

SSRP 2009

16. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

M. Horn, M. Hofbaur, N. Dourdoumas (Hrsg.)

8. - 10. 9. 2009

Schloss Retzhof, Leibnitz, Österreich

ISBN: 978-3-901439-08-7

© Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz



<http://www.irt.tugraz.at>



Vorwort

Das Steirische Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung findet heuer zum 16. Mal im Schloss Retzhof, dem Bildungshaus des Landes Steiermark, statt. Die Veranstaltung wird traditionellerweise vom Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz durchgeführt, dieses Mal allerdings in Kooperation mit dem Institut für Intelligente Systemtechnologien der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Univ.-Prof. Dr. M. Horn). Ziel ist, aktuelle Arbeiten auf Gebieten der Regelungs- und Prozessautomatisierungstechnik, sowie der Regelungstheorie in universitärer und industrieller Forschung zu erörtern. Die Beiträge sind dadurch einem breiten Spektrum von Problemstellungen gewidmet. Der vorliegende Tagungsband fasst die eingelangten Manuskripte zusammen. Den Autoren sei an dieser Stelle für die Sorgfalt bei der Erstellung ihrer Beiträge herzlich gedankt.

Graz, im September 2009

Inhaltsverzeichnis

Manuskripte

<i>Flachheit – Eine nützliche Methodik auch für lineare Systeme</i> Michael Zeitz	3
<i>Beobachterentwurf für nichtlineare Deskriptorsysteme</i> Nenad Vrhovac, Felix Gausch	16
<i>Ein auf qualitativer Analyse basierter robuster Reglerentwurf</i> Mikuláš Huba, Michael Gerke	29
<i>Betrachtung der Reglerumschaltung in einem Fahrermodell für Fahrzeugdynamik- simulationen</i> Martin Rudigier, Christian Prettenhaler, Martin Horn	40
<i>Nichtlineare Systemidentifikation durch lokale Modellansätze: Strategien zur Partitionierung und Parameterschätzung</i> Stefan Jakubek, Christoph Hametner	62
<i>Adaptive Lastdruckregelung für eine eigenversorgte Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise</i> Wolfgang Kemmetmueller, Andreas Kugi, Franz Fuchshumer	85
<i>Systematische Wellendigital-Synthese für eine Klasse passiver verteilter Systeme</i> Christiane Leuer und Karlheinz Ochs	117
<i>Tracking ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen mit Zufallsmatrizen</i> Michael Feldmann, Dietrich Fränken	150
<i>Modellfreie Regelung von klimatechnischen Komponenten</i> Jakob Rehr, Martin Horn	166
<i>Die Hydraulik bei Heron von Alexandria und ihre Rekonstruktion</i> Dimitri Kalligeropoulos, Soutana Vasileiadou	176
<i>Stabilität linearer schaltender Systeme – ein Reglerentwurfsverfahren</i> Kai Wulff, Fabian Wirth, Robert Shorten	182
<i>Aktive Diagnose nicht unterscheidbarer Systemverhalten</i> Michael Hofbaur, Louise Travé Massuyès	198

Kurzfassungen

<i>Eine fahrzeugübergreifende X-by-Wire Plattform für Fahrzeuge zur Ausführung umfassender Fahr- und Assistenzfunktionen</i> Reinhard Reichel, Michael Armbruster	214
<i>Konstruktion flacher Ausgänge</i> Kurt Schlacher, Markus Schöberl	215

Manuskripte

Flachheit – Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO–Systeme

Michael Zeitz

Universität Stuttgart, Institut für Systemdynamik

Pfaffenwaldring 9, D-70569 Stuttgart

zeitz@isys.uni-stuttgart.de

Zusammenfassung

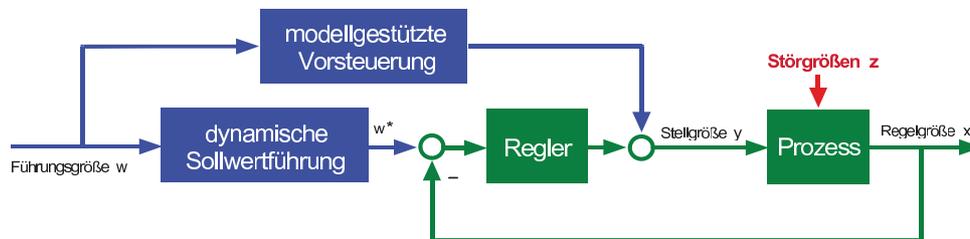
Die Flachheits–Methodik wurde ursprünglich für nichtlineare Systeme eingeführt und hat zu zahlreichen Anwendungen von modellbasierten Steuerungen und Regelungen geführt. Für lineare Systeme ist die differenzielle Flachheit gleichbedeutend mit der Steuerbarkeit und damit einfacher als im nichtlinearen Fall festzustellen. In diesem Beitrag wird für lineare SISO–Systeme gezeigt, wie die Flachheits–Methodik bei der Trajektorienplanung, dem Steuerungsentwurf und der Synthese von Folgeregelungen in den Koordinaten der Regelungs–Normalform angewendet wird. In Anbetracht der praktischen Relevanz dieser Entwurfsaufgaben einerseits und der leichten Vermittelbarkeit der linearen Flachheits–Methodik andererseits sprechen viele Argumente für eine Behandlung in der regelungstechnischen Ausbildung.

1 Einleitung

Die von den französischen Wissenschaftlern M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon eingeführte Flachheits–Methodik eröffnet einen neuen Zugang zur regelungstechnischen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme [1]–[6]. Im Mittelpunkt der flachheitsbasierten Betrachtung stehen die Trajektorienplanung, der Entwurf einer Vorsteuerung und die exakte Linearisierung. Diese Entwurfsaufgaben sind typisch für eine flachheitsbasierte Folgeregelung nichtlinearer Systeme. Seit ihrer Einführung wurde die Flachheits–Methodik bei dem modellbasierten Entwurf von Steuerungen und Regelungen in verschiedenen industriellen Anwendungen erfolgreich eingesetzt, siehe hierzu die Übersicht in [7].

Für lineare Systeme ist die differenzielle Flachheit gleichbedeutend mit der Steuerbarkeit und damit einfacher als im nichtlinearen Fall festzustellen und anzuwenden [2], [5], [8]. Wenn man allerdings die entsprechenden Darstellungen in den gängigen Lehrbüchern zum Maßstab nimmt, siehe z.B. [9]–[12], dann sind die Ergebnisse der Flachheits–Methodik bisher kaum in die lineare Regelungstechnik eingeflossen. So findet man in den meisten Lehrbüchern so gut wie keine näheren Ausführungen über die Trajektorienplanung, den Vorsteuerungsentwurf oder die Synthese von Folgeregelungen, obwohl diese Entwurfsaufgaben für die industrielle Praxis eine große Bedeutung besitzen.

Modellgestützte Vorsteuerung



Vorteile:

- Wesentliche Verbesserung der Dynamik, ohne die Stabilität zu beeinflussen
- Zusätzliche Freiheitsgrade bei der Optimierung von Führungs- und Störverhalten
- Geringere Regelarbeit der Stellglieder, dadurch schonendere Fahrweise und größere Regelruhe
- Die Vorsteuerung und die Regelung können unabhängig voneinander entworfen und optimiert werden

© ABB, Univ./Automation Control, 16.05.2001, Nr. 4/Vorstellung UTA

Dipl.-Ing. Stefan Basenach in Reihe
"Berufsbild Technische Kybernetik", Uni Stuttgart, 2002



Abbildung 1: Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur mit einer modellgestützten Vorsteuerung, einer dynamischen Sollwertführung und einem meist klassischen PI-, PD- oder PID-Regler.

Die praktische Relevanz des Vorsteuerungsentwurfs und der Sollwertplanung ist daran zu erkennen, dass in den meisten industriellen Anwendungen die in Abb. 1 dargestellte Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur verwendet wird. In dieser Struktur wird die Führungsdynamik durch die Vorsteuerung verbessert, ohne die Stabilität der Regelung zu beeinflussen. Außerdem bietet die Vorsteuerung einen zusätzlichen Freiheitsgrad bei der Optimierung des Führungs- und des Störverhaltens, das heißt, die Vorsteuerung und der Regler können unabhängig voneinander entworfen und optimiert werden.

Im Zusammenhang mit der regelungstechnischen Lehre ist es interessant, dass die in einer Zwei-Freiheitsgrad-Struktur eingesetzten industriellen Regler fast ausschließlich ein PI-, PD- oder PID-Verhalten besitzen, weshalb die meisten darüber hinaus gehenden Reglerentwurfsverfahren in der Praxis wenig Anwendung finden. Demgegenüber besteht in der Lehre bei der Behandlung von Verfahren zum Vorsteuerungsentwurf sowie für die Planung von Solltrajektorien ein gewisses Defizit.

In dem vorliegenden Beitrag wird für lineare SISO-Systeme gezeigt, wie die Flachheits-Methodik für die Trajektorienplanung, den Vorsteuerungsentwurf und die Synthese von Folgeregelungen in den Koordinaten der linearen Regelungs-Normalform angewendet wird. Zunächst soll jedoch die Flachheits-Methodik erläutert werden, soweit diese für die Behandlung von SISO-Systemen benötigt wird.

2 Flache SISO-Systeme

Zur Einführung der Flachheits-Methodik wird wie in [3] die nichtlineare Differentialgleichung (Dgl.) 2. Ordnung eines mechanischen Schwingungssystems

$$\Sigma: \quad m\ddot{q} + g(q, \dot{q}) = u, \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = q_1 \quad (1)$$

mit der Auslenkung $q(t)$ und der Kraft $u(t)$ als Eingang betrachtet. Das dynamische Verhalten des Systems wird durch die Vorgabe der Anfangswerte $q_{0,1}$ und der Eingangstrajektorie $u(t)$ eindeutig beschrieben. Andererseits enthält auch die Trajektorie $q(t)$ für $t \geq 0$ alle Informationen über das dynamische System Σ und wird deshalb in der Flachheits-Methodik als *flacher Ausgang* $z = q$ im Sinne einer Basisgröße zur Parametrierung der Systemgrößen bezeichnet [1]–[6]. Mit der zweimal differenzierbaren Trajektorie $z(t) \in \mathcal{C}^2$ des flachen Ausganges können der Zustand \mathbf{x} und der Eingang u des Systems (1) für $t \geq 0$ differenziell parametrisiert, das heißt, ohne numerische Intergration der Dgl. (1) bestimmt werden:

$$\Sigma^{-1}: \quad \mathbf{x}(t) = [z(t), \dot{z}(t)]^T, \quad u(t) = m\ddot{z}(t) + g(z(t), \dot{z}(t)). \quad (2)$$

Wenn die differenziellen Parametrierungen des Zustands und des Eingangs durch einen flachen Ausgang existieren, wird das betreffende System als *differenziell flach* bezeichnet [1]–[6].

Die Gleichungen (2) beschreiben das inverse System Σ^{-1} bezüglich des flachen Ausganges z und können unmittelbar für den flachheitsbasierten Entwurf einer Steuerung und Regelung des Systems Σ verwendet werden. Im ersten Schritt wird eine zweimal differenzierbare Solltrajektorie $z_d(t) \in \mathcal{C}^2$ für den flachen Ausgang geplant. Dabei müssen die Anfangsbedingungen des Systems (1) berücksichtigt werden [13], [14]. Für das entworfene $z_d(t)$ bekommt man mit Hilfe der Gleichungen (2) die Trajektorie $u_d(t)$ zur Steuerung des Systems sowie die dazu gehörende Referenztrajektorie $\mathbf{x}_d(t)$ für eine Zustandsrückführung:

$$u_d(t) = m\ddot{z}_d(t) + g(z_d(t), \dot{z}_d(t)), \quad \mathbf{x}_d(t) = [z_d(t), \dot{z}_d(t)]^T.$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben den flachheitsbasierten Entwurf einer modellgestützten Vorsteuerung und einer dynamischen Sollwertführung in der Zwei-Freiheits-Regelkreisstruktur nach Abb. 1.

Schließlich kann die Eingangs-Parametrierung in (2) auch dazu verwendet werden, um das nichtlineare System (1) durch die Einführung eines neuen Eingangs v und einer zustandsabhängigen Eingangs-Transformation exakt zu linearisieren:

$$\bar{\Sigma}: \quad \ddot{z} = v, \quad z(0) = q_0, \quad \dot{z}(0) = q_1 \quad \text{mit} \quad u = m v + g(z, \dot{z}). \quad (3)$$

Zum Reglerentwurf für den resultierenden Doppelintegrator kann ein beliebiges Verfahren der linearen Theorie verwendet werden. Die für den Eingang v entworfene Regelung wird dann mit der Eingangs-Transformation (3) in den Eingang u umgerechnet.

Im Allgemeinen ist der Ausgang eines Systems nicht zugleich auch ein flacher Ausgang. Dies soll für ein lineares SISO-System mit der Übertragungsfunktion

$$\Sigma: \quad Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} U(s) \quad (b_m \neq 0, n \geq m) \quad (4)$$

erläutert werden. Die Unterscheidung zwischen dem Ausgang $y(t)$ und einem flachen Ausgang $z(t)$ hängt mit dem *relativen Grad* bzw. der Differenz $r = n - m$ von Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ zusammen. Hierzu betrachtet man die Dgl.

$$\Sigma: \quad a_n \overset{(n)}{y} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \dots + b_m \overset{(m)}{u} \quad (5)$$

für $y(t)$ in Abhängigkeit des Eingangs $u(t)$. Ein Vergleich mit der Struktur der Dgl. (1) zeigt, dass nur für $m = 0$ der Ausgang y auch ein flacher Ausgang $z = y$ ist. In diesem Fall können der Zustand und der Eingang

$$\Sigma^{-1}: \quad \mathbf{x} = [z, \dot{z}, \dots, \overset{(n-1)}{z}]^T, \quad u = (a_0 z + a_1 \dot{z} + \dots + a_n \overset{(n)}{z})/b_0 \quad (6)$$

mit der Trajektorie $z(t) \in \mathcal{C}^n$ des flachen Ausgangs differenziell parametrisiert werden. Die differenziellen Parametrierungen (6) beschreiben das inverse System Σ^{-1} . Aus der Eingangs-Parametrierung folgt, dass der flache Ausgang z des SISO-Systems (4) bzw. (5) für $m = 0$ den relativen Grad $r = n$ besitzt. Es stellt sich also die Frage, wie ein flacher Ausgang $z \neq y$ für den Fall $m > 0$ bzw. $r < n$ bestimmt werden kann.

Zunächst sollen jedoch die bisher nur beispielhaft eingeführten Flachheits-Gleichungen für ein nichtlineares SISO-System

$$\Sigma: \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y = h(\mathbf{x}) \quad (7)$$

mit dem relativen Grad $r \leq n$ zusammenfassend dargestellt werden. Dieses System heißt *differenziell flach*, wenn es einen *flachen Ausgang* $z = \lambda(\mathbf{x})$ mit dem relativen Grad $r = n$ gibt, so dass die folgenden differenziellen Parametrierungen für $t \geq 0$ zumindest lokal existieren [1]–[6]:

$$\Sigma^{-1}: \quad \text{Zustand} \quad \mathbf{x} = \Psi_x(z, \dot{z}, \dots, \overset{(n-1)}{z}), \quad (8)$$

$$\text{Eingang} \quad u = \Psi_u(z, \dot{z}, \dots, \overset{(n)}{z}), \quad (9)$$

$$\text{Ausgang} \quad y = \Psi_y(z, \dot{z}, \dots, \overset{(n-r)}{z}). \quad (10)$$

Durch diese Gleichungen wird das inverse System Σ^{-1} beschrieben, wobei die n -fache Differenzierbarkeit des flachen Ausgangs $z(t) \in \mathcal{C}^n$ vorausgesetzt wird.

Aus der Zustands-Parametrierung (8) folgt, dass ein flaches System über den flachen Ausgang z (lokal) beobachtbar ist. Außerdem ist ein flaches System (lokal) steuerbar und erlaubt mit Hilfe der Eingangs-Parametrierung (9) den Entwurf einer Steuerung. Allerdings ist die lokale Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines flachen Ausgangs. Die differenzielle Parametrierung (10) des Ausgangs y folgt unmittelbar durch Einsetzen der Zustands-Parametrierung (8) in die Ausgangsgleichung $\Psi_y = h \circ \Psi_x$ und beschreibt – wie in [15] gezeigt – für $r < n$ die interne Dynamik des SISO-Systems (7).

Schließlich können die Gleichungen (8)–(10) – wie am Beispiel des Schwingungssystems (1) erläutert – zum flachheitsbasierten Entwurf einer Vorsteuerung, für eine exakte Linearisierung und zur Bestimmung der zugehörigen Referenztrajektorien für eine Zustandsrückführung bzw. Ausgangsregelung des Systems (7) verwendet werden.

3 Flache lineare SISO–Systeme

Ausgangspunkt für die flachheitsbasierte Betrachtung von linearen SISO–Systemen ist wie im nichtlinearen Fall die Zustandsdarstellung

$$\Sigma : \quad \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (11)$$

Eine für die Flachheit von SISO–Systemen wichtige Kenngröße ist der *relative Grad* $0 < r \leq n$, der angibt, dass die Gleichung für die r -te Ableitung $\overset{(r)}{y}$ des Ausgangs vom Eingang u abhängt:

$$0 < r \leq n : \quad \mathbf{c}^T A^{i-1} \mathbf{b} = 0, \quad i = 1(1)r - 1, \quad \mathbf{c}^T A^{r-1} \mathbf{b} \neq 0. \quad (12)$$

Die Forderung, dass der flache Ausgang $z = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}$ den relativen Grad $r = n$ besitzt, kann dazu benutzt werden, den unbekanntem $(n \times 1)$ -Zeilenvektor $\boldsymbol{\lambda}^T$ zu bestimmen. Hierzu verwendet man die Gleichungen (12) für $r = n$ mit $\mathbf{c}^T = \boldsymbol{\lambda}^T$:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \underbrace{[\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}]}_P = \underbrace{[0, \dots, 0, \kappa \neq 0]}_{\mathbf{e}^T} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{e}^T P^{-1} \quad \text{mit} \quad \text{Rang } P = n. \quad (13)$$

Auf der linken Seite der ersten Gleichung ergibt sich durch Ausklammern von $\boldsymbol{\lambda}^T$ die $(n \times n)$ -Steuerbarkeits-Matrix P . Auf der rechten Seite steht der $(n \times 1)$ -Zeilenvektor \mathbf{e}^T mit dem nicht verschwindenden Element $\kappa \neq 0$. Falls das SISO–System (11) steuerbar ist und die Matrix P den Rang n besitzt, ergibt sich der Vektor $\boldsymbol{\lambda}^T$ als letzte Zeile der inversen Steuerbarkeits-Matrix P^{-1} multipliziert mit der Konstanten $\kappa \neq 0$. Der flache Ausgang z ist wegen $\kappa \neq 0$ nicht eindeutig und wird für lineare zeitinvariante Systeme üblicher Weise mit $\kappa = 1$ normiert.

Aus der Bestimmung (13) des flachen Ausgangs folgt, dass die Flachheit des linearen SISO–Systems (11) anhand der Regularität der Steuerbarkeits-Matrix P leicht festzustellen ist. Außerdem ist die Berechnung des flachen Ausgangs mit Hilfe der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeits-Matrix P^{-1} einfach möglich.

3.1 Regelungs–Normalform

Der flache Ausgang z und die ersten $n - 1$ Ableitungen definieren die so genannten Flachheits–Koordinaten

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \\ \dots \\ \overset{(n-1)}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T \\ \boldsymbol{\lambda}^T A \\ \dots \\ \boldsymbol{\lambda}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{x} = T \mathbf{x}. \quad (14)$$

Mit diesen Koordinaten wird das System (11) in der linearen SISO–Regelungs–Normalform

$$\Sigma^* : \quad \overset{(n)}{z} = \underbrace{-[a_0, \dots, a_{n-1}]}_{-\mathbf{a}^T = \boldsymbol{\lambda}^T A^n T^{-1}} \mathbf{x}^* + \underbrace{\kappa}_{\neq 0} u, \quad \mathbf{x}^*(0) = T \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

$$y = \underbrace{[c_1^*, \dots, c_{n-r+1}^*, 0, \dots, 0]}_{\mathbf{c}^{*T} = \mathbf{c}^T T^{-1}} \mathbf{x}^* \quad \text{mit} \quad c_{n-r+1}^* \neq 0 \quad (16)$$

dargestellt. Dabei ist die Normalform (15) als Dgl. n -ter Ordnung für den flachen Ausgang $z(t)$ formuliert. Der Vektor \mathbf{a}^T enthält die charakteristischen Koeffizienten a_i , $i = 0(1)n-1$ der Matrix A . Die Bedingung $c_{n-r+1}^* \neq 0$ in der Ausgangsgleichung (16) folgt aus dem relativen Grad $r \leq n$ [15]. Der erste Zustand x_1^* der Regelungs-Normalform Σ^* hat den relativen Grad $r = n$ und ist der flache Ausgang $z = x_1^*$ des Systems (11).

Die Dgl. (15) besitzt eine mit der Dgl. (5) für $m = 0$ vergleichbare Form und erlaubt unmittelbar die differenzielle Parametrierung des linearen SISO-Systems (11) mit dem flachen Ausgang z :

$$\Sigma^{-1}: \quad \text{Zustand} \quad \mathbf{x} = T^{-1} [z, \dot{z}, \dots, \overset{(n-1)}{z}]^T, \quad (17)$$

$$\text{Eingang} \quad u = (a_0 z + a_1 \dot{z} + \dots + a_{n-1} \overset{(n-1)}{z} + \overset{(n)}{z}) / \kappa, \quad (18)$$

$$\text{Ausgang} \quad y = c_1^* z + c_2^* \dot{z} + \dots + c_{n-r+1}^* \overset{(n-r)}{z}. \quad (19)$$

Durch diese Gleichungen wird das inverse System Σ^{-1} in den Koordinaten der Regelungs-Normalform Σ^* beschrieben. Dabei wird die n -fache Differenzierbarkeit des flachen Ausgangs $z(t) \in \mathcal{C}^n$ vorausgesetzt. Schließlich sind die Zustands-, Eingangs- und Ausgangs-Parametrierungen (17)–(19) als Sonderfall in den nichtlinearen Darstellungen (8)–(10) enthalten und bilden die Basis für einen flachheitsbasierten Vorsteuerungs-Entwurf eines linearen SISO-Systems.

3.2 Vorsteuerungs-Entwurf

Der flachheitsbasierte Vorsteuerungs-Entwurf soll beispielhaft für den Arbeitspunktwechsel $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ eines steuerbaren linearen SISO-Systems (11) erläutert werden. Zur Planung der Solltrajektorie $z_d(t)$ für den flachen Ausgang werden die Arbeitspunkte \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_T in die Flachheits-Koordinaten (14) umgerechnet. Dann werden die beiden Randpunkte z_0 und z_T – wie in Abb. 2 dargestellt – z.B. durch ein n -mal

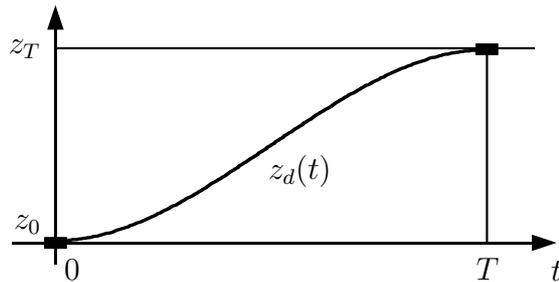


Abbildung 2: Solltrajektorie $z_d(t) \in \mathcal{C}^n$ des flachen Ausgangs für einen Arbeitspunktwechsel $z(0) = z_0 \rightarrow z(T) = z_T$ in dem Zeitintervall $t \in [0, T]$.

differenzierbares Polynom vom Grad $2n - 1$ verbunden:

$$\begin{aligned} \Sigma_d^*: \quad z_d(0) = z_0 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_0, \quad z_d(T) = z_T = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_T, \quad \overset{(i)}{z}_d(0) = \overset{(i)}{z}_d(T) = 0, \quad i = 1(1)n, \\ z_d(t) = z_0 + (z_T - z_0) \sum_{i=n}^{2n-1} p_i \left(\frac{t}{T}\right)^i \in \mathcal{C}^n, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (20)$$

Wenn man die Solltrajektorie $z_d(t)$ in die Eingangs-Parametrierung (18) einsetzt, ergibt sich eine stetige Steuertrajektorie $u_d(t) \in \mathcal{C}^0$. Anhand des Verlaufs von $u_d(t)$ kann man überprüfen, ob eventuelle Stellgrößen-Beschränkungen eingehalten werden. Gegebenenfalls muss die Transitionszeit T verlängert werden.

Die Referenztrajektorien $\mathbf{x}_d(t)$ und $y_d(t)$ für eine Zustandsrückführung bzw. eine Ausgangsregelung werden mit Hilfe der Zustands- und Ausgangs-Parametrierungen (17) – (19) bestimmt. Aufgrund der gemeinsamen Parametrierung mit der Solltrajektorie $z_d(t)$ des flachen Ausgangs ist gewährleistet, dass die entworfenen Steuer- und Referenztrajektorien konsistent sind. Auf diese Weise sind alle Komponenten zur Realisierung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung in der Zwei-Freiheitsgrad-Struktur nach Abb. 1 entworfen. Dabei ist zu unterscheiden, ob der Regelkreis über eine Ausgangsregelung oder eine Zustandsrückführung geschlossen wird, wie dies in Abb. 3 bzw. in Abb. 4 dargestellt ist.

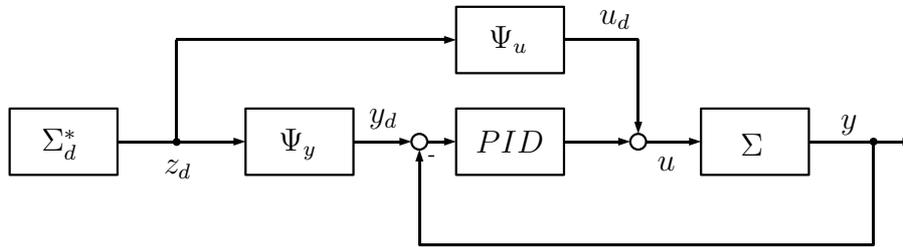


Abbildung 3: Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur mit PID -Ausgangsregelung, Trajektorienplanung Σ_d^* , Vorsteuerung Ψ_u und Sollwertfilter Ψ_y .

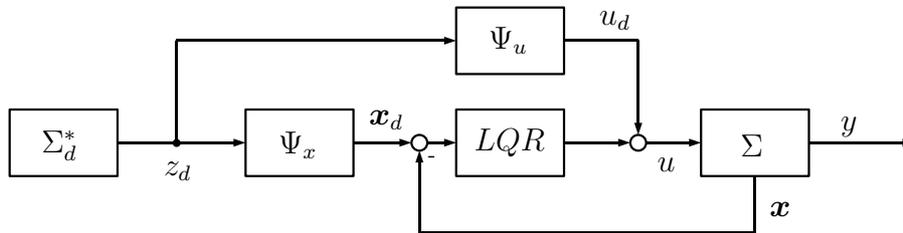


Abbildung 4: Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur mit LQR -Zustandsrückführung, Trajektorienplanung Σ_d^* , Vorsteuerung Ψ_u und Sollwertfilter Ψ_x .

In beiden Fällen kann die flachheitsbasierte Vorsteuerung als eine *Add-on*-Maßnahme zur Verbesserung des Führungsverhaltens einer Folgeregelung angesehen werden. Die Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur in den Abb. 3 und 4 enthält auch den Sonderfall einer Festpunktregelung im Arbeitspunkt $z_d = 0$. Allerdings reduzieren sich die beiden Blockschaltbilder dann auf einen “akademischen“ Regelkreis, der nur aus der Regelstrecke und dem Regler besteht und meist in der Lehre betrachtet wird. Zu dessen Entwurf genügen natürlich die aus den Lehrbüchern bekannten regelungstechnischen Verfahren.

Im Zusammenhang mit dem flachheitsbasierten Entwurf einer linearen Vorsteuerung ist anzumerken, dass die Koordinaten der Regelungs-Normalform (14)–(16) hierfür besonders geeignet sind. Demgegenüber wird die lineare zeitinvariante Regelungs-Normalform

für den Reglerentwurf nicht unbedingt benötigt, da normalerweise die Eigenwertvorgabe oder eine LQR-Optimierung numerisch und rechnergestützt in den Original-Koordinaten durchgeführt werden. Allerdings spielt die Regelungs-Normalform eine wichtige Rolle beim Reglerentwurf für lineare zeitvariante und für nichtlineare Systeme [2].

3.3 Folgeregelung eines 3-fach-Pendels

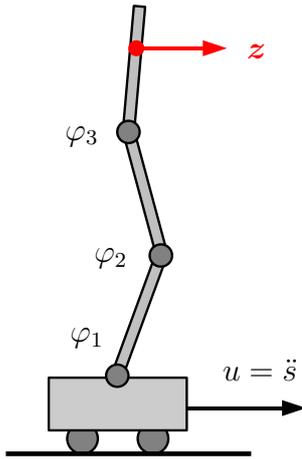


Abbildung 5: Stehendes 3-fach-Pendel mit den Zuständen $s, \dot{s}, \varphi_i, \dot{\varphi}_i, i = 1, 2, 3$, dem Eingang u und dem flachen Ausgang z des linearisierten Pendelmodells.

(13) als letzte Zeile der inversen Steuerbarkeits-Matrix P^{-1} zu bestimmen (Pendellängen $l_i, i = 1, 2, 3$):

$$z = [0, \dots, 0, \kappa \neq 0] P^{-1} \mathbf{x} \approx [1, 0, -l_1, 0, -l_2, 0, -0,7l_3] \mathbf{x}. \quad (21)$$

Durch eine geeignete Normierung mit $\kappa \neq 0$ und eine approximative Auswertung dieser Gleichung kann man zeigen, dass der flache Ausgang z – wie in Abb. 5 eingetragen – im oberen Drittel des äußeren Pendels liegt.

Die flachheitsbasierte Folgeregelung für das seitliche Versetzen $s(0) = s_0 \rightarrow s(T) = s_T$ des 3-fach-Pendels erfordert die Planung einer mindestens 8-mal differenzierbaren Solltrajektorie $z_d(t)$ für den flachen Ausgang. Nach (20) ist $z_d(t)$ ein Polynom vom Grad $2n - 1 = 15$. Außerdem wird das stehende Pendel z. B. mit einer LQR-Rückführung stabilisiert. Damit sind alle Voraussetzungen für eine Realisierung der in Abb. 4 dargestellten Zwei-Freiheitsgrad-Regelkreisstruktur mit einer Zustandsrückführung gegeben. In [16] wird die LQR-Rückführung über einen Luenberger-Beobachter zur Schätzung des Zustands aus den gemessenen Wagenposition und der drei Pendelwinkel realisiert.

Die in Abb. 6 dargestellte Simulation der Seitenbewegung des 3-fach-Pendels stimmt recht gut mit dem in einem Video [16] aufgezeichneten Experiment überein. Dies kann als experimentelle Rechtfertigung für den Vorsteuerungs- und Regler-Entwurf mit dem

linearisierten Pendelmodell angesehen werden. In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass ein schnelles und stabiles Versetzen des 3-fach-Pendels ohne Vorsteuerung nicht möglich war.

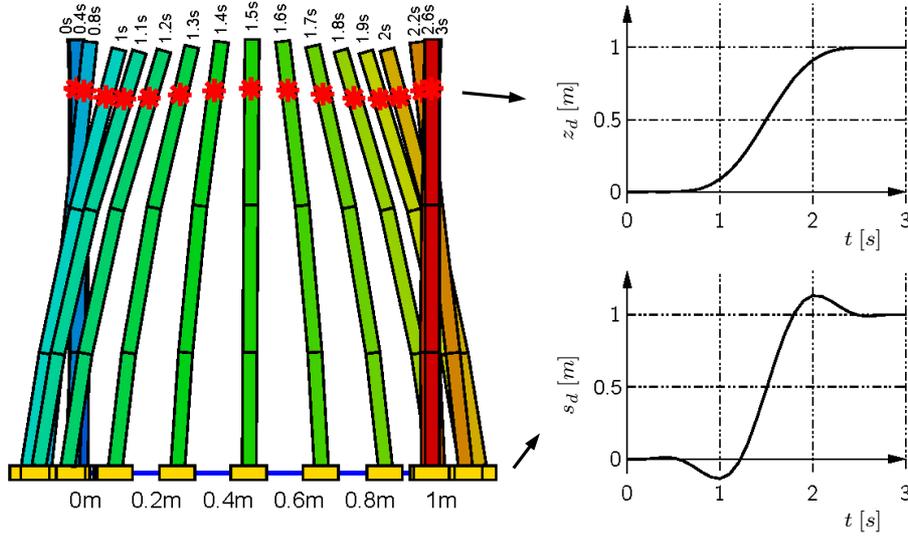


Abbildung 6: Simulated snap shots for the side-stepping of the triple inverted pendulum with $\Delta s = 1m$ and $T = 3s$ [16].

In den Momentaufnahmen und Diagrammen in Abb. 6 ist ein Unterschied zwischen der monotonen Bewegung $z_d(t)$ des flachen Ausgangs und der zu Anfang und am Ende gegenläufigen Bewegung $s_d(t)$ des Wagens zu beobachten. Das Allpass-Verhalten der Wagenposition lässt sich anhand der differentiellen Parametrierung der Wagenposition durch den flachen Ausgang erklären; dies wird nachfolgend erläutert.

3.4 Zusammenhang zwischen flachen und nicht flachem Ausgang

Das Pendelbeispiel zeigt, dass der flache Ausgang sich im Allgemeinen von den gemessenen Ausgangsgrößen unterscheidet. Der Zusammenhang zwischen dem Ausgang y und dem flachen Ausgang z wird durch die differentielle Parametrierung (19) beschrieben.

Im Folgenden soll für das linearisierte Pendelmodell gezeigt werden, dass die differentielle Parametrierung der Wagenposition $y = s$ die interne Dynamik des SISO-Systems beschreibt [15]. Die Wagenposition s besitzt wegen $\ddot{s} = u$ den relativen Grad $r = 2$ und ist daher kein flacher Ausgang. Daraus folgt, dass die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (22)$$

$n = 8$ Polstellen und $m = n - r = 6$ Nullstellen besitzt. Im Bildbereich kann der flache Ausgang $Z(s)$ mittels der *Bezout*-Identität in Abhängigkeit von $U(s)$ und $Y(s)$ bestimmt

werden [17]:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{Q(s)} = \frac{Y(s)}{P(s)}. \quad (23)$$

Daraus ergibt sich im Zeitbereich für die Wagenposition $y = s$ die differenzielle Parametrierung

$$y = b_0 z + b_1 \dot{z} + \dots + b_m \overset{(m)}{z} \quad (24)$$

mit $m = n - r$. Diese Gleichung wird benötigt, um die Referenztrajektorie $y_d(t)$ des Ausgangs y , die zu der für den flachen Ausgang z geplanten Trajektorie $z_d(t)$ gehört, zu bestimmen.

Der Zusammenhang (24) kann auch als Dgl. der Ordnung $n - r$ für $z(t)$ in Abhängigkeit $y(t)$ angesehen werden:

$$b_{n-r} \overset{(n-r)}{z} + \dots + b_1 \dot{z} + b_0 z = y. \quad (25)$$

Zur eindeutigen Lösung der Dgl. werden noch $n - r$ Anfangsbedingungen für $z(t)$ benötigt [15]; diese können aus dem Anfangszustand \mathbf{x}_0 mit Hilfe der Transformation (14) bestimmt werden.

Das charakteristische Polynom der Dgl. (25) ist das Zählerpolynom $Q(s)$ der Übertragungsfunktion (22) des Pendels. Damit hängt die Stabilität der Dgl. (25) von der Lage der Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ ab. Für $y = 0$ wird durch die Dgl. (25) die Nulldynamik des linearisierten Pendelmodells beschrieben [15]. Da drei von den 6 Nullstellen des Pendelmodells in der rechten Halbebene liegen, ist die Nulldynamik instabil, und es handelt sich um ein nicht-minimalphasiges System. Hieraus folgt das beim seitlichen Versetzen des Pendels in Abb. 6 beobachtete Allpass-Verhalten der Wagenposition.

Aus dieser Diskussion ergibt sich, dass die Umrechnung einer Solltrajektorie $y_d(t)$ für den nicht flachen Ausgang in die entsprechende Trajektorie $z_d(t)$ des flachen Ausgangs nur möglich ist, wenn die Dgl. (25) asymptotisch stabil bzw. das betrachtete System phasenminimal ist [15].

3.5 Flacher Eingang linearer SISO-Systeme

Die Flachheits-Methodik befasst sich im Wesentlichen mit der Bestimmung eines flachen Ausgangs, der sich im Allgemeinen von dem vorgegebenen Ausgang unterscheidet. Daher ist es naheliegend zu fragen, ob und unter welchen Bedingungen man einen Eingang so bestimmen kann, dass der gegebene Ausgang y zugleich ein flacher Ausgang z ist [18]. Die duale Aufgabe zur Bestimmung eines *flachen Eingangs* soll für lineare SISO-Systeme

$$\Sigma : \quad \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (26)$$

mit einem noch unbekanntem Eingangsvektor $\boldsymbol{\gamma}$ und Eingangssignal $u(t)$ erläutert werden. Dabei ist der $(n \times 1)$ -Spaltenvektor $\boldsymbol{\gamma}$ so zu konstruieren, dass der Ausgang y den relativen Grad $r = n$ besitzt und ein flacher Ausgang $z = y$ ist.

Zur Konstruktion des Eingangsvektors γ verwendet man die Definitionsgleichungen (12) für den relativen Grad $r = n$ mit $\mathbf{b} = \gamma$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{pmatrix}}_Q \gamma = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \kappa \neq 0 \end{pmatrix}}_e \Rightarrow \gamma = Q^{-1} e \quad \text{mit } \text{Rang } Q = n. \quad (27)$$

Auf der linken Seite der ersten Gleichung ergibt sich durch Ausklammern von γ die $(n \times n)$ -Beobachtbarkeits-Matrix Q . Auf der rechten Seite steht der $(n \times 1)$ -Spaltenvektor e mit dem nicht verschwindenden Element $\kappa \neq 0$. Falls das SISO-System (27) beobachtbar ist und die Matrix Q den Rang n besitzt, ergibt sich der Vektor γ als letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeits-Matrix Q^{-1} multipliziert mit der Konstanten $\kappa \neq 0$. Der flache Eingang ist wegen $\kappa \neq 0$ nicht eindeutig und wird für lineare zeitinvariante Systeme üblicher Weise mit $\kappa = 1$ normiert.

Aus der Bestimmung (27) des flachen Eingangs folgt, dass dessen Existenz anhand der Regularität der Beobachtbarkeits-Matrix Q leicht festzustellen ist. Außerdem ist die Berechnung des flachen Eingangs mit Hilfe der inversen Beobachtbarkeits-Matrix sowohl für lineare als auch für lokal beobachtbare nichtlineare SISO-Systeme einfach möglich [18]. Im Unterschied zu einem flachen Ausgang handelt es sich bei dem flachen Eingang nicht um eine fiktive Basisgröße, sondern um eine reale Stellgröße. Deshalb verlangt die Konstruktion eines flachen Eingangs nicht nur dessen mathematische Bestimmung (27), sondern auch eine physikalische Realisierung als Stellglied.

Die Realisierbarkeits-Problematik bei der Konstruktion eines flachen Eingangs soll am Beispiel einer linearen Schwingungs-Dgl. 2. Ordnung erläutert werden:

$$\Sigma: \quad m\ddot{q} + d\dot{q} + cq = u, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \xrightarrow{(m=1)} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -d \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (28)$$

Anhand der Zustandsdarstellung erkennt man, dass die Dgl. für den ersten Zustand generisch ohne Eingang ist und dass die Eingangsgröße u nur auf die Dgl. für den zweiten Zustand wirkt. Wenn man als Ausgangsgröße $y = \ddot{q}$ die Beschleunigung des ungesteuerten Systems (28) wählt, kann man mit (27) den (2×1) -Vektor γ des zugehörigen flachen Eingangs aus der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeits-Matrix bestimmen:

$$y = [-c, -d] \mathbf{x} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -c & -d \\ cd & d^2 - c \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} d^2 - c & d \\ -cd & -c \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Für $c \neq 0$ ist das System (28) beobachtbar, und man erhält mit der Normierung $\kappa = c^2$ den gesuchten Vektor $\gamma = [d, -c]^T$. Die Realisierbarkeitbedingung für den Vektor γ ergibt sich aus der Struktur des Eingangsvektors in der Zustands-Dgl. (28). Daraus folgt, dass der flache Eingang nur für ein ungedämpftes Schwingungssystem, das heißt für $d = 0$, realisierbar ist.

Insgesamt eröffnet die Konstruktion eines flachen Eingangs eine interessante Option bei der Auswahl von Stellgliedern, um die Flachheits-Methodik beim Entwurf einer

Steuerung oder Regelung einfach anwenden zu können. Allerdings bedeutet die Notwendigkeit, den flachen Eingang in der Praxis als Stellglied zu realisieren, dass die Dualität zwischen flachem Ausgang und flachem Eingang auf deren mathematische Bestimmung beschränkt ist.

4 Schlussfolgerungen

Die Nützlichkeit der Flachheits-Methodik für lineare Systeme resultiert daher, dass keine über die Steuerbarkeit hinausgehenden Voraussetzungen benötigt werden und dass die Flachheits-Analyse und -Synthese mit den bekannten linearen Rechentechniken durchgeführt werden können. Dies trifft sowohl für SISO-Systeme als auch für lineare MIMO-Systeme zu. Im MIMO-Fall ergeben sich im Vergleich zu SISO-Systemen für die Wahl und die Anwendung der flachen Ausgänge zusätzliche Freiheitsgrade¹. Insgesamt bietet die Flachheits-Methodik für lineare zeitinvariante Systeme einfach handhabbare Verfahren für den Entwurf einer modellbasierten Vorsteuerung und die Planung von konsistenten Referenztrajektorien für eine Zwei-Freiheitsgrad-Regelungsstruktur. In Anbetracht der praktischen Relevanz dieser Entwurfsaufgaben und der leichten Vermittelbarkeit der linearen Flachheits-Methodik sprechen viele Argumente für eine Behandlung in der regelungstechnischen Ausbildung.

