme teilweise Eigenschaften, speziell jene mit konstanter und linearer Realisierung der Korrektur, die eine Stabilitätsanalyse erschweren.

Für den Fall *konstanter* Realisierung der Korrektur lautet die Übertragungsfunktion des *offenen* Kreises ($\beta = 1$) [4]:

$$G_0(s) = \frac{\alpha}{s\Delta T} \frac{1 - e^{-s\Delta T}}{s\Delta T} \quad (10)$$

Diese Übertragungsfunktion kann theoretisch zur Stabilitätsanalyse herangezogen und somit ein geeigneter Verstärkungsfaktor α bestimmt werden. Bei der Realisierung der *konstanten* Korrektur über ein Halteglied nullter Ordnung treten jedoch zusätzlich, infolge der notwendigen Abtastung, Aliasing-Effekte auf, sodass die angeführte Übertragungsfunktion (10) die Verhältnisse nur unzureichend beschreibt. Speziell treten bei einem

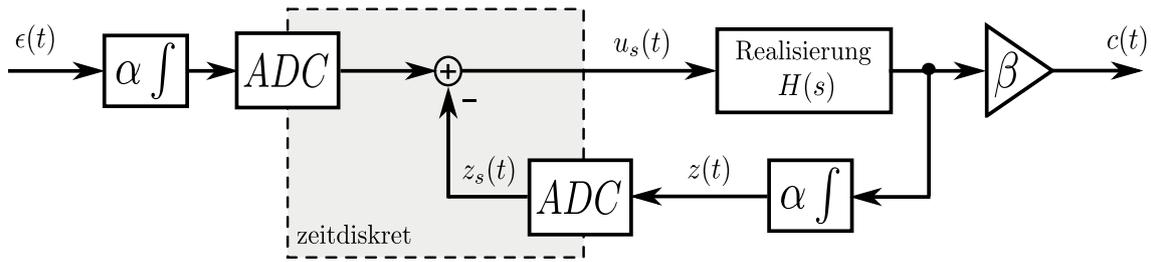


Abbildung 6: Blockschaltbild des Kompensationssystems mit Realisierung und explizit angegebenen Abtastprozess

dynamisch schnell ausgelegten Kompensationssystem hochfrequente Signale im geschlossenen Kreis auf, wodurch Aliasing-Effekte hervorgerufen werden. Anstatt der einfachen Skalierung infolge der Abtastung mit $1/\Delta T$ müssen zusätzlich zum Basisspektrum die Spiegelfrequenzspektren bei der Synthese mitberücksichtigt werden [14].

Zum Ableiten einer geeigneten Übertragungsfunktion wird das Kompensationssystem aus Abb. 5 samt explizit angegebenen Abtastprozess umgezeichnet (Abb. 6). Zum Auslegen des Einstellparameters α ist das Verhalten der Schleife interessant. Genauso wie bei digital realisierten Regelsystemen wird in dieser Darstellung ein kontinuierliches System über eine diskrete Wertefolge $u_s(t)$ angesteuert und dessen Ausgangsgröße $z(t)$ abgetastet. Das kontinuierliche System besteht dabei aus der Realisierung der Korrektur *ohne* Abtastung $H(s)$ mit nachgeschaltetem Integrator und dem Verstärkungsfaktor, zusammengefasst zur Übertragungsfunktion $G(s)$. Demnach ergibt sich im Bildbereich für die Ausgangsgröße des kontinuierlichen Systems

$$z(s) = \underbrace{G(s)H(s)}_{P(s)} u_s(s) \quad \text{mit} \quad G(s) = \frac{\alpha}{s} \quad (11)$$

und nach dem Abtastprozess für die *getastete* Ausgangsgröße $z_s(s)$ zu

$$z_s(s) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=0}^{\infty} G(s \pm jn\omega_a) H(s \pm jn\omega_a) u_s(s \pm jn\omega_a). \quad (12)$$

Unter Berücksichtigung von $z_s(s) = z_s(s \pm jn\omega_a)$ lässt sich die sog. *getastete Übertragungsfunktion* $P_s(s)$ anschreiben [14]:

$$\frac{z_s(s)}{u_s(s)} = P_s(s) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=0}^{\infty} G(s \pm jn\omega_a) H(s \pm jn\omega_a) \quad (13)$$

Diese Beschreibung des Systems besitzt aufgrund der Abtastung geänderte Eigenschaften und beeinflusst deshalb das Stabilitätsverhalten enorm [16]. Zur Illustration² sind dazu

²Zum Berechnen der *getasteten Übertragungsfunktion* wurde die unendliche Summe durch 21 Terme approximiert. Der Frequenzgang enthält bis zur halben Abtastfrequenz aufgrund der Periodizität die vollständige Information.

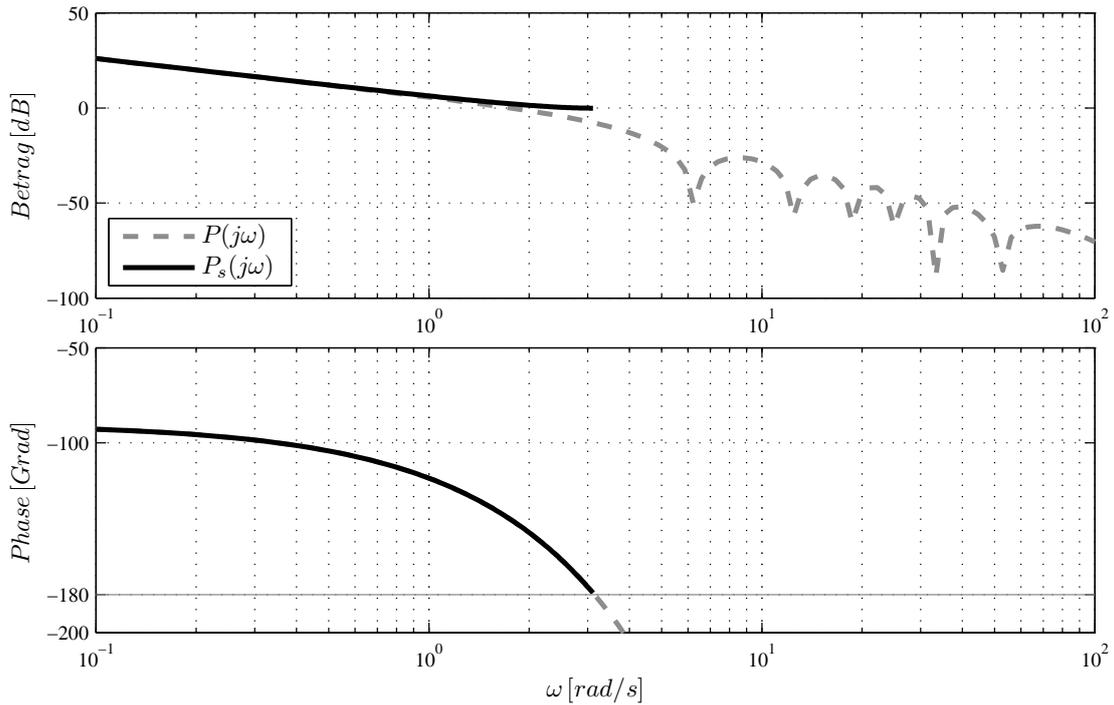


Abbildung 7: Gegenüberstellung der Frequenzgänge bei konstanter Korrektur mit und ohne Abtastung ($\Delta T = 1$ s; $\alpha = 2$)

für den speziellen Fall *konstanter* Korrektur der Betrags- und Phasengang mit und ohne Abtastung im *BODE*-Diagramm dargestellt (Abb. 7). Es ist ersichtlich, dass die Abtastung eine Modifikation des Übertragungsverhaltens bewirkt. Speziell bei der gewählten Parametrierung ($\Delta T = 1$ s; $\alpha = 2$) erreicht das System, nach dem *NYQUIST*-Kriterium, die Stabilitätsgrenze. Ohne umfassende Berücksichtigung der Abtastung wäre hingegen noch ausreichend Phasenreserve verfügbar.

Die Auslegung des Verstärkungsfaktors anhand grafischer Überlegungen mittels *BODE*-Diagramm oder *NYQUIST*-Ortskurve ist für den praktischen Einsatz jedoch nicht günstig. Der Verstärkungsfaktor zur stabilen Auslegung soll über eine einfache Vorschrift bestimmbar sein. Dazu eignet sich eine Behandlung der Synthesaufgabe im *zeitdiskreten* Bereich. Das betrachtete kontinuierliche System (11) mit *konstanter* Korrektur und dem abgetasteten Eingangssignal $u_s(s)$, d. h. *ohne* Abtastung, lautet:

$$P(s) = H(s)G(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta T}}{s} \frac{\alpha}{s\Delta T} \quad (14)$$

Unter Verwendung der z -Transformation lautet die Beschreibung dieser kontinuierlichen Übertragungsfunktion im z -Bereich [10]

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{\alpha}{\Delta T s^2} \right\} = \frac{\alpha}{z - 1} \quad (15)$$

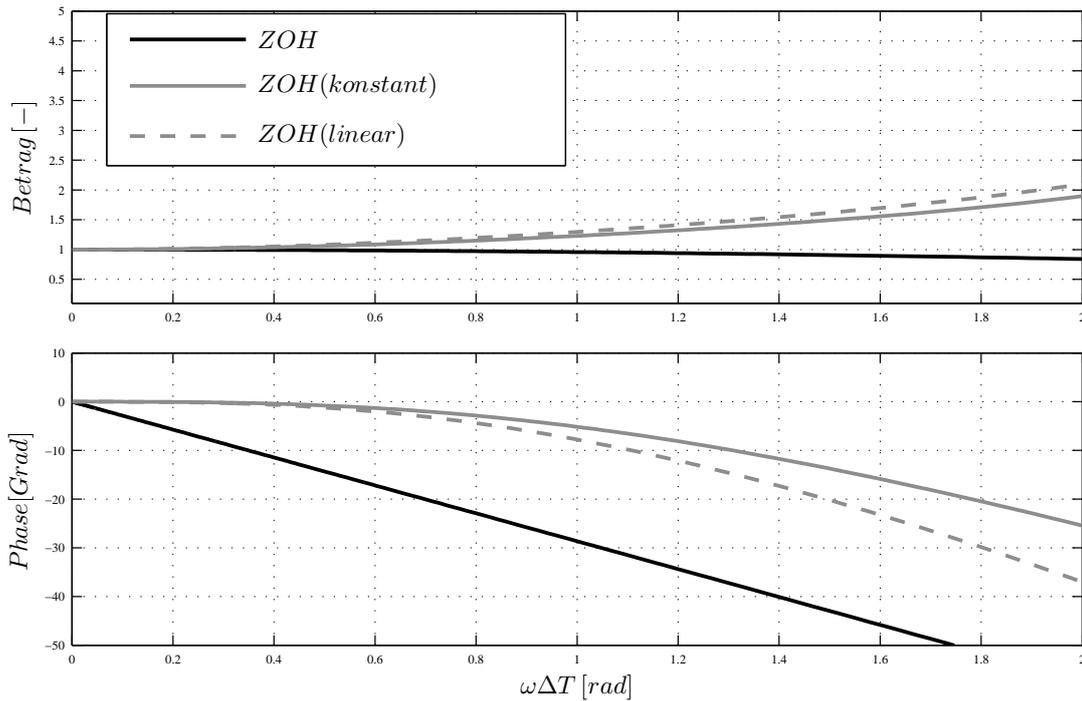


Abbildung 8: Effekt des Kompensationssystems anhand ZOH-Kopplung ohne und mit konstanter oder linearer Korrektur

und in weiterer Folge liefert dies eine Übertragungsfunktion der geschlossenen Schleife

$$T(z) = \frac{\alpha}{z - (1 - \alpha)}. \quad (16)$$

Aus dieser zeitdiskreten Übertragungsfunktion lässt sich nun einfach der zulässige Wertebereich für eine stabile Auslegung des Kompensationssystems mit *konstanter* Korrektur angeben:

$$|1 - \alpha| < 1 \quad (17)$$

Diese Stabilitätsbedingung erlaubt zudem eine Festlegung der Pole des Systems und somit eine Vorgabe der dynamischen Eigenschaften des Kompensationssystems, welche dessen Leistungsfähigkeit bestimmt. Bei der Parameterwahl $\alpha = 2$ befindet sich das System an der Stabilitätsgrenze und entspricht den Verhältnissen im gezeigten *BODE*-Diagramm (Abb. 7).

Der Effekt des Kompensationspfades bei ZOH-Extrapolation und unter Verwendung von keiner, *konstanter* oder *linearer* Korrektur ist in Abb. 8 angeführt. Offensichtlich verbessern beide Ansätze zur Kompensation das Übertragungsverhalten der Kopplung im unteren und somit interessierenden Frequenzbereich ($\omega\Delta T < 0.4$). Im Wesentlichen wird die Phasendrehung stark reduziert, d. h. die Forderung (4) kann zumindest in einem bestimmten Frequenzbereich eingehalten werden. Koppelsignale in diesem Frequenzbereich werden daher annähernd fehlerfrei übertragen.

3.2.2 Variable Makro-Schrittweite

Wie schon für das Kompensationssystem mit *konstanter* Makro-Schrittweite ΔT muss nun auch die unerlässliche Eigenschaft der Stabilität für das Kompensationssystem mit *variabler* Makro-Schrittweite $\Delta T(t)$ gewährleistet werden. Die Makro-Schrittweite variiert dabei zwischen der minimal $\underline{\Delta T}$ und der maximal zulässigen Makro-Schrittweite $\overline{\Delta T}$, d. h.:

$$\underline{\Delta T} \leq \Delta T(t) \leq \overline{\Delta T} \quad (18)$$

Aufgrund der Tatsache, dass das vorgeschlagene Kompensationssystem immer Totzeitglieder in der *offenen* Schleife besitzt, beschreibt das Kompensationssystem (mit geschlossener Schleife) ein *System mit verzögertem Zustand*. Diese Systemklasse ist in der Literatur weit verbreitet und wird meist in allgemeiner Form dargestellt [9, 11, 15]

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - T_t(t)), \quad (19)$$

wobei $T_t(t)$ die zeitvariable Totzeit symbolisiert. Diese Systemklasse bildet auch die Basis für die nachfolgende Untersuchung.

Eine typische Eigenheit von Totzeitsystemen ist die *unendliche* Dimensionalität des Zustandsraumes. Neben einer *endlich*-dimensionalen Approximation, wie z. B. über die *Padé*-Approximation [12, 14], bietet der Weg über eine *endlich*-dimensionale Integration gewisse Vorteile. Zum einen sind keine Überlegungen in Bezug auf Dimension und Stabilität des Ersatzsystems notwendig und zum anderen ist eine geeignete *endlich*-dimensionale Interpretation über eine Transformation bereits in den veröffentlichten Analyseansätzen integriert. Im Prinzip wird das im *unendlich*-dimensionalen Zustandsraum beschriebene System in einen *endlich*-dimensionalen Zustandsraum übergeführt. In der fach einschlägigen Literatur wird dazu häufig eine Transformation erster Ordnung verwendet [11, 15]. Diese Transformation basiert auf der *Leibniz-Newton*-Formel

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - T_t) = \int_{-T_t}^0 \dot{\mathbf{x}}(t + \theta) d\theta, \quad (20)$$

bei der das *unendlich*-dimensionale System über ein Verzögerungsintervall aufintegriert wird und in einer neuen Betrachtungsweise des Systems resultiert:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_1 \int_{-T_t}^0 [\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t + \theta) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t + \theta - T_t)] d\theta \quad (21)$$

Dabei wird das System mit einer einzelnen Verzögerung in ein *System mit verteilten Verzögerungen* übergeführt. Diese Transformation wird Modelltransformation erster Ordnung bezeichnet, da hier über ein einziges Verzögerungsintervall integriert wird [11].

Offensichtlich besteht das transformierte System (21) aus einem verzögerungsunabhängigen Teil $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t)$ und einem integrierenden Term, der von der Totzeit abhängt. D. h., falls das verzögerungsunabhängige Teilsystem asymptotisch stabil ist, so stört der zusätzliche Integralterm, der sogenannte Störterm, das Stabilitätsverhalten mit zunehmender Verzögerung. Aus dieser Überlegung resultiert auch die für die Stabilitätsanalyse

notwendige Bedingung, dass das ungestörte System

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)\mathbf{x}(t) \quad (22)$$

asymptotisch stabil sein muss [15]. Bei Erfüllen dieser Forderung bietet die Stabilitätstheorie nach *LYAPUNOV* eine grundlegende Methodik für die Stabilitätsanalyse von Systemen mit variabler Totzeit. Die Analysemethodik basiert auf zwei wesentlichen Theoremen, dem *LYAPUNOV-KRASOVSKII*- und dem *LYAPUNOV-RAZUMIKHIN*-Theorem [9, 11, 15]. Nachfolgend wird gezeigt, dass das vorgeschlagene Kompensationssystem mit z. B. *konstanter* Korrektur basierend auf diesen generellen Ansätzen *nicht* analysierbar ist. Dabei werden vorerst etwaige Aliasing-Effekte vernachlässigt.

Die Übertragungsfunktion der offenen Schleife berücksichtigt die Realisierung der *konstanten* Korrektur (vgl. 10)

$$G_0(s) = \frac{\alpha}{s^2 \Delta T^2} (1 - e^{-s\Delta T}),$$

wodurch sich über die inverse *LAPLACE*-Transformation das System in Zustandsraumdarstellung mit *konstanter* Makro-Schrittweite anschreiben lässt:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{-\alpha}{\Delta T^2} (u(t) - u(t - \Delta T)) \\ z(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Das Einführen einer *variablen* Makro-Schrittweite $\Delta T(t)$ führt zur gesuchten Beschreibung des Systems im Zeitbereich, welches nachfolgend über die angeführten Methoden analysiert werden soll:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{-\alpha}{\Delta T^2(t)} (u(t) - u(t - \Delta T(t))) \\ z(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Unter der Nebenbedingung $u(t) = -z(t)$ für die Rückführung folgt das Zustandsraummodell der geschlossenen Schleife - ohne Messgleichung - in allgemeiner Form eines Systems mit verzögertem Zustand und den beiden Dynamikmatrizen A_0 und A_1 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{\Delta T(t)^2} & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\Delta T(t)^2} & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} x_1(t - \Delta T(t)) \\ x_2(t - \Delta T(t)) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Damit dieses System über den skizzierten Weg auf asymptotische Stabilität geprüft werden kann, muss das unverzögerte System $A_0 + A_1$ asymptotisch stabil sein. Diese notwendige Bedingung ist hier *nicht* erfüllt, da das verzögerungsfreie System zwei Eigenwerte im Ursprung der komplexen Ebene besitzt! D. h. dieses System ist in dieser Struktur für variable Makro-Schrittweite und über die erwähnten Stabilitätsanalysemethoden *nicht* analysierbar. Ein Ausweg wird im nächsten Abschnitt vorgeschlagen.

3.3 Kompensation mittels Transformation

Das Kompensationssystem soll für eine konstante oder eine variable Makro-Schrittweite über den Parameter α stabil ausgelegt werden können. Um den Stabilitätsnachweis - speziell für eine variable Makro-Schrittweite - zu vereinfachen, wird eine Transformation eingeführt, sodass sich der Analyseaufwand erheblich reduziert. Diese Transformation ermöglicht die Analyse von ausschließlich zeitdiskreten Kompensationssystemen mit *konstanter* Rechenschrittweite. Dabei dienen die Integrale über den Koppelfehler je Makro-Zeitschritt als diskrete Eingangswerte $A_\epsilon^{<m>}$

$$A_\epsilon^{<m>} = \int_{t_\Delta^{<M-1>}}^{t_\Delta^{<M>}} \epsilon(t) dt \quad (26)$$

und die Integrale über die jeweiligen Korrektursignale je Makro-Zeitschritt $A_c^{<m>}$

$$A_c^{<m>} = \int_{t_\Delta^{<M-1>}}^{t_\Delta^{<M>}} c(t) dt \quad (27)$$

als diskrete Ausgangswerte. Aus diesen Überlegungen folgt eine Unabhängigkeit von der evtl. zeitvariablen Makro-Schrittweite. Durch Verwenden der Gleichungen (26, 27) kann in Anlehnung an Abb. 5 und 6 direkt eine diskrete Vorschrift für das Kompensationssystem angegeben werden:

$$A_c^{<m+1>} = (1 - \alpha)A_c^{<m>} + \alpha\beta A_\epsilon^{<m>} \quad (28)$$

Die beiden Parameter α und β stellen Einstellparameter des Kompensationssystems dar. Besonders einsichtig lassen sich aus dieser Beziehung (28) direkt Wertebereiche der beiden Parameter zur stabilen Auslegung (vgl. (17)) des NEPCE im Falle von *konstanter* und *variabler* Makro-Schrittweiten und beliebiger realisierter Korrektur angeben:

$$|1 - \alpha| < 1 \quad 0 < \beta < 1 \quad (29)$$

Für den Spezialfall $\alpha = 1$ ($\beta = 1$) besitzt das Kompensationssystem *dead-beat* Charakter, wodurch Koppelfehler umgehend im darauffolgenden Makro-Zeitschritt kompensiert werden. Des Weiteren werden die beiden Parameter (α, β) durch

$$\alpha = \begin{cases} 0.02 \gamma & \text{für } \gamma \in [50\%, 100\%] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} 0.02 \gamma & \text{für } \gamma \in [0\%, 50\%] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (30)$$

auf einen einzigen prozentuellen Wert (Parameter) $\gamma \in [0 - 100\%]$ abgebildet, das Ausmaß der Korrektur wiedergibt.

3.4 Einbettung von Tiefpassfiltern

Eine strukturelle Erweiterung des vorgeschlagenen Kompensationssystems stellt die Einbettung von Tiefpassfiltern dar. Diese Tiefpassfilter werden benötigt, um die eingangs erwähnten Aliasing-Effekte und die unerwünschten Unstetigkeiten in den Koppelsignalen zu unterdrücken. Grundsätzlich ist die Verwendung von Tiefpassfiltern kontraproduktiv,

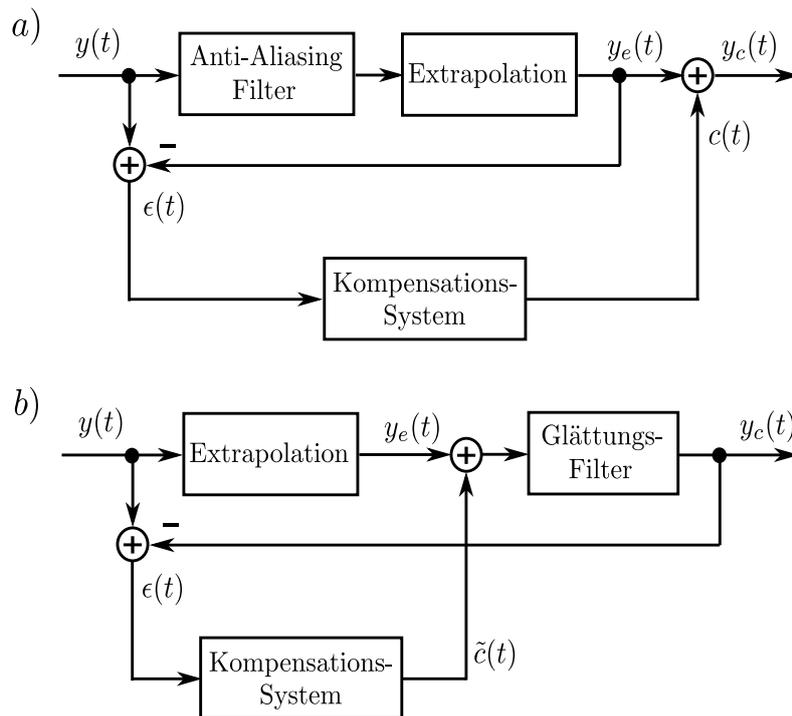


Abbildung 9: Einbettung von Tiefpassfiltern zur Unterdrückung von Aliasing-Effekten (a) und Unstetigkeiten in den Koppelsignalen (b)

da die inhärente Phasendrehung der angewandten Tiefpassfilter die Gesamtsimulation mit zunehmendem Filtereffekt negativ beeinflussen. Der vorgeschlagene Kompensationsansatz erlaubt hingegen die Anwendung von Tiefpassfiltern.

In Abb. 9(a) ist die strukturelle Erweiterung des NEPCE mit einem Anti-Aliasing-Filter dargestellt. Der Anti-Aliasing-Filter wird in der Bestimmung des Koppelfehlers mitberücksichtigt, sodass dessen negative Effekte, wie z. B. die Phasendrehung, als Koppelfehler interpretiert und kompensiert werden können. Wie aus dem Blockschaltbild ersichtlich bleibt das Kompensationssystem durch diese Erweiterung unverändert.

Unstetigkeiten treten in den Koppelsignalen nach erfolgter Extrapolation und auch im Korrektursignal auf. Eine leicht ungezeichnete Form des Koppелеlementes ist in Abb. 9(b) angeführt. Abermals erfolgt die Berücksichtigung der Filtereffekte bei der Bestimmung der Koppelfehler. Die unerwünschten Filtereffekte werden auch hier kompensiert. Im Gegensatz zu vorher ist jedoch der Glättungsfilter in einer internen Schleife direkt mit dem Kompensationssystem³ gekoppelt. Aus diesem Grund muss für die Anwendung von Glättungsfiltern die Stabilitätsanalyse neu aufgerollt werden.

³Die Anwendung von Glättungsfiltern resultiert in einem modifizierten Kompensationssystem.

Extrapolation	$\overline{\omega\Delta T}$
ZOH	0.05
FOH	0.3
SOH	0.5

Tabelle 1: Heuristisch definierte normierte *effektive* Bandbreiten

3.5 Generelle Anwendungsrichtlinien

Neben der angeführten Möglichkeit zur Verbesserung der Kopplung werden in diesem Abschnitt zwei weitere Vorteile der Darstellung der Kopplung im Frequenzbereich diskutiert. In Abb. 3 sind die Frequenzgänge typisch angewandter Extrapolationsverfahren in Abhängigkeit der *normierten Frequenz* dargestellt. Unabhängig von der Makro-Schrittweite (!) lassen sich sog. *effektive* Bandbreiten $\overline{\omega\Delta T}$ der Kopplungen (z. B. $\overline{\omega}_{soh}$, $\overline{\omega}_{foh}$ und $\overline{\omega}_{zoh}$) in Form einer *Faustregel* angeben (siehe Tab. 1) [5]. Diese normierten effektiven Bandbreiten wurden heuristisch basierend auf ausgiebigen Versuchsreihen und Erfahrungswerten bestimmt. Für die Anwendung bei der Co-Simulation kann folgende Relation zwischen der Makro-Schrittweite $\overline{\Delta T}(t)$, die i. A. zeitlich variabel ist, und der maximal auftretenden Signalfrequenz $\overline{\omega}(t)$ angegeben werden:

$$\overline{\omega}(t)\overline{\Delta T}(t) \leq \overline{\omega\Delta T} \quad (31)$$

Unter der Voraussetzung, dass das nachfolgende Teilsystem ausreichend träge ist, kann diese Überlegung zur frequenzbasierten, adaptiven Steuerung der Makro-Schrittweite und zur qualitativen Bewertung der Kopplungen herangezogen werden.

4 Anwendungsbeispiel - ABS-System

In diesem Abschnitt dient eine Systemsimulation eines Antiblockier-Bremssystems als Evaluierungsbeispiel, wobei ein ABS-System (implementiert in MATLAB/SIMULINK) und ein in ADAMS/CAR samt virtuellem Fahrer modelliertes Fahrzeug *nicht-iterativ* gekoppelt werden. Zusätzlich wird im MKS-System das Fahrmanöver vorgegeben, worauf der virtuelle Fahrer reagiert und daraufhin das ABS-System die Bremskäfte an den Rädern entsprechend skaliert.

In Abb. 10 ist das gekoppelte Gesamtsystem dargestellt. Dabei liest das ABS-System die aktuelle Fahrzeuggeschwindigkeit $v_{fzg}(t)$ sowie die Winkelgeschwindigkeiten⁴ der Räder $\omega_{rad,vr}(t)$, $\omega_{rad,vl}(t)$, $\omega_{rad,hr}(t)$, $\omega_{rad,hl}(t)$ ein. Aus diesen Werten werden die ABS-Steuersignale $u_{ABS,vr}(t)$, $u_{ABS,vl}(t)$, $u_{ABS,hr}(t)$, $u_{ABS,hl}(t)$ durch den implementierten Regelalgorithmus bestimmt, der den Reifenschlupf und zusätzlich auch die Reifenbeschleunigung zur Berechnung der Signale heranzieht. Des Weiteren liegen die Steuersignale im Intervall $[0, 1]$ und skalieren den Fahrerwunsch bei Bremsmanövern, d. h. damit wird im Fahrzeugmodell die vom virtuellen Fahrer gewünschte Bremskraft bzw. das Bremsmoment skaliert.

⁴Bei den Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen jeweils die Indizes die Radposition. Z. B. steht *vr* für *vorne rechts* und *hl* für *hinten links*.

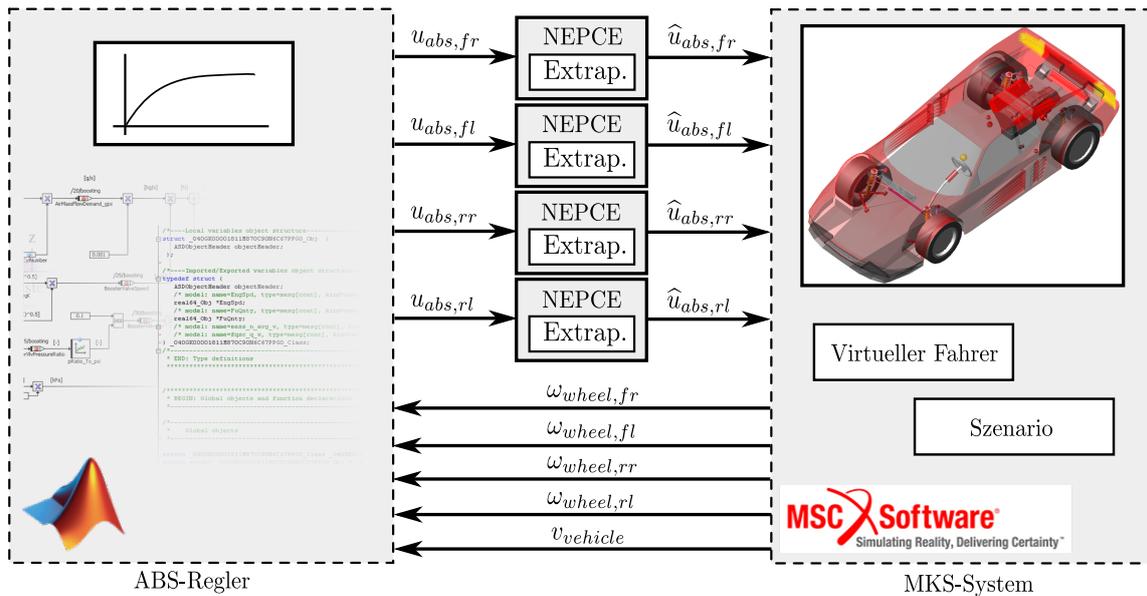


Abbildung 10: Co-Simulation eines ABS-Systems (MATLAB/SIMULINK) und eines Mehrkörper-Fahrzeugmodells (ADAMS/CAR)

Aus Evaluierungsgründen wurde für dieses Beispiel zusätzlich eine sonst typischerweise nicht anwendbare Monosimulation durchgeführt. Dadurch steht eine Referenzlösung zur Verfügung, anhand derer die Resultate der Co-Simulation bewertet werden können.