Danksagung

Wie aus der Literaturliste zu entnehmen, beziehen sich wesentliche Teile des Beitrags auf verschiedene Arbeiten von Herrn Dr. Veit Hagenmeyer, dem der Autor für viele konstruktive Hinweise zu Inhalt und Text des Beitrags herzlich dankt. Außerdem basiert der Beitrag auf Erfahrungen mit der Vorlesung "Flache Systeme"², bei deren Durchführung der Autor in dankenswerter Weise von Dipl.-Ing. Thomas Ruppel und Dipl.-Ing. Martin Weickgenannt unterstützt wurde.

Literatur

- [1] M.Fliess, J.Lévine, P.Martin, P.Rouchon: Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. International Journal of Control 61(1995), 1327–1361.
- [2] R.Rothfuß: Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme. VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/664, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [3] R.Rothfuß, J.Rudolph, M.Zeitz: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. Automatisierungstechnik 45(1997), 517–525.

¹Siehe hierzu auch den bei der Zeitschrift at-Automatisierungstechnik eingereichten Beitrag des Autors "Differenzielle Flachheit – Eine nützliche Methodik auch für lineare Systeme".

²<http://www.isys.uni-stuttgart.de/lehre/lfs/>

- [4] J.Rudolph: Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung lineare und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [5] H.Sira–Ramírez, S.K.Agrawal: Differentially Flat Systems. Marcel Decker, Inc., New York–Basel, 2004.
- [6] J. Lévine: Analysis and Control of Nonlinear Systems – A Flatness–based Approach. Springer, Dordrecht, 2009
- [7] J.Rudolph: Flachheit: Eine nützliche Eigenschaft auch für Systeme mit Totzeiten. Automatisierungstechnik 53(2005), 178–188.
- [8] V.Hagenmeyer, M.Zeitz: Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen. Automatisierungstechnik 52(2004), 3–12.
- [9] H.Unbehauen: Regelungstechnik I–III. Friedr.Vieweg & Sohn, Braunschweig–Wiesbaden, 1982ff.
- [10] J.Lunze: Regelungstechnik 1 und 2, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 1996ff.
- [11] M.Horn, N.Dourdoumas: Regelungstechnik. Pearson Studium, 2004.
- [12] R.C.Dorf, R.H.Bishop: Moderne Regelungssysteme. Pearson Studium 2006.
- [13] V.Hagenmeyer, E.Delaleau: Exact feedforward linearization based on differential flatness. International Journal of Control 76(2003), 537–556.
- [14] V.Hagenmeyer: Robust nonlinear tracking control based on differential flatness. VDI–Fortschritt–Berichte Nr.8/978, VDI–Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [15] V.Hagenmeyer, M.Zeitz: Internal dynamics of flat nonlinear SISO systems with respect to a non–flat output. Systems & Control Letters 52 (2003), 323–327.
- [16] T.Nutsch, V.Hagenmeyer: Flatness-based tracking control of a triple inverted pendulum. Poster und Video Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, Universität Stuttgart 2004 (<http://www.isys.uni-stuttgart.de/lehre/lfs/Literaturlinks/index.html>).
- [17] M.Fliess, R.Marquez: Continuous–time linear predictive control and flatness: a modul–theoretic setting with examples. International Journal of Control 73 (2000), 606–623.
- [18] S.Waldherr, M.Zeitz: Conditions for the existence of a flat input. International Journal of Control 81 (2008), 439–443. 5E.Delaleau, M.Fliess: Algorithmes de structure, filtrations et découplage. C.R.

Beobachterentwurf für nichtlineare SISO-Deskriptorsysteme vom Index $k=1$

Nenad Vrhovac, Felix Gausch

Universität Paderborn, Institut für Steuerungs- und Regelungstechnik,
Pohlweg 47-49, 33098 Paderborn
nenad@control.upb.de*, gausch@uni-paderborn.de

Zusammenfassung

Dieser Beitrag befasst sich mit dem Beobachterentwurf für nichtlineare Deskriptorsysteme vom Index $k = 1$. Zuerst wird die Problematik dargestellt, die Aufgabe formuliert und dann der Ansatz zum High-Gain Beobachterentwurf verfolgt. Die sich daraus ergebenden Vorteile werden beschrieben. Abschließend werden die Ergebnisse an einem Beispiel demonstriert.

1 Einleitung

Für die spezielle Klasse nichtlinearer Deskriptorsysteme vom Index $k = 1$ wird im ersten Teil dieser Arbeit der Übergang von der semi-expliziten zur expliziten Systembeschreibung vollzogen, die exakte Linearisierung betrachtet und die dafür zu erfüllenden Bedingungen festgehalten. Im zweiten Teil wird eine Methode zum Beobachterentwurf beschrieben und zum Schluss an einem Beispiel erprobt und simuliert.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

2 Exakte Linearisierung für SISO-Deskriptorsysteme vom Index $k = 1$

Betrachtet werden nichtlineare SISO-Deskriptorsysteme in semi-expliziter Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u \\ \mathbf{0} &= \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ und $u, y \in \mathbb{R}$. Die Vektorfelder \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{p} und die Funktion h sind hinreichend oft differenzierbar.

Ausgegangen wird von der Formulierung des Differentiationsindex in [1], d. h. die algebraischen Gleichungen werden so lange nach Zeit differenziert bis erstmalig die Ableitung wenigstens einer algebraischen Variablen auftaucht.

Für realisierbare und reguläre Deskriptorsysteme mit dem Index $k = 1$ erscheinen schon nach der ersten Ableitung der algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}}\tag{2.2}$$

alle Zeitableitungen der algebraischen Variablen, wonach die abgeleiteten Gleichungen aufgelöst werden können

$$\dot{\mathbf{z}} = - \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}.\tag{2.3}$$

Damit wird die generalisierte Ordnung n des Deskriptorsystems der Ordnung \tilde{n} des Systems mit der minimalen Anzahl der Zustandsgrößen gleich [5]:

$$\tilde{n} = n - \sum_{i=1}^p (k_i - 1) = n, \quad \text{mit } k_i = 1,\tag{2.4}$$

wobei k_i den Index der algebraischen Gleichung p_i bezeichnet. Dies bedeutet, gäbe es zwischen algebraischen und differentiellen Variablen eine explizite Beziehung (hervorgegangen aus den algebraischen Gleichungen), so könnte man diese nutzen um die algebraischen Variablen aus den Differentialgleichungen in (2.1) zu eliminieren, ohne dass dabei die Anzahl der Differentialgleichungen reduziert wird. Die algebraischen Gleichungen vom Index $k_i = 1$ beschreiben allein die Beziehungen zwischen algebraischen und differentiellen Variablen und weisen kein Impulsverhalten aufgrund inkonsistenter Anfangszustände auf [5].

Angenommen das zugehörige minimale System mit der gleichen Ausgangsgröße wie das System (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) u \\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2.5}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $u, y \in \mathbb{R}$ hat die im Sinne von [3] wohldefinierte differentielle Ordnung $\tilde{\delta} \leq \tilde{n}$.

$$\begin{aligned}y &= h(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\tilde{\mathbf{f}}}h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\tilde{\mathbf{g}}}h(\mathbf{x})}_{=0} u \\ &\vdots \\ y^{(\tilde{\delta}-1)} &= L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{\tilde{\delta}-1}h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\tilde{\mathbf{g}}}L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{\tilde{\delta}-2}h(\mathbf{x})}_{=0} u \\ y^{(\tilde{\delta})} &= L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{\tilde{\delta}}h(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\tilde{\mathbf{g}}}L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{\tilde{\delta}-1}h(\mathbf{x})}_{\neq 0} u\end{aligned}$$

Für das minimale System (2.5) können dann in Abhängigkeit von seiner differentiellen Ordnung $\tilde{\delta}$ folgende Fälle auftreten:

1. $\tilde{\delta} < \tilde{n}$ System ist teilweise exakt linearisierbar mit einer verbleibenden internen Dynamik (Nulldynamik [3, 4, 10]),
2. $\tilde{\delta} = \tilde{n}$ System ist exakt eingangs-zustandslinearisierbar (im SISO Fall auch differentiell flach).

Definition (Nulldynamik): Die Nulldynamik beschreibt die interne Dynamik eines Systems für den Fall, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ für bestimmte Eingangssignale $u(t)$ und Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ für alle Zeiten $t \geq t_0$ identisch Null ist.

Bei der Ermittlung der differentiellen Ordnung¹ δ des Deskriptorsystems (2.1) ist die in [1] vorgeschlagene Operatorschreibweise zweckmäßig. Dabei gilt für den, dort definierten rekursiven Operator $N^\nu h$

$$N^\nu h := (N^{\nu-1}h)' \dot{\mathbf{x}}, \quad N^0 h = h$$

mit

$$(N^\nu h)' := \frac{\partial N^\nu h}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial N^\nu h}{\partial \mathbf{z}} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}}.$$

¹Da es sich um das gleiche Eingangs-Ausgangsverhalten mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ handelt, gelte $\delta = \tilde{\delta}$.

Die Berechnung der Ableitungen der Ausgangsgröße lautet nun:

$$\begin{aligned}
y &= h(\mathbf{x}) && = N^0 h(\mathbf{x}) \\
\dot{y} &= \frac{\partial N^0 h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial N^0 h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{z}}}_{=0} \dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial N^0 h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a} + \underbrace{\frac{\partial N^0 h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}_{=0} \mathbf{b} u && = N^1 h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\
\ddot{y} &= \frac{\partial N^1 h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial N^1 h}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\left(\frac{\partial N^1 h}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial N^1 h}{\partial \mathbf{z}} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} \right)}_{=(N^1 h)'} \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial N^1 h}{\partial \mathbf{z}}}_{=0} \dot{\mathbf{z}} && = N^2 h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\
&\vdots && \\
{}^{(\delta-1)}y &= \frac{\partial N^{\delta-2} h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial N^{\delta-2} h}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} = (N^{\delta-2} h)' \mathbf{a} + \underbrace{\frac{\partial N^{\delta-2} h}{\partial \mathbf{z}}}_{=0} \mathbf{b} u && = N^{\delta-1} h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\
{}^{(\delta)}y &= \frac{\partial N^{\delta-1} h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial N^{\delta-1} h}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} = (N^{\delta-1} h)' \mathbf{a} + \underbrace{\frac{\partial N^{\delta-1} h}{\partial \mathbf{z}}}_{\neq 0} \mathbf{b} u = N^\delta h + (N^{\delta-1} h)' \mathbf{b} u .
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung (2.3) und der Einführung der Deskriptorvariablen \mathbf{w} , die die differentiellen Variablen \mathbf{x} und die algebraischen Variablen \mathbf{z} beinhalten, ergibt sich das folgende Zustandsmodell des nichtlinearen Systems (2.1).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{z})u \\ - \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{z})u) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{w})u && (2.6) \\
y &= h(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

mit $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+p}$. Da das System (2.6) nur durch die Umbenennung der Systemgrößen entstanden ist, bleibt die differentielle Ordnung gleich.

Angenommen das zugehörige minimale System (2.5) ist exakt linearisierbar, ohne interne Dynamik, bzw. seine differentielle Ordnung ist $\tilde{\delta} = \tilde{n}$, dann existieren immer $(n+p-\delta) = p$ glatte Funktionen φ_i so, dass mit

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{w}) \\ N^0 h(\mathbf{w}) \\ N^1 h(\mathbf{w}) \\ \vdots \\ N^{n-1} h(\mathbf{w}) \\ \varphi_{n+1}(\mathbf{w}) \\ \vdots \\ \varphi_{n+p}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ gegeben ist [3]. Mit der Zustandstransformation (2.7) kann das System (2.6) auf die BYRNES-ISIDORI Normalform transformiert werden.

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \\ N^n h(\varphi^{-1}(\xi)) + (N^{n-1} h(\varphi^{-1}(\xi)))' \mathbf{b}(\varphi^{-1}(\xi)) u \\ L_{\mathbf{f}} \varphi_{n+1}(\varphi^{-1}(\xi)) + \underbrace{L_{\mathbf{g}} \varphi_{n+1}(\varphi^{-1}(\xi)) u}_{=0} \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}} \varphi_{n+p}(\varphi^{-1}(\xi)) + \underbrace{L_{\mathbf{g}} \varphi_{n+p}(\varphi^{-1}(\xi)) u}_{=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \alpha(\xi) + \beta(\xi) u \\ \vartheta_{n+1}(\xi) \\ \vdots \\ \vartheta_{n+p}(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Man erhält ein System der Ordnung n mit linearem Eingangs-Ausgangsverhalten in der Umgebung \mathcal{U} durch die Zustandsrückführung

$$u = \frac{-\alpha(\xi) + v}{\beta(\xi)}. \quad (2.9)$$

Die Funktionen $\varphi_{n+1}(\mathbf{w}), \dots, \varphi_{n+p}(\mathbf{w})$ sind so zu wählen, dass die Bedingungen

$$L_{\mathbf{g}} \varphi_{n+1}(\mathbf{w}) = \dots = L_{\mathbf{g}} \varphi_{n+p}(\mathbf{w}) = 0 \quad (2.10)$$

für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ erfüllt sind. Die Frage der Existenz einer Transformation (2.7) wird somit zur Frage der Existenz einer Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen (2.10) [2]. Damit der mit der Rückführung (2.9) geschlossene Kreis stabil ist, muss das System (2.6) mit einer internen Dynamik, beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\dot{\eta} = \vartheta(\mathbf{0}, \eta) \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \vdots \\ \xi_{n+p} \end{bmatrix} = \eta, \quad (2.11)$$

lokal asymptotisch phasenminimal an der Stelle $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sein [4]. Das heißt die Ruhelage $\eta = \mathbf{0}$ muss asymptotisch stabil sein, bzw. die Eigenwerte der Matrix

$$\left. \frac{\partial \vartheta(\mathbf{0}, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\mathbf{0}}$$

müssen in der linken offenen s-Halbebene liegen.

Im Falle, dass das minimale System eine interne, nicht beobachtbare Dynamik besitzt, muss entsprechend das System partieller Differentialgleichungen (2.10) erweitert und die Stabilitätsbedingung beachtet werden.

3 Beobachterentwurf für nichtlineare SISO-Deskriptorsysteme vom Index $k = 1$

Beim Entwurf des Beobachters wird angenommen, dass die den betrachteten nichtlinearen Deskriptorsystemen in der Form (2.1) zugehörigen minimalen Systeme (2.5) exakt eingangs-ausgangslinearisiert sind.

Der Beobachterentwurf geschieht dual zur exakten Linearisierung. Damit dies gelingt, muss das System beobachtbar sein. Nach dem Rangkriterium ist das minimale System (2.5) genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix den vollen Rang besitzt [8]:

$$\text{Rang}\{\mathbf{Q}_B(\mathbf{x})\} = \text{Rang}\left\{\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right\} = \tilde{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(\tilde{n}-1)}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\tilde{\mathbf{f}}}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\tilde{\mathbf{f}}}^{\tilde{n}-1}h(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Mit der Annahme, dass das minimale System differentielle Ordnung $\tilde{\delta} = \tilde{n}$ hat, sind die Zeilenvektoren der Beobachtbarkeitsmatrix linear unabhängig [3] und somit das System beobachtbar. Offensichtlich ist das erweiterte System (2.6) nicht vollständig beobachtbar, da seine differentielle Ordnung nicht der Systemordnung entspricht. Dies bedeutet, dass man in der Ausgangsgröße des Systems (2.8) die Information nur über die ersten n Zustandsgrößen hat und über die restlichen p nicht. Das Teilsystem (2.11) ist also nicht beobachtbar. Ist aber das System (2.6) asymptotisch phasenminimal, dann ist das Gesamtsystem detektierbar und es liegt nahe, den Ansatz aus [7] für einen High-Gain-Beobachter zu verfolgen.

Es wird von einem Luenberger-Ansatz mit konstanter Beobacherverstärkung $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n+p}$ ausgegangen.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} &= \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{b}(\alpha(\boldsymbol{\xi}) + \beta(\boldsymbol{\xi})u) + \mathbf{k}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}, \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}(0) = \hat{\boldsymbol{\xi}}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Beobachtungsfehler $\mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}$ genügt der Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}^T)\mathbf{e} + \mathbf{b} \left(\alpha(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \beta(\hat{\boldsymbol{\xi}})u - \alpha(\boldsymbol{\xi}) - \beta(\boldsymbol{\xi})u \right), \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\boldsymbol{\xi}}_0 - \boldsymbol{\xi}_0. \quad (3.3)$$

Die skalaren Funktionen α und β müssen Lipschitz-stetig sein, d. h. für eine beschränkte Eingangsgröße u existiert die Lipschitz-Konstante $\gamma > 0$ so, dass

$$\left| \alpha(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \beta(\hat{\boldsymbol{\xi}})u - \alpha(\boldsymbol{\xi}) - \beta(\boldsymbol{\xi})u \right| \leq \gamma \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi} \right\|$$

erfüllt ist [7].

Die Differentialgleichung (3.3) hat im Punkt $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ eine Ruhelage. Die Beobachterverstärkung ist so zu wählen, dass diese Ruhelage asymptotisch stabil ist, bzw. so dass das Konvergenzverhalten $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ für $t \rightarrow \infty$ von dem linearen Teil bestimmt wird [6].

Den Beobachter (3.2) in den Originalkoordinaten erhält man aus der Transformation $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{w}})$.

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{w}})}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \dot{\hat{\mathbf{w}}} = \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{w}}) \dot{\hat{\mathbf{w}}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{\mathbf{w}}} = \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\mathbf{w}}) \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

Damit hat der Beobachter die Form [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{w}}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{w}})u + \underbrace{\mathbf{Q}^{-1}(\hat{\mathbf{w}})\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_{HG}(\hat{\mathbf{w}})}(y - h(\hat{\mathbf{w}})), \quad \hat{\mathbf{w}}(0) = \hat{\mathbf{w}}_0 \in D_w \\ \hat{y} &= h(\hat{\mathbf{w}}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit der vom geschätzten Zustand abhängigen Beobachterverstärkung $\mathbf{k}_{HG} : D_w \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$.

Zur Berechnung der Beobachterverstärkung aus der Gleichung (3.4) wird die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (2.7) benötigt

$$\mathbf{k}_{HG}(\hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\mathbf{w}})\mathbf{k} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{w}})}{\partial \hat{\mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^0 h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^1 h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^{n-1} h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \varphi_{n+1}(\hat{\mathbf{w}}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} \varphi_{n+p}(\hat{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BR}(\hat{\mathbf{w}}) \\ \mathbf{R}(\hat{\mathbf{w}}) \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{Q}_{BR}(\mathbf{x})$ ist die reduzierte Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_{BR}(\hat{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^0 h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^1 h(\hat{\mathbf{w}}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{w}}} N^{n-1} h(\hat{\mathbf{w}}) \end{bmatrix} .$$

Damit die Beobacherverstärkung explizit nur noch von der Matrix $\mathbf{Q}_{BR}(\hat{\mathbf{w}})$ und nicht von der speziellen Wahl von $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{w}})$ abhängt, kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\mathbf{k}_{HG}(\hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{Q}_{BR}^+(\hat{\mathbf{w}})\mathbf{k} \quad (3.5)$$

mit

$$\mathbf{Q}_{BR}^+(\hat{\mathbf{w}}) = \mathbf{Q}_{BR}^T(\hat{\mathbf{w}}) (\mathbf{Q}_{BR}(\hat{\mathbf{w}})\mathbf{Q}_{BR}^T(\hat{\mathbf{w}}))^{-1} , \quad (3.6)$$

wobei $\mathbf{Q}_{BR}^+(\hat{\mathbf{w}})$ die Moore-Penrose-Inverse von $\mathbf{Q}_{BR}(\hat{\mathbf{w}})$ bezeichnet.

Die Abbildung 3.1 zeigt die Struktur des Beobachters (blau), die dual zu der exakten Linearisierung (grün) aufgebaut ist.

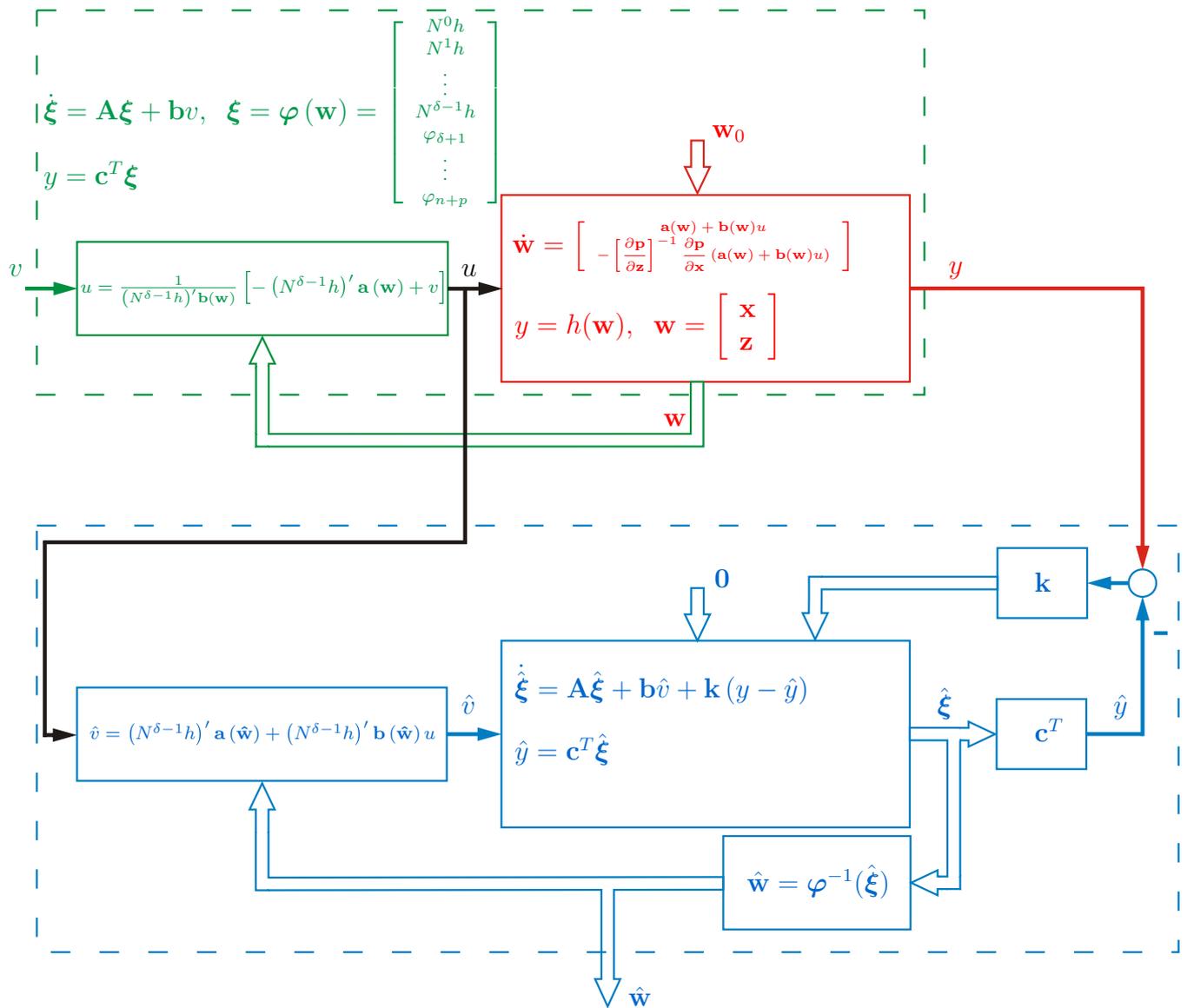


Abbildung 3.1: Beobachterstruktur für ein SISO-Deskriptorsystem

4 Beispiel

Am Beispiel eines einfachen elastisch gekoppelten Roboterarmes [4, 9] werden die besprochenen Zusammenhänge besonders deutlich.

Das minimale System lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{K}{J_1}x_1 + \frac{K}{J_1}x_2 - \frac{mgl}{J_1}\sin(x_1) \\ \frac{K}{J_2}x_1 - \frac{K}{J_2}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u . \quad (4.1)$$

Seine differentielle Ordnung errechnet sich zu $\tilde{\delta} = 4$, wenn der Ausgang $y = x_1$ gewählt wird.

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_3 \\ \ddot{y} &= -\frac{K}{J_1}x_1 + \frac{K}{J_1}x_2 - \frac{mgl}{J_1}\sin(x_1) \\ \ddot{\ddot{y}} &= -\frac{mgl}{J_1}x_3\cos(x_1) - \frac{K}{J_1}x_3 + \frac{K}{J_1}x_4 \\ \overset{(4)}{y} &= \left(\frac{K^2}{J_1^2} + \frac{K^2}{J_1J_2}\right)(x_1 - x_2) + \left(\frac{mgl}{J_1}x_3^2 + \frac{Kmg}{J_1^2}\right)\sin(x_1) + \frac{Kmg}{J_1^2}(x_1 - x_2)\cos(x_1) \\ &\quad + \left(\frac{mgl}{J_1}\right)^2 \sin(x_1)\cos(x_1) + \frac{K}{J_1J_2}u \end{aligned}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix aus (3.1) hat den vollen Rang.

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl}{J_1}\cos(x_1) - \frac{K}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{J_1}x_3\sin(x_1) & 0 & -\frac{mgl}{J_1}\cos(x_1) - \frac{K}{J_1} & \frac{K}{J_1} \end{bmatrix}$$

Dasselbe System in der Form (2.1) eines Deskriptorsystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{mgl}{J_1}\sin(x_1) + \frac{1}{J_1}z_1 \\ \frac{1}{J_2}z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u \quad (4.2)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -z_1 + K(x_2 - x_1) \\ -z_2 + K(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 ,$$

bzw. in der erweiterten Form (2.6)

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ -\frac{mgl}{J_1} \sin(w_1) + \frac{1}{J_1} w_5 \\ \frac{1}{J_2} w_6 \\ K(w_4 - w_3) \\ K(w_3 - w_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

$$y = w_1$$

hat die differentielle Ordnung $\delta = 4$:

$$\begin{aligned} y &= w_1 \\ \dot{y} &= w_3 \\ \ddot{y} &= -\frac{mgl}{J_1} \sin(w_1) + \frac{1}{J_1} w_5 \\ \dddot{y} &= -\frac{mgl}{J_1} w_3 \cos(w_1) + \frac{K}{J_1} (w_4 - w_3) \\ y^{(4)} &= -\frac{K}{J_1^2} w_5 + \frac{K}{J_1 J_2} w_6 + \frac{K mgl}{J_1^2} \sin(w_1) - \frac{mgl}{J_1^2} w_5 \cos(w_1) + \frac{mgl}{J_1} w_3^2 \sin(w_1) \\ &\quad + \left(\frac{mgl}{J_1} \right)^2 \sin(w_1) \cos(w_1) + \frac{K}{J_1 J_2} u . \end{aligned}$$

Die Beobachterverstärkung (3.5) lautet:

$$\mathbf{k}_{HG}(\hat{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_2 \\ -\frac{mgl k_1 \hat{w}_3 \sin(\hat{w}_1)}{K} + \frac{(mgl \cos(\hat{w}_1) + K) k_2}{K} + \frac{J_1 k_4}{K} \\ mgl k_1 \cos(\hat{w}_1) + \frac{J_1 k_3}{l} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Die Werte für k_i wurden mit der Eigenwertvorgabe $s = -0,5$ berechnet, ohne dass eine optimale Lösung gesucht wurde. In den Abbildungen 4.1 und 4.2 sind die zeitlichen Verläufe der tatsächlichen (gestrichelt) und geschätzten differentiellen bzw. algebraischen Variablen dargestellt. In der Abbildung 4.2 ist es nicht deutlich zu sehen, dass $z_1 = -z_2$ gilt, was aber nur an der Skalierung liegt.

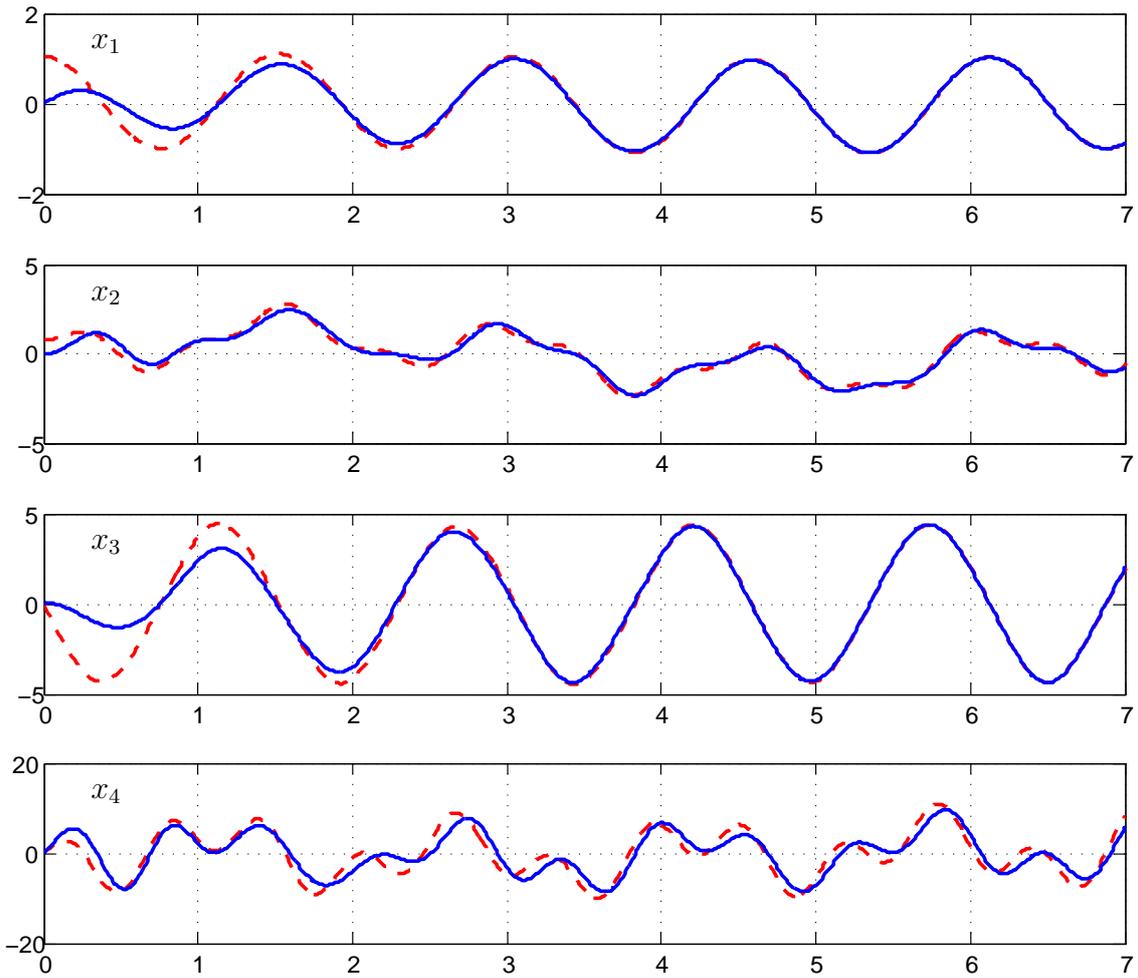


Abbildung 4.1: Zeitverläufe der tatsächlichen (gestrichelt) und geschätzten differentiellen Variablen

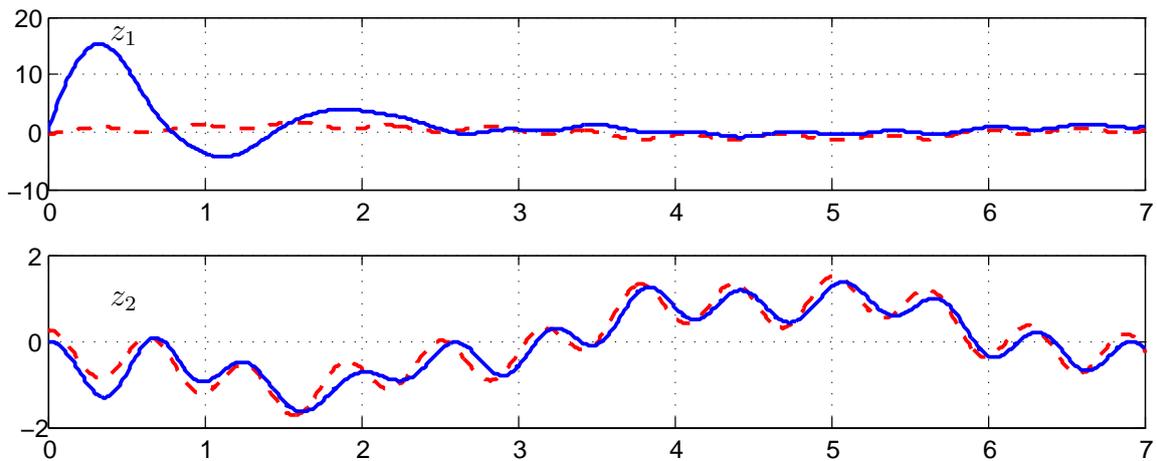


Abbildung 4.2: Zeitverläufe der tatsächlichen (gestrichelt) und geschätzten algebraischen Variablen

5 Zusammenfassung und Ausblick

Beim Entwurf eines Beobachters für nichtlineare Deskriptorsysteme stößt man auf zwei wesentliche Probleme. Erstens, die Suche nach einer geeigneten Transformation, bzw. dem Diffeomorphismus (2.7) gestaltet sich schwierig und wird durch das System partieller Differentialgleichungen (2.10) nicht einfacher. Zweitens, das Sicherstellen des Konvergenzverhaltens $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ für $t \rightarrow \infty$. Mit dem besprochenen Ansatz werden diese Schwierigkeiten umgangen. Es wird keine Transformation gebraucht und die lokale Konvergenz der Lösung des Beobachters gegen die des Systems wird mit der Stabilitätsbedingung an die interne Dynamik gesichert [7].

Abgesehen von der Untersuchung des Beobacherverhaltens für differentielle Ordnungen $\delta \leq \tilde{n}$, bleibt noch die Tauglichkeit des Beobachters für höherindizierte und Mehrgrößensysteme zu untersuchen.

Literatur

- [1] GAUSCH, F.; MÜLLER, P.: *Statische und dynamische Rückführung in nichtlinearen Deskriptorsystemen*. at – Automatisierungstechnik 12 (2004), S. 569-576.
- [2] HUNT, L. R.; SU, R.; MEYER, G.: *Global transformation of nonlinear systems*. IEEE Trans. on Automatic Control 28 (1983) 1, S. 24-30.
- [3] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag Berlin, 1989.
- [4] KUGI, A.: *Regelungssysteme*. Vorlesungsskript TU Wien, 2009.
- [5] MÜLLER, P.: *Linearisierung und Entkopplung von Deskriptorsystemen. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik*. Shaker Verlag, Aachen, 2000.
- [6] RÖBENACK, K.: *Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit Hilfe des Automatischen Differenzierens*. Shaker Verlag Aachen, 2005.
- [7] RÖBENACK, K.: *Zum High-Gain-Beobachterentwurf für eingangs-/ausgangslinearisierbare SISO-Systeme*. Automatisierungstechnik 10 (2004), S. 481-488.
- [8] ROTHFUSS, R., ZEITZ, M.: *Einführung in die Analyse nichtlinearer Systeme*.
- [9] SLOTINE, J.-J. E.; LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall New Jersey, 1991.
- [10] SVARICEK, F.: *Nulldynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen*. Automatisierungstechnik 7 (2006), S. 310-322.

Ein auf qualitativer Analyse basierter robuster Reglerentwurf

* ** Mikuláš Huba und ** Michael Gerke

* STU FEI, Ilkovičova 3, SK-812 19 Bratislava, Slovakia

** FernUniversität in Hagen, Bereich Elektrotechnik, Universitätsstr. 27,
D-58084 Hagen, Germany

Kurzfassung: Dieser Beitrag behandelt den robusten Reglerentwurf basierend auf einer qualitativen Analyse der durch Simulation generierten Übergangsprozesse in geschlossenen Regelkreisen. Eine solche Analyse kann alle Grundeigenschaften der Regelkreise, wie z. B. Stabilität, Monotonie, Dämpfungsgrad, usw. berücksichtigen, die algorithmisch getestet werden können. Dabei kann sie erheblich detailliertere Aussagen liefern, als die üblicherweise benutzte Analyse im Zeit- oder im Frequenzbereich, was vor allem für Systeme mit Totzeit vorteilhaft ist.

1 Einleitung

Der Reglerentwurf für Strecken erster Ordnung mit Totzeit mit der Ausgangsgröße $y(t)$ und der Stellgröße $u(t)$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_s}{s + a} e^{-T_d s} \quad (1)$$

repräsentiert eine der häufigsten und wichtigsten Aufgaben der Regelungstechnik, wobei dieser meistens auf die Strukturen der P, PI und PID Regler führt. Verschiedene Einstellungsmethoden, die von den einfachsten Faustformeln bis zu komplexen Verfahren reichen, sind in zahlreichen Publikationen zu finden (siehe z.B. [1], [2], [4], [11], [12], [13], [14], [15] m zumindest einige der gut bekannten Verfahren zu erwähnen).

Aber nur einige dieser Methoden konzentrieren sich auf Reglervorgänge ohne Überschwingen, oder auf monotone Regelvorgänge, die typisch in verschiedenen mechatronischen Anwendungen wichtig sind. Außerdem sind sie vorwiegend für ein nominalen Entwurf rund um einen fest vorgegebenen Arbeitspunkt bestimmt, während die Strecken in Praxis meistens nur ungenau durch ihre Modellparameter gegeben sind, z.B. in Form von Intervallen mit Unsicherheit

$$K_s \in \langle K_{smin}, K_{smax} \rangle; K_{smax} \geq K_{smin} > 0 \quad (2)$$

$$T_d \in \langle T_{dmin}, T_{dmax} \rangle; T_{dmax} \geq T_{dmin} > 0 \quad (3)$$

$$a \in \langle a_{min}, a_{max} \rangle; a_{max} \geq a_{min} \quad (4)$$

die aus einer Identifikation folgen.

Weil wir uns nur für stabile monotone Regelvorgänge interessieren, wenn im Sinne der BIBO Stabilität bei einer begrenzten Stellgröße die Ausgangsgröße $y(t)$ begrenzt ($|y(t)| < Konst, 0 \leq t < \infty$) bleibt und für alle mögliche Zeitaugenblicke $t_i = 1, 2$ die Ungleichung

$$0 \leq [y(t_2) - y(t_1)] \text{sign}(y(\infty) - y_0); \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \infty; \quad |y(\infty)| < Konst \quad (5)$$

gilt, kann diese als monoton (MO) bezeichnet werden. Wenn die entsprechende Stellgröße $u(t)$ gleichzeitig nur einen Extrempunkt für $t = t_m$ hat, wobei die Ungleichungen

$$\text{sign}(\dot{u}(t_1)) \text{sign}(u(t_m)) \geq 0, \forall t_1 \in \langle 0, t_m \rangle \cup \text{sign}(\dot{u}(t_2)) \text{sign}(u(t_m)) \leq 0, \forall t_2 \in \langle t_m, \infty \rangle \quad (6)$$

gelten, wird eine solche Stellgröße als Einpulsfunktion (1P) bezeichnet und die Eingang-Ausgangspaardynamik als Dynamik erster Ordnung benannt. Der Extrempunkt mit dem Stellgrößenwert $u(t_m)$ kann auch zu einem längeren Zeitintervall ausgedehnt werden, was häufig infolge einer Stellgrößenbegrenzung geschieht (Bild 1). Offensichtlich besteht eine derartige 1P Funktion aus zwei monotonen Intervallen, wobei das erste Intervall vor dem Extremum (mit wachsender Amplitude) sich auch zu Null schmälern kann. Bild 1 zeigt Beispiele möglicher 1P Funktionen.

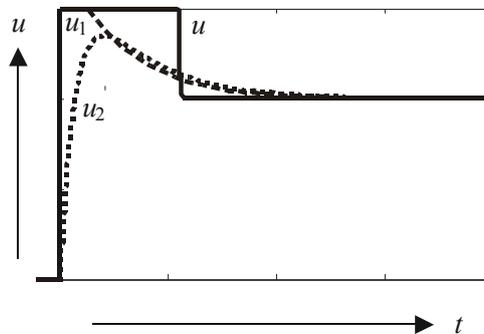


Bild 1 Beispiele der 1P Funktionen (links)

In praktischen Anwendungen, aber auch in Rechnersimulationen, wenn man mit endlicher Genauigkeit der Signalen arbeitet, ist es vorteilhaft, beide frühere Definitionen durch Einführen gewisser tolerierten Größen der Abweichung von idealen Zuständen abzuschwächen, was man z. B. durch einen kleinen Parametern

$$\varepsilon \approx 0.01 \div 0.05 > 0 \quad (7)$$

in der Ungleichungen der Monotonie (5)

$$-\varepsilon \leq [y(t_2) - y(t_1)] \text{sign}(y(\infty) - y_0); \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq \infty; \quad |y(\infty)| < Konst \quad (8)$$

realisieren kann. Der Größe $\varepsilon = 0.01$ entsprechen dann in einer Sprungantwort mit dem Endwert $y(\infty) = 1$ eine zulässige Über- und Unterschwingen mit Amplituden bis zu 1% des Endwertes.

1P Funktionen kann man weiter zu nP Funktionen verallgemeinern, wobei n der Anzahl möglicher Extrempunkte entspricht. Die Einführung des Konzeptes der nP Funktionen vereinfacht viele Aussagen über einfache Regelungen und ihre weitere Analyse. Monotone Funktionen stellen somit dann Grenzbeispiele der 0P Funktionen dar, während konsequenterweise 2P Funktionen bei Regelungen der Strecken zweiter Ordnung (z. B. in Positionsregelungen) häufig anzutreffen sind, usw.

Aus einer streng monotonen Funktion bekommt man mit Abschwächung (8) 1P, nP, oder eine periodische Funktion, die den Grenzfall der nP Funktion mit $n \rightarrow \infty$ darstellt. Die Analyse solcher stückweise monotonen Funktionen kann dann auf einigen gemeinsamen Elementen beruhen, wie Monotonie und Überschwingen (Unterschwingen).

Wie es schon früher erwähnt wurde, stehen beide diese Eigenschaften (MO, 1P und ihre weitere Verallgemeinerungen) am Rande der offiziellen Theorie. Einer der neuesten Übersichtsartikel [7] spricht nur über Prozesse ohne Überschwingen (was noch nicht äquivalent zu Monotonie ist), ohne weitere Eigenschaften wie MO und 1P zu erwähnen. Monotonie ist viel mehr berücksichtigt z. B. in [14].