4.1 Nicht-iterative Co-Simulation

Die Anbindung der Simulationswerkzeuge und die Kopplung erfolgen unter Verwendung der Co-Simulations-Plattform ICOS [1]. Beide Simulationswerkzeuge bieten für eine *nicht-iterative* Co-Simulation maximale Anbindungsmöglichkeiten, sodass

- zu den Koppelzeitpunkten, zusätzlich zu den Werten an den Koppelzeitpunkten, Werte des Koppelsignals zwischen den Koppelzeitpunkten (sog. *Sequenzen*) über den vorhergehenden Makro-Zeitschritt zur Verfügung stehen und des Weiteren
- entweder eine *konstante* oder eine *adaptiv* gewählte Makro-Schrittweite verwendet werden kann.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nachfolgend nur die Stellsignale des *linken hinteren* Rades präsentiert, wobei einige ausgewählte Konfigurationen der Kopplung eingesetzt wurden.

4.2 Anwendung von Korrektur und Tiefpass-Filterung

In einer ersten Betrachtung soll der Effekt der vorgeschlagenen Fehlerkompensation veranschaulicht werden. Zudem wurden unterschiedliche Konfigurationen der Kopplung ein-

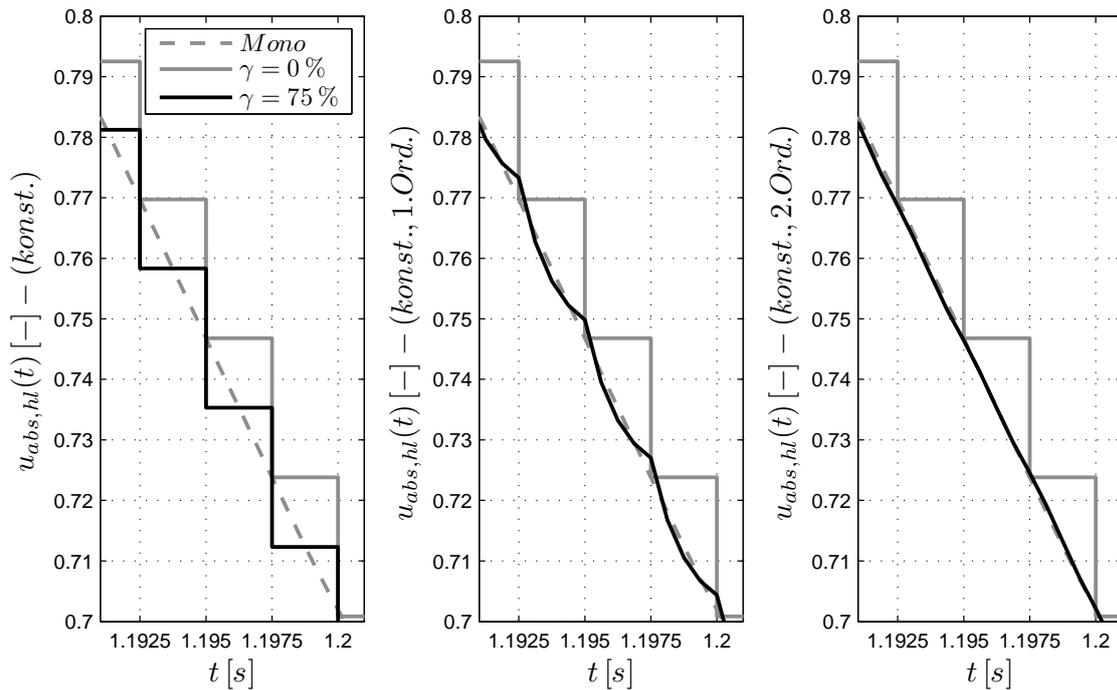


Abbildung 11: Effekt von konstanter Korrektur ohne und mit Glättungsfilter (1. & 2. Ordnung) bei Extrapolation nullter Ordnung

gesetzt. Ausschnitte der korrespondierenden Simulationsergebnisse sind in Abb. 11 dargestellt. Gegenübergestellt werden jeweils die Resultate der Monosimulation, der Extrapolation *ohne* und *mit* zusätzlichen Modifikationen. Die Extrapolation der Koppelsignale erfolgt in allen Fällen mittels Extrapolation nullter Ordnung.

Im Bild links erfolgte zunächst die Anwendung einer *konstant* realisierten Korrektur. Es ist ersichtlich, dass die charakteristische Treppenfunktion einer reinen ZOH-Kopplung nach unten verschoben wird und somit im Mittel der Koppelfehler kompensiert wird.

Im mittleren und im rechten Bild wurde zusätzlich ein Glättungsfilter (1. Ordnung (Mitte) und 2. Ordnung (Rechts)) angewandt. Es ist ersichtlich, dass in beiden Fällen der Koppelfehler und zusätzlich auch die, durch die Tiefpassfilter hervorgerufene, Phasendrehung effektiv kompensiert werden.

4.3 “Klassisches” Anwendungsproblem

Der Anwender einer nicht-iterativen Co-Simulation steht typischerweise vor dem Problem einer geeigneten Parametrierung der Kopplung. Die Ausführungsreihenfolge der Teilsysteme, die Art der Extrapolation und die Makro-Schrittweite müssen vorab festgelegt werden. Bei der vorgestellten Methode ist zusätzlich die Art und das Ausmaß der Korrektur zu bestimmen. Ohne detailliertes Systemwissen stellt das eine komplizierte Aufgabe dar. Diese Problematik wird kurz aufgezeigt, siehe Abb. 12.

Als erster Versuch wurde das Gesamtsystem unter Verwendung von Extrapolation zweiter

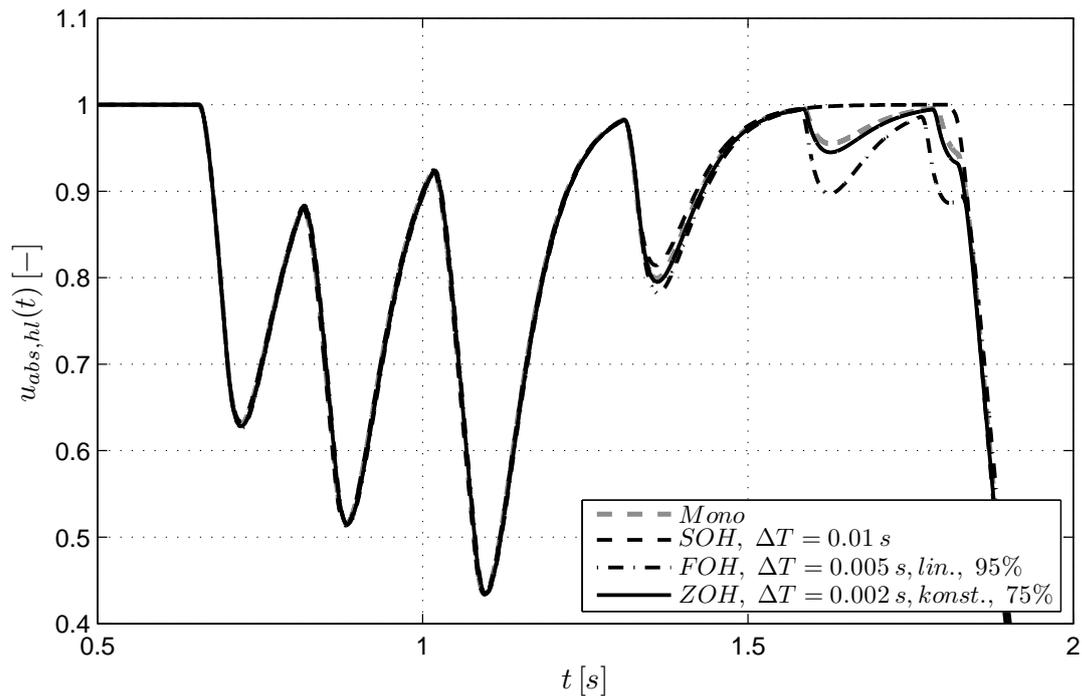


Abbildung 12: Gegenüberstellung der Resultate der Monosimulation und der Co-Simulationen

Ordnung, einer *konstanten* Makro-Schrittweite von $\Delta T = 0.01 \text{ s}$ und *ohne* Korrektur-eingriff *nicht-iterativ* gelöst. Die gekoppelte Größe weist erhebliche Abweichungen von der Referenzlösung auf.

Beim zweiten Versuch wurde das Gesamtsystem unter Verwendung von Extrapolation erster Ordnung, einer kleineren *konstanten* Makro-Schrittweite von $\Delta T = 0.005 \text{ s}$ und mit *linear* realisierter Korrektur *nicht-iterativ* gekoppelt. Auch in diesem Fall sind Abweichungen zur Monosimulation deutlich zu erkennen.

Als letzter Kopplungsansatz wurde das Gesamtsystem unter Verwendung von Extrapolation nullter Ordnung, einer nochmals kleineren *konstanten* Makro-Schrittweite von $\Delta T = 0.002 \text{ s}$ und mit *konstanter* Realisierung der Korrektur *nicht-iterativ* gelöst. Wie leicht zu erkennen ist, liegen bei dieser Art der Kopplung graphisch keine Abweichungen zum Ergebnis der Monosimulation vor.

Offensichtlich ist die dritte Variante zu bevorzugen. Diese Evaluierung ist jedoch nur aufgrund der Kenntnis der Referenzlösung der Monosimulation möglich und bei normalen Co-Simulationsanwendungen nicht durchführbar! Welche Lösung akzeptiert wird, bleibt dem Anwender überlassen. Aus diesem Grund werden im nächsten Abschnitt die angewandten Kopplungen und die resultierende Qualität der Resultate genauer betrachtet.

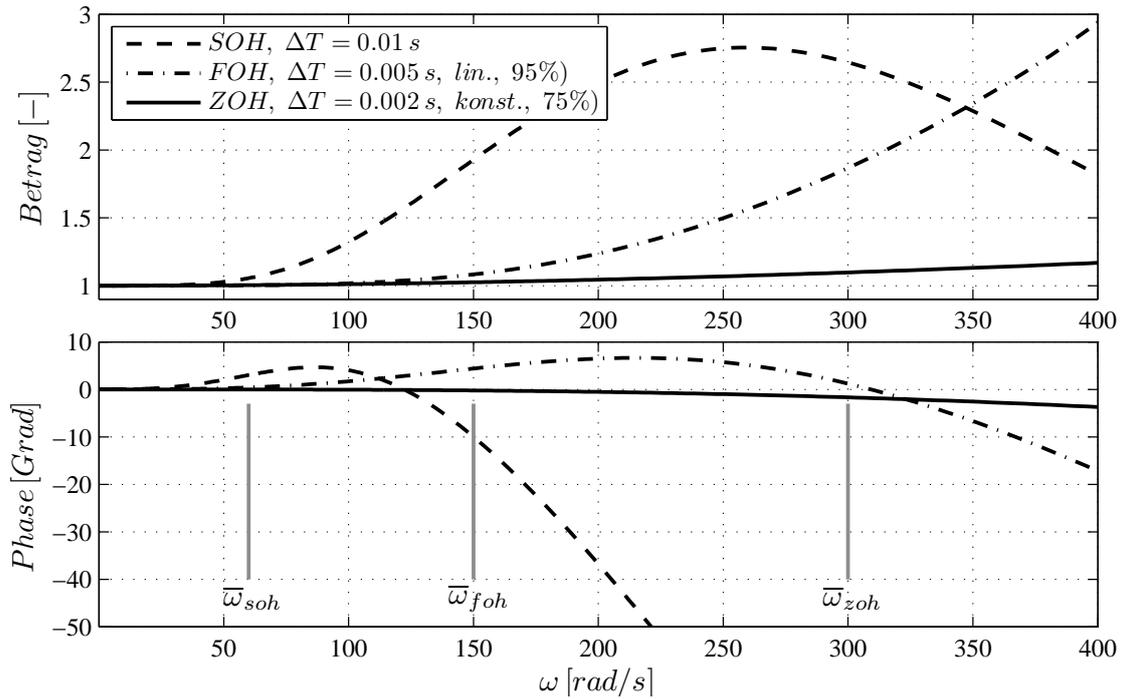


Abbildung 13: Gegenüberstellung der Übertragungsfunktionen der eingesetzten Koppellemente samt Kennzeichnung der effektiven Bandbreiten

4.4 Qualität der Resultate

In Abb. 13 sind diesbezüglich die Betrags- und Phasengänge der verwendeten Kopplungen angeführt. Es ist ersichtlich, dass die Kopplung mittels Extrapolation zweiter Ordnung (SOH), relativ groß gewählter Makro-Schrittweite von $\Delta T = 0.01 \text{ s}$ und *ohne* eine Korrekturanwendung nur eine sehr kleine *effektive* Bandbreite $\bar{\omega}_{soh}$ zur Verfügung stellt. Wesentlich besser sind die Übertragungseigenschaften bei der Kopplung mittels Extrapolation erster Ordnung und mit *linearer* Korrektur geartet ($\bar{\omega}_{foh}$). Die größte *effektive* Bandbreite bietet, wie aus den Zeitverläufen in Abb. 12 zu erwarten, die Kopplung über ZOH, mit kleiner Schrittweite $\Delta T = 0.002 \text{ s}$ und der Anwendung *konstanter* Korrektur. Bei dieser Art der Kopplung können Frequenzen in einer Bandbreite von bis zu $\bar{\omega}_{zoh} = 300 \text{ rad/s}$ annähernd fehlerfrei übertragen werden.

Abb. 14 zeigt in weiterer Folge die maximale Momentanfrequenz⁵ $\bar{\omega}_{\Phi,abs,hl}(t)$ des zu schätzenden ABS-Steuersignals $u_{abs,hl}(t)$. Zusätzlich zum zeitlichen Verlauf sind die vorher erwähnten *effektiven* Bandbreiten ($\bar{\omega}_{soh}$, $\bar{\omega}_{foh}$, $\bar{\omega}_{zoh}$) der verwendeten Kopplungsvarianten angedeutet. Auf einen Blick ist ersichtlich, dass die Kopplung mittels Extrapolation nullter Ordnung (ZOH) in diesem Fall eine ausreichend große *effektive* Bandbreite zur Verfügung stellt und somit das ABS-Steuersignal annähernd fehlerfrei übertragen werden

⁵Bei diesem Beispiel wurde die maximale Momentanfrequenz über die *HILBERT-HUANG*-Transformation nach erfolgter Simulation bestimmt [13]. Es sind aber auch Methoden zur *online* Schätzung der maximalen Momentanfrequenz verfügbar.

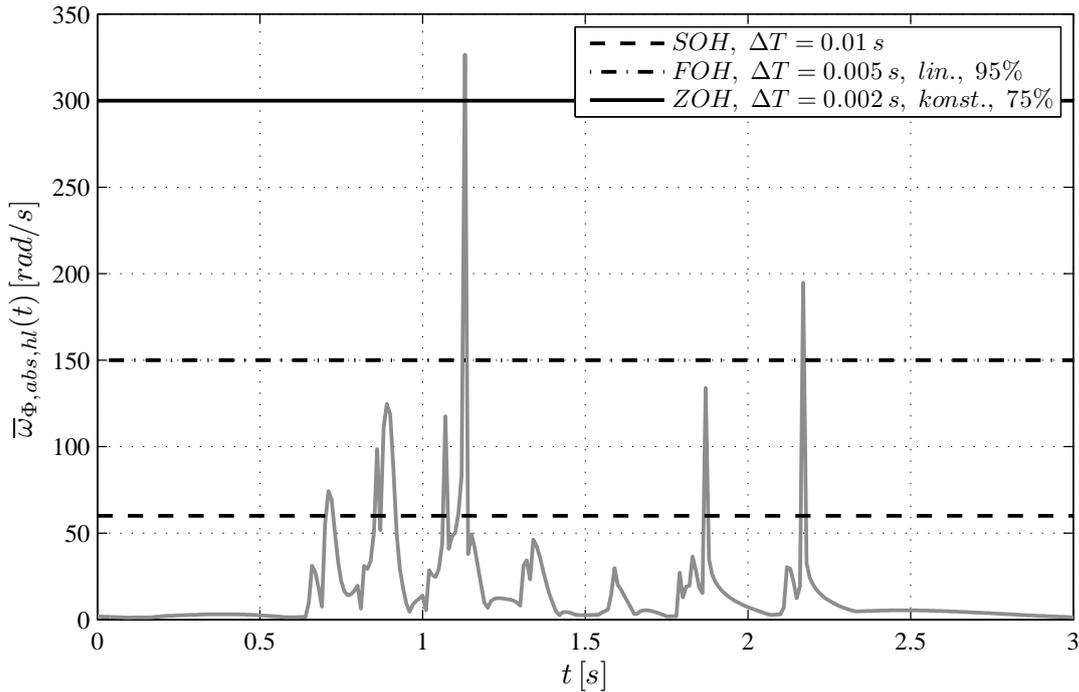


Abbildung 14: Darstellung der maximalen Momentanfrequenz $\bar{\omega}_{\Phi,abs,hl}(t)$ des ABS-Signals hinten links der Monosimulation samt Kennzeichnung der effektiven Bandbreiten $\bar{\omega}$ der verwendeten Kopplungen

kann. Anhand dieser Grafik lassen sich z. B. auch die Koppelfehler im ABS-Steuersignal $u_{abs,hl}(t)$ bei der SOH- und der FOH-Kopplung erklären (12). In der Abb. ist z. B. eine Abweichung um den Zeitpunkt von $t \approx 1.2$ s zu erkennen. Genau an dieser Stelle tritt eine hohe maximale Momentanfrequenz auf (vgl. Abb. 14), sodass die *effektiven* Bandbreiten der beiden Kopplungen nicht ausreichen und somit ein nicht vernachlässigbarer Fehler in das System eingebracht wird. Speziell dieser Fehler hat Auswirkungen auf den nachfolgenden Verlauf der Koppelgrößen. D. h., anhand der Resultate einer Co-Simulation kann die Lösung unter Berücksichtigung der zulässigen *effektiven* Bandbreiten bewertet werden.

Abschließend sei angemerkt, dass bei diesem Beispiel der Verlauf der maximalen Momentanfrequenz nur wenige starke Überhöhungen enthält. Damit nur ein vernachlässigbar kleiner Fehler in die Simulation eingebracht wird, muss eine *konstante* Makro-Schrittweite ausreichend klein gewählt werden, damit die *effektive* Bandbreite zu den Zeitpunkten, wo hohe Frequenzanteile im Koppelsignal vorliegen, gewährleistet werden kann. Dies führt zu langen Simulationszeiten. Abhilfe schafft hier eine *adaptiv* angepasste Makro-Schrittweite. Dieser Aspekt wird nachfolgend beleuchtet.

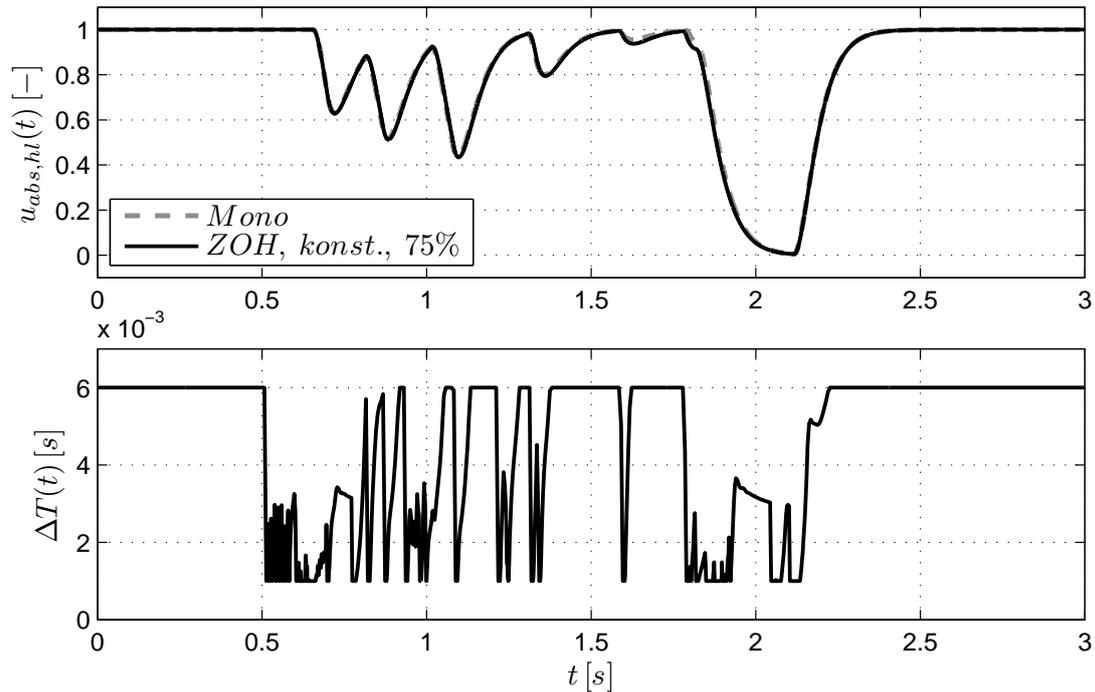


Abbildung 15: Gegenüberstellung der Resultate der Monosimulation und der Co-Simulation mit Extrapolation nullter Ordnung (ZOH) mit konstanter Korrektur und adaptiver Makro-Schrittweitensteuerung

4.5 Adaptive Steuerung der Makro-Schrittweite

Bei diesem Co-Simulationsbeispiel ist Potential zur Reduktion der Gesamtsimulationszeit vorhanden. Da die Schrittweitensteuerung auf bereits vergangenen Werten des Koppelsignals basiert, kann sich nachträglich erweisen, dass die Makro-Zeitschrittweite zu groß gewählt wurde. Dies tritt vor allem dort auf, wo plötzliche Änderungen im Koppelsignal vorkommen. Eine Möglichkeit, um den so eingebrachten Fehler nachträglich zu kompensieren, besteht durch die Anwendung der vorgestellten Korrekturmethode.

Als beispielhafte Konfiguration wurde eine Co-Simulation mit Extrapolation nullter Ordnung (ZOH), *konstanter* Korrektur ($\gamma = 75\%$) und *adaptiv* gesteuerter Makro-Schrittweite im zulässigen Intervall von $\Delta T^{<m>} \in [0.001\text{ s}, 0.006\text{ s}]$ durchgeführt. Basierend auf der aktuell verwendeten Makro-Schrittweite $\Delta T^{<m>}$ wird abhängig vom ermittelten Fehler die zukünftige Makro-Schrittweite $\Delta T^{<m+1>}$ bestimmt, siehe Abb. 15. Die Koppelgrößen sind dabei graphisch deckungsgleich mit jenen der durchgeführten Monosimulation. Zusätzlich ist im Bild unten der Verlauf der *adaptiv* angepassten Makro-Schrittweite angeführt. Dem Bild ist zu entnehmen, dass überall dort, wo die Bandbreite aufgrund der aktuell verwendeten Makro-Schrittweite $\Delta T(t)$ nicht ausreicht, die Makro-Schrittweite reduziert wird, um eine annähernd fehlerfreie Kopplung zu ermöglichen.

Bei diesem Beispiel werden 1044 Makro-Zeitschritte zur Lösung benötigt. Im Vergleich zu einer *konstant* gewählten Makro-Schrittweite $\Delta T = 0.001\text{ s}$ können in diesem Fall 1956

Makro-Zeitschritte bei annähernd gleichbleibender Genauigkeit eingespart werden!

5 Zusammenfassung

Dieser Beitrag gibt einen Einblick in eine systemorientierte Betrachtungsweise der nicht-iterativen Kopplung für Co-Simulationsanwendungen. Im Gegensatz zur typischen Analyse im Zeitbereich erfolgt die Beschreibung des Koppelprozesses allgemein im Frequenzbereich. Darauf aufbauend führt eine einfache Erweiterung durch einen sog. Kompensationspfad zur erheblichen Reduktion von Extrapolationsfehlern. Basierend auf dieser Überlegung kann eine sinnvolle Anwendung von Glättungsfilttern zur Reduktion von Koppelnebenwirkungen, wie Aliasing und Unstetigkeiten, vorgeschlagen werden. Zudem ist auch eine frequenzabhängige, adaptive Steuerung der Koppel-Schrittweite und eine neuartige Methode zur Bewertung der Kopplung naheliegend. Hauptkriterium zur erfolgreichen Anwendung ist die Bestimmung der maximalen Koppelsignalfrequenz, was auch den aktuellen und zukünftigen Forschungsgegenstand darstellt.

6 Danksagung

Die Autoren danken dem COMET K2 Forschungsförderungs-Programm des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr, Innovation und Technologie (BMVIT), des Österreichischen Bundesministeriums für Wirtschaft, Familie und Jugend (BMWFJ), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), des Landes Steiermark sowie der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG) für die finanzielle Unterstützung.

Ebenfalls danke ich dem wissenschaftlichem Projektpartner Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz. Besonderer Dank gilt Herrn Daniel Muschick für die gewissenhafte Durchsicht.

Literatur

- [1] *ICOS 2.0*. Virtual Vehicle Research Center, Graz, Austria, software information available at <http://www.v2c2.at/icos>.
- [2] *MODELISAR* Consortium: Functional Mock-up Interface for Model Exchange and Co-Simulation, information available at <http://www.functional-mockup-interface.org>.
- [3] Arnold M. und Schiehlen W. (Herausgeber): *Simulation Techniques for Applied Dynamics - CISM Course and Lectures, vol. 507*. Springer, Vienna, 2009.
- [4] Benedikt M.: *Eine Kopplungsmethode für die nicht-iterative Co-Simulation*. Dissertation, Technische Universität Graz, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, 2013.

- [5] Benedikt M., Watzenig D. und Hofer A.: *Modelling and Analysis of the Non-iterative Coupling Process for Co-Simulation*. Math. Comp. Mod. Dyn. Sys., 19(5):451–470, 2013.
- [6] Benedikt M., Watzenig D., Zehetner J. und Hofer A.: *NEPCE - A nearly energy-preserving coupling element for weak-coupled problems and co-simulations*. In: *Proceedings of the V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, Seiten 1020–1032, 2013.
- [7] Busch M.: *Zur effizienten Kopplung von Simulationsprogrammen*. Dissertation, Universität Kassel, 2012.
- [8] Cleveland W.: *First-Order-Hold Interpolation Digital-To-Analog Converter with Application to Aircraft Simulation*. Technischer Bericht NASA TN D-8331, Ames Research Center, Moffett Field, Calif., 1976.
- [9] Dugard L. und Verriest E. I.: *Lecture Notes in Control and Information Sciences 228*. Springer-Verlag London, 1998, ISBN 3-540-76193-4.
- [10] Gausch F., Hofer A. und Schlacher K.: *Digitale Regelkreise - Ein einfacher Einstieg mit dem Programm μ LINSY*. Oldenbourg, 1991, ISBN 978-3486218367.
- [11] Gu K., Kharitonov V. L. und J. Chen: *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser Boston, 2003, ISBN 0-8176-4212-9.
- [12] Horn M. und Dourdoumas N.: *Regelungstechnik - Rechnerunterstützter Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise*. Pearson, 2004, ISBN 3-8273-7059-0.
- [13] Huang N. E., Shen Z., Long S. R., Wu M. L., Shih H. H., Zheng Q., Yen N. C., Tung C. C. und Liu H. H.: *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*. Seiten 903–995, 1998. Proc. R. Soc. Lond. A.
- [14] Janschek K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme: Methoden - Modelle - Konzepte*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012, ISBN 978-3-540-78876-8.
- [15] Niculescu S. I.: *Delay Effects on Stability - A Robust Control Approach*. Springer-Verlag London, 2001, ISBN 1-85233-291-3.
- [16] Reinschke K.: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 978-3-540-21886-9.

Modellbildung von Luft- und Rauchgasrezirkulations-Zufuhren bei Biomasse-Feuerungsanlagen

Christoph Schörghuber^{1,*}, Markus Gölles², Nicolaos Dourdoumas¹,
Thomas Brunner^{2,3,4}, Ingwald Obernberger^{2,3,4}

¹ Technische Universität Graz, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik,
Kopernikusgasse 24/II, 8010 Graz

E-mail: christoph.schoerghuber@tugraz.at, nicolaos.dourdoumas@tugraz.at

² BIOENERGY 2020+ GmbH, Inffeldgasse 21b, 8010 Graz

E-mail: markus.goelles@bioenergy2020.eu, thomas.brunner@bioenergy2020.eu

³ Technische Universität Graz, Institut für Prozess- und Partikeltechnik, Inffeldgasse 21a, 8010 Graz

E-mail: ingwald.obernberger@tugraz.at

⁴ BIOS BIOENERGIESYSTEME GmbH, Inffeldgasse 21b, 8010 Graz

* Korrespondierender Autor

Zusammenfassung

Um die Effizienz moderner Biomassefeuerungsanlagen zu steigern, ist es vorteilhaft modellbasierte Regelstrategien zu verwenden. Die dafür benötigten einfachen Modelle sind allerdings nicht für alle Teile solch einer komplexen Anlage erstellt. Im vorliegenden Beitrag werden die Luftzufuhren und die Rauchgasrezirkulation von gewöhnlichen am Markt verfügbaren Biomassefeuerungen untersucht und im Hinblick auf eine modellbasierte Regelung mathematisch modelliert.