Der Übergang nach einem Puls der Stellgröße, der in Systemen mit Begrenzungen im Grenzfall zu einer Annäherung an die zeitoptimale Regelvorgänge führt, ist z. B. in [4] und [14] ausführlich dargestellt. Doch diese beiden mit Praxisaufgaben motivierten Lehrbücher kann man derzeit nicht als ‚Mainstream‘ der Regelungstheorie bezeichnen und es fehlen auch geeignete Terminologie und analytische Methoden, um solche Eigenschaften einfach zu testen.

Neben den qualitativen Eigenschaften, wie die Monotonie und ihre Anwendungen auf stückweise monotonen nP Funktionen, ist es noch immer notwendig, die Ein- und Ausgangsvariablen der Strecke durch die quantitative Parametern zu charakterisieren, wie z. B. die Einschwingzeit t_s (bestimmt im allgemeinen durch definierte Messgenauigkeiten ε_y für Streckenausgang und ε_u für Reglerausgang)

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \varepsilon_y \cap |u(t) - u(\infty)| \leq \varepsilon_u, \forall t \geq t_s \quad (9)$$

oder die IAE (Integral of Absolute Error) Regelungsfläche

$$IAE = \int_0^{\infty} |y(t) - y(\infty)| dt \quad (10)$$

Während die Einschwingzeit meistens ohne Rücksicht auf der Streckeneingang (ohne die zweite Bedingung in (9)) bestimmt wird, wird für die Bewertung des Umfangs der Stellgrößenveränderungen oft das so genannte Total Variance (TV) Kriterium (manchmal auch als IAUD Kriterium benannt) benutzt [13]

$$TV = \int_0^{\infty} \left| \frac{du}{dt} \right| dt \approx \sum_i |u_{i+1} - u_i| \quad (11)$$

2 Analytische Konstruktion eines Verhaltensportraits

Weiter werden wir am Beispiel der Strecke (1) die analytische und numerische Konstruktion eines Verhaltensportraits betrachten, welche zu einem robusten Reglerentwurf benutzt werden kann. Die Strecke sei durch einen P-Regler K_R mit statischer Vorsteuerung u_w

$$u = K_R e + u_w ; K_R = -(\alpha + a) / K_s = (\Omega - a) / K_s ; u_w = K_v w ; K_v = a / K_s \quad (12)$$

geregelt, wobei w die Führungsgröße und

$$e = w - y \quad (13)$$

die Regelabweichung sind und zudem α , bzw. $\Omega = -\alpha$ den Pol des geschlossenen Regelkreises repräsentieren bzw. dessen Bandbreite. Die Stellgröße unterliegt den Begrenzungen

$$U_1 \leq u \leq U_2 \quad (14)$$

Unter Vernachlässigung der Begrenzungen und Berücksichtigung der Intervallparameter (2-4) kann man zuerst bei einem fest eingestellten Regler mit Parametern K_R, a_0, K_{s0} die Übertragungsfunktion der Schleife als

$$F_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \left(1 + \frac{a_0}{K_{s0} K_R}\right) \frac{K_R F(s)}{1 + K_R F(s)} = \frac{\alpha K_s e^{-T_d s}}{K_s e^{-T_d s} (a_0 + \alpha) - K_{s0} (s + a)} \quad (15)$$

beschreiben. Aus der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (15), die für $p = T_d s$; $K = K_R K_s T_d$; $A = a T_d$ auch in der Form

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = (1 + K_v) \frac{K e^{-p}}{p + A + K e^{-p}} ; K_v = A_0 / K_0 = a_0 / K_{s0} \quad (16)$$

geschrieben werden kann, folgt es, dass sein dynamischer Verhaltensportrait von zwei Parametern A und K abhängt, die sich in gewissen Grenzen verändern können. Dazu kommt noch eine Vorsteuerungsverstärkung K_v , die mindestens die endliche Ruhelage beeinflussen wird. Für Untersuchungen der dynamischen Eigenschaften ist es dann ausreichend, einen solchen Regelkreis nur einmal zu analysieren und die erworbene Information später in konkreten Aufgaben auszunutzen. Ein derartiges Verfahren wurde schon im-Buch nach Oldenbourg und Sartorius [12] systematisch benutzt, wobei das Verhaltensportrait Informationen über Stabilitätsgrenzen, über Grenzen der periodischen und aperiodischen Vorgänge und über weitere charakteristische Werte der dominanten Pole des Regelkreises grafisch dargestellt hat. Es kann weiter auch für einen robusten Reglerentwurf appliziert werden.

Aus

$$F_w(0) = \frac{\alpha K_s}{K_s (a_0 + \alpha) - K_{s0} a} \quad (17)$$

folgt dass $F_w(0) = 1$ (Bedingung der Nullregelabweichung in Ruhezuständen) nur dann erzielt wird, wenn $K_s a_0 = K_{s0} a$ gilt, dass heißt für

$$K_v = a_0 / K_{s0} = a / K_s \quad (18)$$

Das kann aber im allgemeinen nicht erzielt werden und daher muss man Einflüsse der Vorsteuerung weiter analysieren.

Um die bis jetzt nicht modellierten Störgrößeneinflüsse möglichst gut zu kompensieren, sollte dabei die Reglerverstärkung K_R möglichst groß sein. Ihr Wert, oder die normierte Verstärkung der Regelschleife K , wird mit Rücksicht auf die Stabilität an beiden Seiten begrenzt zu

$$K_{Rmin} < K_R < K_{Rmax} ; K_{min} < K < K_{max} ; K = K_R K_s T_d \quad (19)$$

Die Stabilitätsgrenzen können z. B. durch die Methode der D-Zerlegung [9], [10] berechnet werden, wobei eine Substitution $s = \pm j\omega$ in die charakteristische Gleichung benutzt wird, die

$$K e^{-j\tau_d} + j\tau_d + A = 0 ; K = K_R K_s T_d ; \tau_d = \omega T_d ; A = a T_d \quad (20)$$

ergibt.

Diese komplexe Gleichung ist äquivalent zu zwei reellen Gleichungen

$$K \cos \tau_d + A = 0 ; -K \sin \tau_d + \tau_d = 0 \quad (21)$$

Aus (20-21) folgt es für $\omega = 0$, wenn auch $\tau_d = 0$, die untere Stabilitätsgrenze

$$K_{min} = -A = -a T_d \quad (22)$$

Die obere Grenze (Bild 2) folgt in Form einer parametrisch gegebenen Kurve

$$K_{max} = \frac{\tau_d}{\sin \tau_d} ; A = -\frac{\tau_d \cos \tau_d}{\sin \tau_d} ; \tau_d \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \quad (23)$$

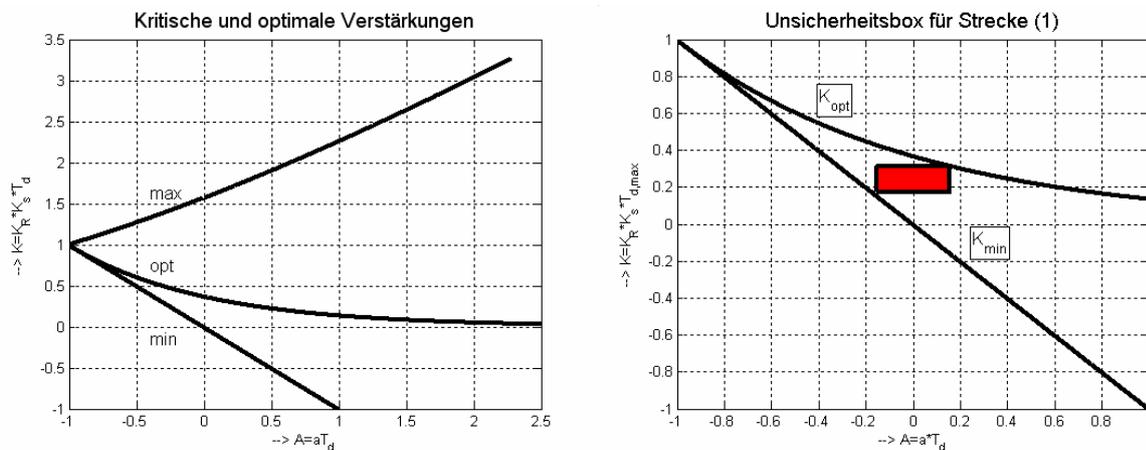


Bild 2 Kritische und optimale Werte der Verstärkung $K = K_R K_s T_d$ (links) und Positionierung einer Unsicherheitsbox (rechts).

Die optimale Reglerverstärkung mit den möglichst schnellen monotonen Reglervorgängen kann traditionell [11] aus der Bedingung der doppelten dominanten reellen Pole (DRP) der charakteristischen Gleichung

$$A(s) = K_s e^{-T_d s} (a_0 + \alpha) - K_{s0} (s + a) \quad (24)$$

bestimmt werden, wenn aus $A(s) = 0$; $\dot{A}(s) = 0$ folgt

$$s_{1,2} = -a - 1/T_d \quad (25)$$

Im Falle nominaler Einstellung mit $K_{s0} = K_s, a_0 = a$ bekommt man dann

$$K_{R,opt} = \frac{e^{-(1+aT_d)}}{K_s T_d} \quad (26)$$

Ein robuster Reglerentwurf, der für die Parameter (2-4) die möglichst schnellen monotonen Regelvorgänge sichern sollte, basiert auf den Bedingungen

$$K_{min} < K \leq K_{opt} ; K = K_R K_s T_d \quad (27)$$

Die normierte Verstärkung (19) muss also die Ungleichungen

$$-aT_d < K_R K_s T_d \leq e^{-(1+aT_d)} \quad (28)$$

erfüllen. Weil $K = K_R K_s T_d$ eine wachsende Funktion der Streckenverstärkung K_s und der Totzeit T_d ist und beide ihre Begrenzungen fallende Funktionen des Arguments aT_d sind, Grenzsituationen werden zu $a_{min} T_{d,max}$ und $a_{max} T_{d,max}$ entsprechen. So muss (28) für

$$-a_{min} T_{d,max} < K_R K_{s,min} T_{d,max} ; K_R T_{d,max} K_{s,max} \leq e^{-(1+a_{max} T_{d,max})} \quad (29)$$

erfüllt sein. Das heißt, dass in der Ebene der Parameter $(aT_{d,max}, K_R K_s T_{d,max})$ die gewünschten Eigenschaften nur dann gesichert werden, wenn für alle möglichen Parameter der Strecke der Unsicherheitsbox (UB)

$$UB = \begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) \\ B(2,1) & B(2,2) \end{bmatrix} ; \begin{array}{l} B(1,1) = (a_{min} T_{d,max}, K_R K_{s,max} T_{d,max}); \\ B(1,2) = (a_{max} T_{d,max}, K_R K_{s,max} T_{d,max}); \\ B(2,1) = (a_{min} T_{d,max}, K_R K_{s,min} T_{d,max}); \\ B(2,2) = (a_{max} T_{d,max}, K_R K_{s,min} T_{d,max}); \end{array} \quad (30)$$

der horizontal durch die Abszisse mit den Gipfelpunkten $a_{min} T_{d,max}$ und $a_{max} T_{d,max}$ und vertikal durch die Abszisse mit den Gipfelpunkten $K_R K_{s,min} T_{d,max}$ und $K_R K_{s,max} T_{d,max}$ beschränkt wird, im gewünschten Gebiet bleibt. In unserem Falle muss, um die gewünschten Eigenschaften zu sichern, die gesamte UB zwischen den Kurven $-aT_d$ and $e^{-(1+aT_d)}$ liegen. Mit Rücksicht auf den Verlauf dieser Kurven ist es offensichtlich, dass die kritische Rolle durch den nord-östlichen Punkt von UB $B(1,2)$ und durch den süd-westlichen Punkt $B(2,1)$ gekennzeichnet ist. In der Lösung von (29) bestimmt man zuerst K_R aus $K_R T_{d,max} K_{s,max} = e^{-(1+a_{max} T_{d,max})}$, und die zweite Ungleichung (28) wird dann nur auf Erfülltheit getestet.

3 Beispiel

Es sei ein Regler für die Strecke (1) mit

$$a \in \langle -0.9, 0.9 \rangle ; K_s \in \langle 0.7, 1.3 \rangle ; T_d \in \langle 0, 0.17 \rangle \quad (31)$$

zu entwerfen, der möglichst schnelle monotone Regelvorgänge liefert.

Lösung:

Regelvorgänge, die zur UB in Bild 3 mit sehr extrem gewählten Parametern

$$K_{s0} = 5.5 ; a_0 = 0 ; K_R = 1.4285 \quad (32)$$

passen, sind im Bild 3 links gezeigt. Bei einer veränderten Auswahl der Parameter

$$K_{s0} = 1 ; a_0 = 1 \quad (33)$$

ergibt sich dieselbe UB als bei früherer Auswahl, aber einer der Regelvorgänge (Bild 3, rechts, gepunktet) ist nicht mehr stabil. Was hat dieses Verhalten verursacht, wenn die UB in einem stabilen Gebiet liegt?

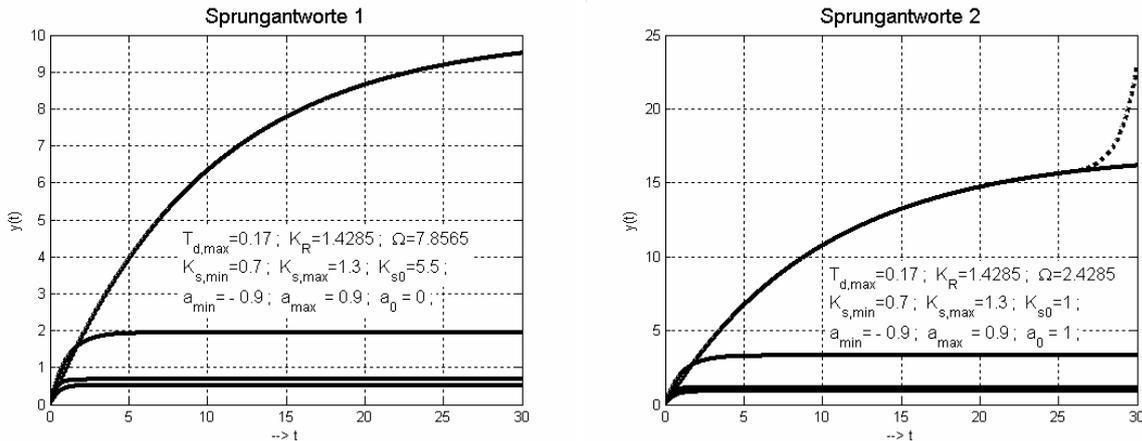


Bild 3 Sprungantworten für zwei verschiedene Einstellungen der Vorsteuerungsverstärkung aus Beispiel 1 mit Reglerverstärkung entsprechend zu UB im Bild 2 für $u \in \langle -40,40 \rangle$ (kontinuierlich) und $u \in \langle -20,20 \rangle$ (gepunktet)

Die Ursache liegt darin, dass während beide Tripel der Parametern dieselbe Reglerverstärkung (32) benutzen, für $u \in \langle -20,20 \rangle$ Stabilitätsprobleme infolge ungenau eingestellten Vorsteuerung $K_v = a_0 / K_{s0}$ entstehen, die die Ausgangsvariable im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ zu solchem Endwert

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{K_{s0} K_R + a_0}{K_{s0} K_R} \frac{K_R K_s}{K_s K_R + a} = \frac{K_s}{K_{s0}} \frac{K_{s0} K_R + a_0}{K_s K_R + a} \quad (34)$$

verschiebt, bei denen sie schon unter Berücksichtigung der Begrenzungen nicht mehr steuerbar ist. Bei vorhandenen Stellgrößenbeschränkungen bleibt nämlich die Strecke steuerbar nur für die Ausgangsgrößen, bei denen das Vorzeichen der Ableitung der Ausgangsgröße $dy / dt = K_s u - ay$ zu ändern ist, was der Bedingung

$$[K_s U_1 - ay][K_s U_2 - ay] < 0 \quad (35)$$

entspricht. Trotz der notwendiger Bedingung der dynamischer Stabilität bleibt die Schleife daher nur stabil, wenn auch für y_∞ die Bedingung (35) erfüllt bleibt, was z.B. schon für $u \in \langle -40,40 \rangle$ erzielt wird. Zusammen mit der Reglerverstärkung K_R hängt also das gesamte Systemverhaltens auch von der Vorsteuerung K_v ab. Werden z. B. positive Sollwertsprünge betrachtet, nimmt das Vorsteuerungssignal u_w Werte

$$u_w \in \langle a_{\min} / K_{s\max}, a_{\max} / K_{s\min} \rangle \quad (36)$$

ein. Für eine richtig gewählte Größe $K \in \langle K_{\min}, K_{\text{opt}} \rangle$ sind dann die Übergangsvorgänge am besten angepasst für den kritischen Fall der instabilen Strecken ($a = a_{\min} < 0$), wenn

$$K_v \leq a / K_s \quad (37)$$

4 Simulationsbasierter robuster Reglerentwurf

Die Leistungsfähigkeit heutiger Rechner, zusammen mit Simulationsprogrammen und Computer Graphics bieten uns neue Möglichkeiten, verschiedene Güteparametern der Regelkreisen direkt zu analysieren, dabei in Form eines Verhaltensportraits zu visualisieren, zu speichern und dann für eine konkrete Aufgabe mit spezifischer Strecke nur aus dem Speicher abzurufen.

Für den numerischen Reglerentwurf, der für die Strecke (1-4) mit Regler (12) die möglichst schnellsten monotone Regelvorgänge liefert, ist dann folgendes notwendig:

1. Das Auswertungsnetz der Punkte der dominanten veränderlichen Parametern K, A in (16) über einen möglichst breiten Rahmen zu definieren, der die für verschiedene Anwendungen vorausgesetzte UB (30) mit einem geeigneten Sicherheitsabstand beinhaltet.
2. Für jeden Punkt aus diesem Netz wird eine Simulation ausgeführt, die damit erzielte Übergangsprozesse analysiert und Ergebnisse dieser Analyse gespeichert.
3. Nach Ausführung einer solchen Analyse ist es dann möglich, eine spezifische Aufgabe mit gegebenen Streckenparametern (2-4) zu lösen. Aus diesen folgt dann eine konkrete Wahl der Reglerverstärkung, welche die Position der UB im gewünschten Gebiet der Parameterebene und gleichzeitig die beste Dynamik (spezifiziert z. B. durch IAE und TV) sichert.

Ergebnisse der Analyse für zwei verschiedene Werte der Vorsteuerung sind im Bilder 4-6 zu finden. Für die Wahl $K_v = -1$, die besser kritische instabile Strecken approximiert, sind Ergebnisse der Monotonieanalyse ganz nahe den analytischen Ergebnissen (28). Doch sind beide Methoden nicht ganz identisch auch für die höhere Messgenauigkeit. Für die obere Aperiodizitätsgrenze sind die Unterschiede zwar gering, aber für $K_v = 1$ kommt es schon im numerischen Verfahren zu einer wesentlichen Verkleinerung des Monotoniebereiches in der Nähe der unteren kritischen Verstärkung. Hier wächst die Ausgangsvariable schon über den eingestellten Wert $K_{\text{Konst}} = 10w$, was zu einer Verletzung der Monotoniebedingungen (8) führt. Geht man mit diesem Wert noch nach unten, näher zu üblichen realen Erfordernissen, verkleinert sich das Monotoniebereich von unten noch mehr. Analytisch kann man solche Situationen teilweise durch einen erhöhten Stabilitätsgrad behandeln [9], [10].

Für $K_v = 1$ verkleinert sich auch jener Bereich über der Aperiodizitätsgrenze, in welchem es zu noch tolerierbaren Überschwingungen kommt. Für den entworfenen Regler bekommt man hier schon Überschwingung über 5%, während bei der Wahl $K_v = -1$ die größte Überschwingung nur leicht über 2% beträgt.

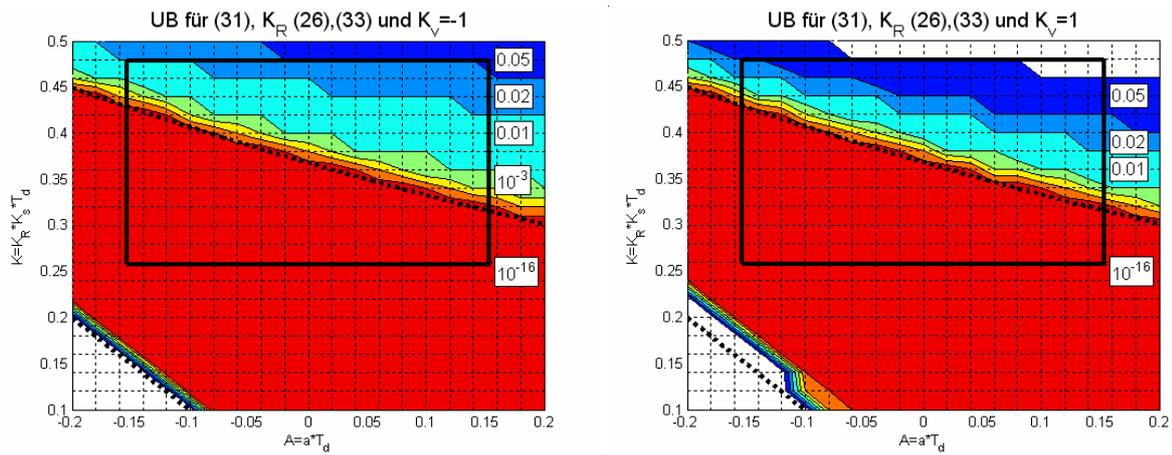


Bild 4 Verhaltensportraits und UB der Strecke (1) mit Parameter (31), Regler (12), Verstärkung (26) berechnet im Punkte (33), basiert auf 21x21 Punkte und Analyse der Monotonie für Einheitssprünge der Führungsgröße ($w = 1$) anhand (8) mit $K_{opt} = 10w$ und Messgenauigkeiten $\varepsilon = \{0.05, 0.02, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$; K_{opt} und K_{min} (28) (gestrichelt); links $K_v = -1$, rechts $K_v = 1$

Bild 5 zeigt, dass die Einschwingzeit t_s relativ stark von der bei ihrer Definition benutzten Messgenauigkeit $\varepsilon = \varepsilon_y$ abhängt, was für diese Zwecke zu häufigere Benutzung des IAE Kriteriums führt. Trotz der quantitativen Unterschiede ist es aber ersichtlich, ähnlich wie aus Bild 6 mit IAE und TV Kriterium, dass durch Verschieben der UB aus dem Gebiet ohne Überschwingen heraus zu gewissen tolerierbaren Überschwingungswerten zu wesentlicher Verbesserung der Regelgüte führt. Weil für solche Zwecke bei den Regelstrecken mit Totzeit keine einfache analytische Methode zur Verfügung steht, ermöglicht dieses neue Werkzeug eine wesentliche Erleichterung des robusten Entwurfes.

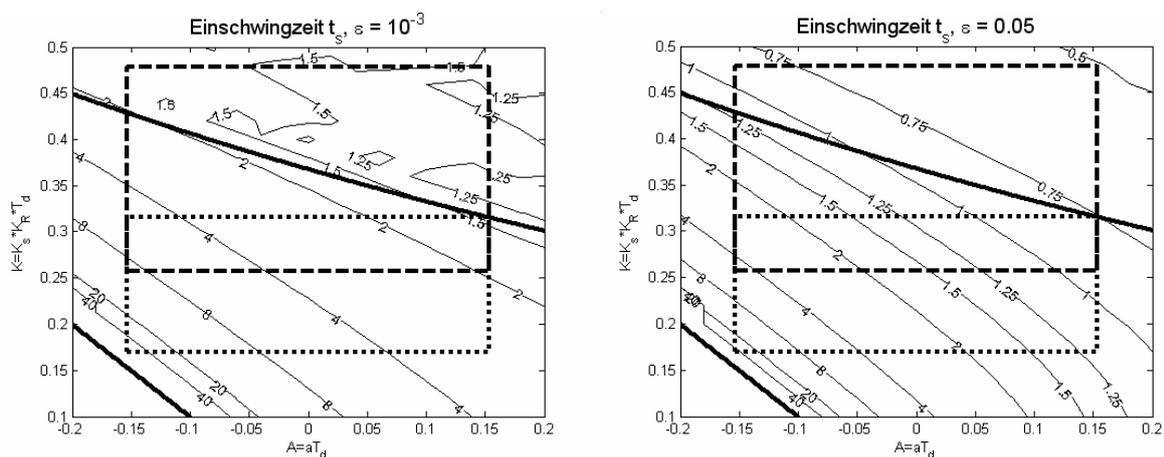


Bild 5 Höhenlinien der Einschwingzeiten als Funktion der Parameter $A = aT_d$ und $K = K_R K_s T_d$ für verschiedene Messgenauigkeiten $\varepsilon = \varepsilon_y$ in (9), Kritische und optimale Werte der Verstärkung K (fett) und zwei UB (30), die zu exakter Monotonie (gepunktet) und zu tolerierbarem Überschwingen (gestrichelt) führen; $K_v = 0$, 21x21 Punkte

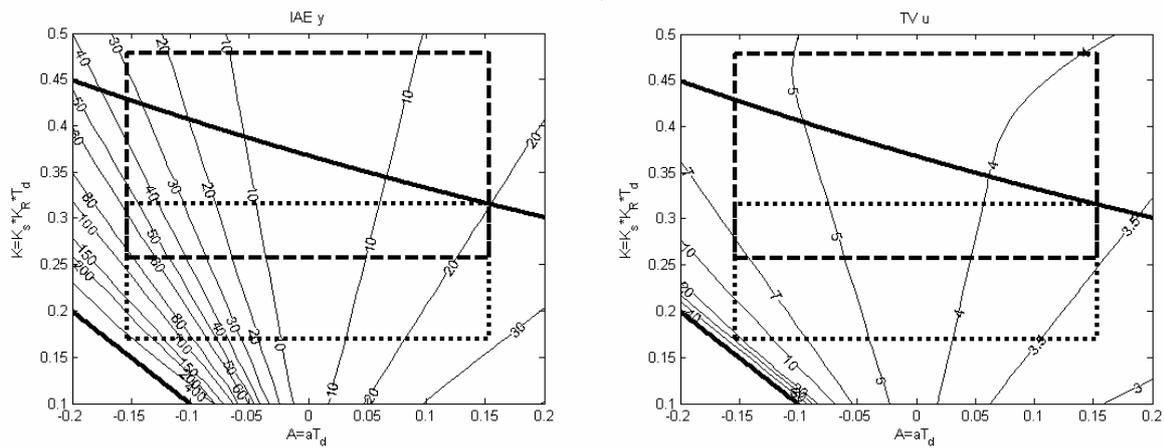


Bild 6 Höhenlinien der IAE und TV Werten als Funktionen der Parameter $A = aT_d$ und $K = K_R K_s T_d$, Kritische und optimale Werte der Verstärkung K (fett) und zwei UB (30), die zu exakter Monotonie (gepunktet) und zu tolerierbarem Überschwingen (gestrichelt) führen; $K_v = 0$, 21x21 Punkte

Die Vorteile dieser neuen Methode kommen noch mehr zum Ausdruck, wenn es nicht möglich ist, mit einem mehrfachen dominanten reellen Pol zu arbeiten, z. B. beim Entwurf verschiedener PI Regler [5], [6], [7].

Zusammenfassung

An einem einfachen Beispiel hat die Arbeit gezeigt, dass es möglich ist, eine flexiblere und direkte Alternative zu den traditionellen analytischen Verfahren zur Charakterisierung des Systemverhaltens abzuleiten. Mit Hilfe von Simulationen kann man so ein qualitatives und quantitatives Verhaltensportrait besser ableiten als nur mit Hilfe der dominanten Pole, die immer nur eine Approximationen der Realität bieten.

Die Methode kombiniert qualitative Aspekte (Stabilität, Monotonie, Periodizität, usw.) mit quantitativen Aspekten (tolerierbare Über- und Unterschwingen, tolerierbare Größen internen Variablen, usw.).

Sie ermöglicht hohe Flexibilität, weil es so leicht möglich ist, Kombinationen verschiedener Regelgüteparametern zu benutzen.

Die vorgestellte Methode stellt neue Fragen auch bezüglich der Lehre im Bereich Regelungstechnik: ohne etwas über Laplace-Transformation zu wissen als die Regeln der Blockalgebra ist es jetzt möglich anhand einfacher mathematischer Konzepte wie Monotonie, Grundkenntnisse im Programmieren, Simulation und Computer Graphics mehr über das Verhalten des Regelkreises zu erfahren, als jemals bevor.

Dankssagung

Der erste Autor richtet seinen aufrichtigen Dank an Kollegen an der FernUniversität Hagen für die Unterstützung bei der Vorbereitung dieser Arbeit, die als Teil einer größeren Veröffentlichung über robuste PID Regler mit Begrenzungen entstanden

ist. Diese Arbeit war teilweise auch durch das Projekt VEGA-1/0656/09 "Integration and development of nonlinear and robust control methods and their application to control of flying vehicles" unterstützt.

Literatur

- [1] Åström, K. J., Hägglund, T.: *PID controllers: Theory, design, and tuning* – 2nd ed., Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [2] Åström, K. J., Panagopoulos, H. and Hägglund, T.: Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimization. *Automatica*, 34, 1998, 585–601.
- [3] Chyi Hwang and Yi-Cheng Cheng: Use of Lambert W Function to Stability Analysis of Time-Delay Systems, 2005 *American Control Conference* June 8-10, 2005. Portland, OR, USA, FrB09.6, 4283- 4288.
- [4] Glattfelder, A.H. und Schaufelberger, W.: *Control Systems with Input and Output Constraints*. Springer, London 2003.
- [5] Huba, M.: Robust Design of Integrating Controllers for IPDT Plant. Editors: Fikar, M., Kvasnica, M., *In Proc. 17th International Conference on Process Control '09*, Štrbské Pleso, Slovakia, 353–357, <http://www.kirp.chtf.stuba.sk/pc09/data/papers/109.pdf>.
- [6] Huba, M., Marko, L., Bahník, P., Oravec, I.: Numerical Issues in Designing PI Controller for IPDT Plant. Editors: Fikar, M., Kvasnica, M., *In Proc. 17th International Conference on Process Control '09*, Štrbské Pleso, Slovakia, 57-64, <http://www.kirp.chtf.stuba.sk/pc09/data/papers/110.pdf>.
- [7] Huba, M.: Computer Analysis Based PID Controller Tuning. Accepted for IFAC Symposium Advances in Control Education, Kumamoto, Japan, 2009.
- [8] Keel, L. H., Kim, Y. C., Bhattacharyya, S. P.: Advances in Three Term Control. *Pre-Congress Tutorials & Workshops. 17th IFAC World Congress* Seoul, Korea, 2008.
- [9] Hwang, C., Hwang, J. H., Leu, J. F.: Tuning PID controllers for time-delay processes with maximizing the degree of stability. *5th Asian Control Conference*, 2004, Vol.1, 466- 471.
- [10] Neimark, Ju., I.: D-decomposition of the space of quasi-polynomials (on the stability of linearized distributive systems). *American Mathematical Society Translations*, Series 2. Vol. 102, 1973: Ten papers in analysis. *American Mathematical Society*, Providence, R.I., pp. 95-131, 1973.
- [11] O'Dwyer, A.: *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. 2nd Ed., Springer London 2006.
- [12] Oldenbourg, R. C. and H. Sartorius: *Dynamik selbsttätiger Regelungen*. R.Oldenbourg-Verlag, München, 1944, 1951.
- [13] S. Skogestad: Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control* 13, 2003, 291–309.
- [14] Visioli, A.: *Practical PID Control*. Springer London 2006.
- [15] Ziegler, J.G. a Nichols, N.B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, November, 759-768.

Betrachtung der Reglerumschaltung in einem Fahrermodell für Fahrzeugdynamiksimulationen

Martin Rudigier, Christian Prettenhaler

Kompetenzzentrum - Das virtuelle Fahrzeug, Forschungsgesellschaft mbH

Martin.Rudigier@v2c2.at, Christian.Prettenhaler@v2c2.at

Martin Horn

Institut für Intelligente Systemtechnologien

Alpen-Adria Universität Klagenfurt

Kurzfassung:

Fahrdynamiksimulationen bilden das dynamische Verhalten von Fahrzeugen auf der Basis von mathematischen Modellen nach. Der Komplexitätsgrad dieser Modelle hängt wesentlich von der zu lösenden Aufgabenstellung ab. In vielen Fällen ist es beispielsweise erforderlich, bei der Modellbildung auch den Fahrer des Fahrzeug, sowie seine Umwelt zu berücksichtigen. Besonders die adäquate mathematische Modellierung des Fahrers stellt oft eine große Herausforderung dar, da die Untersuchung bestimmter Problemstellungen die Nachbildung des überaus komplexen menschlichen Verhaltens erfordert.

Die Anforderungen an das hier vorgestellte Fahrermodell werden durch eine Reihe von Anwendungsfällen spezifiziert. Dabei zeigt sich, dass der Fahrer eine Reihe von unterschiedlichen Regelungsaufgaben zu bewältigen hat, zwischen denen umgeschaltet werden kann. Im vorliegenden Beitrag wird zunächst übersichtsartig auf die Grundlagen und die Struktur des Fahrermodells eingegangen. Anschließend wird exemplarisch auf das Fahrmanöver „stationäre Kreisfahrt“ eingegangen. Dabei muss der Fahrer ein mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis bewegtes Fahrzeug störungsfrei übernehmen und auftretende externe Störungen unterdrücken.

1 Einleitung

Die Modellierung des Fahrers als Bediener eines Fahrzeugs hat entscheidenden Einfluss auf Aussagekraft und Güte von Fahrzeugdynamiksimulationen. Um Aussagen über die Dynamik des Gesamtsystems „Fahrer-Fahrzeug-Umwelt“ zu treffen, müssen diese Komponenten bei der Modellierung entsprechend berücksichtigt werden. Dies betrifft insbesondere den Fahrer,

der als Lenker des Fahrzeugs einen essentiellen Bestandteil des dynamischen Systems darstellt [1].

Im Zuge eines Forschungsprojektes am Kompetenzzentrum – Das Virtuelle Fahrzeug Forschungsgesellschaft mbH (ViF) wurde ein Fahrermodell für ein kommerzielles Softwarepaket zur Fahrzeugdynamiksimulation auf Basis der Mehrkörpersimulation (MKS) Altair MotionSolve [2] entworfen, welches gegenüber dem Stand der Technik erweiterte Funktionalitäten zur Verfügung stellen soll. Dazu wurde ein Satz von Anwendungsfällen definiert, der die Anforderungen dieser Simulationsaufgaben abbildet. Diese beinhalten sowohl vergleichsweise einfache Aufgaben wie das Beschleunigen auf einer geraden Strecke oder die stationäre Kreisfahrt, als auch komplexe Manöver, wie das Wenden des Fahrzeugs auf einer Straße, die schmaler als der Wendekreisradius des Fahrzeugs ist. Die Anwendungsfälle bestehen aus einer Abfolge von Teilmanövern. Zum Beispiel besteht die stationäre Kreisfahrt aus zwei Teilen. Im Initialisierungsteil wird Pedal und Lenkwinkel direkt durch eine Steuerung vorgeben. Der zweite Teil verwendet die Positionsregelung und die Geschwindigkeitsregelung, um das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis zu bewegen.

Die Gewährleistung des störungsfreien Übergangs zwischen den Teilmanövern bildet den zentralen Kern der Arbeit.

Am Beginn wird übersichtsartig auf Grundlagen und Struktur des Modells eingegangen, bevor die für den Anwendungsfall „Stationäre Kreisfahrt“ benötigten Regler erklärt und die für die Regler-Umschaltung notwendigen Komponenten genauer betrachtet werden. Anschließend werden ausgewählte Ergebnisse gezeigt. Abgeschlossen wird der Aufsatz mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2 Fahrerstruktur

Für die prinzipielle Fahrerstruktur wurde ein konservativer und vielfach erprobter Ansatz gewählt [3], [4], [5], der separate Längs- und Querdynamikregler sowie einen Gangschaltregler vorsieht, Abb. 1.

Die Analyse der Anwendungsfälle ergab, dass für den Längsdynamikregler („speed controller“), der Gaspedal ρ^+ und Bremse ρ^- bedient, drei unterschiedliche Eingänge für Regelgrößen notwendig sind.

- Längsgeschwindigkeit v_x
- Längsbeschleunigung a_x
- Querschleunigung a_y .

Zusätzlich ist noch eine direkte Vorgabe der Pedalstellung in Form einer Steuerung vorzusehen.

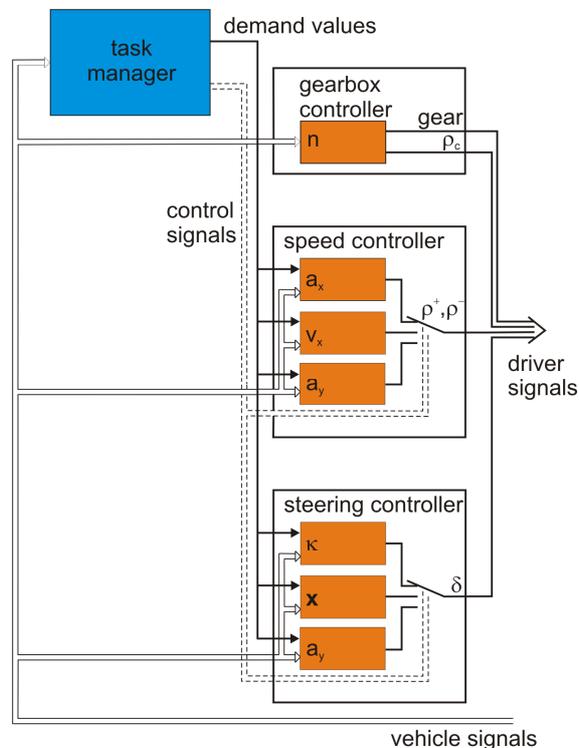


Abbildung 1: Struktur des Fahrers

Für den Querdynamikregler („steering controller“), der die Lenkung δ betätigt, sind ebenfalls drei unterschiedliche Eingänge für Regelgrößen notwendig.

- Krümmung κ
- Querbeschleunigung a_y
- Position x

Ähnlich den Pedalen muss auch der Lenkwinkel mittels einer Steuerung dem Fahrzeug vorgeben werden können.

Es ist jedoch sowohl beim Längs- als auch beim Querdynamikregler immer nur eine Regelgröße aktiv – es liegt somit keine Mehrgrößenregelung vor.

Die Regler wurden, wie bereits angedeutet, in zwei Gruppen, eine für die Längs- und eine für die Querdynamik eingeteilt. Der Schaltregler („gearbox controller“) bildet eine eigene Gruppe, weil die Trennung vom Längsdynamikregler problemlos durchgeführt und die Aufgabenstellung dadurch vereinfacht werden konnte.

Neben den eigentlichen Reglern ist auch eine Ablaufsteuerung („task manager“) erforderlich, die die zeitliche Abfolge der Teilmanöver, die Bereitstellung der Sollwerte sowie die Aktivierung und Umschaltung der Regler kontrolliert.

Beispielhaft wird in diesem Aufsatz der Anwendungsfall „Stationäre Kreisfahrt“ verwendet, welcher folgendermaßen definiert wurde:

Ein Fahrzeug im eingeschwungenen Zustand wird durch eine Steuerung auf einem Kreis mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Das Fahrermodell muss in der Lage sein, das Fahrzeug zu übernehmen ohne den eingeschwungenen Zustand zu stören. Unabhängig davon müssen auftretende Störungen kompensiert werden. Dies soll durch eine Störung in Form eines Windstoßes nachgewiesen werden.

Dieser Anwendungsfall wurde in 2 Teilmanöver zerlegt. Im ersten Teilmanöver wird das Fahrzeug gesteuert. Im zweiten Teilmanöver regelt das Fahrermodell die Geschwindigkeit und die Position. Die verwendeten Regler und ihre Initialisierung bei der Umschaltung von Steuerung auf Regelung werden anschließend behandelt.

3 Fahrzeugmodell

Für die Funktionsentwicklung des Fahrermodells wurde ein Fahrzeugmodell in MATLAB/Simulink entworfen. Die Anforderung an das Fahrzeugmodell war ein vergleichbares Fahrverhalten zum komplexen MKS-Basismodell in MotionSolve. Hierzu wurde ein Zweispurmodell [6] (siehe Abbildung 2) entwickelt, welches mit einem einfachen Reifenmodell (TMSimple [7]) ausgestattet ist. TMSimple berücksichtigt die Radlastabhängigkeit der Reifenkräfte in longitudinaler und lateraler Richtung, sowie deren kombiniertes Verhalten und den Rollreibungswiderstand, vernachlässigt dabei jedoch den Einfluss des Radsturzes.