1 Einleitung

Die Verbrennung von Biomasse zur Wärmeerzeugung oder für Kraft-Wärme-Kopplung hat in den letzten Jahren groß an Bedeutung gewonnen. Für die Steigerung des Wirkungsgrades und der Flexibilität solcher Anlagen ist eine gut funktionierende Regelung entscheidend [10, 13]. Früher sind dafür hauptsächlich PID-Reglerstrukturen [9, 15] eingesetzt worden. In letzter Zeit wurden auch lineare modellprädiktive Regelungen in Betracht gezogen [11, 14]. Dabei wurden lineare Modelle höherer Ordnung verwendet und die im System vorhandenen Nichtlinearitäten vernachlässigt. Neue Ansätze mit modellbasierten Regelungsstrategien, wie sie in [1, 8] vorgeschlagen werden, verwenden als Grundlage ein einfaches nichtlineares Modell vierter Ordnung. Durch den Regler werden dabei Massenströme vorgegeben, um den Verbrennungsprozess gezielt zu beeinflussen. Diese Massenströme müssen von den Stellgeräten in den entsprechenden Versorgungsleitungen zugeführt werden und ihre Verläufe sollen vorgegebenen Werten durch unterlagerte Regelungen

möglichst gut folgen. Für eine hohe Regelgüte der gesamten Anlage ist es wichtig, dass die unterlagerten Regelkreise schnell und exakt funktionieren. Bisher wurden dafür experimentell eingestellte PI-Regler mit einfachen Vorsteuerungen auf Basis statischer Modelle [2] eingesetzt. Um die gesamte Anlagenregelung zu verbessern, soll nun ein vollständiger modellbasierter Ansatz verwendet werden. Ziel dieser Arbeit ist es, hierfür geeignete Modelle anhand einer speziellen Biomasse-Feuerungsanlage zu entwickeln. Dabei werden die bestehenden statischen Modelle erweitert und auch die dynamischen Vorgänge der Stellgeräte modelliert.

Zunächst wird in Kapitel 2 die Arbeitsweise der untersuchten Biomasse-Feuerungsanlage erläutert. Die grundlegende Vorgehensweise der Modellierung durch allgemeine Modellansätze wird in Kapitel 3 gezeigt. Danach wird in Kapitel 4 beispielhaft das Modell der Sekundärluftzufuhr bestimmt und an der untersuchten Anlage mittels Messdaten verifiziert. Abschließend wird in Kapitel 5 ein kurzer Ausblick für den dauerhaften Einsatz der Modelle an unterschiedlichen Biomasse-Feuerungsanlagen angegeben.

2 Untersuchte Biomasse-Feuerungsanlage

Die für die Modellbildung notwendigen experimentellen Untersuchungen wurden an einer typischen Flachschrubrost-Feuerungsanlage für stückige Biomasse (siehe Abbildung 1) durchgeführt.

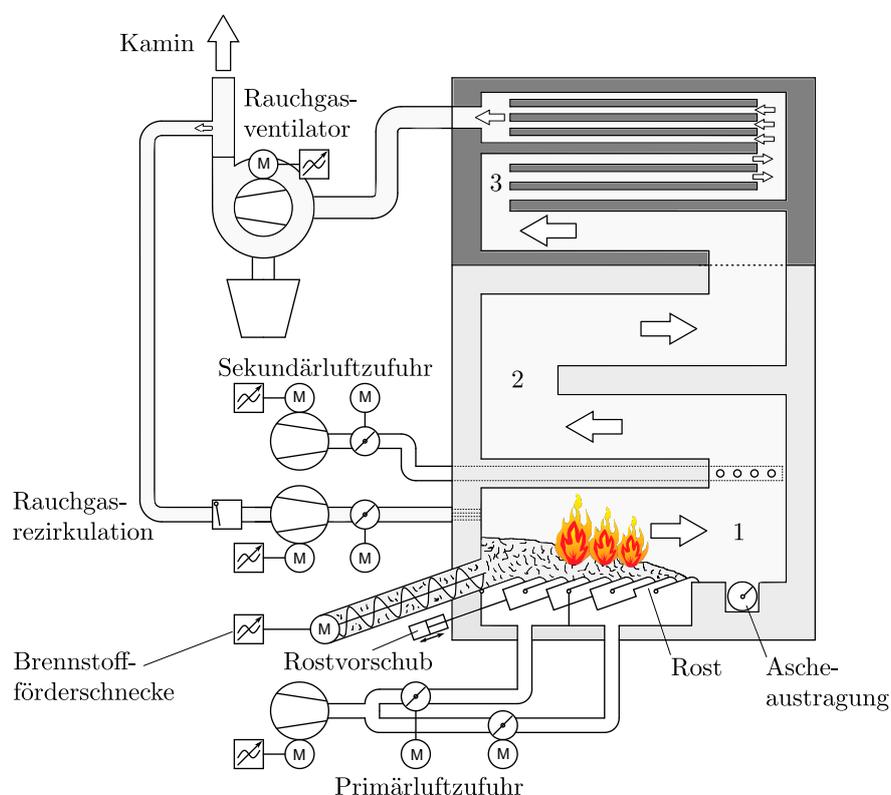


Abbildung 1 – Schematische Darstellung der untersuchten Biomasse-Rostfeuerungsanlage (1 Primärverbrennungszone, 2 Sekundärverbrennungszone, 3 Wärmeübertrager)

Wie bei modernen Anlagen üblich, wird die Verbrennung in eine Primär- und eine Sekundärverbrennungszone räumlich aufgeteilt und jeweils mit einer eigenen Luftzufuhr (Primär- und Sekundärluftzufuhr) versorgt [13]. In die Primärverbrennungszone werden neben der Primärluft auch der Brennstoff und ein Teil des sauerstoffarmen Rauchgases zur Temperaturbeeinflussung (Rauchgasrezirkulation) eingebracht. Der Verbrennungsprozess wird bei dieser Anlage über die Brennstoffzufuhr, die Primärluftzufuhr, die Sekundärluftzufuhr und die Rauchgasrezirkulation beeinflusst.

Die Brennstoffzufuhr erfolgt hierbei durch eine Förderschnecke, wobei der Brennstoffmassenstrom näherungsweise proportional der Schneckendrehzahl ist. Für die modellhafte Bestimmung des Brennstoffmassenstromes wird dieser einfache proportionale Zusammenhang verwendet. Der Proportionalitätsfaktor wird dabei näherungsweise aus konstanten Prozessdaten berechnet.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich nun auf die Modellbildung der Luftzufuhren bzw. der Rauchgasrezirkulation. Dabei wird die Gasströmung in den jeweiligen Rohrleitungen von Ventilatoren mit frequenzgesteuerten Asynchronmaschinen erzeugt, welche in einem bestimmten Frequenzbereich kontinuierlich verstellt werden können. Für eine Erweiterung des Stellbereiches und eine schnelle Regulierung der Massenströme werden Klappen verwendet, welche über Stellmotoren kontinuierlich positioniert werden. Zur Messung der Massenströme werden Prandtlrohre sowie Heißfilm-Luftmassensensoren eingesetzt. Für die Modellierung dieser Gaszufuhren werden die Einflüsse der Klappen und Ventilatoren auf die Druckverhältnisse in den Rohrleitungen ermittelt. Deshalb wurden an der untersuchten Biomasse-Feuerungsanlage (speziell bei der Rauchgasrezirkulation) zusätzliche Drucksensoren angebracht.

3 Vorgehensweise bei der Modellbildung

Grundsätzlich wird bei der Modellierung der betrachteten Gaszufuhren (siehe Abbildung 2a) der Zusammenhang zwischen Ventilatordrehzahl ω , Klappenstellung φ , Druckunterschied Δp und resultierendem Massenstrom \dot{m} ermittelt. Zunächst werden die Verhältnisse zwischen Druck und Volumen- bzw. Massenstrom betrachtet. Aufgrund der geringen Druckunterschiede in den untersuchten Rohrleitungen kann dabei in erster Näherung von einem statischen Zusammenhang ausgegangen werden. Im Gegensatz dazu dürfen die dynamischen Vorgänge der Stellorgane, wie etwa das Hochfahren des Ventilators auf eine Soll-drehzahl ω_{soll} bzw. das Anfahren einer neuen Klappenstellung φ_{soll} , nicht vernachlässigt werden. Somit kann man das Modell in einen statischen und einen dynamischen Teil aufsplitten. Aus systemtechnischer Sicht (siehe Abbildung 2b) handelt es sich um ein MISO-System mit zwei Eingangsgrößen ω_{soll} und φ_{soll} , einer messbaren Störgröße Δp und einer Ausgangsgröße \dot{m} .

3.1 Modellierung der Druck- und Massentstromverhältnisse

Zur Ermittlung des statischen Zusammenhanges zwischen Druckdifferenz Δp und Massenstrom \dot{m} in den Rohrleitungen werden die vorherrschenden physikalischen Verhältnisse durch eine geeignete Kombination einfacher strömungsmechanischer Phänomene mathe-

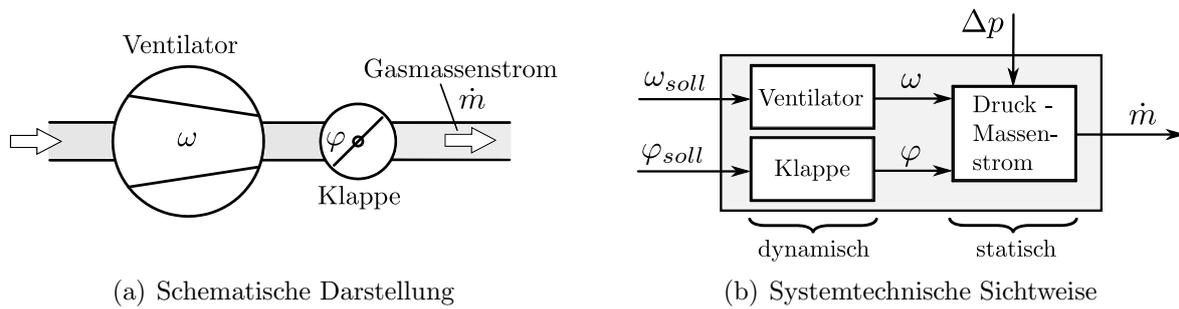


Abbildung 2 – Betrachtete Gaszufuhren

matisch nachgebildet. Hierfür werden in den Abschnitten 3.1.1 – 3.1.4 die aus [2] bekannten Modellansätze kurz erläutert und um fehlende Zusammenhänge erweitert. Ferner wird in den Abschnitten 3.1.5 bzw. 3.1.6 gezeigt wie diese Modellansätze zu einem vollständigen statischen Modell untereinander kombiniert bzw. an andere Gastemperaturen angepasst werden können.

3.1.1 Druckabfall in einem Rohr

Bei einer Gasströmung durch eine Rohrleitung (siehe Abbildung 3) entsteht aufgrund von Reibungseffekten ein Druckabfall.

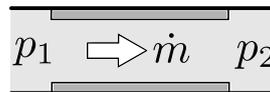


Abbildung 3 – Druckabfall in einem Rohr

Dieser Druckabfall (in weiterer Folge als „rohriger“ Druckabfall bezeichnet) kann bei Verwendung hydraulisch glatter Rohre innerhalb eines Bereiches der Reynolds-Zahl Re $2320 \leq Re \leq 10^5$ durch

$$\Delta p := p_2 - p_1 = -\hat{R}_1 \dot{V}^{1.75} \quad (1)$$

mit

$$\hat{R}_1 = 0.242 \frac{L}{D^{4.75}} \eta^{0.25} \rho^{0.75} \quad (2)$$

sehr gut beschrieben werden. Hierbei sind D der Rohrdurchmesser, L die Rohrlänge, ρ die Dichte, η die dynamische Viskosität und \dot{V} der Volumenstrom. Setzt man in diese Gleichung die Relation

$$\dot{m} = \dot{V} \rho \quad (3)$$

ein, so erhält man den gesuchten Zusammenhang zwischen Druckabfall Δp und Massenstrom \dot{m}

$$\Delta p = -R_1 \dot{m}^{1.75} \quad (4)$$

mit

$$R_1 = 0.242 \frac{L}{D^{4.75}} \eta^{0.25} \rho^{2.5}. \quad (5)$$

Durch R_1 wird der Widerstandsbeiwert bei „rohrigem“ Druckabfall symbolisiert.

3.1.2 Druckabfall an einer Blende

Bei der Gasströmung durch eine Blende (siehe Abbildung 4) kann der Druckabfall Δp (in weiterer Folge als „blendiger“ Druckabfall bezeichnet) durch

$$\Delta p := p_3 - p_2 = -\hat{R}_2 \dot{V}^2 \quad (6)$$

mit

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\alpha^2 A_d^2} \quad (7)$$

beschrieben werden. Dabei sind ρ die Dichte, A_d die Querschnittsfläche der Blendenöffnung und \dot{V} der Volumenstrom. Die dimensionslose Durchflusszahl α wird aus geometrischen Parametern der Blende und des Strömungsprofils und der Kontraktionszahl μ berechnet und ist in [6] angegeben. Unter Beachtung von (3) erhält man

$$\Delta p = -R_2 \dot{m}^2 \quad (8)$$

mit

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\alpha A_d} \right)^2. \quad (9)$$

Hierbei symbolisiert R_2 den Widerstandsbeiwert bei „blendigem“ Druckabfall.

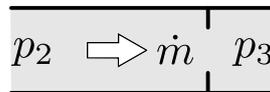


Abbildung 4 – Druckabfall an einer Blende

3.1.3 Druckabfall an einer Klappe

Wird die Rohrströmung mit Hilfe einer Klappe gedrosselt, so hat sich in Versuchen ergeben, dass dieses Verhalten näherungsweise durch einen „blendigen“ Druckabfall beschrieben werden kann (siehe Abschnitt 3.1.2). Der einzige Unterschied im Modell besteht darin, dass die wirksame Querschnittsfläche der Blendenöffnung A_d und somit auch der Widerstandsbeiwert R_2 gemäß Gleichung (8) Funktionen der Klappenstellung φ sind:

$$A_d \rightarrow A_d(\varphi) \quad \Rightarrow \quad R_2 \rightarrow R_2(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho}{\alpha A_d(\varphi)} \right]^2. \quad (10)$$

Aus Messungen wurde ersichtlich, dass sich die Funktion $R_2(\varphi)$, aufgrund der großen Änderungsrate bei nahezu geschlossener Klappe, nur schlecht mathematisch abbilden lässt. Um den Zusammenhang zwischen Klappenstellung und Widerstandsbeiwert besser zu erfassen wird Gleichung (10) umgeformt und der Klappenleitwert c_2 eingeführt:

$$c_2(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{R_2(\varphi)}} = \gamma A_d(\varphi) \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{2} \frac{\alpha}{\rho}. \quad (11)$$

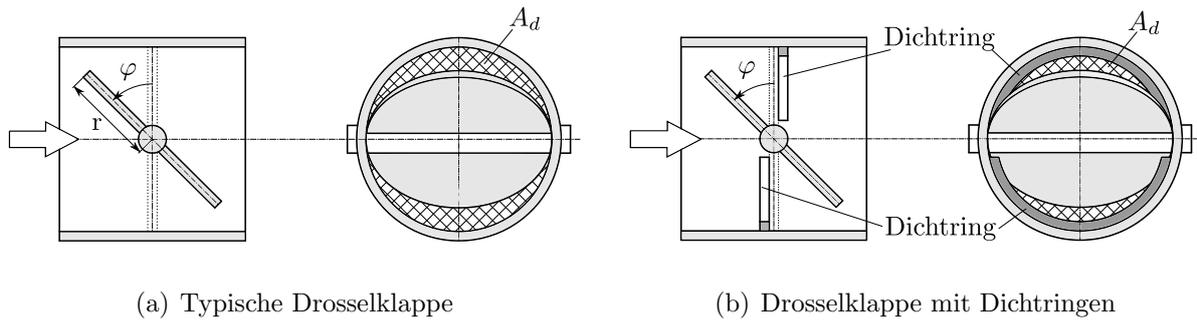


Abbildung 5 – Unterschiedliche Klappentypen

Im Rahmen der durchgeführten Versuche wurden typische Drosselklappen (siehe Abbildung 5(a)) und Drosselklappen mit Dichtringen (siehe Abbildung 5(b)) untersucht. Bei letzteren handelt es sich um Sonderanfertigungen um die Dichtigkeit der geschlossenen Klappen zu verbessern. Dabei sind an der Rohrwand sogenannte Dichtringe aufgeschweißt. Je nach verwendetem Klappentyp sind die Funktionen $A_d(\varphi)$ und $c_2(\varphi)$ unterschiedlich. Sie werden in weiterer Folge anhand geometrischer Überlegungen näher erläutert.

(a) **Typische Drosselklappe:**

Wird eine typische Drosselklappe (siehe Abbildung 5(a)) verwendet, so kann die Öffnungsfläche $A_d(\varphi)$ in erster Näherung über die Differenz der kreisförmigen Rohrquerschnittsfläche und der projizierten ellipsenförmigen Klappenfläche gemäß der Relation

$$A_d(\varphi) = \pi r^2(1 - \cos\varphi) \quad (12)$$

angegeben werden. Dieser geometrische Ansatz ist allerdings nur bedingt gültig, da beim Winkel $\varphi = \pi/2$ die Fläche $A_d(\varphi)$ gleich der Rohrquerschnittsfläche wäre, welche aber in Wirklichkeit um die Anströmfläche der Welle reduziert wird. Außerdem existiert (aufgrund von Fertigungstoleranzen) auch bei vollständig geschlossener Klappe ein nicht vernachlässigbarer Spalt, durch den das Gas strömen kann. Deshalb wird in der Praxis der empirisch ermittelte Ansatz

$$A_d(\varphi) = \Delta A_d \cdot \sin^2(\varphi) + A_{d0} \quad (13)$$

mit

$$\Delta A_d = \pi r^2 \delta \quad (14)$$

benützt. Hierbei entsprechen A_{d0} der Spaltfläche bei geschlossener Klappe und ΔA_d der maximalen variablen Öffnungsfläche. Der Geometriefaktor δ reduziert die Rohrquerschnittsfläche auf die, durch den Winkel der Klappenstellung veränderbare Fläche und befindet sich typischerweise im Intervall (0.5, 1). Wird der Ansatz aus Gleichung (13) in Gleichung (11) eingesetzt, so ergibt sich für den Klappenleitwert

$$c_2(\varphi) = \Delta c_2 \cdot \sin^2(\varphi) + c_{20} \quad (15)$$

mit den Konstanten

$$\Delta c_2 = \gamma \Delta A_d \quad \text{und} \quad c_{20} = \gamma A_{d0}. \quad (16)$$

(b) **Drosselklappe mit Dichtringen:**

Für eine Drosselklappe mit Dichtringen (siehe Abbildung 5(b)) liefert die Funktion $A_d(\varphi)$ gemäß (13) keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Das liegt daran, dass die Strömung bei nahezu geschlossener Klappe aufgrund der Dichtringe stärker behindert wird und in diesem Bereich der prinzipielle Verlauf für die Öffnungsfläche $A_d(\varphi)$ von dem der typischen Drosselklappe abweicht. Um dieses Verhalten mathematisch zu erfassen, wurden für unterschiedliche Klappenstellungen die Klappenleitwerte c_2 aus Messdaten ermittelt und über die Klappenstellung φ aufgetragen (siehe Abbildung 6 - Drosselklappe mit Dichtringen). Werden diese diskreten Messwerte zu einer Kurve $c_2(\varphi)$ verbunden, so besitzt diese (im vorliegenden Fall) zwei Wendepunkte und kann durch ein Polynom der Ordnung n_p mit den Polynomkoeffizienten q_i

$$c_2(\varphi) = \sum_{i=0}^{n_p} q_i \varphi^i \quad (17)$$

beschrieben werden. Um die Funktion $c_2(\varphi)$ einfach zu halten wird die Ordnung n_p so klein wie möglich gewählt und befindet sich bei den untersuchten Klappen zwischen vier und sieben.

In Abbildung 6 sind die mit den Modellen (16) und (17) berechneten Klappenleitwerte den aus Messdaten berechneten Klappenleitwerten für typische Drosselklappen und Drosselklappen mit Dichtringen gegenübergestellt. Die Koeffizienten der Modelle wurden dabei mittels numerischer Optimierungsalgorithmen aus experimentell ermittelten Messdaten berechnet. Die Polynomordnung beträgt hierbei $n_p = 7$.

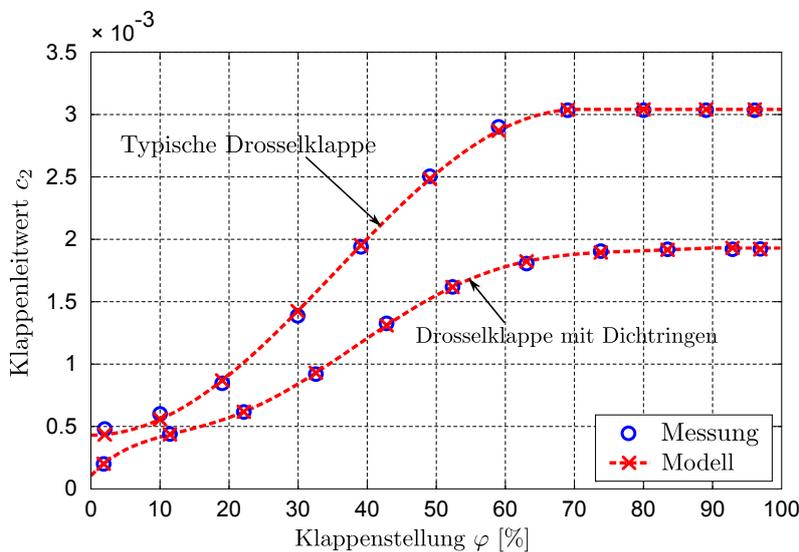


Abbildung 6 – Klappenleitwerte für typische Drosselklappen und Drosselklappen mit Dichtringen als Funktionen der Klappenstellung

Wie man erkennt, ist der Klappenleitwert beider untersuchter Klappentypen ab einer Klappenstellung von $\varphi \approx 75\%$ näherungsweise konstant. Das bedeutet, dass Klappenstellungen größer 75% den Massenstrom nicht weiter erhöhen und somit nicht angefahren

werden müssen. Für die Ermittlung des Druckabfalles an der Klappe wird der Klappenleitwert $c_2(\varphi)$ entsprechend Gleichung (11) in den „blendigen“ Widerstandsbeiwert R_2 umgerechnet und in Gleichung (8) eingesetzt. Man erhält für das statische Modell einer Klappe

$$\Delta p = - \left[\frac{\dot{m}}{c_2(\varphi)} \right]^2. \quad (18)$$

3.1.4 Druckanhebung eines Ventilators

Die erzeugte Druckanhebung Δp ist bei den betrachteten Radialventilatoren näherungsweise proportional dem Quadrat der Ventilator Drehzahl ω und kann durch den einfachen Ansatz

$$\Delta p = c_V \omega^2 \quad \text{mit} \quad c_V = \hat{c}_V \rho \quad (19)$$

beschrieben werden [5]. Hierbei stellt c_V die Ventilator konstante, ρ die Dichte des strömenden Gases und \hat{c}_V die auf die Dichte bezogene Ventilator konstante dar, wodurch die Abhängigkeit der Druckanhebung von der Gasdichte gezeigt wird. Aufgrund von Reibungsverlusten nimmt die erzeugte Ventilator druckerhöhung Δp mit steigendem Massenstrom \dot{m} ab. Dieses Phänomen wird vom Hersteller für den jeweiligen Ventilator typ mit Hilfe einer Ventilator kennlinie erfasst z.B. [7]. Da diese Reibungsverluste im Wesentlichen einem „rohrigen“ und/oder einem „blendigen“ Druckabfall entsprechen, wird Ansatz (19) für die Ventilator druckerhöhung mit dem eines „rohrigen“ Druckabfalles (Widerstandsbeiwert R_1) bzw. dem eines „blendigen“ Druckabfalles (Widerstandsbeiwert R_2) kombiniert:

$$\Delta p = c_V \omega^2 - R_1 \dot{m}^{1.75} - R_2 \dot{m}^2. \quad (20)$$

3.1.5 Kombination der strömungsmechanischen Modellansätze

Für die statische Modellierung einer gesamten Gaszufuhr werden die erwähnten Modellansätze miteinander kombiniert. Soll beispielsweise eine Rohrleitung mit Ventilator und Klappe mathematisch nachgebildet werden (siehe Abbildung 7), so wird der Zusammenhang von Druckdifferenz Δp (zwischen Modellaus- und Modelleingang) und Massenstrom \dot{m} wie folgt beschrieben:

$$\Delta p := p_3 - p_0 = c_V \omega^2 - R_1 \dot{m}^{1.75} - R_2(\varphi) \dot{m}^2. \quad (21)$$

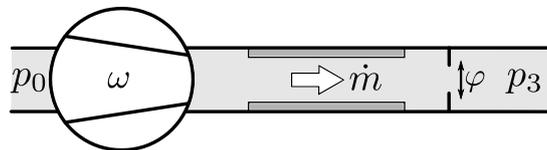


Abbildung 7 – Modell einer beispielhaften Gaszufuhr

Dabei beinhalten die beiden Widerstandsbeiwerte R_1 und R_2 auch den Druckabfall im Ventilator. Um bei bekannter Druckdifferenz Δp , vorgegebener Klappenstellung φ und Ventilator Drehzahl ω den Massenstrom \dot{m} zu bestimmen, muss Gleichung (21) umgeformt

$$R_1 \dot{m}^{1.75} + R_2(\varphi) \dot{m}^2 = c_V \omega^2 - \Delta p \quad (22)$$

und nach \dot{m} aufgelöst werden. Um den Massenstrom \dot{m} explizit ausdrücken zu können, kann laut [2] die Näherung

$$R_1 \dot{m}^{1.75} + R_2(\varphi) \dot{m}^2 \approx R(\varphi) \dot{m}^{q(\varphi)} \quad (23)$$

mit den Parametern

$$R(\varphi) := R_1 + R_2(\varphi) \quad \text{und} \quad q(\varphi) := 1 + \frac{0.75R_1 + R_2(\varphi)}{R_1 + R_2(\varphi)} \quad (24)$$

verwendet werden. Man erhält schließlich für den statischen Modell-Zusammenhang

$$\dot{m} = \left[\frac{c_V \omega^2 - \Delta p}{R(\varphi)} \right]^{\frac{1}{q(\varphi)}} \quad (25)$$

mit den beiden Modelleingängen φ und ω und dem Modellausgang \dot{m} . Die gemessene Druckdifferenz Δp kann dabei als Störgröße betrachtet werden.

3.1.6 Anpassung an variable Gastemperaturen

Werden die Koeffizienten der Modelle an eine reale Anlage angepasst, so ist das ermittelte Modell nur für das verwendete Gas $G1$ mit der, während der Identifikation vorherrschenden Gastemperatur T_{G1} gültig. Soll durch die Modelle eine Gasströmung mit einer anderen Temperatur oder gar ein anderes (ähnliches) Gas $G2$ abgebildet werden, so müssen die Modellkoeffizienten an dieses neue Gas bzw. an die neue Temperatur T_{G2} angepasst werden. Betrachtet man die bereits angeführten Modellparameter R_1 , R_2 , c_2 und c_V aus den Gleichungen (4), (8), (11) und (19) im Hinblick auf ihre Abhängigkeit von der Gasdichte ρ bzw. von der dynamischen Viskosität des Gases η , so können folgende Ähnlichkeitsgesetze abgeleitet werden:

- Widerstandsbeiwert bei „rohrigem“ Druckabfall R_1 :

$$\frac{R_{1,G1}}{R_{1,G2}} = \left[\frac{\eta_{G1}(T_{G1})}{\eta_{G2}(T_{G2})} \right]^{0.25} \cdot \left[\frac{\rho_{G1}(T_{G1})}{\rho_{G2}(T_{G2})} \right]^{2.5} \quad (26)$$

- Widerstandsbeiwert bei „blendigem“ Druckabfall R_2 :

$$\frac{R_{2,G1}}{R_{2,G2}} = \left[\frac{\rho_{G1}(T_{G1})}{\rho_{G2}(T_{G2})} \right]^2 \quad (27)$$

- Klappenleitwert c_2 :

$$\frac{c_{2,G1}}{c_{2,G2}} = \frac{\rho_{G2}(T_{G2})}{\rho_{G1}(T_{G1})} \quad (28)$$

- Ventilatorkonstante c_V :

$$\frac{c_{V,G1}}{c_{V,G2}} = \frac{\rho_{G1}(T_{G1})}{\rho_{G2}(T_{G2})} \quad (29)$$

Sollte sich die Temperatur des Gases über die Rohrlänge des Modells verändern, so wird eine repräsentative mittlere Temperatur aus einzelnen Messungen ähnlich wie in [3] ermittelt, mit der die Modelle angepasst werden.

3.2 Modellierung der dynamischen Eigenschaften der Stellgeräte

Durch die Klappenstellungen und die Ventilator Drehzahlen werden die Massenströme in den Versorgungsleitungen vorgegeben. Die drehbar ausgeführten Klappen werden von positionsgeregelten Stellmotoren angetrieben. Die Ventilatoren sind von Asynchronmaschinen angetrieben, wobei die Drehzahlen mittels Frequenzumrichter gesteuert vorgegeben werden. Um die Massenströme in den Versorgungsleitungen zu verändern, müssen neue Klappenstellungen angefahren bzw. neue Ventilator Drehzahlen eingestellt werden. Aufgrund der Tatsache, dass diese dynamischen Stellvorgänge eine gewisse Zeit benötigen, müssen sie bei der Modellierung der Versorgungsleitungen entsprechend berücksichtigt werden. Dafür werden nun Modelle vorgeschlagen, welche die dynamischen Vorgänge der beiden Stellorgane näherungsweise wiedergeben.

3.2.1 Dynamisches Ventilatormodell

Die Asynchronmaschine für den Ventilatorantrieb wird von einem Frequenzumrichter im sogenannten U/f-Betrieb gesteuert [12]. Hierbei wird die Drehzahl der Asynchronmaschine durch die elektrische Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_1 vorgegeben. Über eine entsprechende Steuerung der Statorspannung U_1 wird dabei der magnetische Fluss Ψ näherungsweise konstant gehalten. Dadurch bleibt die typische Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie in ihrer Form immer gleich und kann entlang der Drehzahl-Achse zur vorgegebenen elektrischen Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_1 verschoben werden [16]. Das Antriebsmoment der Asynchronmaschine kann dadurch sehr einfach über die Drehzahl-Drehmoment-Kennlinien bestimmt werden.

In Abbildung 8 sind die Drehzahl-Drehmoment-Kennlinien für zwei unterschiedliche Drehfeldwinkelgeschwindigkeiten Ω_1 und $\bar{\Omega}_1$ dargestellt.

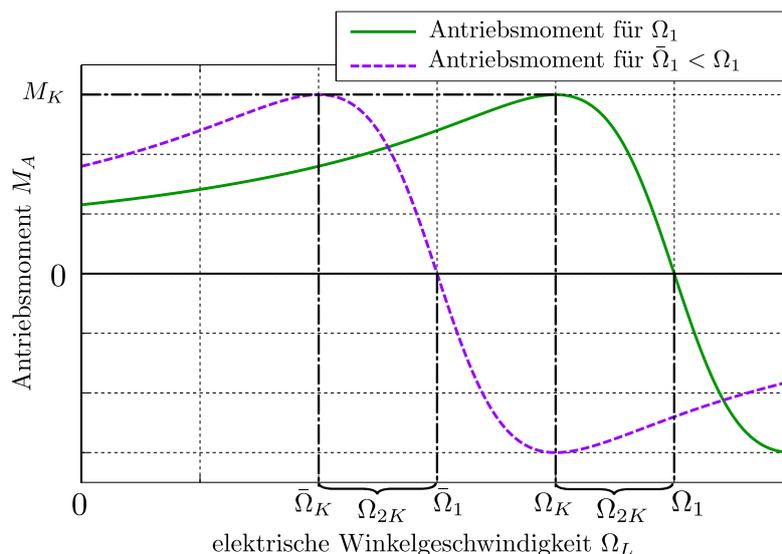


Abbildung 8 – Drehzahl-Drehmoment Kennlinie einer Asynchronmaschine

Dabei ist das Antriebsmoment M_A über die elektrische Winkelgeschwindigkeit des Rotors

Ω_L aufgetragen. Die elektrische Winkelgeschwindigkeit des Rotors beim maximalen Antriebsmoment - dem sogenannten Kippmoment M_K - wird mit Ω_K bezeichnet. Definiert man die Kippschlupfwinkelgeschwindigkeit Ω_{2K} mit

$$\Omega_{2K} := \Omega_1 - \Omega_K \quad (30)$$

und zeichnet diese in die Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie ein, so erkennt man, dass sie unabhängig von der vorgegebenen Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_1 konstant bleibt. Wird die Asynchronmaschine mit kleinem Schlupf s betrieben und somit ein großer Sicherheitsabstand zum Kippmoment M_K eingehalten, so kann der einfache Ansatz

$$M_A = 2M_K \frac{s}{s_K} \quad (31)$$

für das Antriebsmoment M_A der Asynchronmaschine verwendet werden [16]. Mit der Definition für den Schlupf s

$$s = 1 - \frac{\Omega_L}{\Omega_1} \quad (32)$$

und für den Kippschlupf s_K

$$s_K = \frac{\Omega_{2K}}{\Omega_1} \quad \text{mit} \quad \Omega_{2K} = \text{konst} \quad (33)$$

ergibt sich aus Gleichung (31) die lineare Gleichung für das Antriebsmoment M_A

$$M_A = \frac{2M_K}{\Omega_{2K}} (\Omega_1 - \Omega_L). \quad (34)$$

Mit Hilfe der Polpaarzahl Z_p kann über den Zusammenhang

$$\Omega_L = \omega Z_p \quad (35)$$

die elektrische Winkelgeschwindigkeit Ω_L in die Motor- bzw. Ventilator-drehzahl ω umgerechnet werden. Man erhält

$$M_A = \frac{2M_K}{\Omega_{2K}} (\Omega_1 - \omega Z_p) \quad (36)$$

für das Antriebsmoment der Asynchronmaschine in Abhängigkeit der elektrischen Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_1 und der Ventilator-drehzahl ω .

Das Reibmoment der rotierenden Ventilatorschaufeln kann als Funktion der Ventilator-drehzahl ω und der Klappenstellung φ (je nach Klappenstellung ergeben sich andere Druckverhältnisse im Ventilator)

$$M_R = f(\omega, \varphi) \quad (37)$$

angegeben werden. Um ein einfaches lineares Modell zu erhalten, wird das Reibmoment näherungsweise durch viskose Reibung, unabhängig von der Klappenstellung mit Hilfe der drehzahlproportionalen Konstanten k_R

$$M_R = k_R \omega \quad (38)$$

angesetzt.

Mit Hilfe des Drallsatzes wird nun die Bewegungsgleichung für den Ventilator hergeleitet. Mit dem Antriebsmoment M_A aus Gleichung (36) und dem Reibmoment aus Gleichung (38) ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M_R + M_A = -k_R \omega + \frac{2M_K}{\Omega_{2K}} (\Omega_1 - \omega Z_p), \quad (39)$$

wobei mit J das Trägheitsmoment der rotierenden Teile bezeichnet wird. Nach einfachen Umformungen erhält man

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_R \Omega_{2K} + 2M_K Z_p}{J \Omega_{2K}} \omega + \frac{2M_K}{J \Omega_{2K}} \Omega_1. \quad (40)$$

Führt man die positiven Konstanten

$$\tau_\omega = \frac{J \Omega_{2K}}{k_R \Omega_{2K} + 2M_K Z_p} \quad \text{und} \quad V = \frac{2M_K}{k_R \Omega_{2K} + 2M_K Z_p} \quad (41)$$

ein, so ist die Bewegungsgleichung für den Ventilator mit

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\tau_\omega} \omega + \frac{V}{\tau_\omega} \Omega_1 \quad (42)$$

sehr übersichtlich angeschrieben. Mit τ_ω wird dabei die Zeitkonstante des Ventilatormodells bezeichnet. Mit dem konstanten Verstärkungsfaktor V wird der (aufgrund der Verwendung von Gleichung (38)) konstante Schlupf der Asynchronmaschine berücksichtigt. Um die Ventilator Drehzahl ω zu verändern, muss vom Frequenzumrichter eine andere Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_1 vorgegeben werden. Aufgrund der gewählten Betriebsart des Frequenzumrichters wird diese in Form einer Rampenfunktion $\Omega_1(t)$ (siehe Abbildung 9) vorgegeben. Die Steigung k_Ω der Rampenfunktion kann mit Hilfe der Parameter „Hochlaufzeit“ bzw. „Auslaufzeit“ am Frequenzumrichter eingestellt werden. Aufgrund der implementierten Software zur Ansteuerung der Frequenzumrichter tritt bei einer neuen Sollwertvorgabe eine nicht zu vernachlässigende Signallaufzeit T auf, welche bei der Modellierung berücksichtigt werden muss.

In Abbildung 9 ist ersichtlich, dass die Drehfeldwinkelgeschwindigkeit $\Omega_1(t)$ so lange die konstante Steigung k_Ω besitzt, bis diese gleich der geforderten Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_{soll} ist. Die zeitliche Ableitung der Funktion $\Omega_1(t)$ besitzt somit die Gestalt:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = k_\Omega \cdot \text{sign} [\Omega_{soll}(t - T) - \Omega_1]. \quad (43)$$

Mit $\Omega_{soll}(t - T)$ wird dabei die zeitliche Verzögerung der geforderten Drehfeldwinkelgeschwindigkeit Ω_{soll} um die Signallaufzeit T beschrieben. Betrachtet man die stationären Zustände der Differentialgleichungen (42) und (43) so erhält man folgende Relationen:

$$\omega = V \Omega_1 =: \omega_{stat} \quad \text{und} \quad \Omega_1 = \Omega_{soll} =: \Omega_{1stat} \quad (44)$$

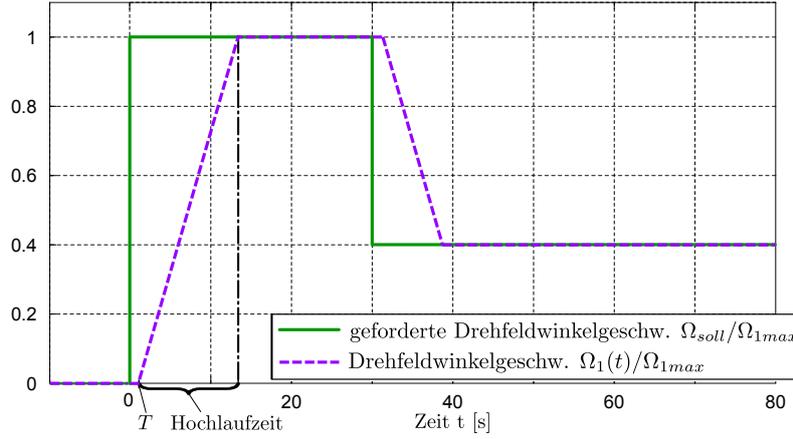


Abbildung 9 – Rampenfunktion der vom Frequenzumrichter vorgegebenen Drehfeldwinkelgeschwindigkeit

Führt man die geforderte Ventilator Drehzahl ω_{soll} ein und kombiniert die beiden stationären Lösungen, so kann

$$\omega_{stat} = V\Omega_{soll} \stackrel{!}{=} \omega_{soll} \quad (45)$$

geschrieben werden. Mit der neuen Größe $\tilde{\omega}$ für die Ventilator Drehzahlrampe

$$\tilde{\omega} = V\Omega_1 \quad (46)$$

erhält man für die Differentialgleichung (42)

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = k_\omega \cdot \text{sign}[\omega_{soll}(t - T) - \tilde{\omega}] \quad \text{mit} \quad k_\omega = k_\Omega V \quad (47)$$

und für die Differentialgleichung (43)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\tau_\omega}\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\tilde{\omega}. \quad (48)$$

Das dynamische Modell eines Ventilators besteht also aus den Differentialgleichungen (47) und (48). In Abbildung 10 ist die, mit dem Modell berechnete Ventilator Drehzahl, der tatsächlichen Ventilator Drehzahl (in Prozent des Stellbereiches) für eine sprunghafte Änderung der geforderten Ventilator Drehzahl gegenübergestellt. Die Modellkoeffizienten wurden dabei mittels numerischer Optimierungsalgorithmen aus Messdaten berechnet. Es ist ersichtlich, dass das dynamische Verhalten des Ventilators mit dem vorgestellten Modell gut wiedergegeben wird. Die geringen Abweichungen sind auf den vereinfachten Ansatz des Reibmomentes M_R (38) zurück zu führen.

3.2.2 Dynamisches Klappenmodell

Die Klappen werden bei der untersuchten Anlage von entsprechenden Stellmotor positioniert. Durch Vorgabe einer analogen Spannung kann die geforderte Klappenstellung φ_{soll} vorgegeben werden, welche dann vom Stellmotor angefahren wird [4]. Da es vom Hersteller

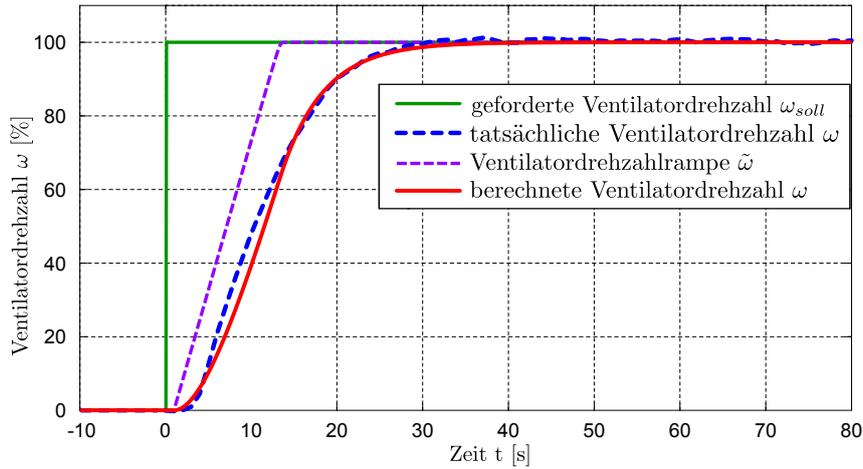


Abbildung 10 – Sprungantwort der Ventilator Drehzahl

des Klappenantriebes keine Information über das Regel- bzw. Steuerkonzept des Stellmotors gibt, wird das dynamische Verhalten der Klappe empirisch nachgebildet. Dafür wurde zunächst die Sprungantwort der Klappenstellung φ aufgezeichnet (siehe Abbildung 11). Aus der Sprungantwort erkennt man, dass die Klappenstellung φ der geforderten Klappenstellung φ_{soll} ähnlich einer Rampenfunktion mit konstanter Steigung folgt. Das bedeutet, dass die Position der Klappe mit nahezu konstanter Winkelgeschwindigkeit verändert wird. Zusätzlich kann man erkennen, dass die Ecken der Rampe „abgerundet“ sind, was auf die Trägheit zu Beginn und am Ende der Klappenbewegung hindeutet. Die Laufzeit, um die geschlossene Klappe vollständig zu öffnen, ist dabei durch den verwendeten Klappenantrieb vorgegeben. Weiters ist zu beachten, dass die Sprungantwort um die Totzeit T verzögert ist. Um dieses Gesamtverhalten mathematisch zu beschreiben, wird zunächst die fiktive Größe $\tilde{\varphi}$ eingeführt, welche den rampenförmigen Verlauf ohne „Abrundungen“ beschreibt. Die Steigung der Rampenfunktion ist betragsmäßig konstant, allerdings muss das Vorzeichen mit Hilfe der Signum-Funktion angepasst werden. Dieses Verhalten wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = k_{\varphi} \cdot \text{sign}[\varphi_{soll}(t - T) - \tilde{\varphi}] \quad (49)$$

wiedergegeben. Dabei besitzt $\tilde{\varphi}$ so lange die konstante Steigung k_{φ} , bis diese gleich der geforderten Klappenstellung φ_{soll} ist. Die Steigung k_{φ} ist durch die Laufzeit der Klappe vorgegeben. Mit $\varphi_{soll}(t - T)$ wird die zeitliche Verzögerung der geforderten Klappenstellung φ_{soll} um die Signallaufzeit T beschrieben. Um das dynamische Verhalten vollständig zu beschreiben, wird die Größe $\tilde{\varphi}$ als Eingangsgröße der linearen Differentialgleichung

$$\tau_{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi + \tilde{\varphi} \quad (50)$$

zur Beschreibung der Klappenstellung φ verwendet. Diese Differentialgleichung entspricht einem Verzögerungsglied erster Ordnung mit der Zeitkonstanten τ_{φ} , welche die Trägheit der Klappe beschreibt.

Das dynamische Modell einer Klappe wird mit den Differentialgleichungen (49) und (50) modelliert. In Abbildung 11 ist die, mit dem Modell berechnete Klappenstellung, der tatsächlichen (gemessenen) Klappenstellung (in Prozent des Stellbereiches) für eine sprungförmige Änderung der geforderten Klappenstellung gegenübergestellt. Die Modellkoeffizienten wurden dabei mittels numerischer Optimierungsalgorithmen aus Messdaten berechnet.

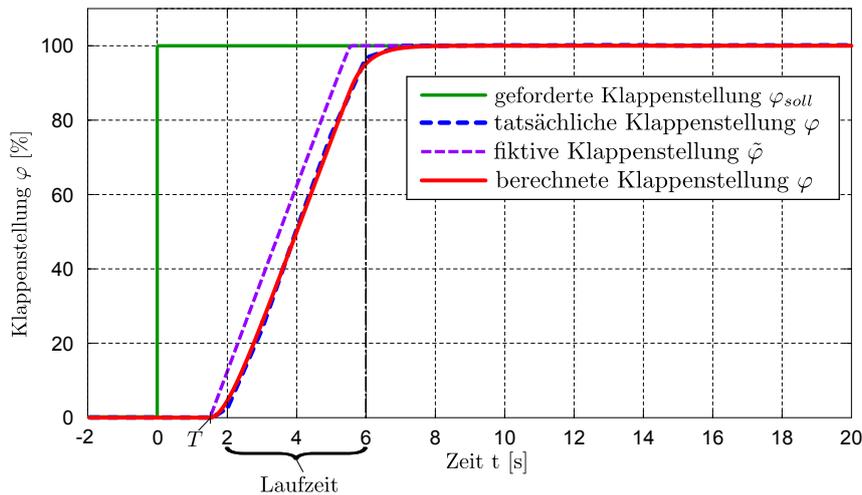


Abbildung 11 – Sprungantwort der Klappenstellung

Es ist ersichtlich, dass das dynamische Verhalten der Klappe mit dem vorgestellten Modell sehr gut wiedergegeben wird.

4 Modellierung der Versorgungsleitungen

Mit Hilfe, der in Kapitel 3 hergeleiteten Modellansätze wird nun beispielhaft die Sekundärluftzufuhr einer Biomasse-Feuerungsanlage modelliert. Die Vorgehensweise bei der Modellbildung ist bei den anderen Versorgungsleitungen äquivalent.

Die Sekundärluft wird bei der betrachteten Anlage von einem Ventilator aus der Umgebung mit dem Umgebungsdruck p_0 angesaugt, durch eine Klappe mit Dichtringen geführt und über Düsen in die Sekundärverbrennungszone der Feuerung mit dem Feuerraumdruck p_{FR} eingebracht (siehe Abbildungen 1 und 12).

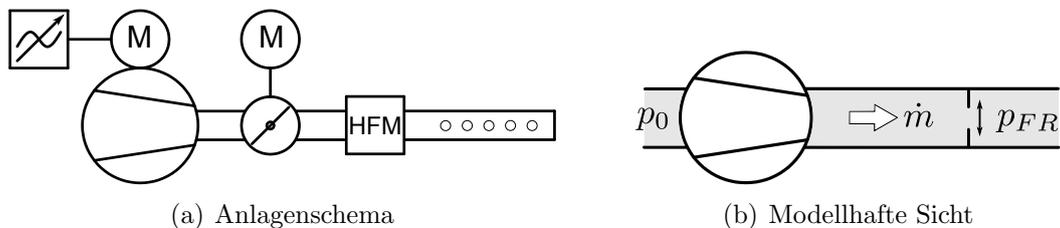


Abbildung 12 – Sekundärluftzufuhr

Zur Messung des Luftmassenstromes ist ein Heißfilm-Luftmassensensor (HFM) eingebaut. Für das statische Modell wird der Einfachheit halber statt eines allgemeinen Ansatzes mit „blendigem“ und „rohrigem“ Druckabfall nur ein „blendiger“ Druckabfall angesetzt, da aufgrund der Klappe, der HFM-Messstelle und der Düsen der „blendige“ Druckabfall überwiegt. Bei Verwendung des allgemeinen Ansatzes mit „blendigem“ und „rohrigem“ Druckabfall konnte keine Verbesserung erzielt werden. Mit dem Polynomansatz

$$c_2(\varphi) = \sum_{i=0}^{n_p} q_i \varphi^i \quad (51)$$

für den Klappenleitwert $c_2(\varphi)$ ergibt sich somit

$$\Delta p := p_{FR} - p_0 = c_V \omega^2 - \left[\frac{\dot{m}}{c_2(\varphi)} \right]^2 \quad (52)$$

für die Druckdifferenz Δp zwischen Modellaus- und Modelleingang der Sekundärluftzufuhr. Dabei ist zu beachten, dass im Klappenleitwert $c_2(\varphi)$ auch die konstanten „blendigen“ Druckabfälle der HFM-Messstelle, der Düsen und des Ventilators mit einbezogen sind. Wird diese Gleichung nach \dot{m} aufgelöst, so erhält man das statische Modell

$$\dot{m} = \sqrt{c_V \omega^2 - \Delta p} \cdot c_2(\varphi) \quad (53)$$

für den Sekundärluftmassenstrom \dot{m} . In Abbildung 13 sind die mit dem statischen Modell berechneten Werte für den Sekundärluftmassenstrom diskreten Messwerten gegenübergestellt. Die Parameter des Modells wurden dabei mittels numerischer Optimierungsalgorithmen aus experimentell ermittelten Messdaten berechnet.

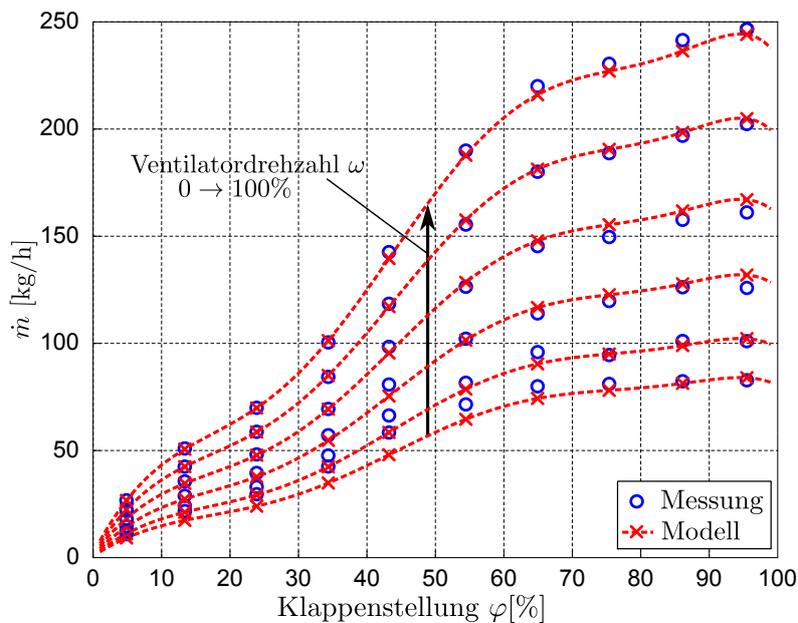


Abbildung 13 – Validierung des statischen Modells der Sekundärluftzufuhr

Es ist ersichtlich, dass die berechneten Massenströme bei hohen Ventilator Drehzahlen sehr gut mit den Messwerten übereinstimmen. Bei niedrigen Ventilator Drehzahlen weichen sie leicht von den Messwerten ab. Diese geringen stationären Abweichungen stellen jedoch für einen modellbasierten Reglerentwurf mit integrierendem Verhalten keinerlei Probleme dar. Weiters kann das Modell an den Grenzen des Klappenstellungsbereiches nicht verwendet werden, da es in diesen Bereichen teilweise unrealistische Werte annimmt.

Wird das statische Modell mit den dynamischen Modellen für den Ventilator und die Klappe (Abschnitt 3.2) kombiniert, so ergibt sich das Gesamtmodell:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = k_{\omega} \cdot \text{sign} [\omega_{\text{soll}}(t - T) - \tilde{\omega}] \quad (54a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\tau_{\omega}} (-\omega + \tilde{\omega}) \quad (54b)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = k_{\varphi} \cdot \text{sign} [\varphi_{\text{soll}}(t - T) - \tilde{\varphi}] \quad (54c)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\tau_{\varphi}} (-\varphi + \tilde{\varphi}) \quad (54d)$$

$$\dot{m} = \sqrt{c_V \omega^2 - \Delta p} \cdot c_2(\varphi). \quad (54e)$$

In Abbildung 14 ist der, mit Hilfe obigen Gesamtmodells berechnete Verlauf des Sekundärluftmassenstromes \dot{m} über die Zeit für bestimmte Klappenstellungen und Ventilator Drehzahlen (jeweils in Prozent der Stellbereiche) dargestellt und mit Messdaten verglichen. Die Parameter der dynamischen Teilmodelle wurden dabei ebenfalls mittels numerischer Optimierungsalgorithmen aus Messdaten berechnet.

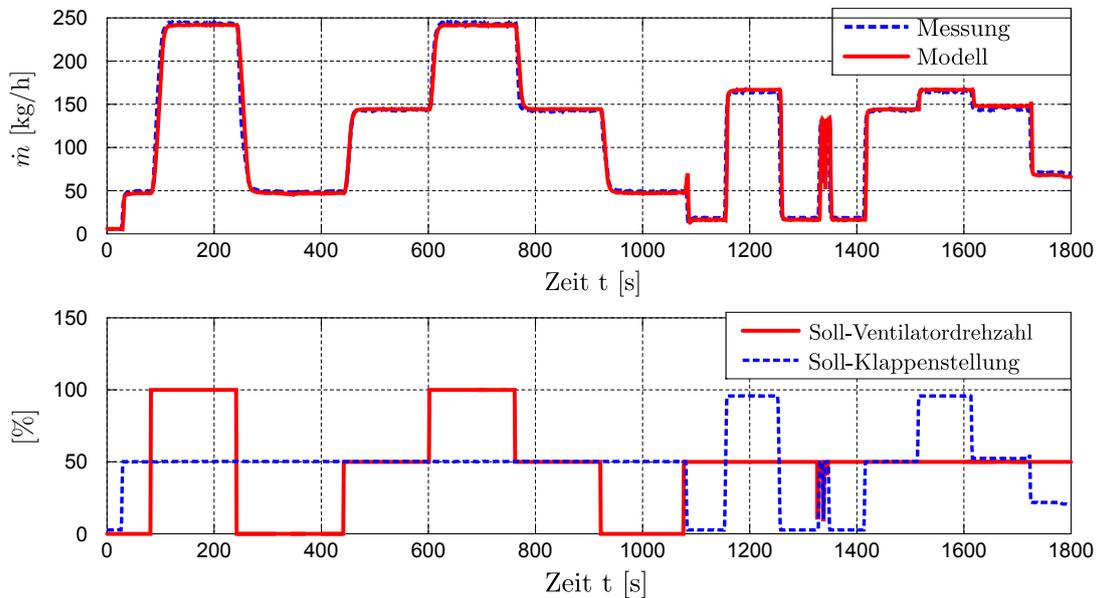


Abbildung 14 – Validierung des Gesamtmodells der Sekundärluftzufuhr

Man erkennt, dass das Verhalten der Sekundärluftzufuhr durch das Gesamtmodell sehr gut beschrieben wird.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein neuer Ansatz vorgestellt, Luft- bzw. Rauchgaszufuhren bei Biomasse-Feuerungsanlagen einfach und effektiv zu modellieren. Zunächst wurde die untersuchte Anlage kurz vorgestellt. Sehr vorteilhaft erwies sich die Möglichkeit, die Modellierung dieser Gasmassenströme in einen statischen und einen dynamischen Teil aufzusplitten. Für die Modellierung der statischen Zusammenhänge wurden relevante strömungsmechanische Ansätze analysiert und mathematisch beschrieben. Dabei wurde ein neuer Ansatz zur Modellierung von Klappen vorgeschlagen. Die dynamischen Vorgänge der Stellorgane, welche für eine Änderung der Gasmassenströme verantwortlich sind, konnten mit entsprechenden Ansätzen für den Ventilator und die Klappe sehr gut mathematisch nachgebildet werden. Durch eine Kombination dieser statischen und dynamischen Ansätze werden die wesentlichen physikalischen Vorgänge der unterschiedlichen Gaszufuhren sehr gut wiedergegeben. Dies wurde anhand der Modellbildung der Sekundärluftzufuhr durch einen Vergleich mit Messdaten belegt. Das ermittelte Modell dient nun als Grundlage für modellbasierte Regelstrategien, kann aber auch dazu verwendet werden, fehlerhafte Sensoren zu erkennen oder diese gegebenenfalls zu ersetzen. Die Ermittlung der Modellparameter erweist sich als sehr einfach und kann auch automatisiert werden.

Durch die im Dauerbetrieb der Biomasse-Feuerungsanlage entstehende Verschmutzung der Versorgungsleitungen werden die, über die Modelle berechneten Massenströme von den tatsächlichen abweichen. Für einen dauerhaften Einsatz der Modelle in einer modellbasierten Regelung ist vor allem die Verschmutzung der Düsen in den Feuerraum zu berücksichtigen. Dafür ist es notwendig, das jeweilige Modell nur bis vor die Düsen anzusetzen und somit diese nicht in das Modell mit ein zu beziehen. Für die Bildung der Druckdifferenz Δp zwischen Modellaus- und Modelleingang muss dann allerdings ein zusätzlicher Drucksensor vor den Düsen installiert werden. Durch diese Maßnahme sind die Modelle unabhängig von einer Verschmutzung der Düsen. Kleinere Modellabweichungen aufgrund anderer Verschmutzungen können auch durch den Einsatz eines robusten Regelgesetzes ausgeglichen werden.

Literatur

- [1] Bauer, R.: *Modellbildung und modellbasierte Regelungsstrategien am Beispiel einer Biomasse-Feuerungsanlage*. Habilitationsschrift, Technische Universität Graz, 2009.
- [2] Bauer, R., M. Gölles, T. Brunner, N. Dourdoumas und I. Obernberger: *Modellierung der Druck- und Volumenstromverhältnisse in einer Biomasse-Feuerung*. at – Automatisierungstechnik, 55:404–410, August 2007.
- [3] Bauer, R., M. Gölles, T. Brunner, N. Dourdoumas und I. Obernberger: *Eine Methode zur Bestimmung des Rauchgas-Massenstroms in einer Biomasse-Feuerung*. International Journal Automation Austria, 17(1):1–10, 2009.
- [4] Belimo Holding AG: *Belimo – Programmierbarer Klappenantrieb*. T2-NMQ24A-MF de v1.2 08.2010.

- [5] Bommers, L., J. Fricke und R. Grundmann: *Ventilatoren*. Vulkan-Verlag, 2. Auflage, 2002.
- [6] Deutscher Normenausschuss: *Durchflußmessung mit genormten Düsen, Blenden und Venturidüsen*, August 1971. DIN 1952.
- [7] ELEKTROR airsystems gmbh: *Niederdruckventilatoren (Produktkatalog)*. 702018 03.07/03.
- [8] Gölles, M., R. Bauer, T. Brunner, N. Dourdoumas und I. Obernberger: *Model based control of a biomass grate furnace*. In: *European Conference on Industrial Furnaces and Boilers*, April 2011. ISBN 978-972-99309-6-6.
- [9] Good, J.: *Verbrennungsregelung bei automatisch beschickten Holzschnitzelfeuerungen*. Juris Druck + Verlag Direktion, 1992.
- [10] Kaltschmitt, M. und H. Hartmann (Herausgeber): *Energie aus Biomasse*. Springer-Verlag, 2001.
- [11] Kortela, J. und S. L. Jämsä-Jounela: *Model Predictive Control for BioPower Combined Heat and Power (CHP) Plant*. 11th International Symposium on Process Systems Engineering, Bd. 15, S. 435-439. Elsevier, 2012.
- [12] Lenze: *Frequenzumrichter*. Lenze Frequenzumrichter de 01/2009.
- [13] Obernberger, I.: *Nutzung fester Biomasse in Verbrennungsanlagen*. dbv-Verlag, Dezember 1998. ISBN 3-7041-0244-X.
- [14] Paces, N., A. Voigt, S. Jakubek, A. Schirrer und M. Kozek: *Combined Control of Combustion Load and Combustion Position in a Moving Grate Biomass Furnace*. 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, S. 1447-1452, 2011.
- [15] Padinger, R.: *Regelungstechnik für die Hausheizung der Zukunft*. Technischer Bericht, Joanneum Research, Institut für Energieforschung, Dezember 2001.
- [16] Schröder, D.: *Elektrische Antriebe 1*. Springer-Verlag, 1994.

SSRP2013

ISBN: 978-3-901439-10-0

© Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz