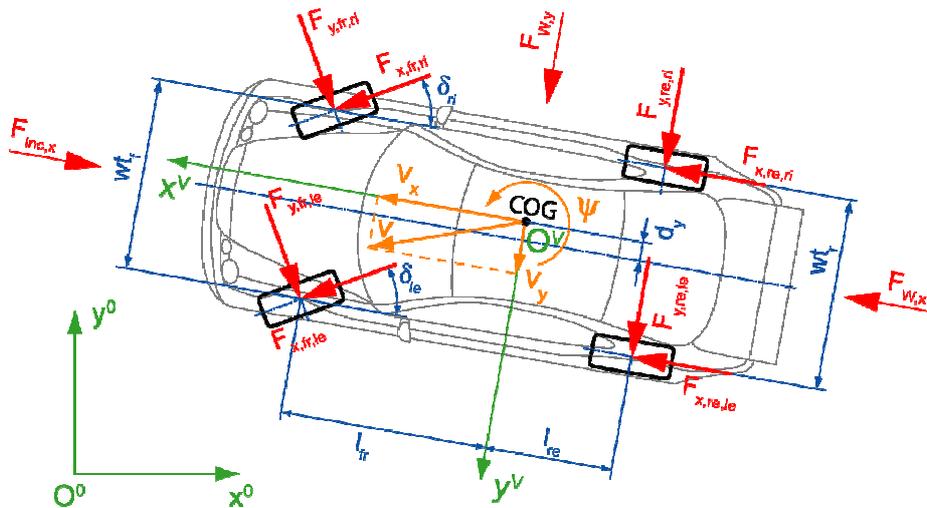


Abbildung 2: Prinzipdarstellung Zweispurmodell

Wie in Abbildung 2 angedeutet, werden zusätzlich der Steigungswiderstand $F_{Inc,x}$ sowie die Windkräfte $F_{W,x}$ und $F_{W,y}$ berücksichtigt. Insbesondere letztere waren erforderlich um die Unempfindlichkeit der Regler gegenüber äußeren Störungen auf das Fahrzeug zu untersuchen. Der Fahrzeugaufbau berücksichtigt alle sechs Freiheitsgrade, wie in Abbildung 3 dargestellt,

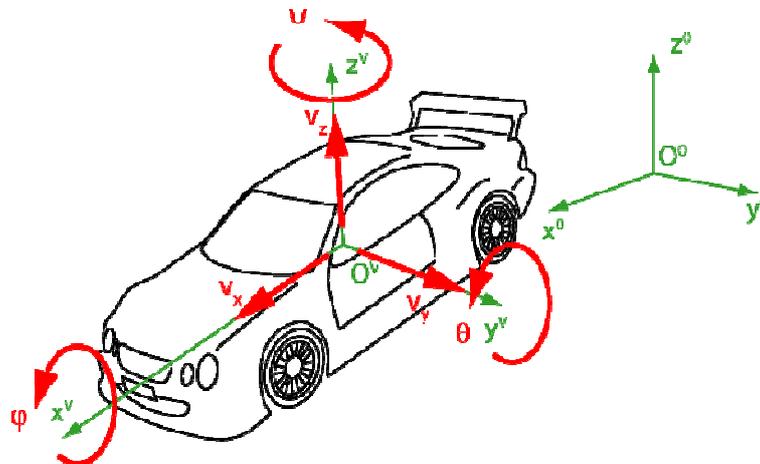


Abbildung 3: Freiheitsgrade Fahrzeugaufbau

wodurch die Modellierung der Radaufhängungen erforderlich wurde. Dafür wurde angenommen, dass der Fahrzeugaufbau in allen Bewegungsrichtungen Wanken, Nicken und Gieren kann, die Räder jedoch stets aufrecht auf der Fahrbahn positioniert sind. Unter diesen Voraussetzungen wurden die Radaufhängungen inklusive Stabilisator folgendermaßen modelliert, Abb. 4

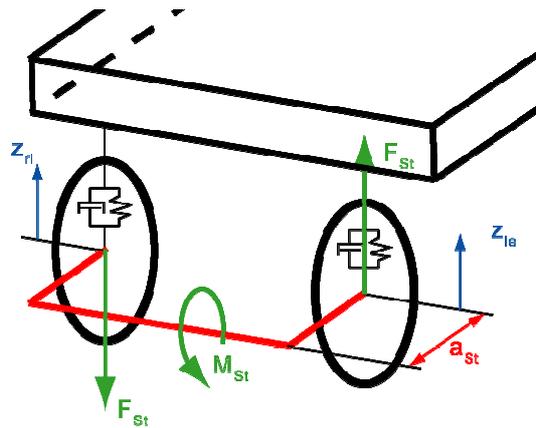


Abbildung 4: Radaufhängung und Stabilisator

Der Stabilisator ist dabei als eine Torsionsfeder modelliert, die nur bei einer Differenz zwischen den Einfederungen z_{le} und z_{ri} , also einem wankenden Fahrzeug wirksam ist. Das im Stabilisator wirksame Moment kann somit über

$$M_{St} = c_{St} \frac{z_{le} - z_{ri}}{a_{St}} = F_{St} a_{St} \quad (1)$$

beschrieben werden, wobei c_{st} die Torsionsfedersteifigkeit des Stabilisators ist und a_{st} dessen Krüpfungsradius. Die daraus resultierenden Reaktionskräfte auf das linke und rechte Rad, können somit über

$$F_{St} = c_{St} \frac{z_{le} - z_{ri}}{2 a_{St}} \quad (2)$$

bestimmt werden, womit sich die gesamten, an einem Rad wirkenden, vertikalen Kräfte exemplarisch für ein linkes Rad über

$$F_{z_{le}} = -c_{Sp_{le}} z_{le} - d_{Damp_{le}} v_{z_{le}} - F_{St} \quad (3)$$

ermitteln lassen, wobei $c_{Sp_{le}}$ die Federsteifigkeit der Radaufhängungsfeder, $d_{Damp_{le}}$ die Dämpfungskonstante des Aufhängungsdämpfers und $v_{z_{le}}$ die Einfederungsgeschwindigkeit ist. Zusammen mit den Bewegungsgrößen des Fahrzeugaufbaues können somit über TMSimple die Radkräfte für jedes Rad ermittelt werden.

Abgeschlossen wird die Fahrzeugmodellierung durch die Beschreibung des Antriebsstrangs, wobei die Kupplung, eine separate Zustandsgröße für die Motordrehzahl und ein Leerlaufdrehzahlregler eingeführt wurden. Das Motordrehmoment wird einem Kennfeld in Abhängigkeit der Drehzahl und der Drosselklappen- / Fahrpedalstellung entnommen, wobei

ein nachgeschaltetes Verzögerungsglied für realistisches Ansprechverhalten sorgt. Weiters wurden das Schaltgetriebe mit diskreten Übersetzungsverhältnissen für jeden Gang, das Differentialgetriebe sowie die Bremsen im Modell vorgesehen.

4 Reglermodule

Die Reglermodule wurden zweiteilig aufgebaut. Sie bestehen aus einer Vorsteuerung und einer Regelung. Die Vorsteuerung nutzt ein invertiertes Teilmodell des Fahrzeugs und basiert auf physikalischen oder geometrischen Zusammenhängen. Als Regler wird entweder ein PI- oder ein P-Regler verwendet.

4.1 Längsdynamikregelung.

Die Längsdynamikregelung ist für die Bedienung des Gaspedals und des Bremspedals zuständig. Wie im Kapitel 2 beschrieben, regelt der Längsdynamikregler Längsbeschleunigung, Geschwindigkeit und Querbeschleunigung.

Abbildung 5 zeigt die gewählte Struktur für die Längsdynamikregelung. Es handelt sich um eine Kaskadenstruktur und je nach gewählter Regelgröße werden die dafür notwendigen Module benutzt.

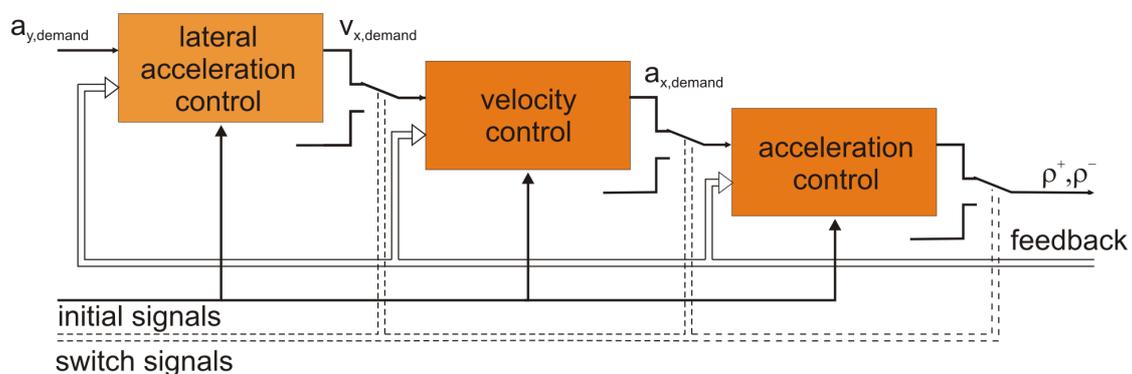


Abbildung 5: Struktur des Längsdynamikreglers

Der Beschleunigungsregler („acceleration control“) regelt die Längsbeschleunigung des Fahrzeugs direkt über das Gaspedal und ist der innerste Regelkreis der Kaskade. Der Geschwindigkeitsregler („velocity control“) verwendet die Fahrzeuggeschwindigkeit als Regelgröße und die Beschleunigung als Stellgröße. Die Querbeschleunigungsregelung („lateral acceleration control“) stellt einen Sonderfall zur Regelung der Querbeschleunigung während spezieller Fahrmanöver dar. Die Regelgröße ist die Querbeschleunigung, Stellgröße ist die Fahrzeuggeschwindigkeit, die der Geschwindigkeitsregelung übergeben wird.

4.1.1 Beschleunigungsregler

Der Beschleunigungsregler hat als Regelgröße die Beschleunigung und die Stellgrößen „Gas- und Bremspedal“. Wie bereits erwähnt, wurde für die Regler eine Vorsteuerung in Kombination mit einem PI-Regler verwendet. Die Vorsteuerung benutzt ein invertiertes, vereinfachtes Fahrzeugmodell, das nur die Längsdynamik abbildet.

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt in x-Richtung

$$m_{veh} \cdot a_x = F_T - F_L, \quad (4)$$

wobei m_{veh} die Fahrzeugmasse ist, a_x die Längsbeschleunigung, F_T

$$F_T = \frac{M_e \cdot i_{gr}}{r_d} - \frac{\sum M_{br}}{r_d} \quad (5)$$

die Summe der antreibenden Kräfte und F_L jene der Widerstandskräfte.

Zu den antreibenden Kräften gehört neben der Antriebskraft über Motor und Triebstrang auch die Summe der Bremskräfte. M_e ist das Motormoment, i_{gr} die Gesamtübersetzung des Antriebsstranges, M_{br} die Bremsmomente und r_d der dynamische Rollradius der Reifen.

Bei den Widerstandskräften F_L wurden der Luftwiderstand $F_{L,aero}$

$$F_{L,aero} = c_d \cdot A_f \cdot \frac{\rho}{2} v_x^2, \quad (6)$$

der Rollwiderstand $F_{L,rolling}$

$$F_{L,rolling} = m_{veh} \cdot g \cdot f \cos \sigma \cdot \text{sign}(v) \quad (7)$$

und der Steigungswiderstand $F_{L,roadgradient}$

$$F_{L,roadgradient} = m_{veh} \cdot g \cdot \sin \sigma \quad (8)$$

berücksichtigt. Dabei ist c_d der Luftwiderstandsbeiwert, A_f die Frontfläche des Fahrzeugs, ρ die Dichte der Luft und v_x die Fahrzeuggeschwindigkeit. Weiters ist g die Erdbeschleunigung, f der Rollwiderstandsbeiwert der Reifen und σ den Steigungswinkel dar. Die Signum-Funktion in (7) wird bei der praktischen Realisierung durch eine Beschränkung und eine Verstärkung ersetzt, siehe Gleichung (9):

$$sat(x, x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 \dots x \leq x_1 \\ x \dots x_1 < x < x_2 \cdot x \in R \\ x_2 \dots x \geq x_2 \end{cases} \quad (9)$$

Somit folgt aus (7)

$$F_{L,rolling} = m_{veh} \cdot g \cdot f \cos \sigma \cdot sat(1000 \cdot v_x, -1, 1). \quad (10)$$

Die Ausdrücke (4), (5) und (6) werden so umgeformt dass sich das für die gewünschte Beschleunigung notwendige Antriebsmoment

$$T_{demand} = (a_{x,demand} \cdot m_{veh} + F_L) \cdot r_d \cdot i_{gr} \quad (11)$$

ergibt. Das notwendige Antriebsmoment muss vom Motor oder von den Bremsen zur Verfügung gestellt werden, wobei der Motor auch verzögernde Momente ($f_{dragTorque}$) liefert. Das maximal zur Verfügung stehende Motorbremsmoment wirkt bei einer Gaspedalstellung von 0 % und hängt von der Motordrehzahl n ab. Damit lässt sich das notwendige Bremsmoment

$$T_{Brake} = T_{demand} - f_{dragTorque}(n) \quad (12)$$

berechnen, welches die Fahrzeugbremsen zusätzlich liefern müssen.

Aus den notwendigen Momenten lässt sich aus den inversen Modellen des Motors und der Bremse die Werte für die Vorsteuerung der Gaspedalstellung ρ_{FF}^+ und des Bremspedalstellung ρ_{FF}^- berechnen

$$\begin{aligned} \rho_{FF}^+ &= f_{invEngineMap}(T_{demand}, n) \\ \rho_{FF}^- &= f_{invBrake}(i_{gr} \cdot T_{Brake}). \end{aligned} \quad (13)$$

Zusätzlich zur Vorsteuerung wurde ein PI Regler implementiert

$$\rho_c = \rho_{c,p} + \rho_{c,I}. \quad (14)$$

Der Regelfehler ergibt sich aus

$$e_a(t) = a_{x,demand}(t) - a_x(t), \quad (15)$$

wobei $a_{x,demand}$ der Sollwert der Längsbeschleunigung und a_x die Längsbeschleunigung ist. Dabei ist $\rho_{c,p}$ der P-Anteil des Reglers und $k_{p,Acceleration}$ der proportionale Verstärkungsfaktor des Beschleunigungsreglers

$$\rho_{c,p}(t) = k_{p,Acceleration} \cdot e_a(t). \quad (16)$$

Der integrale Anteil

$$\rho_{c,I}(t) = \int_{t_0}^t \left((1 - a_{wu}(\tau)) \cdot k_{I,Acceleration} e_a(\tau) - a_{wu}(\tau) \cdot k_{awu2} \cdot \rho_{c,I}(\tau) \right) d\tau + \rho_{c,I,0} \quad (17)$$

beinhaltet eine Anti-Windup Maßnahme, wobei $k_{I,Acceleration}$ der integrale Verstärkungsfaktor des PI-Reglers ist, k_{awu2} der Verstärkungsfaktor der Rückkopplung der Anti-Windup Erweiterung und $\rho_{c,I,0}$ der Startwert des Integrators. Das Signal a_{wu} zeigt an, dass die Stellgröße (Gas- oder Bremspedal) ihre Begrenzung überschritten hat und wird benutzt um die Anti-Windup Erweiterung des PI Reglers (17) zu aktivieren. Um für den Integrator problematische Sprünge zu vermeiden, wurden statt einfacher logischer Signale, beschränkte kontinuierliche Signale, die mit Begrenzungsgliedern und hoher Verstärkung generiert werden, verwendet. Wird die Stellgröße überschritten, wird die Integration des Fehlers gestoppt und eine Rückkopplungsschleife aktiviert.

Für die Schaltung zur Entscheidung, welches Pedal gerade aktiv ist, musste eine Ersatzschaltung gefunden werden, die logische Signale vermeidet und kontinuierliche Übergänge sowie kein sprunghaftes Verhalten besitzt. Bei der Betrachtung der Vorsteuerung bietet sich das benötigte Bremsmoment als Grundlage für die Entscheidung, welches Pedal aktiv zu sein hat, an. Wenn das Bremsmoment negativ ist muss das Gaspedal aktiv sein, wenn es positiv ist das Bremspedal. Da aber nicht nur die Vorsteuerung die Stellung der Pedale bestimmt, wird ein Anteil des PI Reglers zum Bremsmoment addiert

$$T_{switch} = T_{Brake} + 100 \cdot \rho_c. \quad (18)$$

Ist T_{switch} (Schaltmoment) größer als die gewählte Schaltschwelle $T_{Threshold}$, soll umgeschaltet werden und das andere Pedal aktiv werden. Um diese Funktionen nachzubilden wurde die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x}_{TB} = 100 \cdot \left(\tanh\left(10^6 \cdot (T_{switch} + T_{Threshold} \cdot x_{TB})\right) - x_{TB} \right) \quad (19)$$

gewählt. Diese Gleichung nähert sich mit fortschreitender Zeit schnell -1 oder +1 an und bleibt dort, bis die Umschaltbedingung erfüllt ist

$$x_{ThrottleActive} = \frac{1}{2} \cdot (x_{TB} + 1) \quad (20)$$

Der Zustand $x_{ThrottleActive}$ wird benötigt um das Signal a_{wu} zu berechnen und den Anteil des PI-Reglers zum gerade aktiven Pedal zu addieren.

Dabei ist ρ^+ die Stellung des Gaspedals und ρ^- die Stellung des Bremspedals

$$\begin{aligned} \rho^+ &= sat(x_{ThrottleActive} \cdot sat(\rho^+, 0, 1) + \rho_c, 0, 1) \\ \rho^- &= sat((1 - x_{ThrottleActive}) \cdot sat(\rho^-, 0, 1) - 0.1 \cdot \rho_c, 0, 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Durch die zwei Pedale, die eigentlich eine Stellgröße darstellen, wird die Berechnung des Indikators für das Erreichen der Stellgrößen Beschränkung a_{wu} aufwendiger als bei einer Stellgröße, und ergibt sich aus dem Gleichungssystem (22).

$$\begin{aligned} \rho_{sat}^+ &= \begin{cases} 0 \dots (\rho_{FF}^+ + \rho_c) < 0 \\ (\rho_{FF}^+ + \rho_c) \dots 0 \leq (\rho_{FF}^+ + \rho_c) \leq 1 \\ 1 \dots (\rho_{FF}^+ + \rho_c) > 1 \end{cases} \\ x_{awu}^+ &= \rho_{sat}^+ - (\rho_{FF}^+ + \rho_c) \\ \rho_{sat}^- &= \begin{cases} 0 \dots (\rho_{FF}^- - \rho_c) < 0 \\ (\rho_{FF}^- - \rho_c) \dots 0 \leq (\rho_{FF}^- - \rho_c) \leq 1 \\ 1 \dots (\rho_{FF}^- - \rho_c) > 1 \end{cases} \\ x_{awu}^- &= \rho_{sat}^- - (\rho_{FF}^- - \rho_c) \\ x_{awu} &= x_{ThrottleActive} \cdot x_{awu}^+ + (1 - x_{ThrottleActive}) \cdot x_{awu}^- \\ a_{wu} &= \begin{cases} 0 \dots x_{awu} < 0 \\ k_{AWU_2} \cdot x_{awu} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \dots x_{awu} > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

4.1.2 Geschwindigkeitsregler

Der Geschwindigkeitsregler ist Teil eines Kaskadenreglers, wobei als innere Schleife der zuvor besprochene Beschleunigungsregler verwendet wird. Der Geschwindigkeitsregler – die äußere Schleife - wird wieder mittels einer Vorsteuerung und einer Regelung realisiert.

Um von der Sollgeschwindigkeit v_{demand} zur Sollbeschleunigung zu kommen, ist eine einfache Differentiation notwendig.

Eine numerische Differentiation verursacht jedoch Probleme, weshalb sie beim Vorsteueranteil über

$$a_{x,FF} = \dot{v}_{x,a} = k_{diff} \cdot (v_{x,demand} - v_{x,a}) \quad (23)$$

bzw. die folgende Schaltung, gemäß Abbildung 6,

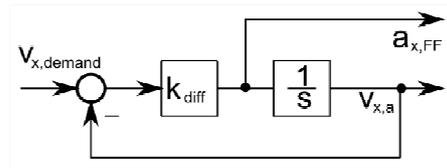


Abbildung 6: Ersatzschaltung für die Differentiation

substituiert wird. Aus der Übertragungsfunktion dieser Differentialgleichung

$$G(s) = \frac{k_{diff} s}{s + k_{diff}} = \frac{s}{1 + \frac{s}{k_{diff}}} \stackrel{k_{diff} \gg}{\cong} s \quad (24)$$

folgt, dass diese für hinreichend große k_{diff} eine gute Näherung für eine Differentiation darstellt.

Als Regler wurde ein einfacher P-Regler benutzt

$$a_{x,C} = k_{p,v2a} (v_{x,demand} - v_x) \quad (25)$$

Aus der Summe der beiden Teile kann die Sollbeschleunigung $a_{x,demand}$ für den Beschleunigungsregler berechnet werden

$$a_{x,demand} = a_{x,FF} + a_{x,C} \quad (26)$$

4.2 Querdynamikregler

Der Querdynamikregler bedient das Lenkrad. Wie in Kapitel 2 Fahrerstruktur beschrieben muss der Querdynamikregler mit 3 unterschiedlichen Sollgrößen arbeiten können - Krümmung, Position und Querbeschleunigung.

Wie der Längsdynamikregler ist der Querdynamikregler in Kaskadenform aufgebaut. Der innerste Regelkreis regelt die Krümmung, die das Fahrzeug fahren soll („curvature control“). Sollgröße ist dabei die Krümmung κ_{demand} , Stellgröße der Lenkwinkel δ , siehe Abb. 8.

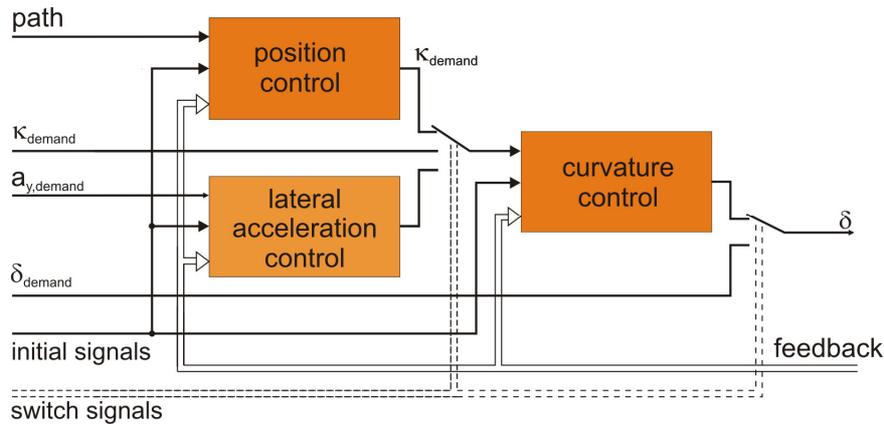


Abbildung 7: Struktur des Querdynamikreglers

Die Positionsregelung („position control“) verwendet Koordinaten der Sollspur („path“) als Sollgröße und liefert als Stellgröße eine Krümmung, die von der inneren Regelschleife, der Krümmungsregelung, als Sollgröße benutzt wird, um den Lenkwinkel zu generieren.

Die Querbeschleunigungsregelung („lateral acceleration control“) benutzt als Sollgröße eine Querbeschleunigung und liefert, wie die Positionsregelung eine Krümmung als Stellgröße, die die Krümmungsregelung als Eingang benutzt.

4.3 Krümmungsregelung.

Die Krümmungsregelung wird zur Vorgabe der zu fahrenden Krümmung benutzt, bzw. als innere Regelschleife für die Positionsregelung und die Querbeschleunigungsregelung. Die Stellgröße ist der Lenkwinkel.

Gleich wie bei den Längsdynamikreglern wird eine Kombination aus einer Vorsteuerung und einem PI-Regler verwendet. Für die Ableitung der Vorsteuerung wird ein lineares Einspurmodell verwendet [8]. Aus diesem Modell folgt, dass der Lenkwinkelbedarf aus zwei Anteilen besteht, dem Ackermannlenkwinkel δ_A und dem Kompensationslenkwinkel δ_α

$$\delta_{FF} = \delta_A + \delta_\alpha. \quad (27)$$

Der Ackermannlenkwinkel wird über

$$\delta_A = (l_{re} + l_{fr}) \cdot \kappa_{demand} \quad (28)$$

aus der zu fahrenden Krümmung κ_{demand} und den Abständen der Achsen zum Schwerpunkt des Fahrzeugs (l_{re} , l_{fr} - siehe Abbildung 2) berechnet und stellt näherungsweise den Lenkwinkelbedarf eines neutralen Fahrzeugs dar.

Um den Lenkwinkelbedarf eines über- oder untersteuernden Fahrzeuges zu berechnen, ist ein Kompensationslenkwinkel erforderlich. Dieser ist von den Schräglaufsteifigkeiten der Reifen abhängig. Durch Einsetzen und Umformen der Gleichung des Einspurmodells kann gezeigt werden, dass sich der Kompensationslenkwinkel auch über

$$\delta_{\alpha} = 0.5(\alpha_{front,left} + \alpha_{front,right} - \alpha_{rear,left} - \alpha_{rear,righth}) * k_{SA} \quad (29)$$

aus der Differenz der Schräglaufwinkel $\alpha_{i,j}$ der Vorder- und Hinterräder berechnen lässt [9]. Um diesen einfachen, aus der linearen Theorie herrührenden Ansatz auch für allgemeine Fahrzeuge anwenden zu können, wurde ein Proportionalitätsfaktor eingeführt, mit dem man den Kompensationslenkwinkel skaliert. Als praktikabel hat sich ein Wert von 0.7 bis 0.9 herausgestellt.

Bei der Regelung zeigt sich das Problem, dass die gefahrene Krümmung im Allgemeinen bei Fahrdynamiksimulationspaketen nicht als Ausgang (Messgröße) zur Verfügung steht. Da bei der Berechnung der Krümmung über

$$\kappa = \frac{a_y}{v_x^2}, \quad (30)$$

wobei a_y die Querbefschleunigung ist, eine Division durch Null auftreten kann (insbesondere bei stillstehendem Fahrzeug), wird statt der Krümmung κ die Gierrate $\dot{\psi}$ zur Bestimmung des Regelfehlers $e_{\dot{\psi}}$ über

$$e_{\dot{\psi}} = v_x \cdot \kappa_{dmd} - \dot{\psi} \quad (31)$$

herangezogen.

Als Regler wird ein PI-Regler ($k_{p,curvature}$, $k_{I,curvature}$) mit Anti-Windup Erweiterung (k_{awu1} , k_{awu2}) verwendet, der über

$$\delta_c = \delta_{c,p} + \delta_{c,I}, \quad (32)$$

$$\delta_{c,p} = k_{p,curvature} \cdot e_{\dot{\psi}} \quad (33)$$

und

$$\delta_{c,I} = \int_{t_0}^t \left((1 - a_{wu}) \cdot \kappa_{p,curvature} \cdot e_{\dot{\psi}}(\tau) - a_{wu} \cdot k_{awu1} \cdot \delta_{c,I}(\tau) \right) \cdot d\tau + \delta_{c,I,0} \quad (34)$$

beschrieben werden kann. Der Lenkwinkel δ ergibt sich schließlich aus dem Lenkwinkel der Vorsteuerung δ_{FF} und dem Lenkwinkel des Reglers δ_c und wird mit dem minimalen δ_{\min} , bzw. maximalen Lenkwinkel δ_{\max} über

$$\delta = \text{sat}(\delta_{FF} + \delta_c, \delta_{\min}, \delta_{\max}). \quad (35)$$

begrenzt. Dabei ist a_{wu} , gleich wie beim Beschleunigungsregler ein Indikator, ob die Stellgröße die Beschränkung überschreitet, wird über

$$a_{wu} = \text{sat}(k_{awu2} \cdot \text{sat}(|\delta - (\delta_{FF} + \delta_c)|, 0, 1), 0, 1) \quad (36)$$

berechnet und für die Anti-Windup Maßnahme benutzt.

4.4 Positionsregler

Der Positionsregler arbeitet als vorausschauender Regler, d.h. er versucht nicht die zur aktuellen Fahrzeugposition $\mathbf{x}_{\text{Vehicle}}$ gehörige Position $\mathbf{x}_{\text{Track}}$ auf der Sollspur („track“, Abbildung 8) zu erreichen, sondern wählt einen Lenkwinkel, der ihm ermöglicht zu einer zukünftigen Sollposition $\mathbf{x}_{\text{Preview}}$ zu gelangen (siehe folgende Abbildung 9).

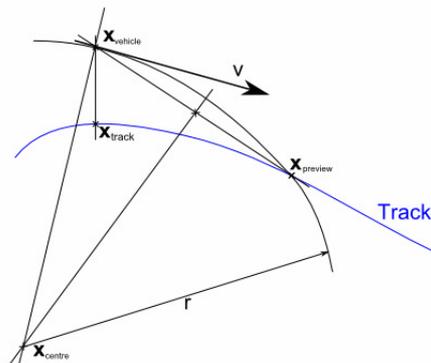


Abbildung 8: Positionsregler – geometrische Verhältnisse

Die Referenzposition $\mathbf{x}_{\text{Track}}$ ist dadurch gekennzeichnet, dass die Gerade durch $\mathbf{x}_{\text{Vehicle}}$ und $\mathbf{x}_{\text{Track}}$ normal auf die Tangente zur Strecke steht. Die Differenz zwischen den zwei Punkten wird als Abstand zur Strecke s_2 definiert. Der auf der Sollspur zurückgelegte Weg wird s_1 bezeichnet.

Im Gegensatz zu den anderen Reglermodulen, bei denen alle für den Regler benötigten Größen im Fahrzeugkoordinatensystem vorliegen oder systemunabhängig sind, benötigt der Positionsregler drei unterschiedliche Koordinatensysteme.

Dabei werden s_1 und s_2 als Koordinaten in einem krummlinigen Koordinatensystem betrachtet. Dieses Koordinatensystem wird mit einem hochgestellten „Tr,s“ bezeichnet. Die Sollspur wird im Streckenkoordinatensystem, einem mit „Tr“ gekennzeichneten kartesischem Koordinatensystem angegeben, das Fahrzeugkoordinatensystem mit einem hochgestellten „V“.

Im Streckenkoordinatensystem wird mittels einer Mindestvorschauabstand $s_{preview,0}$, der Vorschauzeit $t_{preview}$, der Geschwindigkeit des Fahrzeugs v_x und des Abstands zur Solltrajektorie s_2 die Vorschauabstand über

$$s_{preview} = s_{preview,0} + t_{preview} \cdot v_x + s_2 \cdot \quad (37)$$

berechnet. Zu dieser Distanz wird aus dem Streckenkoordinatensystem der Vorschauabstand $\mathbf{x}_{preview}$ bestimmt.

Der Positionsregler approximiert die Trajektorie, die notwendig ist, um von der aktuellen Position, unter Beachtung der Fahrzeugausrichtung, zu diesem Vorschauabstand zu gelangen, über einen Kreis. Dazu wird über Vektoroperationen dessen Krümmung bestimmt [10], womit man zu

$$\kappa_{demand} = -2 \frac{(n_{11} \tilde{x}_1 + n_{12} \tilde{x}_2)}{(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)} \quad (38)$$

gelangt. In dieser Gleichung stellen n_{11} und n_{12} die Komponenten des Normalvektors auf die Fahrtrichtung und \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 die Komponenten des Richtungsvektor von der Fahrzeugposition zum Vorschauabstand dar

$$\tilde{\mathbf{x}}^{Tr} := (\mathbf{x}_{vehicle}^{Tr} - \mathbf{x}_{preview}^{Tr}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \cdot \quad (39)$$

Zwischen dem kartesischen Koordinatensystem, in dem die Solltrajektorie definiert ist und in dem das Fahrzeugsimulationssystem die Position des Fahrzeugs angibt, und dem für die Bestimmung der zurückgelegten Distanz notwendigen Koordinatensystem (s_1, s_2) existiert keine konstante Transformation. Ein gangbarer Weg ist, in beiden Koordinatensystemen parallel die jeweilige Position durch Integration der Geschwindigkeit zu berechnen. Somit erhält man die zur Fahrzeugposition gehörige Referenzposition auf der Sollspur. Durch

Integrationsfehler driften die Koordinaten jedoch mit der Zeit auseinander. Abhilfe schafft die Betrachtung der Integration im s-Koordinatensystem (40) als Beobachter

$$\dot{\mathbf{s}}^{Tr,s} = v_x^V \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \\ \sin(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \end{pmatrix} + v_y^V \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \\ \cos(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

wobei θ der Winkel zwischen x-Achse und der Tangente der Sollspur ist (Abbildung 9) und ψ der Gierwinkel.

Unter der Annahme, dass s_1 und s_2 nur geschätzt werden können, wird ein Schätzwert für $\mathbf{x}_{vehicle}$ berechnet

$$\hat{\mathbf{x}}_{vehicle}^{Tr} = \mathbf{x}_{Tr}^{Tr}(\hat{s}_1) + \hat{s}_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta^{Tr} \\ \cos \theta^{Tr} \end{pmatrix}.$$

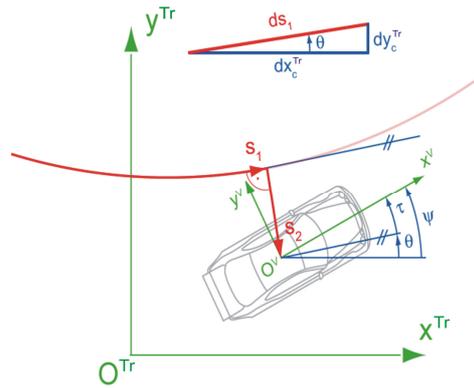


Abbildung 9: Zusammenhang der Koordinatensysteme

(41)

Mit diesem Wert kann ein Schätzfehler \mathbf{e} angegeben werden

$$\mathbf{e}^{Tr} = \mathbf{x}_{vehicle}^{Tr} - \hat{\mathbf{x}}_{vehicle}^{Tr} = \mathbf{x}_{vehicle}^{Tr} - \left(\mathbf{x}_{tr}^{Tr} + \hat{s}_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta^{Tr} \\ \cos \theta^{Tr} \end{pmatrix} \right).$$

(42)

Dieser Fehler wird mit über

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}}^{Tr,s} = v_x^V \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \\ \sin(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \end{pmatrix} + v_y^V \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \\ \cos(\psi^{Tr} - \theta^{Tr}(s_1)) \end{pmatrix} + k_p \cdot \mathbf{D}(\theta^{Tr}(s_1)) \cdot \mathbf{e}^{Tr}$$

(43)

mit der zur aktuellen Position gehörigen Drehmatrix $\mathbf{D}(\theta^{Tr}(s))$ multipliziert und zu \dot{s}^{Tr} addiert. Durch Wahl eines hinreichend großen Parameters k_p kann der Fehler klein gehalten werden. Es wurde 100 gewählt, da bei größeren Werten die Integrationsschrittweite sank und damit die Rechenzeit deutlich stieg. Der Fehler bewegt sich in einem Bereich unter einem Millimeter, was für den Fahrerregler ausreichend genau ist.

4.5 Initialisierung der Regler/ Umschaltung im Betrieb

Aus der Definition des Anwendungsfalles „Stationäre Kreisfahrt“ folgt, dass bei der Übernahme der Kontrolle über das Fahrzeug durch den Fahrerregler die Stellgröße sich nicht signifikant ändern darf. Die Bedingung „stationär“ besagt auch, dass die Längsbeschleunigung beim Umschalten 0 ist, und damit auch die Sollbeschleunigung. Deshalb können die zwei Regler der Kaskade, der Beschleunigungsregler und der Geschwindigkeitsregler, getrennt betrachtet werden.

Die Vorgangsweise ist für fast alle Regler des Fahrermodells die gleiche. Man berechne den Anteil der Stellgröße, den die Vorwärtssteuerung ergibt, addiere dazu den Anteil an der Stellgröße, den der Proportional-Anteil des Reglers ergibt, ziehe die Summe von der aktuellen Stellgröße ab und dividiere durch den integralen Verstärkungsfaktor. Das Ergebnis ist der Startwert für den Integralregler.

Für den Beschleunigungsregler wird zuerst der Sollwert für das Antriebsmoment über

$$\tilde{T}_{demand} = \left(a_{x,demand} \cdot m_{veh} - g \cdot \sin(\alpha) \cdot m_{veh} + m_{veh} \cdot g \cdot f \cos \alpha \cdot \text{sign}(v_x) + c_d \cdot A_f \cdot \frac{\rho}{2} v_x^2 + \right) \cdot r_d \cdot i_{gr} \quad (44)$$

berechnet (vgl. (11)). Anschließend muss unterschieden werden, ob das Gas- oder das Bremspedal aktiv ist.

Wenn das Bremspedal aktiv ist, wird über

$$\tilde{T}_{demand}^- = f_{drag}(n) - \tilde{T}_{demand} \quad (45)$$

das Sollmoment \tilde{T}_{demand}^- für die Bremse berechnet und dieser Wert unter Zuhilfenahme des inversen Bremsmodells und des Proportionalteils des Reglers zur Berechnung des Startwerts des Integrators im PI-Regler

$$\rho_{c,I,0} = 10 \cdot (\rho^- - k_{p,Acceleration} (a_{x,demand} - a_x) - f_{invBrake}(\tilde{T}_{demand}^-)) \quad (46)$$

verwendet. Zusätzlich muss der Integrator für (19) gesetzt werden

$$x_{TB,0} = -1. \quad (47)$$

Ist das Gaspedal aktiv, ist das Antriebsmoment gleich dem Sollwert des Motormoments und mittels des inversen Motorkennfelds und der aktuellen Pedalstellung wird der Startwert des Integrators im PI-Regler über

$$\rho_{c,I,0} = \rho^+ - k_{p,Acceleration} (a_{x,demand} - a_x) - f_{invEngine}(\tilde{T}_{demand}, n) \quad (48)$$

berechnet. Wiederum muss der Integrator für (19) gesetzt werden

$$x_{TB,0} = +1. \quad (49)$$

Somit sind alle Startwerte für den Beschleunigungsregler so gesetzt, dass der Fahrer störungsfrei übernehmen kann.

Das gleiche wird nun für den Geschwindigkeitsregler gemacht. Der Geschwindigkeitsregler hat als Stellgröße die Sollbeschleunigung. Die im stationären Fall 0 sein muss. Damit ergibt sich aus den Gleichungen (23), (25) und (26) nach Umformungen der Startwert für den Integrator des Geschwindigkeitsreglers

$$v_{x,FF,0} = (v_{x,demand} - v_x) \cdot \frac{k_{p,Velocity}}{k_{diff}} + v_{x,demand} \cdot \quad (50)$$

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der beschriebenen stationären Kreisfahrt präsentiert. Bei dieser Simulation sind folgende Elemente des Fahrermodells beteiligt: die Kaskade aus Geschwindigkeits- und Beschleunigungsregler, die Kaskade aus Positionsregelung und Regelung der zufahrenden Krümmung, der in diesem Beitrag nicht näher diskutierte Schaltregler und eine Steuerung für Lenkwinkel und Gaspedal.

Während der ersten 10 Sekunden wird das Fahrzeug mittels einer Steuerung mit vorab bestimmten Lenkwinkel und Gaspedalstellung betrieben. Das Fahrzeug wurde bereits sehr nahe dem stationären Zustand gestartet. Nach 10 Sekunden wird auf die oben beschriebenen Regler umgeschaltet und auf die Sollgrößen $v_{x,demand} = 10\text{m/s}$ und einen Kreis von 50m Radius, der in Form von Streckenkoordinaten vorgegeben ist, geregelt. Nach 15 Sekunden wird eine Störung in Form eines Seitenwinds mit 30 m/s aktiviert. In Abbildung 10 und

Abbildung 11 stellt die graue Linie den Versuch ohne Seitenwind und die schwarze strichlierte Linie den Versuch mit Seitenwind dar.

Abbildung 10 beschreibt das Verhalten in Längsrichtung. Der oberste Graph ist die Geschwindigkeit in m/s, der zweite Graph zeigt den Regelfehler der Geschwindigkeit. Während der ersten 10 Sekunden ist der Regelfehler nicht definiert, da die Steuerung aktiv ist. Nach dem Aktivieren des Geschwindigkeitsregler wächst der Regelfehler auf einen kleinen Wert ($<10^{-3}$ m/s). Wenn die Störgröße am Fahrzeug zu wirken beginnt, wird der Fehler größer, wird aber in Folge von der Regelung korrigiert.

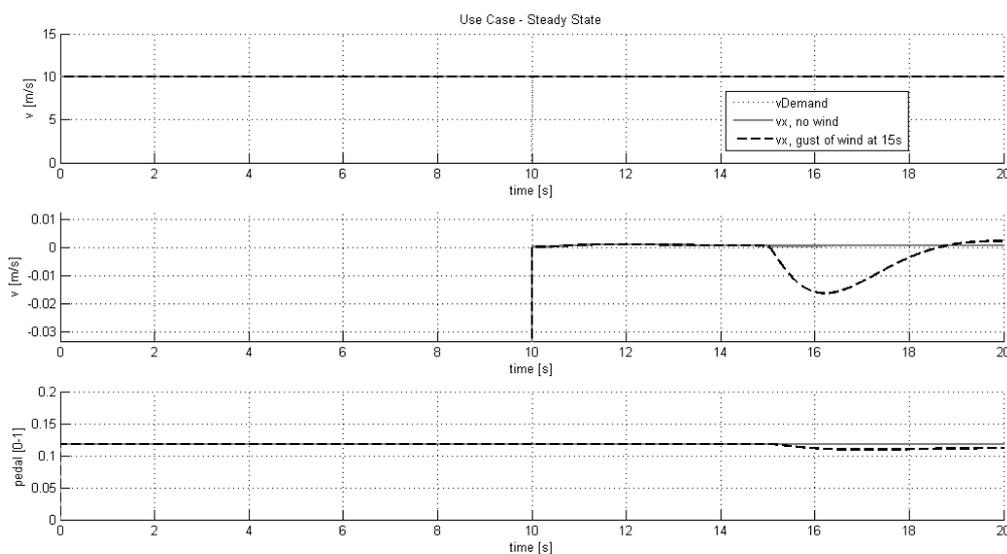


Abbildung 10: Übernahme der Kontrolle im stationären Zustand

Abbildung 11 zeigt das Verhalten des Positionsreglers. Der linke Graph stellt die Sollspur (schwarz) und die gefahrene Strecke dar. Der zweite Graph auf der rechten Seite zeigt den Lenkwinkel. die graue Linie zeigt den Versuch ohne Seitenwind und die strichlierte Linie den Versuch mit Seitenwind. Der Graph rechts unten gibt den Abstand zur Strecke an. Wenn der Seitenwind auf das Fahrzeug zu wirken beginnt, steigt der Abstand auf etwa 1cm und wird dann vom Regler gegen 0 geführt.

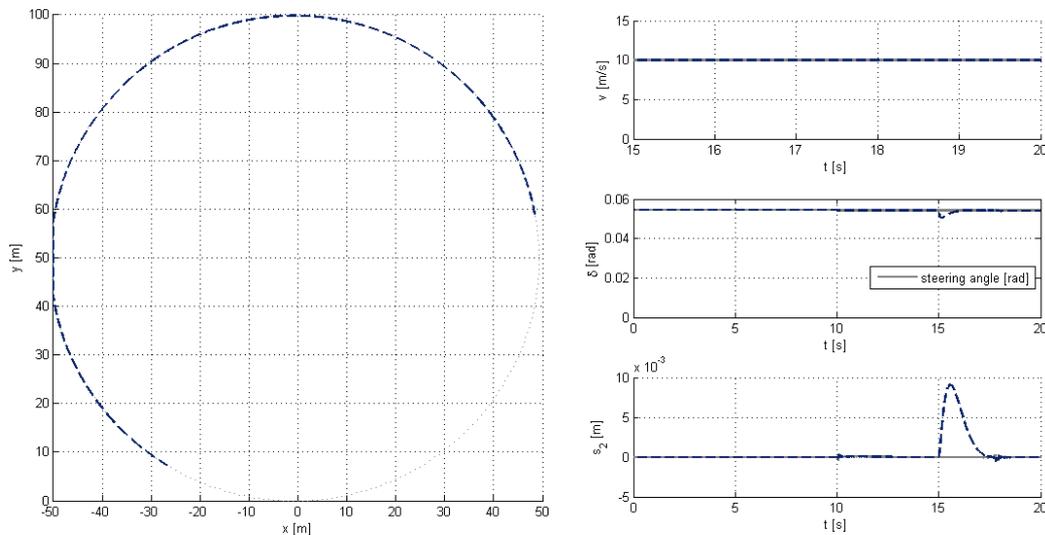


Abbildung 11: Übernahme der Kontrolle im stationären Zustand.

Aus diesen Darstellungen folgt, dass das Fahrermodell das Fahrzeug störungsfrei übernehmen und im Falle auftretender Störungen diese gut kompensieren kann. Diese Eigenschaft stellt die Voraussetzung dar, komplexe Simulationsaufgaben in Teilmanöver aufzuteilen und unterschiedlichen Reglern zur Bewältigung zuteilen zu können und macht das Modell in Zukunft auch um komplexere Module erweiterbar.

6 Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wurde der Entwurf eines erweiterbaren Fahrermodells für Fahrdynamiksimulationen vorgestellt. Es wurde ein modulares Konzept verwendet, in dem Module mit unterschiedlichen Regel- und Stellgrößen je nach Anwendung zu Kaskaden zusammengefasst werden. Die Aufteilung der Anwendungsfälle in Teilmanöver ermöglicht eine große Flexibilität bei der Definition der Fahraufgaben, führt aber zur Notwendigkeit, im Betrieb störungsfrei zwischen unterschiedlichen Regelgrößen umzuschalten. Es wurde am Beispiel des Anwendungsfalles „Stationäre Kreisfahrt“ gezeigt, wie diese Regler-Umschaltung bzw. die Regler-Initialisierung gelöst wurde und wie die für dafür notwendigen Regler aufgebaut sind.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich beim „Kplus Kompetenzzentrum-Programm“ des Österreichischen Bundesministeriums für Verkehr und Technologie (BMVIT), der Österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), dem Land Steiermark und der Steirischen Wirtschaftsförderung (SFG) für ihre finanzielle Unterstützung.

Ebenfalls danken wir den unterstützenden Firmen und Projektpartnern "Altair Engineering" sowie der Technischen Universität Graz.

Literatur

- [1] Plöchl, M. und Edelmann, J., (2007), „Driver Models in automobile dynamics application“, Vehicle System Dynamics, Vol. 45, pp. 699-741
- [2] <http://www.altairhyperworks.com/Product,18,MotionView.aspx>, August 2009
- [3] Bösch, Peter. (1991) „Der Fahrer als Regler“, Dissertation, Technische Universität Wien
- [4] Donges, E. (1977) „Experimentelle Untersuchung und regelungstechnische Modellierung des Lenkverhaltens von Kraftfahrern bei simulierter Straßenfahrt“, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt
- [5] MacAdam, C.C. (2003) „Understanding and Modelling the Human Driver“, Vehicle System Dynamics, Vol. 40, pp. 101-134
- [6] Isermann, R., (2006), „Fahrodynamikregelung“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden
- [7] Hirschberg, W., (2009), “TM_simple: A Simple to Use Tyre Model”, MATLAB Version 4.0, User-manual
- [8] Rieckert, P. und Schunk, T.E. (1940) „Zur Fahrmechanik des gummbereiften Kraftfahrzeugs“, Ingenieur Archiv, Nr. 11, p. 210-224
- [9] Pretenthaler, C. (2008), “Optimale Kursplanung für Rennsportsimulationen”, Dissertation, Technische Universität Graz
- [10] Pretenthaler, C. und Rudigier (2009) , “Robust Driver Model for Multi Body Vehicle Dynamics Simulation”, Abschlussbericht ViF-AB-018/2009, Kompetenzzentrum – Das virtuelle Fahrzeug, Graz

Nichtlineare Systemidentifikation durch lokale Modellansätze: Strategien zur Partitionierung und Parameterschätzung

Stefan Jakubek, Christoph Hametner
Technische Universität Wien,
Institut für Mechanik und Mechatronik,
Wiedner Hauptstrasse 8-10/E325, 1040 Wien
jakubek@impa.tuwien.ac.at hametner@impa.tuwien.ac.at

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt Verfahren zur nichtlinearen Systemidentifikation basierend auf lokalen Modellnetzwerken und Generalised Total Least Squares (GTLS) Methoden. Ein wesentliches Problem bei der dynamischen Systemidentifikation ist Messrauschen in Ein- und/oder Ausgängen des unbekanntes Prozesses. Die vorgestellte GTLS-Methodik kann auch bei Kombinationen von verrauschten und unverrauschten Ein- und Ausgängen konsistente Parameterschätzungen liefern. Weiters wird ein GTLS-Residuum definiert, welches statistische Informationen über den Modellfehler und den Anteil von Bias- bzw. Variancefehler liefert. Darauf aufbauend wird ein neuer Lösungsweg für die Partitionierung der Gültigkeitsbereiche der lokalen Modelle vorgestellt. Dies stellt bei lokalen Modellnetzwerken die eigentliche Herausforderung dar. In dieser Arbeit wird dazu ein Expectation-Maximisation-Verfahren (EM) vorgestellt, welches auf dem GTLS-Residuum basiert. Die Leistungsfähigkeit des nichtlinearen Gesamtmodells stellt damit eine Kombination aus konsistenter Parameterschätzung für lokale Modelle und dazu passender Partitionierungsstrategie dar. Die Anwendbarkeit und Vorteile der Modellarchitektur und des Identifikationsverfahrens werden anhand eines Simulationsbeispiels und anhand einer industriellen Anwendung dargestellt.

1 Einleitung

Für eine große Klasse von nichtlinearen Systemen existieren Methoden zur datenbasierten Modellierung, welche auf der Identifikation von Teilgebieten des Systems basieren, die mit passender Genauigkeit durch *lokale* Regressionsmodelle beschrieben werden können, welche linear in ihren Parametern sind. Die Aggregation solcher Teilgebiete zu einem sogenannten *lokalen Modellnetzwerk* führt dann zu einer kompakten Beschreibung des nichtlinearen Gesamtsystems.

Eine Klasse derartiger Methoden überlässt die Partitionierung der Teilgebiete dem Anwender, sodass eine profunde Kenntnis des zugrundeliegenden Systems notwendig ist, z.B. [7]. Andere Methoden wieder verwenden die Eingangs- und Ausgangsdaten des Systems um geeignete Teilgebiete zu bestimmen, [11, 6].

Der Identifikations- und Partitionierungsalgorithmus, der in dieser Arbeit vorgestellt wird, basiert auf einer iterativen Zerlegung des nichtlinearen Systems in einem sogenannten Partition Space. Dabei wird in jedem Schritt eine Bisektion durchgeführt, welche auf einem Expectation-Maximisation (EM) Verfahren beruht, [2]. Im Gegensatz zu konventionellen Clusteringverfahren wird die Anzahl der Teilungen nicht a priori festgelegt, sondern während des Trainings dynamisch aufgrund statistischer Kriterien festgelegt. Aktuelle Ansätze verwenden dafür den Prädiktionsfehler, [1, 6, 2]. Wenn jedoch einige oder auch alle Signale, welche in den Parameterschätzprozess eingehen verrauscht sind, dann ist dieser Ansatz nicht mehr optimal. In dieser Arbeit wird ein allgemeineres Modellresiduum definiert, um die Teilgebiete für die Gültigkeit von lokalen Regressionsmodellen zu bestimmen.

Das zweite wichtige Problem, welches in dieser Arbeit behandelt wird ist die Schätzung der lokalen Modellparameter, wenn sowohl Eingangs- als auch Ausgangsdaten verrauscht sind. In dieser Situation produzieren konventionelle Verfahren, welche den Prädiktionsfehler minimieren, keine konsistenten Schätzungen mehr.

Die Total Least Squares Methode (TLS) ist ein passendes Parameterschätzverfahren in solchen Situationen, [4], [5], [8]. Ein wesentlicher Nachteil von TLS liegt darin, dass extrem unterschiedliche Rauschintensitäten in den Signalen zu schlecht konditionierten Problemen führen. Eine entsprechende Erweiterung stellen hier Generalized Total Least Squares methods (GTLS) Verfahren dar, bei welchen einige Signale auch explicit als *rauschfrei* betrachtet werden können. Es existieren auch hier einige Lösungsansätze, welche jedoch nicht direkt für die Parameterschätzung in einem lokalen Modellnetzwerk übernommen werden können, [5], [10], [12], [14].

Das GTLS-Verfahren, welches in dieser Arbeit vorgestellt wird erlaubt eine individuelle Gewichtung einzelner Datensätze (Weighted GTLS, WGTLS) und in weiterer Folge eine einfache Erweiterung auf rekursive Arbeitsweise. Letzteres ist speziell bei der Bearbeitung extrem großer Datensätze, wie sie in realen Problemen auftreten essentiell. Als Grundlage für die Partitionierung lokaler Modelle wird zusätzlich ein *GTLS Residuum* definiert.

2 Architektur lokaler Modellnetzwerke

In lokalen Modellnetzwerken, welche ein statisches oder dynamisches System repräsentieren besteht jedes lokale Modell (bezeichnet durch den Index i) aus zwei Teilen:

- Der Gültigkeitsfunktion $\Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k))$, welche den Gültigkeitsbereich des lokalen Teilmodells in einem sogenannten Partition Space festlegt. Der Wertebereich von Φ_i liegt zwischen null (keine Gültigkeit) und eins (volle Gewichtung des lokalen Teilmodells).

- Dem lokalen Modellparametervektor $\boldsymbol{\theta}_i$. Die lokale Schätzung des Systemausgangs $y(k)$ durch das i -te lokale Modell ist gegeben durch

$$\hat{y}_i(k) = \mathbf{x}^T(k)\boldsymbol{\theta}_i, \quad (1)$$

wobei $\mathbf{x}^T(k)$ den Regressionsvektor bezeichnet.

Der Partitionierungsraum wird durch sogenannte *Premise*-Variablen $\tilde{\mathbf{x}}$ aufgespannt, wobei $\dim(\tilde{\mathbf{x}}) = p$ gilt.

Eine der wesentlichen Stärken der lokalen Modellnetzwerke liegt darin, dass die *Premise*-Variablen $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ und die Elemente des Regressors $\mathbf{x}(k)$ unabhängig gewählt werden können, [11]. Speziell bei der Identifikation von nichtlinearen dynamischen Systemen kann dadurch die Komplexität des Optimierungsproblems dramatisch reduziert werden. Typischerweise werden die Elemente des Partition Space $\tilde{\mathbf{x}}$ so gewählt, dass damit die Struktur der Nichtlinearität des realen Systems gut beschrieben werden kann.

Alle lokalen Schätzungen $\hat{y}_i(k)$ werden zu einem globalen nichtlinearen Modellausgang durch gewichtete Aggregation zusammengefasst:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^L \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k))\hat{y}_i(k), \quad (2)$$

wobei L die Anzahl der lokalen Modelle bezeichnet.

2.1 Hierarchische Baumstruktur

Die wesentliche Herausforderung beim Training lokaler Modellnetzwerke liegt darin, $\Phi_i(\tilde{\mathbf{x}})$ für jedes lokale Modell so zu bestimmen, dass (1) in seinem Gültigkeitsbereich das System genau beschreiben kann.

Die wachsende Baumstruktur, welche in dieser Arbeit beschrieben wird, basiert auf dem Prinzip der *decision trees*, [13] und teilt den Partition space rekursiv. Dadurch entsteht in jedem Iterationsschritt ein neues lokales Modell.

Abb. 1 zeigt eine derartigen hierarchischen Modellbaum. Jeder Knotenpunkt wird durch eine Diskriminantenfunktion $\varphi(\tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ repräsentiert. Die freien Enden stellen die tatsächlichen lokalen Modelle dar, welche durch ihre Gültigkeitsfunktionen Φ_i und die parameter Vektoren $\boldsymbol{\theta}_i$ festgelegt sind.

In jedem Iterationsschritt wird ein lokales Modell durch einen neuen Knoten und zwei neue lokale Modelle, welche an diesem Knoten hängen ersetzt. Die Selektion des zu ersetzenden Modells erfolgt anhand des GTLS Residuums, welches in Abschnitt 4 beschrieben wird. Die Partitionierung der beiden neuen lokalen Modelle durch eine entsprechende Parametrierung der Gültigkeitsfunktion erfolgt anhand statistischer Kriterien nach dem Prinzip der *two-category classification* und wird in Abschnitt 5 beschrieben.

Der Algorithmus wird solange fortgesetzt, bis ein bestimmtes statistisches Abbruchkriterium erfüllt ist, welches in Abschnitt 5.5 beschrieben wird.

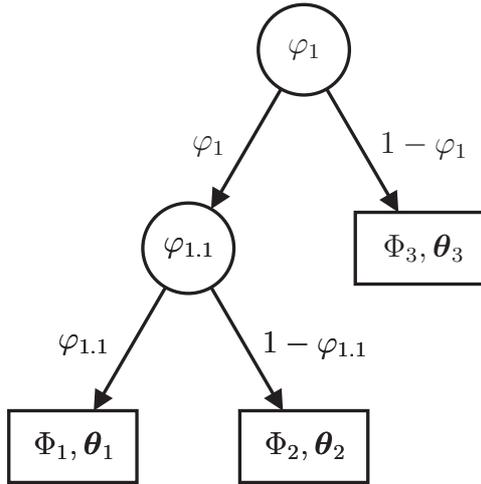


Abbildung 1: Hierarchical discriminant tree

Die Gültigkeitsfunktionen für die Struktur in Abb. 1 erhält man aus

$$\Phi_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \varphi_1(\tilde{\mathbf{x}})\varphi_{1.1}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (3)$$

$$\Phi_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \varphi_1(\tilde{\mathbf{x}})(1 - \varphi_{1.1}(\tilde{\mathbf{x}})), \quad (4)$$

$$\Phi_3(\tilde{\mathbf{x}}) = 1 - \varphi_1(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (5)$$

Der Vorteil dieser Wahl liegt darin, dass eine Einheitspartitionierung ($\sum_{i=1}^L \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 1$) im gesamten Partition Space erzielt wird (für alle $\tilde{\mathbf{x}}$).

3 Generalized Total Least Squares

Ein lineares Parameterschätzproblem kann allgemein als überbestimmtes Gleichungssystem $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}$ gesehen werden, wobei \mathbf{X} die Regressionsmatrix und \mathbf{y} die gemessenen Ausgänge bezeichnet.

Bei dynamischen MISO (multi-input single output) Identifikationsproblemen werden die Zeilenvektoren \mathbf{x}^T in \mathbf{X} nach folgendem Schema aufgebaut:

$$\mathbf{x}^T(k) = [\mathbf{u}_1^T(k), \mathbf{u}_2^T(k), \dots, \mathbf{u}_r^T(k) | y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)]. \quad (6)$$

Dabei enthält $\mathbf{u}_j^T(k)$ vergangene Werte des j -ten Eingangs gemäß

$$\mathbf{u}_j^T(k) = [u_j(k-d_j-1), u_j(k-d_j-2), \dots, \dots, u_j(k-d_j-m_j)]$$

In den obigen Gleichungen bezeichnet m_j ($j = 1, \dots, r$) die Ordnung des j -ten Modelleingangs, d_j ist die entsprechende Totzeit und n bezeichnet die Ordnung des Nennerpolynoms.

3.1 Das GTLS Verfahren

Das GTLS-Verfahren, welches in dieser Arbeit beschrieben wird, basiert auf der Grundidee der konventionellen TLS-Schätzung, wo alle verrauschten Eingänge $x_i(k)$ ($i = 1, \dots, M$) und der verrauschte Ausgang $y(k)$ inherent rekonstruiert werden:

$$J = \frac{1}{2N} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M [x_i(k) - \hat{x}_i(k)]^2 + \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2 \right\} = \min. \quad (7)$$

Das GTLS Verfahren beruht auf der Idee, nur die tatsächlich verrauschten Signale zu rekonstruieren und die unverrauschten Signale für die Rekonstruktion zusätzlich heranzuziehen. Dabei wird nicht zwischen Eingängen und dem Ausgang unterschieden, sodass sogar der Ausgang des Systems bei der Parameterschätzung als rauschfrei betrachtet werden kann.

Sei $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ die Regressormatrix und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ der Ausgangsvektor. Für die Rekonstruktion $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{X}}$ wird eine linear-affine Modellstruktur gewählt. Dafür wird eine erweiterte Regressormatrix definiert:

$$\mathbf{W} = [\mathbf{y} \mid \mathbf{X}] \quad (8)$$

Der k -te Zeilenvektor $\mathbf{w}^T(k)$ in \mathbf{W} ist gegeben durch $\mathbf{w}^T(k) = [\mathbf{y}(k) \mid \mathbf{x}^T(k)]$ wobei k im Fall statischer Modelle einen simplen Index bezeichnet und im dynamischen Fall die diskrete Zeit bedeutet, vgl. (6).

Für die GTLS Parameterschätzung werden verrauschte Komponenten in \mathbf{W} durch einen Subskript n und rauschfreie Komponenten durch ein o gekennzeichnet:.

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_n \quad \mathbf{W}_o]. \quad (9)$$

Im Gegensatz zu TLS werden bei GTLS nur die verrauschten Komponenten rekonstruiert:

$$\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}}_n. \quad (10)$$

Die Rekonstruktion basiert auf gewöhnlicher TLS-Schätzung wo ja die verrauschten Daten auf die TLS-Hyperebene projiziert werden. Diese ist durch einen Stützpunkt \mathbf{m} und einen Einheitsnormalenvektor \mathbf{b} bestimmt:

$$\hat{\mathbf{w}}_n^T(k) = \mathbf{w}_n^T(k) - [(\mathbf{w}_n(k) - \mathbf{m})^T \mathbf{b}] \mathbf{b}^T. \quad (11)$$

Für die GTLS Schätzung wird zur Verbesserung dieser Rekonstruktion eine Linearkombination der rauschfreien Regressoren eingesetzt, deren Parametrierung durch eine Matrix gegeben ist: $\mathbf{C}^T \mathbf{w}_o$. Dabei bezeichnet \mathbf{w}_o^T den rauschfreien Teil des Regressorvektors, welcher einen Zeilenvektor aus \mathbf{W}_o in (9) darstellt. Dementsprechend wird die GTLS Rekonstruktion zu

$$\hat{\mathbf{w}}_n^T(k) = \mathbf{w}_n^T(k) - [(\mathbf{w}_n(k) - \mathbf{m} - \mathbf{C}^T \mathbf{w}_o(k))^T \mathbf{b}] \mathbf{b}^T \quad (12)$$

bzw. für alle Trainingsdaten angeschrieben ($k = 1, 2, \dots, N$)

$$\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n = [(\mathbf{W}_n - \mathbf{1m}^T - \mathbf{W}_o \mathbf{C}) \mathbf{b}] \mathbf{b}^T, \quad (13)$$

mit dem $(N \times 1)$ -vector $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$.

Die Parameterschätzung kann nun als Optimierungsproblem dargestellt werden:

$$\|\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n\|_F^2 = \min \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{y}} \in \text{Image}(\hat{\mathbf{X}}). \quad (14)$$

3.2 Gewichtete GTLS Parameterschätzung

Dieser Abschnitt beschreibt die gewichtete GTLS Parameterschätzung, welche die individuelle Gewichtung jedes einzelnen Datenpunkts ermöglicht. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Integration von GTLS in lokale Modellnetzwerke. In Analogie zu (14) wird die Parameterschätzung durch folgendes Optimierungsproblem vorgenommen:

$$\|\mathbf{Q}_j^{1/2}(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n)\|_F^2 = \min \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{y}} \in \text{Image}(\hat{\mathbf{X}}). \quad (15)$$

In obiger Definition beschreibt \mathbf{Q}_j eine diagonale Gewichtungsmatrix für das j -te lokale Modell. In Folge wird der Index j aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Einsetzen von (13) in (15) liefert

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n)\|_F^2 = \\ & = \mathbf{b}^T (\mathbf{W}_n - \mathbf{1}\mathbf{m}^T - \mathbf{W}_o\mathbf{C})^T \mathbf{Q} (\mathbf{W}_n - \mathbf{1}\mathbf{m}^T - \mathbf{W}_o\mathbf{C}) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (16)$$

Nun werden sowohl \mathbf{W}_n als auch \mathbf{W}_o auf deren gewichtete Zentroiden bezogen:

$$\mathbf{W}_n = \tilde{\mathbf{W}}_n + \mathbf{1}\boldsymbol{\mu}_n^T \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\mu}_n^T = \frac{1}{s_q} \mathbf{q}^T \mathbf{W}_n,$$

und

$$\mathbf{W}_o = \tilde{\mathbf{W}}_o + \mathbf{1}\bar{\mathbf{w}}_o^T \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{w}}_o^T = \frac{1}{s_q} \mathbf{q}^T \mathbf{W}_o.$$

Dabei bezeichnet \mathbf{q} die Hauptdiagonale von \mathbf{Q} ($\mathbf{q} = \text{diag}(\mathbf{Q})$) und s_q ist die Summe aller Gewichte, $s_q = \mathbf{1}^T \mathbf{q}$.

Damit wird (16) zu

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n)\|_F^2 = \\ & = \mathbf{b}^T (\tilde{\mathbf{W}}_n^T + \boldsymbol{\mu}_n \mathbf{1}^T - \mathbf{m} \mathbf{1}^T - \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{W}}_o^T - \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{w}}_o \mathbf{1}^T) \mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{W}}_n + \mathbf{1}\boldsymbol{\mu}_n^T - \mathbf{1}\mathbf{m}^T - \tilde{\mathbf{W}}_o\mathbf{C} - \mathbf{1}\bar{\mathbf{w}}_o^T\mathbf{C}) \mathbf{b} = \\ & = \mathbf{b}^T \{ \tilde{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{W}}_n + s_q (\boldsymbol{\mu}_n - \mathbf{m})(\boldsymbol{\mu}_n - \mathbf{m})^T - \\ & \quad - 2\mathbf{C}^T (\tilde{\mathbf{W}}_o^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{W}}_n - s_q \bar{\mathbf{w}}_o \mathbf{m}^T + s_q \bar{\mathbf{w}}_o \boldsymbol{\mu}_n^T) + \\ & \quad + \mathbf{C}^T (\tilde{\mathbf{W}}_o^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{W}}_o + s_q \bar{\mathbf{w}}_o \bar{\mathbf{w}}_o^T) \mathbf{C} \} \mathbf{b} = \min_{\mathbf{b}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (17)$$

Nach Zusammenfassung ($\mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{W}}_o = \mathbf{0}$ und $\mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{W}}_n = \mathbf{0}$) und durch Benutzung der Abkürzung $\mathbf{c}_o = \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{w}}_o$ erhält man

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{Q}^{1/2}(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_n)\|_F^2 = \\ & = \mathbf{b}^T \{ (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o\mathbf{C})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o\mathbf{C}) + \\ & \quad + s_q [(\boldsymbol{\mu}_n - \mathbf{m} - \mathbf{c}_o)(\boldsymbol{\mu}_n - \mathbf{m} - \mathbf{c}_o)^T] \} \mathbf{b} = \min \end{aligned} \quad (18)$$

Die Minimierung in (18) muss nun nach \mathbf{C} , \mathbf{m} und \mathbf{b} erfolgen.

Der Zentroidenvektor \mathbf{m} tritt nur im zweiten Term von (18) auf. Da es sich um einen positiv-semidefiniten Ausdruck handelt, muss \mathbf{m} so gewählt werden, dass dieser Term in (18) verschwindet:

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}_n - \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{w}}_o. \quad (19)$$

Der erste Term in (18) ist unabhängig von \mathbf{m} und muss separat minimiert werden:

$$\mathbf{b}^T (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C}) \mathbf{b} = \|\mathbf{Q}^{1/2} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C}) \mathbf{b}\|_F^2 = \min_{\mathbf{C}, \mathbf{b}}.$$

Die obige Frobeniusnorm wird nun erweitert:

$$\|\mathbf{Q}^{1/2} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C}) \mathbf{b}\|_F^2 = \|\mathbf{Q}^{1/2} (\tilde{\mathbf{w}}_{n,1} - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{c}_1) b_1\|_2^2 + \|\mathbf{Q}^{1/2} (\tilde{\mathbf{w}}_{n,2} - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{c}_2) b_2\|_2^2 + \dots$$

wobei $\tilde{\mathbf{w}}_{n,i}$ und \mathbf{c}_i die i -ten Spaltenvektoren von $\tilde{\mathbf{W}}_n$ bzw. \mathbf{C} bezeichnen und b_i das i -te Element aus \mathbf{b} bedeutet.

Die Minimierung der Frobeniusnorm nach den beiden Argumenten \mathbf{C}, \mathbf{b} kann damit umformuliert werden zu

$$\text{Tr}\{(\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C})\} = \min_{\mathbf{C}}.$$

$$\frac{\partial \text{Tr}}{\partial \mathbf{C}} = -2 \tilde{\mathbf{W}}_o^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C}) = 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{C} = (\tilde{\mathbf{W}}_o^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{W}}_o)^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_o^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{W}}_n \quad (21)$$

Es ist zu beachten, dass (21) die Lösung des überbestimmten Gleichungssystems $\tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{W}}_n$ darstellt, wobei jede einzelne Gleichung durch das entsprechende Element von \mathbf{q} gewichtet wird.

Der Vektor \mathbf{b} ist nun als Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von $(\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{W}}_n - \tilde{\mathbf{W}}_o \mathbf{C})$ zu wählen.

Der Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$, welcher $\hat{\mathbf{X}}$ letztendlich durch $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta}$ auf den lokalen Modellausgang abbildet, ist nun direkt aus den Elementen von \mathbf{b}, \mathbf{m} and \mathbf{C} zu berechnen.

4 Das GTLS Residuum

In diesem Abschnitt wird ein statistischen Kriterium definiert, welches die statistische Bewertung von lokalen Regressionsmodellen ermöglicht. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für den Partitionierungsprozess in lokalen Modellnetzwerken: Das GTLS Residuum wird verwendet, um zwischen unsystematischen Fehlern durch Messrauschen und systematischen Fehlern durch unpassende Modellstruktur zu unterscheiden. Wenn die Gewichte in \mathbf{Q}_j auf des lokale Modell η_j bezogen werden, dann kann ein *klassenabhängiges* Residuum definiert werden:

$$r(\mathbf{w}^T(k), \eta_j) = [\tilde{\mathbf{w}}_n^T(k) - \tilde{\mathbf{w}}_o^T(k) \mathbf{C}] \mathbf{b} \quad (22)$$

Das Argument η_j für r unterstreicht, dass für das das Modell j alle Parameter (\mathbf{b}, \mathbf{m} and \mathbf{C}) und damit auch das Residuum r essentiell von den Gewichten q_{ji} abhängen. Mit den Gewichten q_{ji} kann die gewichtete GTLS Parameterschätzung (15) formal auch so beschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^N q_{ji} r(\mathbf{w}^T(i), \eta_j) \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} = 0. \quad (23)$$

Es ist zu beachten, dass für den Sonderfall, dass nur $y(k)$ verrauscht ist (22) sich auf den Prädiktionsfehler reduziert und (23) zur WLS Parameterschätzung wird, vgl. [1].

Wenn die Rauschsignale in \mathbf{W}_n Gauss-verteilt mit Varianz eins und verschwindender Kreuzkorrelation sind, dann folgt das GTLS-Residuum r ebenfalls einer Gaussverteilung mit Erwartungswert null und Varianz eins. Entsprechend kann eine *klassenbedingte Verteilungsdichte* für das Residuum definiert werden:

$$p(\mathbf{w}^T(k), \eta_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2(\mathbf{w}^T(k), \eta_j)}{2}\right), \quad (24)$$

mit r gem. (22).

Die Verteilungsdichte bezieht sich dabei immer auf ein lokales Modell (bzw. auf die Klasse η_j) dessen Parameter aus gewichteter GTLS-Schätzung gewonnen wurden. Es beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, dass ein Datensatz (y_k, \mathbf{x}_k) zum lokalen Modell η_j passt und dabei ein GTLS Residuum r aufweist. Für eine zunehmende Anzahl an Trainingsdaten sollte die empirische Verteilungsdichte des Residuums zu (24) passen, wenn die Daten lokal durch die Regressoren in \mathbf{X} modelliert werden können. Wenn jedoch Nichtlinearitäten vorhanden sind, die durch die Regressoren nicht erklärt werden können, dann wird die tatsächliche Residuenverteilung von (24) abweichen.

Zur Illustration werden in Abb.2 die empirischen Verteilungsdichten von tatsächlichen GTLS Residuen mit (24) verglichen. Der obere Teil der Abbildung zeigt eine ungünstige Situation, welche durch Nichtlinearitäten verursacht wurde, welche nicht durch die Regressoren erklärt werden können, wogegen die untere Abbildung eine Situation darstellt, wo das lokale Modell die Datenstruktur passend modellieren kann.

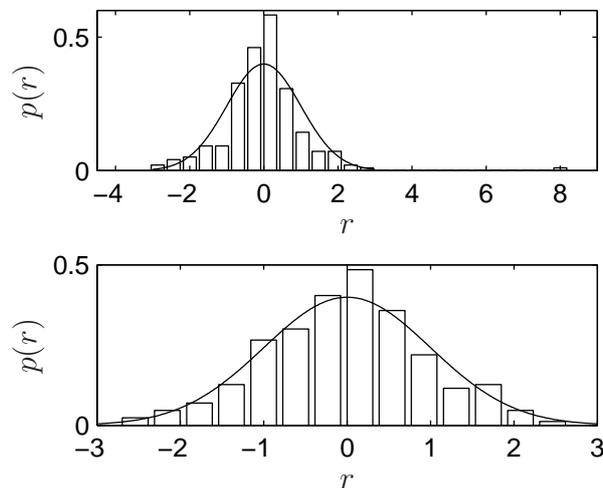


Abbildung 2: Residuenverteilung für eine ungünstige (oben) und eine passende Modellstruktur (unten)

5 Partitionierung durch Diskriminantenoptimierung

Die Zerlegung des Partition Space wird rekursiv durchgeführt, wobei im jedem Schritt eine nichtlineare Optimierung auszuführen ist. Im zugrundeliegenden Klassifizierungsproblem muss jeder Trainingsdatenpunkt zu einer der beiden Klassen η_1 oder η_2 zugeordnet werden, abhängig vom Wert der jeweiligen Diskriminantenfunktion $\varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi})$:

$$\varphi_1(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{1 + \exp(-[1 \quad \tilde{\mathbf{x}}^T(k)]\boldsymbol{\psi})} \text{ for class } \eta_1 \quad (25)$$

$$\varphi_2(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) = 1 - \varphi_1(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) \text{ for class } \eta_2. \quad (26)$$

Die Diskriminantenfunktionen werden dabei durch den Vektor $\boldsymbol{\psi}^T = [\psi_0 \quad \psi_1 \quad \dots \quad \psi_p]$ parametrisiert.

Die Partitionierung der beiden neuen lokalen Modelle, welche nun von $\boldsymbol{\psi}$ abhängt, basiert auf einem Expectation-Maximisation (EM) Verfahren, [3]. Das EM-Verfahren ist ein bekannter Zugang bei statistischen Schätzverfahren mit unvollständigen Daten. Speziell bei der statistischen Mustererkennung hat sich das EM-Verfahren als robust und stabil erwiesen, [13]. Der Algorithmus bestimmt $\boldsymbol{\psi}$ derart, dass die *Likelihood* der gemessenen Prozessdaten $\mathbf{w}^T(k)$ ($k = 1, \dots, N$) maximiert wird:

$$P(\mathbf{W}|\boldsymbol{\psi}) = \max. \quad (27)$$

Bei der Maximierung von (27) tritt das Problem auf, dass $\mathbf{w}^T(k)$ von den Gewichten des Modells η_1 und η_2 abhängt:

$$p(\mathbf{w}^T(k)|\boldsymbol{\psi}) = \sum_{i=1}^2 p(\mathbf{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi})p(\eta_i) \quad (28)$$

Der EM-Algorithmus verbessert nun iterativ die Schätzung von $\boldsymbol{\psi}$, indem der Erwartungswert einer *log-likelihood-Funktion* $Q(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i))$ maximiert wird, wobei $\boldsymbol{\psi}$ und die Prior-Wahrscheinlichkeiten $p(\eta_i)$ als unbekannte Variablen behandelt werden. Die Funktion $Q(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i))$ wird dementsprechend

$$Q(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i)) = E_{\eta_i} [\log p(\mathbf{w}^T, \eta_i|\boldsymbol{\psi})]. \quad (29)$$

Wenn nun die Wahrscheinlichkeit von \mathbf{W} maximiert werden soll, erhält man

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i)) &= E_{\eta_i} \left[\log \prod_{k=1}^N p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i|\boldsymbol{\psi}) \right] \\ &= E_{\eta_i} \left[\sum_{k=1}^N \log p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i|\boldsymbol{\psi}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N E_{\eta_i} [\log p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i|\boldsymbol{\psi})] \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p(\eta_i|\mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) \cdot \\ &\quad \cdot \log p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i|\boldsymbol{\psi}), \end{aligned} \quad (30)$$

wobei $\boldsymbol{\psi}_n$ die Schätzung von $\boldsymbol{\psi}$ aus der n -ten Iteration bezeichnet und $p(\eta_i|\boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n)$ die a-posteriori Schätzung der Wahrscheinlichkeit von η_i bedeutet.

Der Expectation-Maximisation Algorithmus verfährt nun in zwei Schritten:

- *E-Step*: Basierend auf der aktuellen Schätzung des Gewichtsvektors $\boldsymbol{\psi}_n$ werden die posteriori-Wahrscheinlichkeiten $p(\eta_i|\boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n)$ berechnet.
- *M-Step*: Der Vektor $\boldsymbol{\psi}^T$ wird durch Maximierung von (30) bestimmt.

5.1 E-Schritt

Die posteriori-Wahrscheinlichkeiten $p(\eta_i|\boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n)$ from (30) werden mit dem Satz von Bayes bestimmt:

$$p(\eta_i|\boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) = \frac{p(\boldsymbol{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)p(\eta_i)}{\sum_{j=1}^2 p(\boldsymbol{w}^T(k)|\eta_j, \boldsymbol{\psi}_n)p(\eta_j)}. \quad (31)$$

Die Verteilungsdichtefunktion $p(\boldsymbol{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in der Klasse (bzw. im Modell) η_i ein Datenpunkt mit den Eingängen $\boldsymbol{x}(k)$ den Ausgang $y(k)$ hat:

$$p(\boldsymbol{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n) = p(\boldsymbol{w}^T(k)|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)p(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n). \quad (32)$$

Es ist zu beachten, dass (32) sowohl den erweiteren Regressor $\boldsymbol{w}^T(k)$ und $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ enthält. Obwohl diese beiden Größen als unabhängige Argumente gesehen werden können, so sind $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ und $\boldsymbol{w}(k)$ dennoch inhärent durch den Datenpunkt k verbunden. Die Klassen-konditionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in (32) beschreiben zwei unterschiedliche Merkmale: Einerseits wird die räumliche Verteilung der Daten im Partition Space durch $p(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)$ betrachtet und andererseits wird die Verteilung des Modellfehlers durch $p(\boldsymbol{w}^T(k)|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)$ berücksichtigt.

Durch Anwendung des Satzes von Bayes wird die Wahrscheinlichkeit für eine Zugehörigkeit

$$\varphi_i(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) = p(\eta_i|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) \quad (33)$$

zum lokalen Modell i beschrieben durch

$$p(\eta_i|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi})p(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)) = p(\tilde{\boldsymbol{x}}(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi})p(\eta_i). \quad (34)$$

Für die Bewertung des Modellfehlers wird nun die Verteilungsfunktion des GTLS-Residuums (24) herangezogen:

$$p(\boldsymbol{w}^T(k)|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2(\boldsymbol{w}^T(k), \eta_i)}{2}\right). \quad (35)$$

Im Gegensatz zu (24) hat die Verteilungsfunktion nun auch $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ als Argument. Die bedingte Verteilung $p(\boldsymbol{w}^T(k)|\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \eta_i)$ beschreibt dementsprechend die Wahrscheinlichkeitsdichte des Residuums bei gegebener Lage $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ des Datenpunkts im Partition Space.

Sie kann deshalb als Verbindung zwischen dem Partition Space und den Eigenschaften des lokalen Modells gesehen werden.

Wie schon früher beschrieben wurde, ordnet (35) dem Modellfehler eine Wahrscheinlichkeit zu, sodass beide neuen lokalen Modelle ausgewogen gegeneinander partitioniert sind, wenn sowohl $p(\mathbf{w}^T(k)|\tilde{\mathbf{x}}(k), \eta_1)$ als auch $p(\mathbf{w}^T(k)|\tilde{\mathbf{x}}(k), \eta_2)$ einer Gaussverteilung genügen, vgl. Abb. 2. Wenn also (35) als Verteilungsdichte des Ausgangsfehlers herangezogen wird, dann zielt der iterative Optimierungsalgorithmus auf eine passende Fehlerverteilung in *beiden* lokalen Modellen ab.

5.2 M-Schritt

Im M-Schritt wird der Ausdruck (30) nach $\boldsymbol{\psi}$ und $p(\eta_i)$ maximiert, unter der Nebenbedingung $p(\eta_1) + p(\eta_2) = 1$.

Die entsprechende Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i)) = Q(\boldsymbol{\psi}, p(\eta_i)) + \lambda \left(\sum_{i=1}^2 p(\eta_i) - 1 \right). \quad (36)$$

Nun müssen die Ableitungen von $\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi})$ nach $\boldsymbol{\psi}$ und $p(\eta_i)$ zu Null gesetzt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p(\eta_i | \mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) \log p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i | \boldsymbol{\psi}) \right\} = 0 \quad (37)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial p(\eta_i)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p(\eta_i | \mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) \log p(\mathbf{w}^T(k), \eta_i | \boldsymbol{\psi}) \right\} + \lambda = 0 \quad (38)$$

für $i = 1, 2$.

Nach Erweiterung und unter Berücksichtigung von $p(\tilde{\mathbf{x}}(k), \eta_i | \boldsymbol{\psi}) = p(\tilde{\mathbf{x}}(k) | \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\eta_i)$ erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p(\eta_i | \mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \log [p(\mathbf{w}^T(k) | \tilde{\mathbf{x}}(k), \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\tilde{\mathbf{x}}(k) | \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\eta_i)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p(\eta_i)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p(\eta_i | \mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \log [p(\mathbf{w}^T(k) | \tilde{\mathbf{x}}(k), \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\tilde{\mathbf{x}}(k) | \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\eta_i)] \right\} + \lambda = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Die unterschiedlichen Argumente $\boldsymbol{\psi}_n$ und $\boldsymbol{\psi}$ in (39) zeigen an, dass die posterior-Verteilung (31) mit der Schätzung $\boldsymbol{\psi}_n$ von $\boldsymbol{\psi}$ aus der n -ten Iteration berechnet wird, während die verbleibenden Verteilungen nach $\boldsymbol{\psi}$ optimiert werden.

Unter Verwendung der Abkürzungen $p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n) = p(\eta_i | \mathbf{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n)$, $p_{w,k}(\boldsymbol{\psi}) = p(\mathbf{w}^T(k) | \tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi})$ und $p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi}) = p(\tilde{\mathbf{x}}(k) | \eta_i, \boldsymbol{\psi}) p(\eta_i) = \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) p(\tilde{\mathbf{x}}(k))$ wird die Ableitung nach $\boldsymbol{\psi}$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n) \frac{1}{p_{w,k}(\boldsymbol{\psi}) p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})} \cdot \left\{ p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi}) \frac{\partial p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} + p_{w,k}(\boldsymbol{\psi}) \frac{\partial p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right\} = 0 \quad (41)$$

und weiter

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n) \cdot \left\{ \frac{1}{p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} + \frac{1}{p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right\} = 0 \quad (42)$$

Die Ableitung von $p(\mathbf{w}^T(k) | \tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi})$ nach $\boldsymbol{\psi}$ beschreibt indirekt die Abhängigkeit des GTLS-Residuums (22) von $\boldsymbol{\psi}$:

$$\frac{1}{p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{w,k}(\boldsymbol{\psi})}{\partial r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i)} \frac{\partial r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\psi}} = -r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i) \frac{\partial r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\psi}} \quad (43)$$

Einsetzen von (43) in (42) liefert

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n) \cdot \left\{ -r(\mathbf{w}^T(k)) \frac{\partial r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\psi}} + \frac{1}{p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right\} = 0. \quad (44)$$

Die letzte Ableitung in (43) beschreibt die Abhängigkeit der lokalen Parameterschätzung von $\boldsymbol{\psi}$ und ist analytisch schwer zu bestimmen. Deshalb wird statt einer analytischen Lösung von (44) ein Relaxationsschritt gesetzt: Um (44) zu lösen, werden alle Ausdrücke, welche sich auf $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\psi}}$ beziehen, unabhängig voneinander zu Null gesetzt:

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left\{ \sum_{k=1}^N p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n) r(\mathbf{w}^T(k)) \frac{\partial r(\mathbf{w}^T(k), \eta_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \right\} = 0, \quad (45)$$

für $i = 1, 2$. Dies führt auf WGTLS-Schätzung der Parametervektoren $\boldsymbol{\theta}_i$ mit $p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n)$ als Gewichten. Die Gewichtsmatrix aus (15) wird dementsprechend zu

$$\mathbf{Q}_i = \text{diag} [p_{i,1}(\boldsymbol{\psi}_n) \quad p_{i,2}(\boldsymbol{\psi}_n) \quad \dots \quad p_{i,N}(\boldsymbol{\psi}_n)] \quad i = 1, 2. \quad (46)$$

Der zweite Teil von (44) ist

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N \frac{p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n)}{p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})} \frac{\partial p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (47)$$

Beachtet man, dass $p_{x_k, \eta_i}(\boldsymbol{\psi}) = \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) p(\tilde{\mathbf{x}}(k))$, so erhält man

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^N \frac{p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n)}{\varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) p(\tilde{\mathbf{x}}(k))} p(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \frac{\partial \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (48)$$

Da weiters $p_{1,k}(\boldsymbol{\psi}) + p_{2,k}(\boldsymbol{\psi}) = 1$ und $\varphi_1(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) + \varphi_2(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi}) = 1$ für alle k Datenpunkte gilt, wird (48) erfüllt, wenn

$$\sum_{k=1}^N \frac{p(\eta_1 | \boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n) - \varphi_1(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi})}{\varphi_1(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi})(1 - \varphi_1(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi}))} \frac{\partial \varphi_1(\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (49)$$

Der neue Gewichtsvektor $\boldsymbol{\psi}$ wird nun iterativ aus (49) mit dem Levenberg-Marquardt Verfahren bestimmt. Dieses Verfahren kann bei komplexen Optimierungsaufgaben (z.B. Perceptron-Netze) rechenaufwändig werden, in der vorliegenden Situation ist es jedoch ein sehr effizienter Zugang, da in jedem M-Schritt nur einige Iterationsschritte für ein niedrigdimensionales Problem ausgeführt werden müssen.

Die Bedingung (40) wird zu

$$\sum_{k=1}^N \frac{p_{i,k}(\boldsymbol{\psi}_n)}{p(\eta_i)} + \lambda = 0, \quad (50)$$

mit der Nebenbedingung $p(\eta_1) + p(\eta_2) = 1$. Nach einigen Rechenschritten zu Eliminierung von λ erhält man

$$p(\eta_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p(\eta_i | \boldsymbol{w}^T(k), \boldsymbol{\psi}_n). \quad (51)$$

5.3 Iterative Optimierung - Zusammenfassung

- *Anfangswerte* für $\boldsymbol{\psi}$: $\boldsymbol{\psi}_0$ wird so gewählt, das die Diskriminantenfunktion die relevanten Trainingsdaten halbiert. Dadurch wird Robustheit gegenüber Ausreißern erreicht, da die Erzeugung von zwei neuen Modellen mit sehr unterschiedlichen Ausdehnungen verhindert wird.
- *Schritt 1*: Berechnung der a-posteriori Verteilungsfunktionen (31). Im ersten Iterationsschritt wird die Residuenverteilungsfunktion nicht berücksichtigt.
- *Schritt 2*: Optimierung der lokalen Modellparameter $\boldsymbol{\theta}_{1,2}$ der beiden neuen Modelle durch gewichtetes GTLS.
- *Schritt 3*: Neuberechnung von $\boldsymbol{\psi}$ mittels Levenberg-Marquardt Verfahren.
- *Wiederholung der Schritte 1-3* bis ein Abbruchkriterium erreicht wurde, z.B. $\|\boldsymbol{\psi}_n - \boldsymbol{\psi}_{n-1}\|_2 < \epsilon$.

5.4 Globale GTLS Residuenverteilung

Für jedes Klassifikationsproblems zwischen zwei lokalen Modellen erhält man die Ausgangsverteilung aus (28):

$$p(\boldsymbol{w}^T(k) | \boldsymbol{\psi}_n) = \sum_{i=1}^2 p(\boldsymbol{w}^T(k) | \eta_i, \boldsymbol{\psi}_n) p(\eta_i) \quad (52)$$

mit $p(\mathbf{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n)$ aus (32). Wenn anstatt der prior-Wahrscheinlichkeiten $p(\eta_i)$ nun $p(\eta_i|\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}_n) = \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}_n)$ eingesetzt wird, so erhält man

$$p(\mathbf{w}^T(k)|\boldsymbol{\psi}_n) = \sum_{i=1}^2 p(\mathbf{w}^T(k)|\eta_i, \boldsymbol{\psi}_n) \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\psi}_n). \quad (53)$$

Man sieht, dass (53) eine gewichtete Superposition von Residuenverteilungen (35) der beiden involvierten lokalen Modelle darstellt wobei die Summe der Gewichte genau eins beträgt. Bedenkt man, dass der Modellbaum (vgl. Abb. 1) sicherstellt, dass alle Knotenpunkte ebenfalls jeweils eine Gewichtssumme von eins haben, so kann (53) relativ einfach für alle lokalen Modelle dargestellt werden:

$$p(\mathbf{w}^T(k)) = \sum_{i=1}^L p(\mathbf{w}^T(k)|\eta_i) \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (54)$$

Der Gewichtsvektor $\boldsymbol{\psi}_n$ wurde in (54) weggelassen, da er sich nur auf jeweils zwei lokale Modelle und deren Partitionierung bezieht.

5.5 Globale Modellbeurteilung und Abbruchkriterium

Die Verteilung des GTLS Residuums (54) kann einerseits optisch durch ein Histogramm beurteilt werden (vgl. Abb. 2) andererseits wird sie auch als ein Maß dafür herangezogen, wann der iterative Teilungsalgorithmus aus Abschnitt 2 beendet werden kann.

Zu diesem Zweck wird nach jeder Erweiterung des Modellbaums ein Kolmogorov-Smirnov Test [9] auf das globale GTLS Residuum angewendet. Der Kolmogorov-Smirnov Test ist ein nicht-parameterischer Test und kann bei Bedarf auch auf andere als Gaussverteilungen angewendet werden.

Für die Residuenwerte r_i ($i = 1, \dots, N$) an den Trainingsdaten wird jeweils die kumulative Verteilung F_0 bestimmt:

$$F_0(r_i) = \int_{\zeta=-\infty}^{r_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta.$$

Nun wird die empirische Verteilungsfunktion F_N für das GTLS Residuum berechnet:

$$F_N(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{r_i \leq r}$$

wobei $\mathbf{1}_{r_i \leq r}$ die sogenannte Indikatorfunktion darstellt. Als Teststatistik wählt man nun

$$d_N = \sup ||F_N(x) - F_0(x)||.$$

Die Nullhypothese besagt, dass das globale GTLS Residuum Gaussverteilt ist. Sie wird mit dem Signifikanzlevel α abgelehnt, wenn

$$\sqrt{N}d_N > q_\alpha$$

wobei q_α das $(1 - \alpha)$ -Quantile der Kolmogorov-Smirnov Verteilung K bezeichnet: $P(K \leq q_\alpha) = 1 - \alpha$.

In diesem Fall ist eine weitere Teilung bzw. Verzweigung des Modellbaums notwendig. Das Signifikanzlevel α kann zum Ausgleich von Bias- und Varianzfehler im Modell herangezogen werden und dient damit der Vermeidung von Overfitting des globalen nichtlinearen Modells.

6 Simulationsbeispiel

Zur Beleuchtung des vorgestellten Identifikationsverfahrens wird ein Wiener-Prozess betrachtet. Dieser besteht aus einem linearen dynamischen Block in Serie mit einer statischen Nichtlinearität. Trotz dieser einfachen Struktur stellt die Identifikation von dynamischen Wienerprozessen eine Herausforderung dar, speziell dann, wenn die Nichtlinearität Sättigungscharakter aufweist, wie im folgenden Beispiel:

$$y(k) = \arctan[0.01867u(k-1) + 0.01746u(k-2) + 1.7826 \tan(y(k-1)) - 0.8187 \tan(y(k-2))]. \quad (55)$$

Für die Identifikation wurde der Ausgang $y(k)$ mit Gauss'schem Rauschen gestört ($\sigma_y = 0.02$), sodass der Regressor sowohl aus rauschfreien Eingängen also auch aus ver-rauschten Ausgängen zusammengesetzt wird.

Abb. 3 zeigt einen Vergleich des realen Prozesses anhand von Validierungsdaten mit nichtlinearen Modellbäumen, welche mit LS bzw. GTLS Parameterschätzung gewonnen wurden. Die Überlegenheit der GTLS Parameterschätzung und der darauf aufbauenden Modellpartitionierung ist besonders bei starken Transienten sichtbar, welche durch den Sättigungscharakter des Prozesses besonders schwer identifizierbar sind.

Aber auch die Stationärgenauigkeit des identifizierten Modells erweist sich als wesentlich besser, wie in Abb. 4 ersichtlich wird. Ein quantitativer Vergleich beider Modelle ist in Tabelle 1 angegeben.

In diesem Beispiel wurde der Partition Space durch u_{k-1} und y_{k-1} aufgespannt und hat demnach die Dimension zwei. Die Unterscheidung zwischen den Größen des Partition Space und den tatsächlichen Eingängen der lokalen Modelle ist ein wesentlicher Vorteil der vorliegenden nichtlinearen Modellarchitektur und reduziert drastisch die Dimension der Parameteroptimierung. Abb. 5 zeigt, wie sich der Modellbaum im Partition Space entwickelt. Die sigmoide Line stellt das stationäre Gleichgewicht des nichtlinearen Prozesses dar. Der Vergleich zwischen LS und GTLS Verfahren zeigt, dass die passende Parameterschätzung auch auf die korrekte bzw. passende Partitionierung des nichtlinearen Prozesses einen signifikanten Einfluss hat.

Tabelle 1 zeigt die überlegene Präzision des GTLS-Algorithmus gegenüber LS anhand von Trainingsdaten, Validierungsdaten und Stationärdaten.

Es ist zu beachten, dass die Genauigkeit des nichtlinearen Gesamtmodells ein Produkt aus konsistenter Schätzung der lokalen Parameter durch GTLS und einer darauf aufbauenden Partitionierungsstrategie durch das GTLS-Residuum und den EM-Algorithmus darstellt. Die Wichtigkeit der passenden Partitionierung wird auch in Abb. 4 sichtbar,

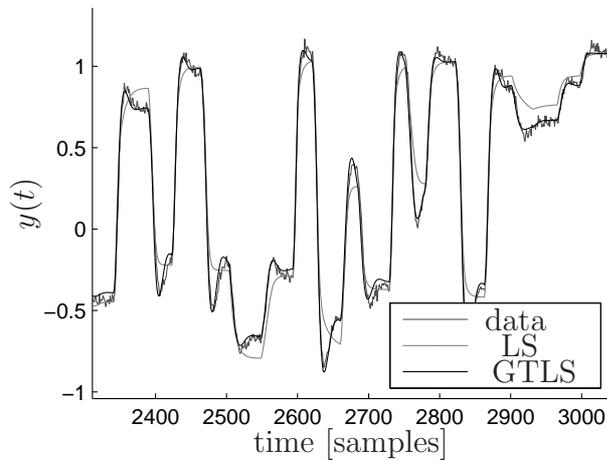


Abbildung 3: Wiener-Prozess: Vergleich des Prozessausgangs mit Modellen (LS, GTLS)

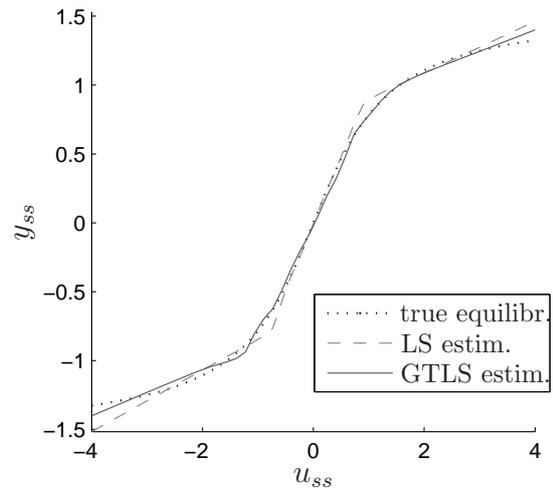


Abbildung 4: Wiener-Prozess: Wahre Gleichgewichtslinie im Vergleich mit Modellen (LS, GTLS)

Tabelle 1: Wiener-Prozess: Vergleich der Modelle aus LS und GTLS Parameterschätzung

Data	LS		GTLS	
	R^2	MSE	R^2	MSE
Identifikation	0.97264	0.016638	0.99227	0.004699
Validierung	0.98204	0.009219	0.99500	0.002568
Steady-state	0.99559	0.004773	0.99893	0.001153

wo die Knicke in der Gleichgewichtslinie des LS-Modells offensichtlich durch eine ungünstige Partitionierungsstrategie hervorgerufen werden (vgl. dazu Abb. 5).

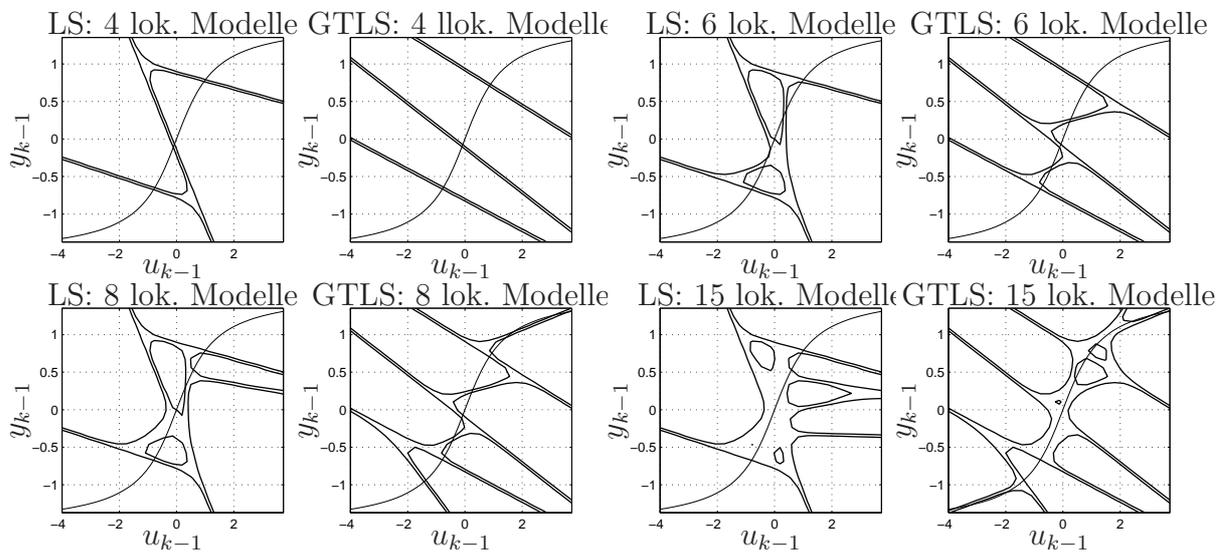


Abbildung 5: Wiener-Prozess: Entwicklung des Modellbaums basierend auf LS bzw. GTLS Parameterschätzung

7 Anwendungsbeispiel

Dieser Abschnitt beschreibt eine Anwendung auf einen Großgasmotor und zeigt die Einsatzmöglichkeiten des vorgestellten nichtlinearen Identifikationsalgorithmus in komplexen realen Anlagen.

7.1 Prozessbeschreibung

Bei dem betrachteten Prozess handelt es sich um einen einem turboaufgeladenen Großgasmotor der Firma GE-Jenbacher. Die Motoren liefern Nennleistungen von 300kW bis 3MW, werden zur Erzeugung von elektrischer Energie und Fernwärme eingesetzt und können mit einer großen Anzahl unterschiedlicher Biogase, Erdgas oder Industrieabgas betrieben werden.

Abb. 6 zeigt ein Prozessschaubild des Motors. Für die Online-Diagnose des Motors ist es besonders wichtig, die Abgastemperatur T_3 genau zu überwachen, da sie ein unmittelbares Maß für den emissionsarmen Betrieb des Motors darstellt. Online- NO_x -Emissionsmessung steht bei Serienmotoren üblicherweise nicht zur Verfügung. Im Temperaturband $T_3 = 470 - 490 \text{ }^\circ\text{C}$ werden gute Wirkungsgrade bei gleichzeitig niedriger NO_x -Emission erzielt. Ein gesetzmäßiger und wirtschaftlicher Motordauerbetrieb ist bei diesem Motor daher nur innerhalb dieses Abgastemperaturbereiches möglich.

7.2 Modellierung

Die Anregung des Motors zur Identifikation der Temperatur T_3 erfolgte durch die drei Variablen Generatorleistung (P_{El}), Gemischkonzentration (c_{Gas}) und Zündzeitpunkt (ZZP).

Die Wahl der Modellstruktur erfolgte anhand von Messdaten, die aus Voridentifikationen mit Einzelkanalanregung gewonnen wurden, sowie aus physikalischen Überlegungen. Die Temperatur T_3 reagiert mit unterschiedlich schnellem Ansprechverhalten erster Ordnung sowie mit unterschiedlichen Totzeiten auf die einzelnen Eingangskanäle. Die Reaktion auf Änderungen des ZZP ist z.B. wesentlich schneller als jene auf Laständerungen. Diesem Umstand muss durch eine minimale Systemordnung von drei Rechnung getragen werden, sodass die relevante Dynamik durch ein MISO-ARX-Modell abgebildet werden kann. Zur Wahl der passenden Systemordnung wurde weiters die Modellordnung schrittweise erhöht. Bei Verwendung eines Modells dritter Ordnung konnte jedoch bereits minimaler Generalisierungsfehler an den Validierungsdaten erzielt werden. Die unterschiedlichen Totzeiten der drei gewählten Eingänge wurden ebenfalls aus Sprungversuchen der Voridentifikation ermittelt und beim Aufbau des Regressors entsprechend berücksichtigt.

Die Intensität des Messrauschens in den drei Eingängen und im Ausgang ist stark unterschiedlich: $\sigma_{P_{El}} = 3.5$, $\sigma_{c_{Gas}} = 10^{-3}$, $\sigma_{ZZP} = 10^{-1}$ und $\sigma_{T_3} = 4 \cdot 10^{-2}$. Dabei ist zu beachten, dass sich die σ -Werte nach Normierung der Einzelkanäle auf den Wertebereich $[0; 1]$ fast um das Zehnfache unterscheiden, was den Einsatz des GTLS-Verfahrens rechtfertigt.

Die Anregung erfolgte über APRB-Signale, wobei Amplituden und Bandbreiten der Systemeingänge nach folgenden Gesichtspunkten gewählt wurden:

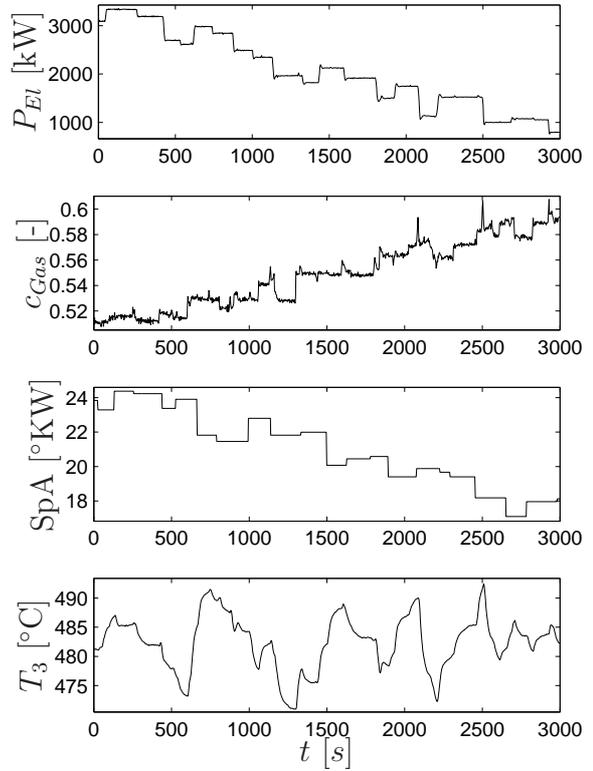
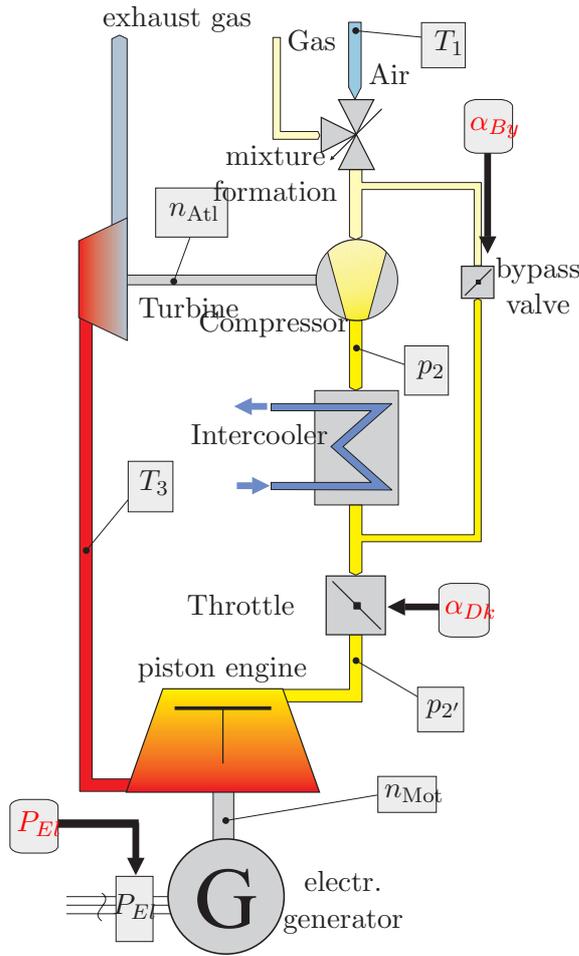


Abbildung 7: Trainingsdaten im Zeitbereich

Abbildung 6: Prozessschaubild eines GE-Jenbacher Gasmotors

Aus der Voridentifikation wurde die dominante Prozesszeitkonstante ermittelt. Die Bandbreite der einzelnen APRB-Signale wurde so gewählt, dass der Ausgleich dieser Zeitkonstanten bei Wirkung aller drei Eingänge bis auf etwa zehn Prozent zugelassen wurde.

Die maximalen Amplituden der Eingangssignale wurden prinzipiell so groß wie möglich gewählt. Die Limits ergeben sich einerseits aus den physikalischen Grenzen für die Zündung des Gas-Luft-Gemisches, da der Motor im Magerbetrieb ($\lambda \approx 1.8$) läuft und andererseits durch die geforderte Klopfestigkeit. Eine simultane Laststeigerung von Leerlauf bis Maximallast garantiert letztlich die Erfassung des gesamten zulässigen Betriebsbereichs des Gasmotors.

Abb. 7 zeigt die Trainingsdaten und das resultierende Ausgangssignal. Es ist zu beachten, dass für den Zündzeitpunkt (ZZP) im Gegensatz zu den restlichen Signalen der Sollwert dargestellt wurde.

Für die Partitionierung der lokalen Modelle wurden die Generatorlast $u_{\Phi,1}(k) = P_{El}(k-1)$ und die Abgastemperatur $u_{\Phi,2}(k) = T_3(k-1)$ gewählt. Der Partitionie-

rungsraum wird idealerweise durch jene Größen aufgespannt, welche die maßgebliche Nichtlinearität des Systems enthalten. Die Motorlast, und damit der Betriebspunkt des Abgasturboladers, hat einen stark nichtlinearen Einfluss auf das Systemverhalten. Nachdem die Turboladerdrehzahl n_{Atl} beim Serienmodell nicht gemessen wird, stellt P_{El} die erste relevante Größe für den Partitionierungsraum dar.

Die Wahl der Ausgangsgröße T_3 als weitere Partitionierungsachse hat folgende Gründe: Es besteht eine wesentliche Nichtlinearität in der Wirkung der Eingänge auf die Abgastemperatur in Abhängigkeit von den Verbrennungsbedingungen, welche aber durch T_3 gut charakterisiert sind. Wie in [7] dargestellt wird, ist die Hinzunahme des Ausgangs in den Partitionierungsraum auch für die Unterscheidung von lokalen Gleichgewichtsmodellen („equilibrium models“) und transienten Modellen („off-equilibrium models“) wichtig.

7.3 Diskussion

Abb. 8 zeigt die Gültigkeitsfunktionen der lokalen Modelle im oben beschriebenen Partitionierungsraum sowie einige Stationärpunkte. Die Form und Ausdehnung der einzelnen lokalen Modelle geben Aufschluss über den stark nichtlinearen Einfluss sowohl von T_3 als auch P_{El} .

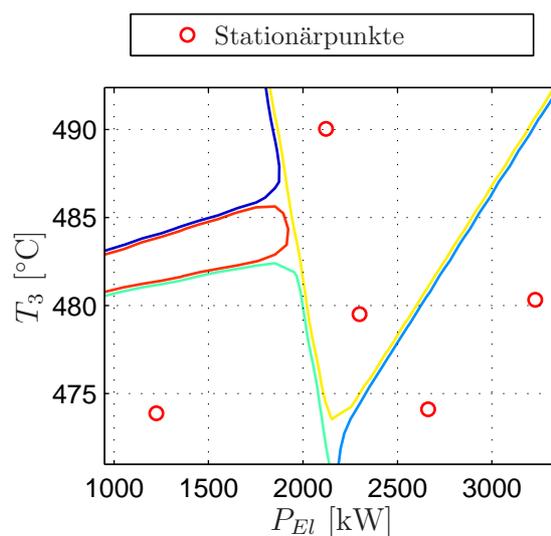


Abbildung 8: Zugehörigkeitsfunktionen und Stationärpunkte (SP) im Partitionierungsraum

Tabelle 2 beleuchtet die Performance des nichtlinearen Gesamtmodells unter Einsatz des GTLS-Verfahrens. Es ist zu erkennen, dass der RMSE für die Prädiktion der Identifikationsdaten über σ_{T_3} liegt, was eine notwendige Bedingung für eine gute Generalisierungsfähigkeit ist. Tabelle 3 zeigt im Vergleich dazu die Resultate eines Modells, bei dem die lokalen Modellparameter herkömmlich mit Least Squares bestimmt wurden. Es fällt auf, dass dieses Modell sowohl bei Prädiktion als auch bei Simulation an den *Trainingsdaten* bessere Werte liefert, als das GTLS-Modell, während es sich bei den Validierungsdaten umgekehrt verhält. Dieses Merkmal ist darauf zurückzuführen, dass die

Bestimmung der Modellparameter mittels LS auf die Minimierung des Prädiktionsfehlers der Trainingsdaten abzielt. Bei der Generalisierung mit Validierungsdaten zeigt GTLS dafür einen wesentlich geringeren Fehler. Dies ist auch deutlich in Abb. 9 zu sehen, wo die Autokorrelationsfunktionen der Prädiktionsfehler beider Modelle dargestellt sind.

Mode	Daten aus:	
	Identifikation	Validierung
prediction	0.0513	0.0553
simulation	0.2312	0.4920

Tabelle 2: Root Mean Squared Error (RMSE) in $^{\circ}C$ für das GTLS-Modell

Mode	Daten aus:	
	Identifikation	Validierung
prediction	0.0490	0.0812
simulation	0.2170	0.7856

Tabelle 3: Root Mean Squared Error (RMSE) in $^{\circ}C$ für LS-Modell

8 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur nichtlinearen Systemidentifikation basierend auf lokalen Modellnetzwerken und Generalised Total Least Squares (GTLS) Methoden beschrieben. Die vorgestellte GTLS-Methodik kann bei beliebigen Kombinationen von verrauschten bzw. unverrauschten Ein- und Ausgängen konsistente Parameterschätzungen liefern. Als Sonderfälle treten das LS-Verfahren und das TLS-Verfahren auf. Weiters wird ein GTLS-Residuum definiert und dessen Verteilungsdichte abgeleitet. Das GTLS-Residuum liefert statistische Informationen über den Modellfehler und den Anteil von Bias- bzw. Varianzfehler, welche für die Partitionierung der Gültigkeitsbereiche der lokalen Modelle eingesetzt wird. Die Partitionierung basiert auf einer Maximum-Likelihood-Schätzung *aller* Parameter und wird rekursiv durch Expectation-Maximisation-Verfahren (EM) realisiert. Die Genauigkeit, Stabilität und Extrapolationsfähigkeit des nichtlinearen Gesamtmodells stellt damit eine Kombination aus konsistenter Parameterschätzung für lokale Modelle und passender Partitionierungsstrategie dar. Die Anwendbarkeit und Vorteile der Modellarchitektur und des Identifikationsverfahrens wurden anhand eines Simulationsbeispiels und anhand des Abgastemperaturmodells eines aufgeladenen Großgasmotors dargestellt.

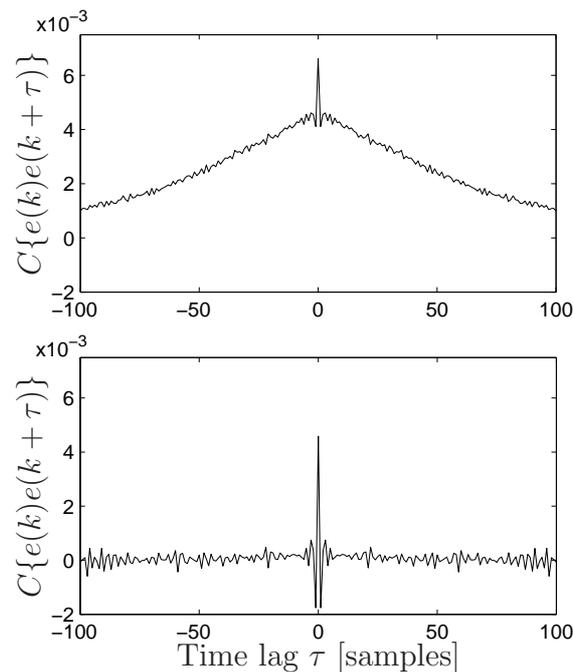


Abbildung 9: Autokorrelationsfunktion des Prädiktionsfehlers von LS (oben) und GTLS(unten)

Literatur

- [1] J. Abonyi, R. Babuska, and F. Szeifert. Modified Gath-Geva Fuzzy Clustering for Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models. In *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, volume 32, pages 612–621. IEEE, 2002.
- [2] C. Hametner, S. Jakubek. Neuro-Fuzzy Modeling Using a Logistic Discriminant Tree. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, June 2007.
- [3] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum Likelihood From Incomplete Data Via The EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1):1–38, 1977.
- [4] G. Golub and C. V. Loan. An analysis of the Total Least Squares problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17(3):883–893, 1980.
- [5] Sabine Van Huffel and Hongyuan Zha. The Restricted Total Least Squares Problem: Formulation, Algorithm, and Properties. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 12(2):292–309, 1991.
- [6] S. Jakubek and N. Keuth. A Local Neuro-Fuzzy Network for High-Dimensional Models and Optimisation. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 19:705–717, September 2006.

- [7] T. A. Johansen, R. Shorten, and R. Murray-Smith. On the Interpretation and Identification of Dynamic Takagi-Sugeno Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3):297–313, 2000.
- [8] I. Markovsky, J. Willems, S. Van Huffel, B. De Moor, and R. Pintelon. Application of Structured Total Least Squares for System Identification and Model Reduction. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 50:1490–1500, October 2005.
- [9] Frank J. Massey. The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. In *Journal of the American Statistical Association*, volume 46, pages 68 – 78, 1951.
- [10] Arvind Nayak, Emanuele Trucco, and Neil A. Thacker. When are Simple LS Estimators Enough? An Empirical Study of LS, TLS, and GTLS. *Int. J. Comput. Vision*, 68(2):203–216, 2006.
- [11] O. Nelles. *Nonlinear System Identification*. Springer Verlag, 1st edition, 2002.
- [12] Christopher C. Paige and Musheng Wei. Analysis of the generalized Total Least Squares Problem $AX = B$ when some columns of A are free of error. *Numerical Mathematics*, 65:177–202, 1993.
- [13] Sergios Theodoridis and Konstantinos Koutroumbas. *Pattern Recognition*. Academic Press, San Diego, CA, USA, 1999.
- [14] S. Van Huffel and Vandewalle J. Analysis and Properties of the generalized Total Least Squares Problem $AX = B$ when some or all columns of A are subject to Error. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 10(3):294 – 315, 1989.

Adaptive Lastdruckregelung für eine eigenversorgte Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise

W. Kemmetmüller⁺, A. Kugi⁺, F. Fuchshumer⁺⁺

⁺ TU Wien, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik,
Gusshausstr. 27-29, 1040 Wien

⁺⁺ Hydac Electronic GmbH, Hauptstr. 27, 66128 Saarbrücken
kemmetmueller@acin.tuwien.ac.at*, kugi@acin.tuwien.ac.at

Zusammenfassung

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Regelung des Lastdrucks eines unbekanntes und sich schnell ändernden Lastsystems mit Hilfe einer eigenversorgten Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise. Im ersten Schritt wird dazu ein mathematisches Modell erstellt, welches die wesentlichen (nichtlinearen) Eigenschaften des Systems abbildet. Hier zeigt sich, dass aufgrund der Eigenversorgung der Pumpe die Differentialgleichungen eine geschaltete Struktur aufweisen, was den Reglerentwurf erschwert. Zur Lösung der Regelungsaufgabe wird in dieser Arbeit eine Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden, bestehend aus einer Vorsteuerung und einer Rückführung, verwendet. Um den Einfluss der schnell veränderlichen Last zu berücksichtigen, wird die Regelungsstrategie um eine Lastschätzung erweitert. Der Nachweis der Stabilität des gesamten, geschalteten Systems basiert dabei auf der Lyapunov-Theorie. Die den Betrachtungen zugrundeliegende Anwendung ist eine Spritzgussmaschine, bei der die Förderschnecke mit Hilfe eines Hydraulikzylinders bewegt wird. Dieser Zylinder wird über den von der Axialkolbenpumpe gelieferten Volumenstrom aktuiert. Im praktischen Betrieb der Spritzgussmaschine treten zwei Betriebsfälle auf: (i) Bewegung der Förderschnecke mit konstanter Geschwindigkeit, was einer Volumenstromregelung der Pumpe entspricht, und (ii) die Regelung des Drucks im Hydraulikzylinder, was einer Lastdruckregelung entspricht. Das schnelle Umschalten zwischen den beiden Betriebsfällen in Abhängigkeit des Lastdrucks stellt dabei eine besondere Herausforderung dieser Anwendung dar. Daher wird die Lastdruckregelung in dieser Anwendung um eine Umschaltstrategie erweitert, welche ein gezieltes Umschalten zwischen den beiden Betriebsfällen erlaubt. Die Eigenschaften und die Güte des gesamten Regelungskonzeptes werden anhand von umfangreichen Simulationen sowie anhand von Messungen an einem experimentellen Aufbau nachgewiesen. Die Ergebnisse zeigen dabei ein ausgezeichnetes und robustes Verhalten, welches eine Verbesserung im Vergleich zu aktuellen, industriell verwendeten Regelungsstrategien darstellt.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

1 Einleitung

Aufgrund ihrer im Vergleich zu elektrischen bzw. mechanischen Antrieben sehr hohen Energiedichte sind elektrohydraulische Systeme in Industrieanlagen und mobilen Arbeitsmaschinen, wie z.B. Baggern, Kränen usw., weit verbreitet. Ein Nachteil von elektrohydraulischen Systemen ist jedoch ihre im Allgemeinen sehr geringe energetische Effizienz. Konventionelle hydraulische Versorgungen erzeugen unabhängig von den aktuellen Anforderungen der Last entweder einen konstanten Druck oder einen konstanten Volumenstrom. Daher tritt eine extrem schlechte energetische Effizienz des Gesamtsystems immer dann auf, wenn die Last keine oder nur wenig Energie benötigt. Die in den letzten Jahren immer weiter gestiegenen Anforderungen an die energetische Effizienz von hydraulischen Systemen erfordert daher die Implementierung von hydraulischen Versorgungen, welche an die aktuellen Anforderungen der Last angepasst werden können (load-sensing), siehe z.B. [21, 5]. Im Wesentlichen können dabei zwei grundsätzliche Ansätze für die Einstellung des Volumenstroms der hydraulischen Versorgung unterschieden werden.

Wird eine Pumpe mit konstanter Verdrängung verwendet, so kann die Drehzahl der Pumpe zur Veränderung des Ausgangsvolumenstroms benutzt werden. In vielen Anwendungen wird die Pumpe mit Hilfe eines Elektromotors angetrieben, was eine einfache Regelung der Drehzahl erlaubt. Allerdings ist die damit erzielbare Dynamik begrenzt, sodass die Anforderungen vieler Anwendungen mit diesem Konzept nicht erreicht werden können. Dieses Problem tritt natürlich verstärkt auf, wenn die Pumpe von einem Verbrennungsmotor angetrieben wird.

Die zweite Möglichkeit zur Regelung des Volumenstroms besteht in der Änderung der Verdrängung der Pumpe. In diesem Zusammenhang werden häufig Axialkolbenpumpen in Schwenkscheibenbauweise verwendet, wobei die Verdrängung und damit der Ausgangsvolumenstrom der Pumpe durch Verdrehen der Schwenkscheibe geändert werden kann. Diese Verschwenkung kann sehr rasch erfolgen, womit die Anforderungen an die Dynamik für viele Anwendungen erreicht werden können.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Regelung eines elektrohydraulischen Systems bestehend aus einer Axialkolbenpumpe in Schrägscheibenbauweise und einer veränderlichen Last. Als wesentliche Regelungsaufgabe wird dabei die Regelung des Drucks an der Last behandelt. Typischerweise werden lineare Regelungsstrategien für solche Anwendungen verwendet [8, 21]. Elektrohydraulische Systeme weisen jedoch ein signifikant nichtlineares Verhalten auf, womit die Regelgüte von solchen linearen Regelungsstrategien meist begrenzt ist. Weiterhin fehlt im Allgemeinen ein systematischer Stabilitätsbeweis und es zeigt sich, dass das Einstellen der Parameter der Regler zeitaufwändig sein kann. In dieser Arbeit wird daher eine neue modellbasierte nichtlineare Regelungsstrategie entwickelt, welche einerseits die wesentlichen Nichtlinearitäten des Systems berücksichtigt und andererseits sehr einfach auf beliebige Baugrößen von Axialkolbenpumpen der gleichen Bauform übertragen werden kann.

Ein grundsätzliches Problem beim Entwurf eines load-sensing Systems ist es, die aktuellen Anforderungen der Last zu ermitteln, da die Last im Allgemeinen weder bekannt ist noch gemessen werden kann. Diese Problematik tritt auch in der dieser Arbeit zugrundeliegenden Anwendung auf, wobei hier die Last nicht nur unbekannt ist, sondern

sich auch sehr schnell ändern kann. Um die Regelungsaufgabe zu lösen wird daher die nichtlineare Regelungsstrategie um eine Schätzung der Last erweitert. Der Entwurf der Schätzung erweist sich insofern als schwierig, da bekanntermaßen das Separationsprinzip des Regler- und Beobachterentwurfs nicht auf nichtlineare Systeme angewandt werden kann. In dieser Arbeit wird daher die Stabilität des Gesamtsystems, bestehend aus der nichtlinearen Regelung, der (nichtlinearen) Lastschätzung und dem Modell des Systems, mit Hilfe der Lyapunov-Theorie nachgewiesen.

Um die hohen Anforderungen sowohl an das Folgeverhalten sowie an die Robustheit des geschlossenen Regelkreises zu erfüllen, wird in dieser Arbeit eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung, bestehend aus einer Vorsteuerung und einer Rückführung (Regelung), verwendet. Der Reglerentwurf wird dadurch erschwert, dass die Axialkolbenpumpe eigenversorgt ist, d.h. der zum Verschwenken der Schwenkscheibe notwendige Volumenstrom wird vom Ausgangsvolumenstrom der Pumpe entnommen. Dies führt dazu, wie später noch gezeigt wird, dass das resultierende mathematische Modell einen schaltenden Charakter aufweist. Aus der Literatur ist bekannt, dass der Reglerentwurf und der Nachweis der Stabilität für schaltende Systeme eine große Herausforderung darstellt [2, 3, 4, 15].

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im nächsten Abschnitt wird das betrachtete elektrohydraulische System genauer beschrieben und ein kurzer Überblick über die mathematische Modellierung sowie eine genaue Definition der Regelungsaufgaben vorgestellt. Der Abschnitt 3 ist dem Entwurf eines Lastdruckreglers gewidmet. In Abschnitt 4 wird dieser Lastdruckregler um eine Schätzung der unbekanntenen Last erweitert, wobei sowohl ein einfacher als auch ein erweiterter Schätzer untersucht werden. Die Volumenstromregelung und eine Umschaltstrategie zwischen Volumenstrom- und Lastdruckregelung wird in Abschnitt 5 dieser Arbeit behandelt. Schließlich werden die Eigenschaften und die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Regelungsstrategie anhand von Simulations- und Messergebnissen in Abschnitt 6 demonstriert.

2 Mathematische Modellierung und Definition der Regelungsaufgabe

Die betrachtete Axialkolbenpumpe wird in Spritzgussmaschinen eingesetzt, wo flüssiger Kunststoff mithilfe einer Förderschnecke in die Gussform eingespritzt wird, siehe Abb. 1. Die Verschiebung der Förderschnecke erfolgt mit Hilfe eines Hydraulikzylinders, welcher wiederum durch eine Axialkolbenpumpe angesteuert wird. Der Einspritzprozess einer Spritzgussmaschine kann in die folgenden zwei Phasen eingeteilt werden:

- i. In der ersten Phase wird die Gussform mit flüssigem Kunststoff gefüllt. Dazu muss die Förderschnecke und damit der Hydraulikzylinder mit konstanter Geschwindigkeit verfahren werden. Das bedeutet, dass die Axialkolbenpumpe einen annähernd konstanten Volumenstrom zur Verfügung stellen muss.
- ii. In der zweiten sogenannten Nachdrückphase ist die Gussform bereits gefüllt. Um jedoch das Schrumpfen des Kunststoffes während des Abkühlens zu kompensieren

muss in dieser Phase flüssiger Kunststoff mit konstantem Druck nachgefördert werden. Daher muss in dieser Phase der Druck im Hydraulikzylinder (Lastdruck) mit Hilfe der Axialkolbenpumpe geregelt werden.

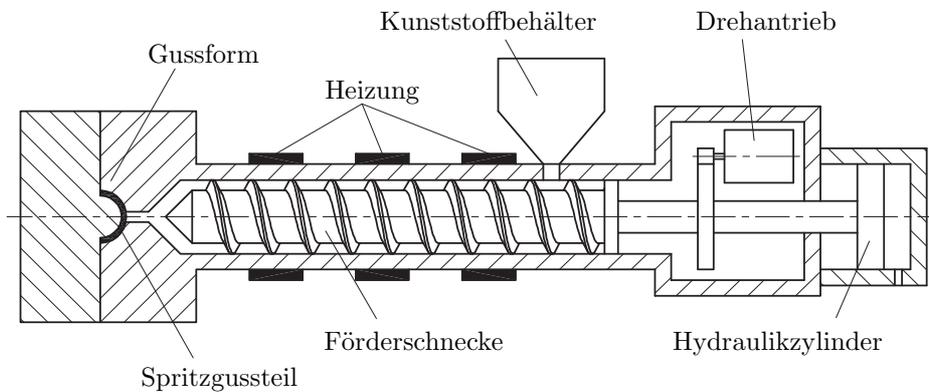


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau einer Spritzgussmaschine.

Die Lösung der Regelungsaufgabe für die erste Phase erweist sich als relativ einfach, da der Volumenstrom q_p der Pumpe proportional zum Schwenkwinkel φ_p ist. Weiterhin sind die Anforderungen an die Genauigkeit während dieser Phase relativ gering. Es zeigt sich, dass ein einfacher linearer Regler für den Schwenkwinkel zu einer ausreichenden Dynamik und Genauigkeit führt [7]. Die Regelung des Drucks im Hydraulikzylinder erweist sich hingegen als eine wesentlich schwierigere Aufgabenstellung, da (i) sehr hohe Anforderungen an die Genauigkeit und die Dynamik des Lastdrucks gestellt werden und (ii) sich die Charakteristik der Last sehr stark und sehr schnell verändern kann. Der Reglerentwurf wird weiterhin durch die Eigenversorgung der Pumpe erschwert. Dies bedeutet, dass der zum Verschwenken der Pumpe notwendige Volumenstrom direkt vom Volumenstrom q_p der Pumpe abgezweigt wird, siehe Abb. 3. Dies führt auch, wie später gezeigt wird, zum schaltenden Charakter des mathematischen Modells.

Die Umschaltung zwischen der Volumenstrom- und der Druckregelung basiert auf der Messung des Lastdrucks. Wie bereits erwähnt, wird in der ersten Phase Kunststoff mit konstanter Geschwindigkeit in die Gussform eingespritzt. Ist die Gussform vollständig gefüllt, so führt dies zu einem rapiden Anstieg des Lastdrucks. In diesem Fall muss auf Druckregelung umgeschaltet werden und der Lastdruck auf einen vorgegebenen Wert geregelt werden. Dies soll natürlich möglichst schnell und ohne Überschwingen erfolgen. Daher stellt eine geeignete Umschaltstrategie einen weiteren wichtigen Teil der gesamten Regelungsstrategie dar.

In Abb. 2 ist eine Prinzipskizze der verwendeten Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise dargestellt. Die betrachtete Pumpe besteht aus 9 Kolben, welche in einer rotierenden Trommel angeordnet sind. Diese Trommel wird über eine Asynchronmaschine angetrieben und rotiert mit der beinahe konstanten Drehwinkelgeschwindigkeit ω_p . Die Trommel wird gegen eine stillstehende Ventilplatte gedrückt, welche die Kolben abwechselnd mit Tank- bzw. Versorgungsdruck verbindet. Die Kolben werden wiederum

mit Hilfe von Gleitschuhen an der Schwenkscheibe gehalten. Ein Verschenken (Winkel φ_p) der Schwenkscheibe erzeugt eine zyklische axiale Verschiebung der Kolben während sich die Trommel dreht. Damit wird Öl vom Tank über den Einlassanschluss angesaugt und über den Auslassanschluss an die Last abgegeben. Der Volumenstrom q_p der Pumpe kann kontinuierlich durch Änderung des Schwenkwinkels φ_p angepasst werden.

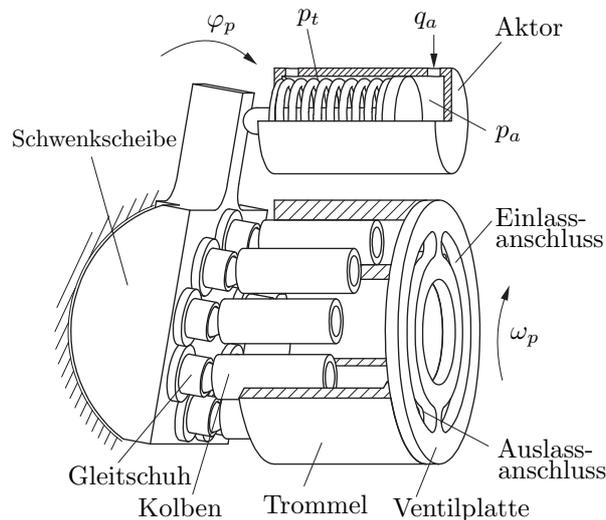


Abbildung 2: Prinzipskizze des Aufbaus der Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise.

In Abb. 3 ist das hydraulische Ersatzschaltbild des experimentellen Aufbaus dargestellt. Dieser besteht aus der Axialkolbenpumpe, welche den Volumenstrom q_p in das Lastvolumen V_l fördert. Das Lastvolumen ist über eine veränderliche Lastdrossel mit dem Tank (Tankdruck p_t) verbunden. Zum Ändern des Volumenstroms q_p der Pumpe muss der Schwenkwinkel φ_p angepasst werden. Dazu wird ein einfach wirkender Hydraulikzylinder verwendet, wobei die Rückstellung mit Hilfe einer Rückstellfeder erfolgt. Mithilfe des von einem 3/3 Proportionalwegeventil geregelten Volumenstroms q_a kann der Druck p_a im Hydraulikzylinder angepasst werden. Wie in Abb. 3 dargestellt, ist die Pumpe eigenversorgt, d.h. das Proportionalwegeventil wird vom Lastdruck p_l versorgt. Natürlich werden nur positive Volumenströme q_a von der Last entnommen, während negative Volumenströme direkt in den Tank abgelassen werden. Der gewählte experimentelle Aufbau entspricht dabei nicht genau jenem einer Spritzgussmaschine. Dieser experimentelle Aufbau erlaubt es jedoch auf sehr einfache Art alle wesentlichen Betriebsfälle einer Spritzgussmaschine unter genau definierten Bedingungen nachzubilden.

Es existiert eine Vielzahl von Arbeiten, welche sich mit der Modellierung von elektrohydraulischen Systemen beschäftigt, siehe z.B. [1], [19] und [18] für einen Überblick. Insbesondere sind viele Arbeiten vorhanden, welche einer genauen mathematischen Beschreibung von Axialkolbenpumpen gewidmet sind [17, 16, 11, 5]. Es zeigt sich jedoch, dass diese detaillierten mathematischen Modelle, welche viele dynamische Effekte einer Axialkolbenpumpe nachbilden, äußerst komplex und daher nicht direkt für den Reglerentwurf geeignet sind. In einer früheren Arbeit [7] wurde daher basierend auf der singulären

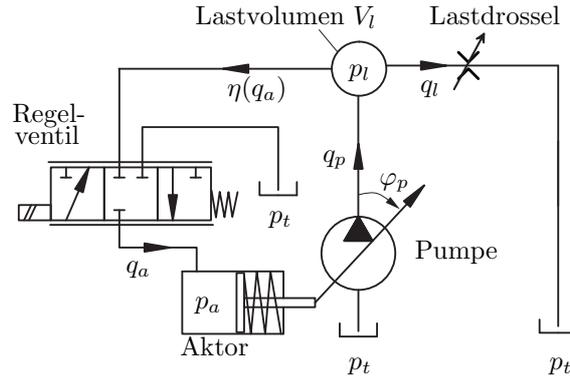


Abbildung 3: Hydraulisches Ersatzschaltbild des betrachteten Systems.

Störtheorie eine systematische Vereinfachung der Komplexität des mathematischen Modells durchgeführt. Das resultierende Modell, welches auch die Grundlage der späteren Reglerentwürfe darstellt, ist dann durch

$$\frac{d}{dt}\varphi_p = -\frac{q_a}{A_a r_a} \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dt}p_l = \frac{\beta}{V_l} (k_p \varphi_p - k_l \sqrt{p_l} - \eta(q_a)) \quad (1b)$$

gegeben, wobei φ_p den Schwenkwinkel darstellt, p_l der Lastdruck ist und q_a den Volumenstrom in den Aktor beschreibt. Die effektive Fläche des Aktors wird mit A_a und der effektive Radius mit r_a bezeichnet. Weiterhin sind β der Kompressionsmodul des Öls, V_l das Lastvolumen und k_l der unbekannte Koeffizient der Lastdrossel (Lastkoeffizient). Die Funktion $\eta(q_a)$ beschreibt den Volumenstrom, welcher von der Last zum Verschwenken der Schwenkscheibe abgezweigt wird

$$\eta(q_a) = \begin{cases} q_a & \text{für } q_a > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Schließlich ist q_p der Volumenstrom der Pumpe, welcher in der Form $q_p = k_p \varphi_p$ mit dem Pumpenkoeffizienten

$$k_p = \frac{n_p A_p r_p \omega_p}{\pi} \quad (3)$$

dargestellt werden kann. Dabei beschreibt n_p die Anzahl der Kolben der Pumpe, A_p die effektive Querschnittsfläche eines Kolben, r_p den effektiven Radius der Rotation der Kolben und ω_p die konstante Drehwinkelgeschwindigkeit der Trommel. Wie in [7] gezeigt wurde, beinhaltet dieses stark vereinfachte mathematische Modell alle wesentlichen (nichtlinearen) Eigenschaften des realen Systems und dient daher als Basis für den folgenden Reglerentwurf.

Bemerkung 1 *Im Folgenden wird angenommen, dass der Volumenstrom q_a in den Aktor als (virtuelle) Stellgröße zur Verfügung steht. In der Realität kann natürlich nur die*

Ventilposition vorgegeben werden. Andererseits ist im System eine Servokompensation eingebaut, welche die Ventilkolbenposition s_v so ermittelt, dass der benötigte Aktorvolumenstrom q_a erzielt wird. Genauere Information zu diesem Thema werden in Abschnitt 6 gegeben.

Die Regelungsaufgaben für das System können nun wie folgt zusammengefasst werden: Ausgehend vom (nichtlinearen) mathematischen Modell des Systems (1), (2) soll eine Regelungsstrategie entwickelt werden, welche (i) den Volumenstrom in das Lastvolumen q_{lv} bzw. (ii) den Lastdruck p_l mithilfe der Stellgröße q_a entlang von gewünschten Trajektorien $q_{lv,d}(t)$ bzw. $p_{l,d}(t)$ ohne genaue Kenntnis der Last regelt. Der Reglerentwurf wird dabei durch die folgenden Tatsachen erschwert:

- Aus den Gleichungen (1), (2) ist ersichtlich, dass das mathematische Modell des Systems ein schaltendes System darstellt, da die rechte Seite sich in Abhängigkeit des Vorzeichens von q_a ändert. Daher sind viele klassische Methoden zum Nachweis der Stabilität und zum Entwurf von Reglern für nichtlineare Systeme nicht direkt anwendbar.
- Die Last (der Lastkoeffizient k_l) ist nicht nur unbekannt sondern kann sich in der realen Anwendung auch sehr schnell ändern.
- Der Regler muss robust gegen Modellungenauigkeiten und Messrauschen sein.

Schließlich ist der Entwurf einer geeigneten Umschaltstrategie ein wichtiger Teil der gesamten Regelungsstrategie.

3 Lastdruckregelung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem modellbasierten Entwurf einer Lastdruckregelung für das elektrohydraulische System (1), (2). Der Entwurf der Volumenstromregelung und der Umschaltstrategie erfolgt später in Abschnitt 5.

In dieser Arbeit wird eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung, bestehend aus einer Vorsteuerung und einer Rückführung, zur Lösung der Regelungsaufgabe verwendet. Um den Einfluss des unbekanntenen Lastkoeffizienten k_l zu berücksichtigen, wird die Lastdruckregelung in Abschnitt 4 um eine Schätzung für k_l erweitert.

Für die folgenden Überlegungen erweist es sich als zielführend, das geschaltete System (1), (2) formal in zwei Systeme aufzutrennen: System Σ^I , welches für $q_a \leq 0$ gültig ist,

$$\Sigma^I : \quad \frac{d}{dt} \varphi_p = -\frac{q_a}{A_a r_a} \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dt} p_l = \frac{\beta}{V_l} (k_p \varphi_p - k_l \sqrt{p_l}), \quad (4b)$$

und System Σ^{II} , welches für $q_a > 0$ gültig ist

$$\Sigma^{II} : \quad \frac{d}{dt} \varphi_p = -\frac{q_a}{A_a r_a} \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dt} p_l = \frac{\beta}{V_l} (k_p \varphi_p - k_l \sqrt{p_l} - q_a). \quad (5b)$$

3.1 Vorsteuerung

3.1.1 System Σ^I

Eine Analyse von (4) zeigt, dass das System Σ^I differentiell flach ist, wobei der Lastdruck p_l ein möglicher flacher Ausgang ist, siehe z.B. [6] für eine Einführung in das Konzept der differentiellen Flachheit. Ausgehend von einer mindestens zweifach stetig differenzierbaren Solltrajektorie $p_{l,d}$ des Lastdrucks erhält man mit (4b)

$$\dot{p}_{l,d} = \frac{\beta}{V_l} (k_p \varphi_{p,d} - k_l \sqrt{p_{l,d}}). \quad (6)$$

Um den Sollwert $\varphi_{p,d}$ des Schwenkwinkels aus (6) zu berechnen ist die Kenntnis des Lastkoeffizienten k_l notwendig. Um dieses Problem zunächst zu umgehen, wird in der Vorsteuerung eine Schätzung \hat{k}_l anstatt des realen Lastkoeffizienten k_l verwendet. Der Entwurf der Schätzung und der Nachweis der Stabilität des gesamten geschlossenen Kreises wird später behandelt. Vorerst wird nur die Existenz einer geeigneten Schätzung von k_l vorausgesetzt. Damit kann nun direkt der gewünschte Schwenkwinkel $\varphi_{p,d}$ in der Form

$$\varphi_{p,d} = \frac{1}{k_p} \left(\frac{V_l}{\beta} \dot{p}_{l,d} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} \right) \quad (7)$$

ermittelt werden. Die zweite zeitliche Ableitung des gewünschten Lastdrucks

$$\ddot{p}_{l,d} = \frac{\beta}{V_l} \left(-\frac{k_p}{A_a r_a} q_{a,d} - \frac{1}{2} \frac{\hat{k}_l}{\sqrt{p_{l,d}}} \dot{p}_{l,d} - \dot{\hat{k}}_l \sqrt{p_{l,d}} \right) \quad (8)$$

beinhaltet schließlich den gewünschten Aktorvolumenstrom $q_{a,d}$. Damit ergibt sich die Vorsteuerung¹ für das System Σ^I in der Form

$$FF^I : \quad q_{a,d} = -\frac{A_a r_a}{k_p} \left(\frac{V_l}{\beta} \ddot{p}_{l,d} + \frac{1}{2} \frac{\hat{k}_l}{\sqrt{p_{l,d}}} \dot{p}_{l,d} + \dot{\hat{k}}_l \sqrt{p_{l,d}} \right). \quad (9)$$

3.1.2 System Σ^{II}

Im Gegensatz zum System Σ^I ist der Lastdruck p_l kein flacher Ausgang des Systems Σ^{II} . Es kann jedoch eine inversions-basierte Vorsteuerung für dieses System entwickelt werden. Dazu wird wiederum der gewünschte Lastdruck $p_{l,d}$ in (5b) verwendet

$$\dot{p}_{l,d} = \frac{\beta}{V_l} (k_p \varphi_{p,d} - k_l \sqrt{p_{l,d}} - q_{a,d}), \quad (10)$$

was direkt den gewünschten Volumenstrom $q_{a,d}$ für Σ^{II} ergibt. Damit folgt

$$FF^{II} : \quad q_{a,d} = -\frac{V_l}{\beta} \dot{p}_{l,d} + k_p \varphi_{p,d} - \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}}, \quad (11)$$

¹Im Folgenden werden die Vorsteuerungen für Σ^I und Σ^{II} mit FF^I bzw. FF^{II} bezeichnet.

wobei k_l wieder durch die Schätzung \hat{k}_l ersetzt wurde. Der zugehörige Schwenkwinkel $\varphi_{p,d}$ in (11) berechnet sich als Lösung der Differentialgleichung der inneren Dynamik

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p,d} = \frac{1}{A_a r_a} \left(-k_p \varphi_{p,d} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} + \frac{V_l}{\beta} \dot{p}_{l,d} \right). \quad (12)$$

Eine einfache Analyse zeigt, dass diese innere Dynamik exponentiell stabil ist.

3.2 Regelung

Um den Trajektorienfolgefehler im Fall von Parameterschwankungen oder Modellungenauigkeiten zu stabilisieren muss die im letzten Unterabschnitt entworfene Vorsteuerung um eine Regelung erweitert werden. Dazu wird der Fehler $e_p = p_l - p_{l,d}$ im Lastdruck und der Fehler $e_\varphi = \varphi_p - \varphi_{p,d}$ im Schwenkwinkel eingeführt. Wendet man die Vorsteuerung FF^I auf Σ^I an, so erhält man das Fehlersystem I für $q_a \leq 0$

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a} q_{a,c} \quad (13a)$$

$$\frac{d}{dt}e_p = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p e_\varphi - k_l \sqrt{e_p + p_{l,d}} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} \right), \quad (13b)$$

wobei $q_{a,c} = q_a - q_{a,d}$ den Regleranteil der Stellgröße q_a bezeichnet. Äquivalent ergibt die Anwendung von FF^{II} auf Σ^{II} für $q_a > 0$ das Fehlersystem II

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a} q_{a,c} \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dt}e_p = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p e_\varphi - k_l \sqrt{e_p + p_{l,d}} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} - q_{a,c} \right). \quad (14b)$$

Bevor nun ein Regler für das schaltende System (13), (14) entworfen wird, sollen einige wichtige Punkte der Stabilität von schaltenden Systemen diskutiert werden. Aus der Literatur ist hinreichend bekannt, dass ein schaltendes System instabil sein kann, selbst wenn jedes Teilsystem für sich stabil ist [2, 3, 4, 15]. Daher genügt es nicht, einen stabilisierenden Regler für jedes der beiden Fehlersysteme (13) und (14) getrennt zu entwerfen. Eine systematische Möglichkeit zum Nachweis der Stabilität von schaltenden Systemen wurde in [3] in Form der Methode der multiplen Lyapunov-Funktionen angegeben. Dabei muss die Stabilität jedes Teilsystems mit Hilfe einer eigenen Lyapunov-Funktion nachgewiesen werden und zusätzlich gezeigt werden, dass die Lyapunov-Funktion während des Schaltens monoton fallend ist. Während der Nachweis der ersten Bedingung häufig relativ systematisch erfolgen kann, erweist sich der Nachweis der zweiten Bedingung oft als schwierig. Eine Möglichkeit den Nachweis der zweiten Bedingung zu umgehen ist die Verwendung einer gemeinsamen Lyapunov-Funktion für alle Teilsysteme. Obwohl sich das Auffinden einer geeigneten Lyapunov-Funktion für das gesamte geschaltete System schwieriger gestaltet, wird im Folgenden dieser Ansatz verfolgt.

Es soll nun vorerst angenommen werden, dass eine gemeinsame Lyapunov-Funktion und Regler FB^I und FB^{II} für die Fehlersysteme I bzw. II so gefunden wurden, dass

die Stabilität jedes geschlossenen Regelkreises nachgewiesen werden kann.² Nun stellt sich die Frage, wie bzw. wann das gesamte Regelgesetz, bestehend aus der Vorsteuerung und der Rückführung, umgeschaltet wird. Ein intuitiver Ansatz wäre es, $FF^I + FB^I$ für $q_a \leq 0$ zu verwenden und $FF^{II} + FB^{II}$ für $q_a > 0$ einzusetzen.

In diesem Fall treten jedoch zwei wesentliche Probleme auf: Das Umschalten der Vorsteuerung FF^I und FF^{II} basierend auf $q_a = 0$ führt zu Unstetigkeiten im Sollwert des Schwenkwinkels $\varphi_{p,d}$ und damit im Fehler e_φ . Um dies klarer darzustellen, nehme man an, dass zu Beginn $q_a = q_{a,d} + q_{a,c} < 0$ gilt und damit FF^I und FB^I aktiv sind. Wenn der Volumenstrom q_a zum Zeitpunkt t_s einen Nulldurchgang aufweist, dann erfolgt ein Umschalten auf FF^{II} und FB^{II} . In diesem Fall wird die Anfangsbedingung $\varphi_{p,d}(t_s)$ der Differentialgleichung (12) auf den aktuellen Wert von $\varphi_{p,d}$ zum Zeitpunkt $t = t_s$ in FF^I nach (7) gesetzt und damit eine stetige Trajektorie gewährleistet.

Erfolgt andererseits zum Zeitpunkt $t = t_s$ ein Umschalten von $q_a > 0$ (d.h. FF^{II} und FB^{II} sind aktiv) auf FF^I und FB^I bei $q_a = 0$, dann muss der gewünschte Schwenkwinkel $\varphi_{p,d}$ folgende Bedingungen zum Umschaltzeitpunkt erfüllen

$$\varphi_{p,d} = \frac{1}{k_p} \left(\frac{V_l}{\beta} \dot{p}_{l,d} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} + q_{a,d} \right) \quad (15)$$

nach (11) für FF^{II} und

$$\varphi_{p,d} = \frac{1}{k_p} \left(\frac{V_l}{\beta} \dot{p}_{l,d} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} \right) \quad (16)$$

nach (7) für FF^I . Es gibt keinen Grund, dass $q_{a,d}$ zum Zeitpunkt $t = t_s$ verschwindet, da die Umschaltbedingung $q_a(t_s) = 0$ nur $q_{a,d}(t_s) = -q_{a,c}(t_s)$ bedingt. Daher führt das Umschalten des gesamten Reglers bei $q_a = 0$ zu Unstetigkeiten im Zeitverlauf von $\varphi_{p,d}$ und damit im Fehler e_φ . Die Ursache für dieses Verhalten ist die Änderung des relativen Grades des zu regelnden Ausgangs p_l zufolge des Umschaltens von Σ^I auf Σ^{II} , siehe z.B. [10] für mehr Informationen bezüglich des relativen Grades eines nichtlinearen Systems.

Zusätzlich tritt ein zweites Problem auf, welches aus der Umschaltbedingung $q_a = 0$ resultiert. Die Tatsache, dass $FF^I + FB^I$ zu $q_a = 0$ führt, impliziert nicht, dass auch $FF^{II} + FB^{II}$ zum gleichen Zeitpunkt $q_a = 0$ ergibt. Um das genauer darzustellen soll die Situation betrachtet werden, dass $q_a < 0$ gilt und damit FF^I und FB^I aktiv sind. Das Umschalten erfolgt nun, wenn die aus $FF^I + FB^I$ berechnete Stellgröße q_a einen Nulldurchgang aufweist. In diesem Fall kann jedoch die von $FF^{II} + FB^{II}$ berechnete Stellgröße q_a auch negativ sein, was zu einem sofortigen Zurückschalten auf FF^I und FB^I führt. Damit könnte eine Menge von Zuständen existieren, bei der weder FF^I und FB^I noch FF^{II} und FB^{II} gültig sind. Daraus resultiert (für perfektes Schalten) eine sogenannte sliding motion entlang der (sliding) Submannigfaltigkeit $q_a = 0$ von $FF^I + FB^I$.

Das erste Problem, d.h. die Unstetigkeit der Solltrajektorien, kann dadurch verhindert werden, dass die Vorsteuerung FF^I und FF^{II} unabhängig von der Rückführung FB^I und FB^{II} geschaltet wird. Zu diesem Zweck wird der Nulldurchgang der Stellgröße der

²Der eigentliche Reglerentwurf erfolgt im nächsten Teilabschnitt.

Vorsteuerung $q_{a,d}$ anstatt der gesamten Stellgröße q_a als Umschaltkriterium für die Vorsteuerung verwendet. Da $q_{a,d} = 0$ für FF^I und FF^{II} den gleichen Sollwert $\varphi_{p,d}$ für den Schwenkwinkel liefert, vgl. (15) und (16), kann mit dieser Schaltstrategie die Unstetigkeit der Solltrajektorien verhindert werden.

Die sliding motion des Regelungskonzeptes kann ebenfalls durch geeignetes Umschalten der Rückführung FB^I und FB^{II} verhindert werden. Im Gegensatz zur Vorsteuerung erweist sich jedoch hier das Finden einer geeigneten Umschaltstrategie als schwierigere Aufgabe, da die Rückführung eine beliebige nichtlineare Funktion der Zustände e_p und e_φ sein kann. Weiterhin macht das unabhängige Schalten der Vorsteuerung und der Rückführung den Nachweis der Stabilität für alle 8 möglichen Kombinationen aus Vorsteuerung (FF^I , FF^{II}), Rückführung (FB^I , FB^{II}) und System (Σ^I , Σ^{II}) mit einer gemeinsamen Lyapunov-Funktion notwendig. Um den weiteren Reglerentwurf zu vereinfachen wird in dieser Arbeit eine gemeinsame Rückführung $FB^I = FB^{II}$ verwendet.

Die weitere Vorgehensweise beim Entwurf der Regelung ist wie folgt: Zuerst wird ein Regler und eine Lyapunov-Funktion (CLF) für das Fehlersystem (13), welches aus der Anwendung von FF^I auf Σ^I resultiert, entwickelt. Anschließend wird die Stabilität des geschlossenen Kreises für die anderen drei möglichen Kombinationen aus Vorsteuerung und System (FF^{II} , Σ^{II}), (FF^I , Σ^{II}) und (FF^{II} , Σ^I) mit Hilfe dieser gemeinsamen Lyapunov-Funktion nachgewiesen. Dies impliziert dann natürlich die Stabilität des gesamten schaltenden geschlossenen Regelkreises.

3.2.1 Vorsteuerung FF^I mit System Σ^I

Wendet man die Vorsteuerung FF^I auf das System Σ^I an, so erhält man das Fehlersystem (13). Für den Reglerentwurf wird vorerst angenommen, dass die Schätzung \hat{k}_l des Lastkoeffizienten exakt dem wahren Wert k_l entspricht (certainty equivalence condition, siehe z.B. [12]). Der Entwurf der Schätzung sowie der Nachweis der Stabilität des Gesamtsystems bestehend aus Vorsteuerung, Regelung und Schätzung wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Als Ausgangspunkt wird die positiv definite Funktion W_c

$$W_c = \frac{1}{2}\delta_1 e_p^2 + \frac{1}{2}\delta_2 e_\varphi^2, \quad (17)$$

mit den positiven Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ als möglicher Kandidat für eine Lyapunov-Funktion (CLF) gewählt. Die Änderung von W_c entlang einer Lösung des Fehlersystems (13) ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt}W_c = -\frac{\delta_1 \beta k_l}{V_l} (\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}}) e_p + \frac{\delta_1 \beta k_p}{V_l} e_p e_\varphi - \frac{\delta_2}{A_d r_a} e_\varphi q_{a,c}. \quad (18)$$

Für die betrachtete Anwendung wird ein einfaches lineares Regelgesetz der Form

$$q_{a,c} = \lambda_p e_p + \lambda_\varphi e_\varphi \quad (19)$$

mit den positiven Reglerparametern $\lambda_p, \lambda_\varphi > 0$ verwendet. An dieser Stelle mag es verwundern, dass ein lineares Regelgesetz hinreichend im Hinblick auf die Dynamik des

geschlossenen Kreises ist. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass die guten Eigenschaften des geschlossenen Kreises (vgl. Abschnitt 6) hauptsächlich aus (i) der Vorsteuerung, welche die Nichtlinearitäten des Systems für die Folgeregelung systematisch berücksichtigt, (ii) der Schätzung des Lastkoeffizienten k_l , welche im nächsten Abschnitt entworfen wird und (iii) der vorgeschlagenen Umschaltstrategie, resultieren.

Setzt man das Stellgesetz (19) in (18) ein und wählt man δ_1 zu

$$\delta_1 = \frac{\delta_2 V_l}{A_a r_a k_p \beta} \lambda_p, \quad (20)$$

so erhält man

$$\frac{d}{dt} W_c = -\frac{\delta_2 \lambda_p k_l}{A_a r_a k_p} (\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}}) e_p - \frac{\delta_2 \lambda_\varphi}{A_a r_a} e_\varphi^2. \quad (21)$$

Da $k_p, k_l > 0$ gilt, ist die rechte Seite von (21) offensichtlich negativ definit, womit die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises (13), d.h. FF^I mit Σ^I und (19), nachgewiesen ist.

Äquivalente Ergebnisse können für die anderen drei Kombinationen der Vorsteuerung und des Systems (FF^{II}, Σ^{II}) , (FF^I, Σ^{II}) und (FF^{II}, Σ^I) erzielt werden, siehe Anhang A. Damit ist die Stabilität des geschlossenen Kreises, bestehend aus der Vorsteuerung, der Regelung und dem geschalteten System für den Fall, dass die certainty equivalence Bedingung $k_l = \hat{k}_l$ erfüllt ist, nachgewiesen. Im nächsten Abschnitt wird eine Schätzung für den Lastkoeffizienten \hat{k}_l entwickelt und ein Beweis für die Stabilität des gesamten geschlossenen Kreises angegeben.

4 Schätzung des Lastkoeffizienten k_l

Der Entwurf eines Schätzers für den Lastkoeffizient k_l basiert auf der Annahme, dass k_l zwar unbekannt aber konstant ist. In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Schätzer entwickelt. Der erste, aus der Literatur bekannte Ansatz ist relativ einfach, hat aber den Nachteil, dass er nur sehr schwer so eingestellt werden kann, dass die Anforderung bezüglich der Genauigkeit und der Robustheit der realen Anwendung erfüllt werden. Diese Nachteile werden vor allem dann offensichtlich, wenn der Schätzer am experimentellen Aufbau eingesetzt wird. Aus diesem Grund wird auch ein erweiterter Schätzer präsentiert, welcher die gesamte Messinformation zur Schätzung des Lastkoeffizienten verwendet.

4.1 Einfacher Schätzer

Der einfache Schätzer für den Lastkoeffizienten wird in der Form

$$\frac{d}{dt} \hat{k}_l = -\chi_k(e_p, e_\varphi, t) \quad (22)$$

angesetzt, wobei die rechte Seite χ_k von (22) noch zu bestimmen ist. Dazu wird die CLF (17) um einen quadratischen Term im Schätzfehler $\hat{e}_k = k_l - \hat{k}_l$

$$W_{tot} = W_c + W_e = \frac{1}{2} \delta_1 e_p^2 + \frac{1}{2} \delta_2 e_\varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \hat{e}_k^2, \quad (23)$$

mit dem Entwurfsparameter $\hat{\lambda}_k > 0$ des Schätzers, erweitert. Bevor man die zeitliche Änderung von W_{tot} entlang einer Lösung des Fehlersystems (13), (14), (50) bzw. (55) berechnet, erweist es sich als sinnvoll die rechte Seiten so umzuschreiben, dass nur mehr Ausdrücke in k_l und $k_l - \hat{k}_l = \hat{e}_k$, jedoch keine mit \hat{k}_l , auftreten. Dies ist im vorliegenden Fall immer möglich, da die rechten Seiten der Fehlersysteme (13), (14), (50) und (55) alle affin im Lastkoeffizienten k_l sind. Für das Fehlersystem (13) führt diese Umformulierung der rechten Seite zu

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a} q_{a,c} \quad (24a)$$

$$\frac{d}{dt}e_p = \frac{\beta}{V_l} (k_p e_\varphi - k_l \sqrt{e_p + p_{l,d}} + k_l \sqrt{p_{l,d}}) - \frac{\beta}{V_l} \underbrace{(k_l - \hat{k}_l)}_{\hat{e}_k} \sqrt{p_{l,d}}. \quad (24b)$$

Völlig analog können auch die anderen Fehlersysteme in eine äquivalente Form gebracht werden. Der erste Teil von (24b) entspricht dabei dem Fehlersystem (13) für den Fall, dass die certainty equivalence condition erfüllt ist, während der zweite Teil von (24b) den Schätzfehler berücksichtigt.

Die zeitliche Änderung der gesamten Lyapunov-Funktion W_{tot} entlang einer Lösung des geschlossenen Regelkreises (24) mit (19) und (22) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_{tot} = & -\frac{\delta_2 k_l \lambda_p}{A_a r_a k_p} (\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}}) e_p - \frac{\delta_2 \lambda_\varphi}{A_a r_a} e_\varphi^2 \\ & - \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p \hat{e}_k + \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \hat{e}_k \chi_k. \end{aligned} \quad (25)$$

Dieses Ergebnis entspricht, abgesehen von den letzten zwei Termen, der Gleichung (21). Kürzt man nun den dritten Term in (25) mit Hilfe des letzten Terms, so ist \dot{W}_{tot} negativ semi-definit. Damit ergibt sich der Schätzer von (22) zu

$$\frac{d}{dt}\hat{k}_l = -\hat{\lambda}_k \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p. \quad (26)$$

Dieser Ansatz führt für die drei anderen Fehlersysteme zum gleichen Ergebnis. Die dazu notwendigen Berechnung können analog zu den obigen Berechnungen durchgeführt werden. Zusammenfassend kann damit die Stabilität des geschlossenen Regelkreises, bestehend aus der geschalteten Vorsteuerung, dem gemeinsamen Regler, dem einfachen Schätzer und dem geschalteten System nachgewiesen werden.

Wie bereits erwähnt zeigen Simulationsstudien und Messergebnisse, dass (i) eine geeignete Wahl von $\hat{\lambda}_k$ schwierig ist und (ii) die Anforderungen an die Dynamik und die Genauigkeit nicht erfüllt werden. Weiterhin zeigt der einfache Schätzer eine ungenügende Robustheit gegen Modellungenauigkeiten. Daher ist der einfache Schätzer nicht für einen praktischen Einsatz geeignet.

4.2 Erweiterter Schätzer

Die grundlegende Idee des erweiterten Schätzers für den Lastkoeffizienten k_l ist es, zusätzlich den Lastdruck p_l zu schätzen, obwohl dieser natürlich gemessen werden kann.

Mit dieser Vorgehensweise erhält man zusätzliche Freiheitsgrade für den Entwurf und die Parametrierung des erweiterten Schätzers.

Der erweiterte Schätzer für den Lastdruck p_l setzt sich aus einem Prädiktions- und einem Korrekturterm zusammen, wobei der Prädiktionsterm eine Kopie des mathematischen Modells (4b), (5b) ist, und der Korrekturterm $\chi_p(e_p, e_\varphi, t)$ zur Stabilisierung der Schätzerdynamik verwendet wird.

$$\frac{d}{dt}\hat{p}_l = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p \varphi_p - \hat{k}_l \sqrt{p_l} \right) - \chi_p, \quad \text{für } q_a \leq 0 \quad (27a)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{p}_l = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p \varphi_p - \hat{k}_l \sqrt{p_l} - q_a \right) - \chi_p, \quad \text{für } q_a > 0 \quad (27b)$$

Das Umschalten zwischen (27a) und (27b) erfolgt auf Basis des Nulldurchgangs des Aktorvolumenstroms q_a , d.h. der Schätzer (27) wird synchron zum System (4) bzw. (5) geschaltet. Zur Schätzung des Lastkoeffizienten k_l wird wiederum der Ansatz (22) verwendet

$$\frac{d}{dt}\hat{k}_l = -\chi_k(e_p, e_\varphi, t). \quad (28)$$

Führt man die Schätzfehler $\hat{e}_p = p_l - \hat{p}_l$ und $\hat{e}_k = k_l - \hat{k}_l$ ein, so zeigt sich, dass das Fehlersystem für beide Systeme Σ^I und Σ^{II} die gleiche Form aufweist

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_p = -\frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_k + \chi_p(e_p, e_\varphi, t) \quad (29a)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_k = \chi_k(e_p, e_\varphi, t). \quad (29b)$$

Die Korrekturterme $\chi_p(e_p, e_\varphi, t)$ und $\chi_k(e_p, e_\varphi, t)$ in (29) müssen so entworfen werden, dass die Stabilität des gesamten geschlossenen Kreises bestehend aus der Vorsteuerung, dem Regler, dem System und dem erweiterten Schätzer gesichert ist. Bevor jedoch die Stabilität des geschlossenen Kreis untersucht wird, soll die Stabilität des erweiterten Schätzer separat nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck verwendet man den folgenden Kandidaten für eine Lyapunov-Funktion

$$W_e = \frac{1}{2} \hat{e}_p^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \hat{e}_k^2, \quad (30)$$

mit dem Entwurfparameter $\hat{\lambda}_k > 0$. Die Änderung von W_e entlang einer Lösung von (29) berechnet sich in der Form

$$\frac{d}{dt}W_e = -\frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_p \hat{e}_k + \hat{e}_p \chi_p + \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \hat{e}_k \chi_k. \quad (31)$$

Um den ersten indefiniten Term zu kompensieren wird χ_k durch

$$\chi_k(e_p, e_\varphi, t) = \hat{\lambda}_k \frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_p. \quad (32)$$

vorgegeben. Dann führt die folgende Wahl des Korrekturterms χ_p

$$\chi_p(e_p, e_\varphi, t) = -\hat{\lambda}_p \hat{e}_p \quad (33)$$

mit dem Entwurfsparameter $\hat{\lambda}_p > 0$ zu einer negativ semi-definiten Ableitung \dot{W}_e in (31). Dies impliziert die Stabilität des erweiterten Schätzers im Sinne von Lyapunov.

Bis jetzt wurde die Stabilität des erweiterten Schätzers unabhängig vom System analysiert. Um nun die Stabilität des gesamten geschlossenen Regelkreises zu untersuchen, verwendet man die gesamte Lyapunov-Funktion der Form

$$W_{tot} = W_c + W_e = \frac{1}{2} \delta_1 e_p^2 + \frac{1}{2} \delta_2 e_\varphi^2 + \frac{1}{2} \hat{e}_p^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\lambda}_k} \hat{e}_k^2, \quad (34)$$

vgl. (17) und (30). Berücksichtigt man die Analyse des einfachen Schätzers, vor allem (24), (25) und (26), so zeigt sich, dass die Zeitableitung \dot{W}_{tot} entlang einer Lösungskurve des gesamten geschlossenen Regelkreises bis auf den Term

$$-\frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p \hat{e}_k. \quad (35)$$

negativ definit ist. Dieser Term kann einfach gekürzt werden, wenn man $\chi_k(e_p, e_\varphi, t)$ aus (32) auf die Form

$$\chi_k = \hat{\lambda}_k \left(\frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_p + \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p \right) \quad (36)$$

erweitert. Zusammenfassend ergibt sich der erweiterte Schätzer zu

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_l = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p \varphi_p - \hat{k}_l \sqrt{p_l} \right) + \hat{\lambda}_p \hat{e}_p \quad (37a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{k}_l = -\hat{\lambda}_k \left(\frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_p + \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p \right) \quad (37b)$$

für $q_a \leq 0$ und

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_l = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p \varphi_p - \hat{k}_l \sqrt{p_l} - q_a \right) + \hat{\lambda}_p \hat{e}_p \quad (38a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{k}_l = -\hat{\lambda}_k \left(\frac{\beta}{V_l} \sqrt{p_l} \hat{e}_p + \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} \sqrt{p_{l,d}} e_p \right) \quad (38b)$$

für $q_a > 0$.

5 Volumenstromregelung und Umschaltstrategie

5.1 Volumenstromregelung

Die in den letzten beiden Abschnitten entwickelte Lastdruckregelung dient in der Spritzgussmaschine dazu, während der Nachdruckphase flüssigen Kunststoff mit dem erforderlichen Druck nachzufördern. In der dieser Phase vorhergehenden Füllphase muss der

flüssige Kunststoff mit einer konstanten Füllgeschwindigkeit in die Gussform eingebracht werden. Dies wird durch das Verschieben der Förderschnecke mit Hilfe des Hydraulikzylinders erreicht, vgl. Abb. 1. Im Allgemeinen steht keine Positionsmessung des Zylinders zur Verfügung, was eine direkte Regelung der Geschwindigkeit des Zylinders verhindert. Da jedoch die Kompressibilität des Öls im Zylinder während dieser Phase vernachlässigt werden kann, entspricht die Geschwindigkeitsregelung einer Regelung des in das Lastvolumen geförderten Volumenstroms q_{lv} . Das dem folgenden Reglerentwurf zugrunde liegende mathematische Modell kann in der Form (vgl. (1), (2))

$$\frac{d}{dt}\varphi_p = -\frac{1}{A_a r_a} q_a \quad (39a)$$

$$q_{lv} = k_p \varphi_p - \eta(q_a) \quad (39b)$$

zusammengefasst werden. Für den Entwurf der Volumenstromregelung erweist sich wiederum die Anwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung als zielführend. Nimmt man an, dass eine Solltrajektorie $q_{lv,d}(t)$ des Volumenstroms q_{lv} hinreichend oft stetig differenzierbar vorgegeben wird und betrachtet man den Fall $q_a \leq 0$, so folgt aus (39)

$$\varphi_{p,d} = \frac{q_{lv,d}}{k_p}. \quad (40)$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich damit die Vorsteuerung FF_q^I für das System I

$$FF_q^I : \quad q_{a,d} = -\frac{A_a r_a}{k_p} \dot{q}_{lv,d}. \quad (41)$$

Für das System II , d.h. für $q_a > 0$, gilt

$$q_{lv,d} = k_p \varphi_{p,d} - q_{a,d} \quad (42)$$

und somit folgt die Vorsteuerung FF_q^{II} zu

$$FF_q^{II} : \quad q_{a,d} = k_p \varphi_{p,d} - q_{lv,d}, \quad (43)$$

wobei sich $\varphi_{p,d}$ als Lösung der inneren Dynamik

$$\frac{d}{dt}\varphi_{p,d} = \frac{1}{A_a r_a} (-k_p \varphi_{p,d} + q_{lv,d}) \quad (44)$$

berechnet. Bezüglich der Umschaltung der Vorsteuerung der Volumenstromregelung können die gleichen Überlegungen wie bei der Druckregelung angestellt werden. Zusammenfassend zeigt sich, dass auch im Fall der Volumenstromregelung eine Umschaltung der Vorsteuerung basierend auf einem nulldurchgang des Vorsteueranteils $q_{a,d}$ der Stellgröße q_a sinnvoll ist.

Zum Entwurf eines Reglers zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers beachte man, dass der Volumenstrom in das Lastvolumen q_{lv} und der Volumenstrom q_a nicht gemessen werden können. Als einzige Messinformation bezüglich steht der Schwenkwinkel φ_p zur Verfügung. Daher wird in dieser Arbeit ein Regler für den Fehler $e_\varphi = \varphi_p -$

$\varphi_{p,d}$ im Schwenkwinkel anstatt eines Reglers für den Volumenstrom in das Lastvolumen verwendet. Eine kurze Rechnung zeigt, dass das Fehlersystem sowohl für FF_q^I als auch für FF_q^{II} durch

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a}q_{a,c}, \quad (45)$$

mit der Stellgröße $q_{a,c} = q_a - q_{a,d}$ des Reglers, gegeben ist. Für dieses einfache (lineare) System wird der Regler

$$q_{a,c} = \lambda_q A_a r_a e_\varphi, \quad (46)$$

mit dem Reglerparameter $\lambda_q > 0$, verwendet. Damit folgt unmittelbar die Stabilität des Fehlersystems.

5.2 Umschaltstrategie

Der Übergang von der Füllphase in die Nachdruckphase ist dadurch gekennzeichnet, dass der Lastdruck p_l schlagartig ansteigt. In diesem Fall muss rechtzeitig von der Volumenstromregelung auf die Druckregelung umgeschaltet werden. Dabei soll der Lastdruck möglichst schnell und vor allem ohne Überschwingen auf einen Sollwert geregelt werden. Die Herausforderung besteht darin, einen geeigneten Umschaltzeitpunkt bzw. ein geeignetes Umschaltkriterium zu finden. In klassischen Realisierungen erfolgt die Umschaltung basierend auf der Stellgröße, siehe [20, 13]. Dabei wird von der Volumenstromregelung zur Druckregelung umgeschaltet, wenn die Stellgröße der Druckregelung größer als die Stellgröße der Volumenstromregelung ist. Der Nachteil dieser Strategie ist die inhärente Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens der Umschaltstrategie von der Parametrierung der Volumensstrom- und der Druckregelung. Als alternative Ansätze werden in der Literatur iterative Lernstrategien beschrieben, siehe [9, 14].

In dieser Arbeit wird folgende Umschaltstrategie vorgeschlagen: Bei Erkennung des Umschaltzeitpunktes wird sofort auf die Druckregelung umgeschaltet, wobei ausgehend vom aktuellen Wert des Lastdrucks eine hinreichend glatte Solltrajektorie auf den Sollwert des Lastdrucks geplant wird. Die Erkennung des Umschaltzeitpunktes erfolgt dabei auf Basis der Anstiegsgeschwindigkeit des Lastdrucks [7]. Diese grundlegende Idee ist in Abb. 4 dargestellt. In der praktischen Umsetzung wird ein lineares Filter 2. Ordnung zur Berechnung der Solltrajektorie verwendet.

6 Simulations- und Messergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der vorgeschlagenen Lastdruckregelungsstrategie, bestehend aus der Vorsteuerung FF^I (7), (9) und FF^{II} (11) und (12), dem gemeinsamen Regler (19) und dem erweiterten Schätzer (37) und (38), der Volumenstromregelung (41), (43), (44) und (46) und der Umschaltstrategie anhand von Simulations- und Messergebnissen analysiert. Dazu werden zuerst Simulationsergebnisse dargestellt, denn hier können auch Größen, welche nicht einer Messung zu Verfügung stehen, untersucht werden. Zur Demonstration der praktischen Anwendbarkeit werden im zweiten Teil dieses Abschnittes Messergebnisse eines experimentellen Aufbaus vorgestellt.

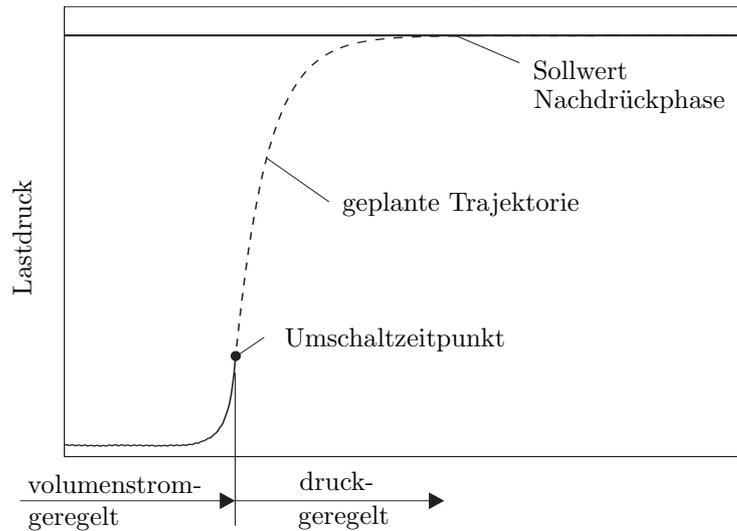


Abbildung 4: Grundidee der Umschaltstrategie zwischen Volumenstrom- und Druckregelung.

6.1 Simulationsergebnisse

Die gesamte Regelungsstrategie wurde in Form einer C-code MATLAB s-function implementiert. Die Regelungsstrategie wurde dabei in Simulationsstudien sowohl anhand eines in [7] entwickelten detaillierten Modells als auch am vereinfachten Modell (4), (5) getestet. Im Vergleich zum vereinfachten Modell beinhaltet das vollständige Modell eine genaue Beschreibung der Pulsationen des Volumenstroms der Pumpe zufolge der endlichen Kolbenanzahl, den Einfluss des sogenannten swivel torque (Rückwirkung der Kolben auf die Schwenkscheibe) und ein präzises Modell des Regelventils. Das Modell des Regelventils beinhaltet sowohl die nichtlinearen Öffnungskennlinien als auch die Dynamik des Ventils. In der betrachteten Anwendung ist jedoch die Dynamik des Ventils (Anstiegszeit ca. 5 ms) bedeutend schneller als die Dynamik des Systems und kann daher vernachlässigt werden. Da das vereinfachte und das vollständige Modell beinahe gleiche Ergebnisse liefern, werden nachfolgend nur die Simulationsergebnisse des vereinfachten Modells präsentiert.

In der ersten Simulation wird das Folgeverhalten des Lastdrucks p_l auf eine Solltrajektorie $p_{l,d}(t)$ bei konstantem Lastkoeffizienten k_l untersucht. Die Parameter des Systems und der Regelungsstrategie sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengefasst. In Abb. 5 werden zwei Simulationsstudien miteinander verglichen: auf der linken Seite ist das Folgeverhalten für einen kleinen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,min}$ dargestellt während auf der rechten Seite die Ergebnisse für einen größeren, nominellen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,nom}$ angegeben sind. Der zeitliche Verlauf des Lastdrucks zeigt, dass das gleiche ausgezeichnete Folgeverhalten für beide Fälle unabhängig vom aktuellen Wert des Lastkoeffizienten erzielt wird. Andererseits haben die unterschiedlichen Lastkoeffizienten natürlich einen wesentlichen Einfluss auf die Trajektorien des Winkels der Schwenkscheibe φ_p . Dies beruht darauf, dass nur ein sehr geringer Volumenstrom q_p der Pumpe notwendig ist um den kleinen Volumenstrom $q_l = k_{l,min}\sqrt{p_l}$ für einen kleinen Lastkoeffizienten zur Verfügung

zu stellen, während wesentlich höhere Volumenströme für den größeren Lastkoeffizienten $k_{l,nom}$ notwendig sind. Da der Volumenstrom q_p der Pumpe direkt mit dem Winkel φ_p der Schwenkscheibe zusammenhängt, d.h. $q_p = k_p \varphi_p$ mit k_p aus (3), erklärt dies die unterschiedlichen Zeitverläufe der Schwenkwinkel auf der linken und der rechten Seite von Abb. 5. Weiterhin weisen die Abbildungen der Sollwerte $\varphi_{p,d}$ der Schwenkwinkel deren Stetigkeit nach, was durch die geeignete Umschaltung basierend auf $q_{a,d}$ erreicht wurde. Schließlich sind im unteren Bereich der Abb. 5 die zum Verschwenken der Schwenkscheibe notwendigen Aktorvolumenströme dargestellt. Hier ist bemerkenswert, dass beinahe die gesamte Stellgröße q_a aus der Vorsteuerung $q_{a,d}$ resultiert, während der Regleranteil $q_{a,c}$ beinahe verschwindet. Dies weist auch die gute Qualität des erweiterten Schätzers nach, da die Vorsteuerung wesentlich auf der Schätzung des Lastkoeffizienten beruht.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Kompressionsmodul des Öls	β	$1.6 \cdot 10^9$	Pa
eff. Fläche des Aktors	A_a	300	mm ²
eff. Radius des Aktors	r_a	50	mm
Anzahl der Kolben	n_p	9	
Fläche eines Kolben	A_p	165	mm ²
Radius der Rotation eines Kolbens	r_p	30	mm
Drehwinkelgeschw. der Trommel	ω_p	50π	$\frac{1}{s}$
Pumpenkoeffizient	k_p	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$\frac{m^3}{s}$
min. Schwenkwinkel	$\varphi_{p,min}$	-1.5	°
max. Schwenkwinkel	$\varphi_{p,max}$	18	°
Lastvolumen	V_l	1.5	l
min. Lastkoeffizient	$k_{l,min}$	$10 \cdot 10^{-9}$	$\frac{m^3}{s\sqrt{Pa}}$
nom. Lastkoeffizient	$k_{l,nom}$	$90 \cdot 10^{-9}$	$\frac{m^3}{s\sqrt{Pa}}$
max. Lastkoeffizient	$k_{l,max}$	$140 \cdot 10^{-9}$	$\frac{m^3}{s\sqrt{Pa}}$

Tabelle 1: Parameter der Pumpe und der Last.

Parameter	Wert
λ_p	$8 \cdot 10^{-11}$
λ_φ	$5 \cdot 10^{-3}$
$\hat{\lambda}_p$	600
$\hat{\lambda}_k$	$5 \cdot 10^{-27}$
δ_2	$1.5 \cdot 10^{-14}$
λ_q	20

Tabelle 2: Parameter der Regelungsstrategie und des erweiterten Schätzers.

In der nächsten Simulation wird das Verhalten des geschlossenen Kreises für schnell veränderliche Lastkoeffizienten untersucht. In diesem Fall wird der Lastkoeffizient k_l sprunghaft zwischen einem Maximalwert $k_{l,max}$ und dem Minimalwert $k_{l,min}$ umgeschaltet, siehe die mittlere rechte Seite der Abb. 6. Dabei wurde für den Lastdruck die gleiche

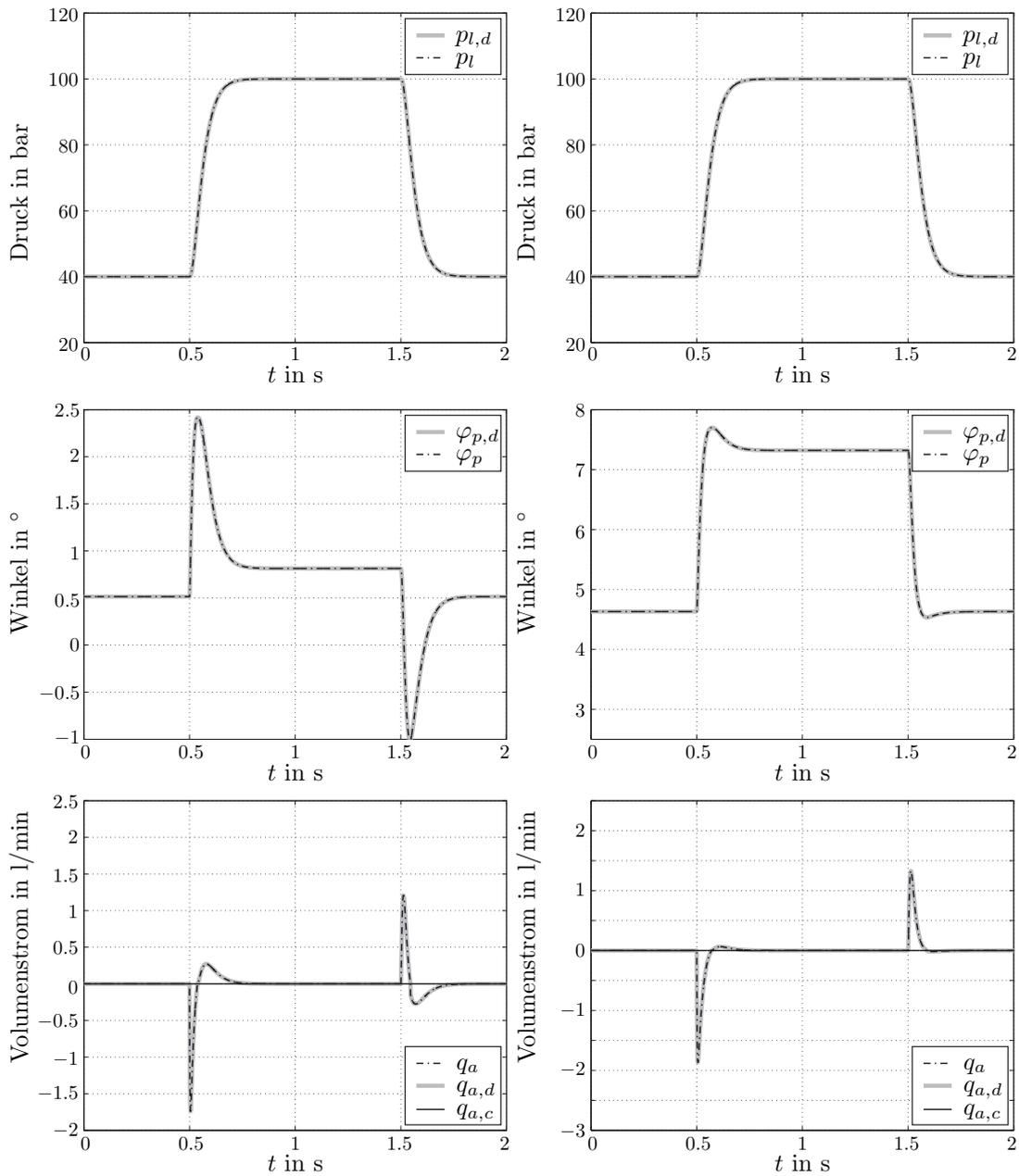


Abbildung 5: Simulationsergebnisse für das Folgeverhalten des Lastdruckes p_l für nominelle Parameter, einen kleinen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,min}$ auf der linken Seite und einen größeren, nominellen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,nom}$ auf der rechten Seite.

Trajektorie $p_{l,d}$ wie in der letzten Simulation verwendet. Die Simulationen des Lastdrucks p_l bzw. des Regelfehlers e_p zeigen ein sehr gutes Ergebnis. Natürlich führt die schnelle Änderung des Lastkoeffizienten zu maßgeblichen Fehlern, welche jedoch sehr schnell kompensiert werden können.³ Man beachte, dass der Stabilitätsbeweis des gesamten geschlossenen Kreises, vgl. Abschnitt 4.2, auf der Annahme eines unbekanntes aber konstanten Lastkoeffizienten k_l beruht. D.h. der Fall eines sich schnell ändernden Lastkoeffizienten wird nicht vom Stabilitätsbeweis abgedeckt. Die Simulations- und Messergebnisse zeigen jedoch, dass die vorgeschlagene Regelungsstrategie auch in diesem Fall zuverlässig funktioniert.

Der zeitliche Verlauf des Schwenkwinkels φ_p zeigt, dass eine schnelle Bewegung zur Kompensation des veränderlichen Lastkoeffizienten notwendig ist. Insbesondere ist eine im Vergleich zur reinen Folgeregelung schnellere Dynamik unumgänglich. Dies kann auch in der Stellgröße, d.h. dem Volumenstrom q_a , bemerkt werden. Hier sind relativ große Volumenströme zum schnellen Verschwenken der Schwenkscheibe notwendig. Analysiert man das Verhältnis zwischen dem Vorsteueranteil $q_{a,d}$ und dem Regleranteil $q_{a,c}$, so wird auch in diesem Fall ein großer Teil des gesamten Stelleingangs durch die Vorsteuerung erzeugt. Dies weist auch in diesem Fall auf die sehr gute Qualität der Schätzung \hat{k}_l der Last hin. Abb. 6 zeigt, dass die Schätzung \hat{k}_l des erweiterten Schätzer auch relativ hochdynamischen Änderungen des Lastkoeffizienten gut folgt. Das relativ große Überschwingen der Schätzung könnte durch eine geänderte Parametrierung des Schätzers wesentlich verringert werden. Der Schwerpunkt der Lastdruckregelung ist jedoch naturgemäß eine möglichst exakte Regelung des Lastdrucks p_l und nicht eine möglichst exakte Schätzung des Lastparameters. Zu diesem Zweck haben sich die gewählten Parameter des Reglers und des Schätzers als zielführend erwiesen. Sie stellen einen guten Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Folgeregelung des Lastdrucks und der Schätzung des Lastkoeffizienten dar.

In der nächsten Simulationsstudie wird der Einfluss von Parameterschwankungen untersucht. Die meisten Parameter des Systems, insbesondere jene der Pumpe, sind genau bekannt und ändern sich nicht während des Betriebs. Im Gegensatz dazu liegt meist nur eine ungenaue Information über die Parameter der Last vor. Natürlich wird in der betrachteten Anwendung der Lastkoeffizient geschätzt und die obigen Simulationsergebnisse haben gezeigt, dass die Regelungsstrategie robust gegen Schwankungen dieses Parameters ist. Das Lastvolumen V_l wurde hingegen als konstant und bekannt angenommen. Daher ist diese Simulation dem Einfluss eines Fehlers im Lastvolumen V_l gewidmet. In Abb. 7 werden drei Fälle verglichen: (i) das System mit dem nominellen Lastvolumen, (ii) das System mit dem doppelten Lastvolumen und (iii) das System mit dem halben Lastvolumen. Als zweiter unsicherer Parameter tritt in der realen Anwendung der Kompressionsmodul β des Öls auf. Dieser kann sich z.B. aufgrund von gelöster Luft in der praktischen Anwendung wesentlich verändern. Da jedoch eine Halbierung des Kompressionsmoduls den gleichen Einfluss hat wie eine Verdopplung des Lastvolumens, kann auf eine zusätzliche Untersuchung dieses Einflusses verzichtet werden. Die Simulationsergebnisse in Abb. 7 zeigen, dass die Abweichungen zufolge des veränderten Lastvolumens

³Man beachte, dass in der praktischen Anwendung keine sprungförmigen Änderungen des Lastkoeffizienten k_l auftreten. Daher stellen diese Simulationen einen Worst-Case Fall dar.

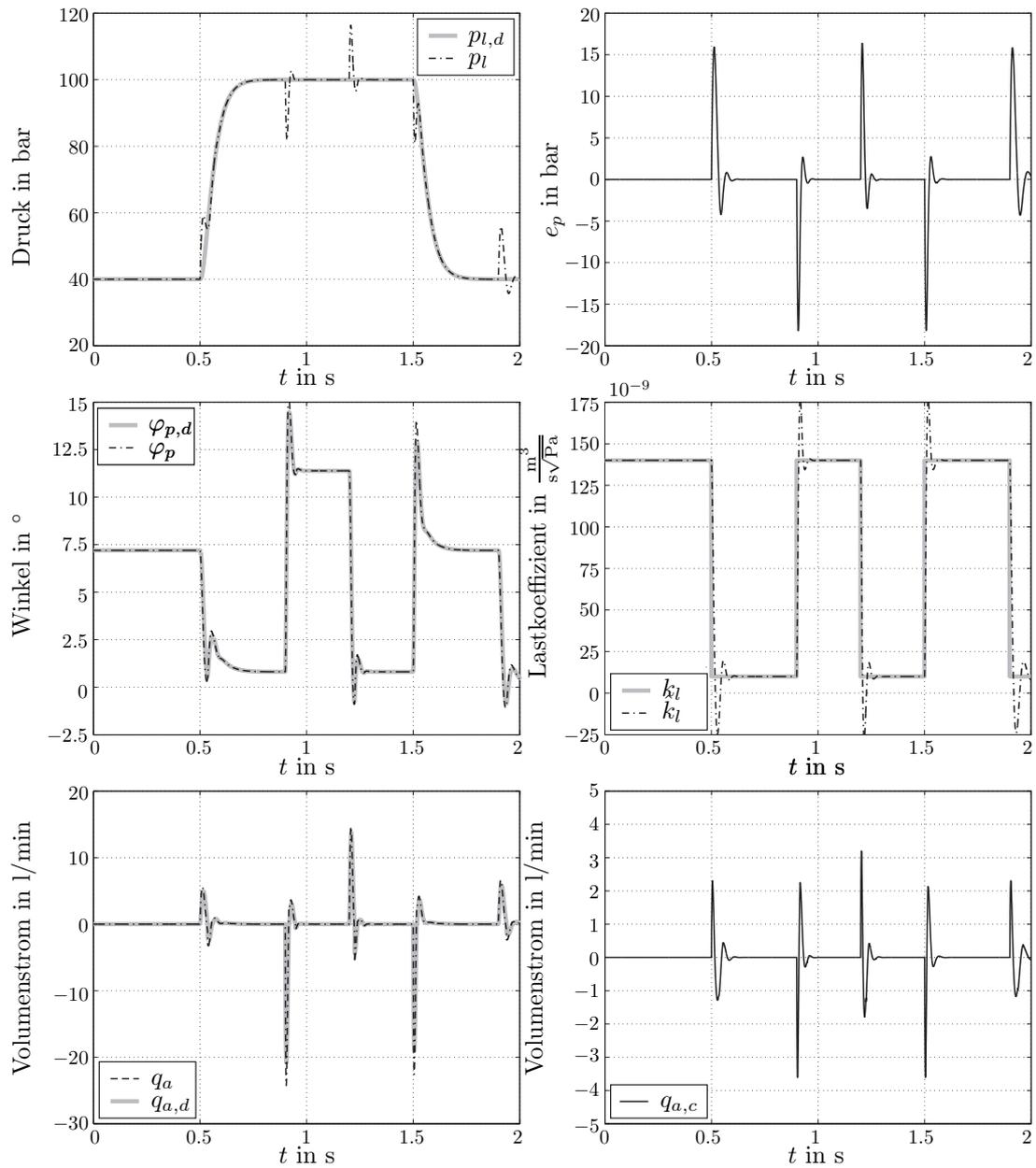


Abbildung 6: Simulationsergebnisse für nominelle Parameter und schnelle Änderungen des Lastkoeffizienten k_l .

mit der vorgeschlagenen Regelungsstrategie zufriedenstellend unterdrückt werden. Der Trajektorienfolgefehler ist dabei geringer als 3 bar und daher für die betrachtete Anwendung vernachlässigbar. Wie erwartet, führt eine Erhöhung des Lastvolumens zu größeren Schwenkwinkeln φ_p , da höhere Volumenströme zum Druckaufbau in einem größeren Lastvolumen V_l notwendig sind. Schließlich ist auf der unteren rechten Seite von Abb. 7 die Stellgröße q_a für die drei Fälle dargestellt. In diesem Fall können die Fehler zufolge der unterschiedlichen Volumina natürlich nicht von der Vorsteuerung kompensiert werden sondern müssen von der Regelung unterdrückt werden.

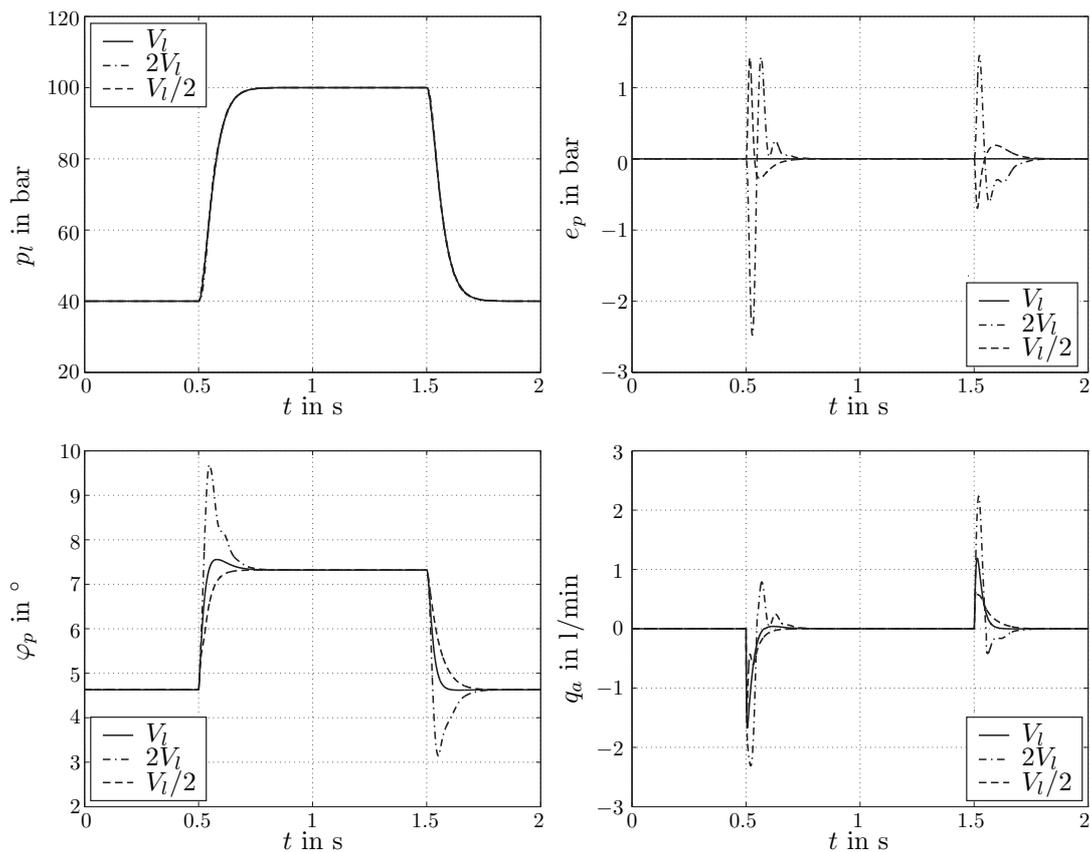


Abbildung 7: Simulationsergebnisse für die Robustheit der Regelungsstrategie für verschiedene Lastvolumina V_l und einen nominalen Lastkoeffizienten $k_{l,nom}$.

Die letzte Simulation beschäftigt sich mit der Volumenstromregelung. Dazu wird eine rechteckförmige Solltrajektorie $q_{lv,d}$ für den Volumenstrom in das Lastvolumen q_{lv} vorgegeben. In Abb. 8 sind die Ergebnisse dieser Simulation dargestellt. Es zeigt sich, dass ein gutes Folgeverhalten des Lastvolumenstroms erzielt wird. Dazu sind, wie auf der linken Seite von Abb. 8 dargestellt, relativ große Aktorvolumenströme notwendig. Der zugehörige Soll- und Istwert des Schwenkwinkels φ_p ist auf der rechten Seite dieser Abbildung angegeben. Zusammenfassend haben die Simulationsstudien sowohl ein ausgezeichnetes Folgeverhalten als auch eine gute Robustheit des geschlossenen Kreises gezeigt.

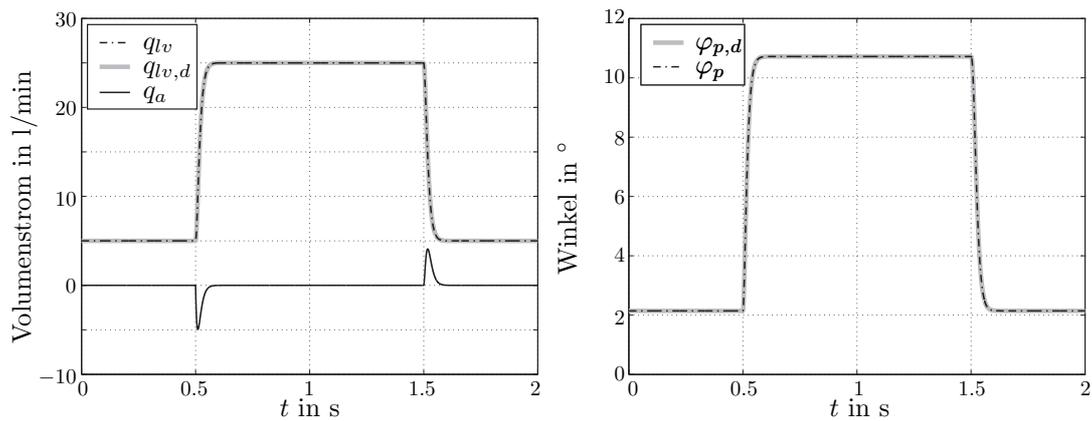


Abbildung 8: Simulationsergebnisse der Volumenstromregelung für rechteckförmige Solltrajektorien im Lastvolumenstrom q_l .

6.2 Messergebnisse

Nach den Simulationsstudien erfolgte der Test an einem von der Firma HYDAC Electronic entworfenen Prüfstand, siehe Abb. 9. Die wesentlichen Komponenten dieses Prüfstands sind die Axialkolbenpumpe in Schwenkscheibenbauweise, welche durch eine Asynchronmaschine angetrieben und mit Hilfe eines Proportionalwegeventils geregelt wird, das Lastvolumen und die Lastdrossel. Das hydraulische Ersatzschaltbild des Prüfstands kann der Abb. 3 entnommen werden.

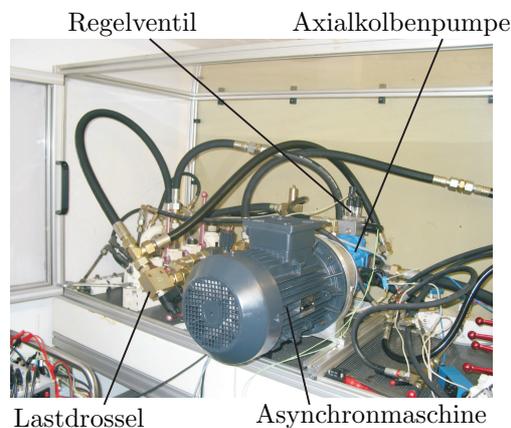


Abbildung 9: Aufbau des Prüfstands für die Axialkolbenpumpe.

Der Aktor zum Verschwenken der Schwenkscheibe wird mit einem 3/3 Proportionalwegeventil angesteuert, vgl. Abb. 3. Im Gegensatz zur vorigen Annahme, kann in der realen Anwendung der Volumenstrom q_a nicht direkt mit Hilfe dieses Ventils vorgegeben werden, sondern nur die Position s_v des Ventilkolbens wird direkt geregelt. Der Volumen-

strom q_a des Ventils ergibt sich dabei in der Form

$$q_a = \alpha \sqrt{\frac{2}{\rho}} (A_{la}(s_v) \sqrt{p_l - p_a} - A_{at}(s_v) \sqrt{p_a - p_t}), \quad (47)$$

wobei α den konstanten Kontraktionskoeffizienten beschreibt, ρ die Massendichte des Öls ist und $A_{la}(s_v)$ und $A_{at}(s_v)$ die Öffnungsquerschnitte des Ventils von der Last in den Aktor bzw. vom Aktor in den Tank beschreiben. Weiterhin ist p_l der Lastdruck, p_a bezeichnet den Aktordruck und der Tankdruck ist durch $p_t = 0$ gegeben. Im betrachteten System wird ein Ventil mit einer geringen negativen Überdeckung verwendet, dessen Öffnungscharakteristik in Abb. 10 dargestellt ist.

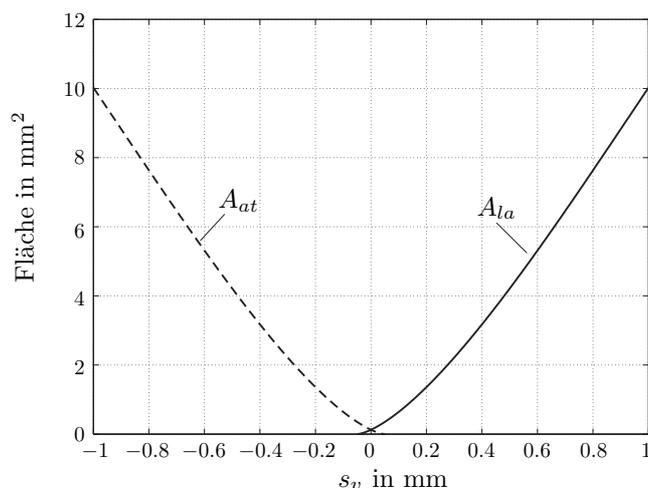


Abbildung 10: Öffnungscharakteristik $A_{la}(s_v)$ und $A_{at}(s_v)$ des Proportionalwegeventils.

Um die reale Stellgröße, d.h. die Position s_v des Ventilkolbens, aus der virtuellen Stellgröße q_a zu berechnen, wird (47) nach s_v gelöst. Es kann gezeigt werden, dass immer eine eindeutige Lösung dieser Gleichung existiert, wenngleich diese nur numerisch ermittelt werden kann. Mit dieser Vorgehensweise ist es möglich, das nichtlineare Verhalten des Proportionalwegeventils exakt zu kompensieren (Servokompensation), sodass die Position s_v des Proportionalwegeventils aus der virtuellen Stellgröße q_a berechnet werden kann. Dabei wurde die Dynamik des Ventils vernachlässigt, da diese wesentlich schneller als die Dynamik des Systems ist.

Die um die Servokompensation erweiterte gesamte Regelungsstrategie wurde in Form einer SIMULINK C-code s-function implementiert, mit Hilfe von MATLAB REAL-TIME WORKSHOP compiliert und auf einer DSPACE Echtzeithardware DS1103 implementiert. Dabei wurde eine Abtastzeit von $T_s = 1$ ms sowie die Parameter des Reglers und des erweiterten Schätzers aus Tab. 2 verwendet.

In der ersten Messung wird das Folgeverhalten des Lastdrucks p_l untersucht. Dazu wurden zwei Messungen durchgeführt, eine mit einem kleinen Lastkoeffizienten (linke Seite der Abb. 11) sowie eine mit einem größeren, nominellen Lastkoeffizienten (rechte Seite der Abb. 11). Wie bereits in den Simulationsstudien gezeigt, zeichnet sich die vorgeschlagene Regelungsstrategie durch ein gutes Folgeverhalten, unabhängig vom aktuellen

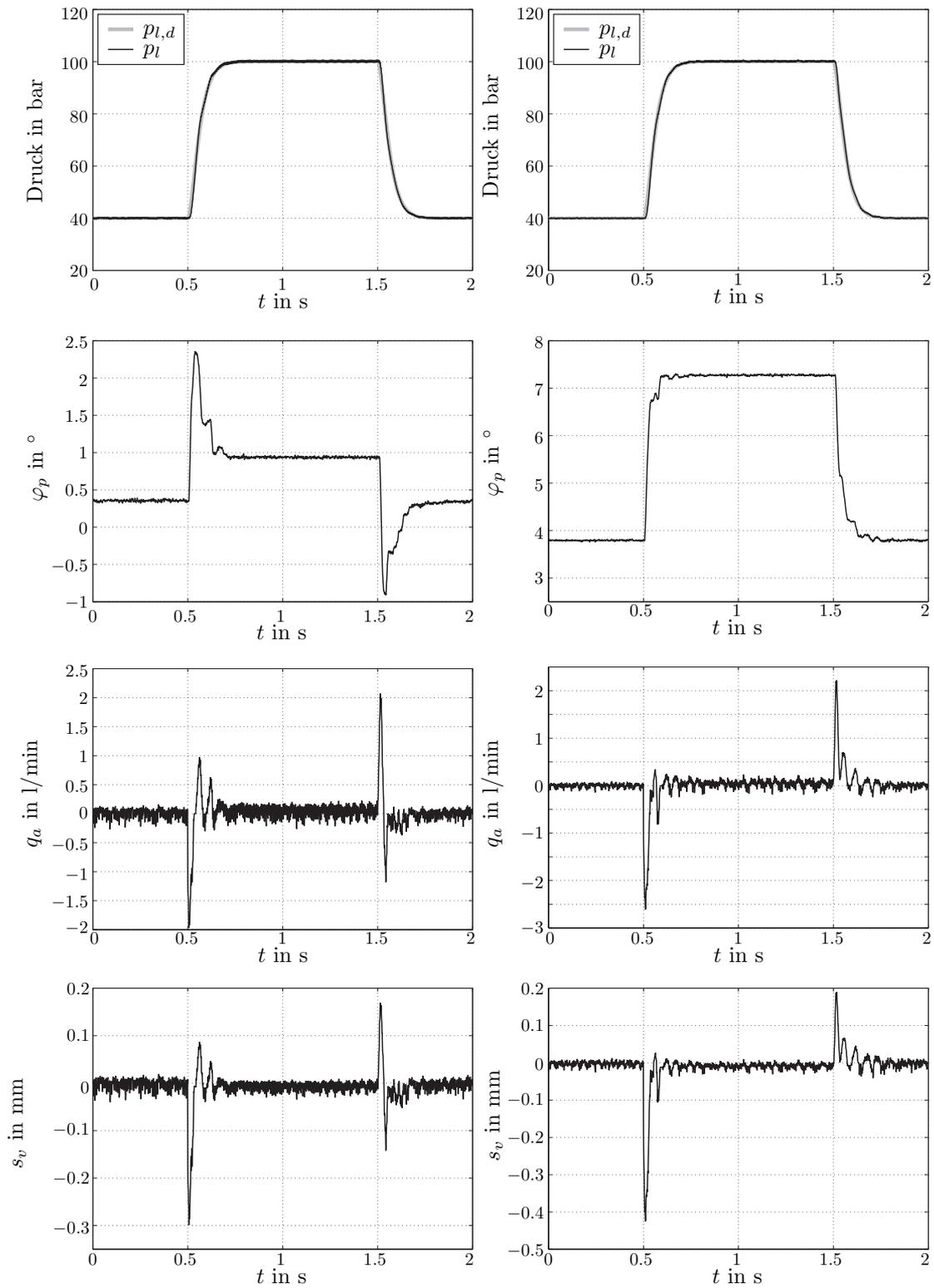


Abbildung 11: Messergebnisse für das Folgeverhalten des Lastdrucks p_l für einen kleinen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,min}$ auf der linken Seite und einen größeren, nominellen Lastkoeffizienten $k_l = k_{l,nom}$ auf der rechten Seite.

Wert des Lastkoeffizienten, aus. Der Einfluss dieses Lastkoeffizienten zeigt sich anhand der unterschiedlichen Schwenkwinkel φ_p und des Volumenstroms q_a . Weiterhin ist am unteren Ende der Abb. 11 der reale Stelleingang, d.h. die Ventilposition s_v dargestellt.

Das zweite in Abb. 12 dargestellte Messergebnis zeigt das Verhalten des Systems bei schnellen Änderungen des Lastkoeffizienten. In diesem Fall wird die Lastdrossel so schnell wie möglich geöffnet und geschlossen, während der Lastdruck einer Solltrajektorie $p_{l,d}(t)$ folgen soll. Die Messergebnisse in Abb. 12 bestätigen die Simulationsergebnisse aus Abb. 6. Weiterhin zeigt das dynamische Verhalten der Lastschätzung, welches auf der rechten Seite von Abb. 12 dargestellt ist, eine gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen.

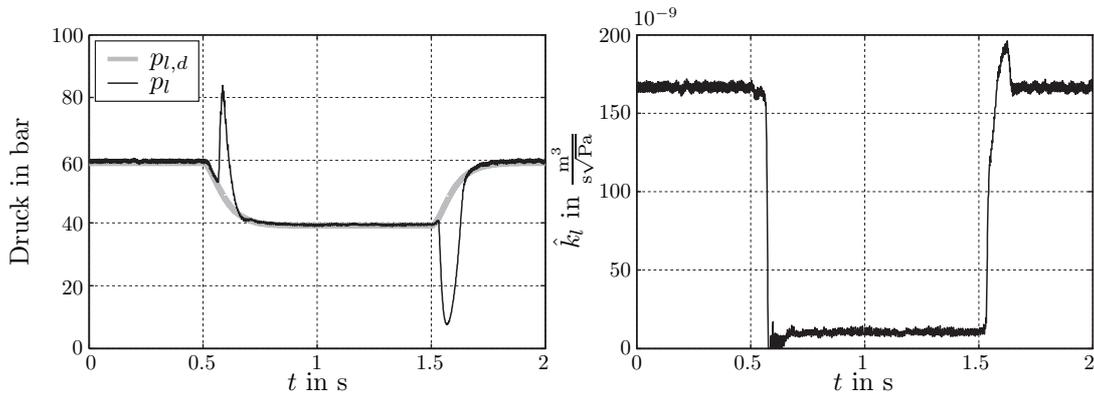


Abbildung 12: Messergebnisse für schnelle Änderungen des Lastkoeffizienten k_l während der Trajektorienfolgeregelung des Lastdrucks p_l .

Mit der nächsten Messung wird das Folgeverhalten des Lastdrucks für langsam veränderliche Lastkoeffizienten untersucht. Hier wird der Lastkoeffizient langsam erhöht während der Lastdruck einer rechteckförmigen Solltrajektorie folgen soll, vgl. Abb. 13. Auch für diesen Fall wird ein sehr zufriedenstellendes Folgeverhalten erzielt, während gleichzeitig eine gute Schätzung des Lastkoeffizienten möglich ist.

Zuletzt wird das Verhalten der Umschaltstrategie zwischen Volumenstrom- und Lastdruckregelung überprüft, siehe Abb. 14. Dazu wird der Prüfstand vorerst bei einem sehr großen Lastkoeffizienten mit Hilfe der Volumenstromregelung betrieben. In etwa zum Zeitpunkt $t = 2.1$ s wird die Lastdrossel schlagartig geschlossen und damit der Lastkoeffizient sehr schnell verringert. Wie in Abb. 14 gezeigt, führt dies zu einem sofortigen, sehr schnellen Anstieg des Lastdrucks. Kurz darauf wird vom System der Umschaltzeitpunkt detektiert und vom aktuellen Lastdruck eine hinreichend glatte Solltrajektorie auf den Solldruck von $p_l = 180$ bar geplant. Dieser Lastdruck wird sehr schnell und vor allem ohne Überschwingen erreicht. In den weiteren Darstellungen der Abb. 14 sind der notwendige Schwenkwinkel φ_p sowie der zum Verschwenken der Schwenkscheibe notwendige Aktorvolumenstrom q_a dargestellt. Zum Erreichen der Regelungsziele ist eine sehr schnelle Dynamik dieser Größen unumgänglich.

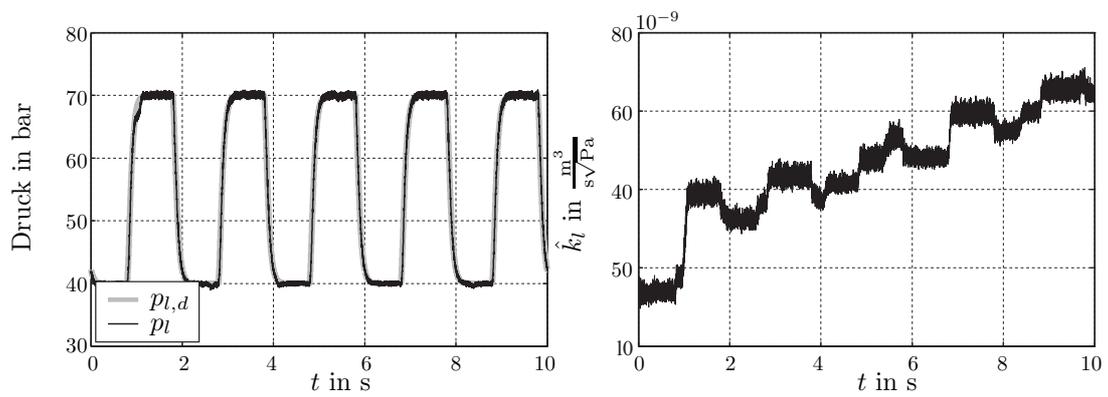


Abbildung 13: Messergebnisse für die Trajektorienfolgeregelung des Lastdrucks p_l bei gleichzeitigen langsamen Änderungen der Lastkoeffizienten k_l .

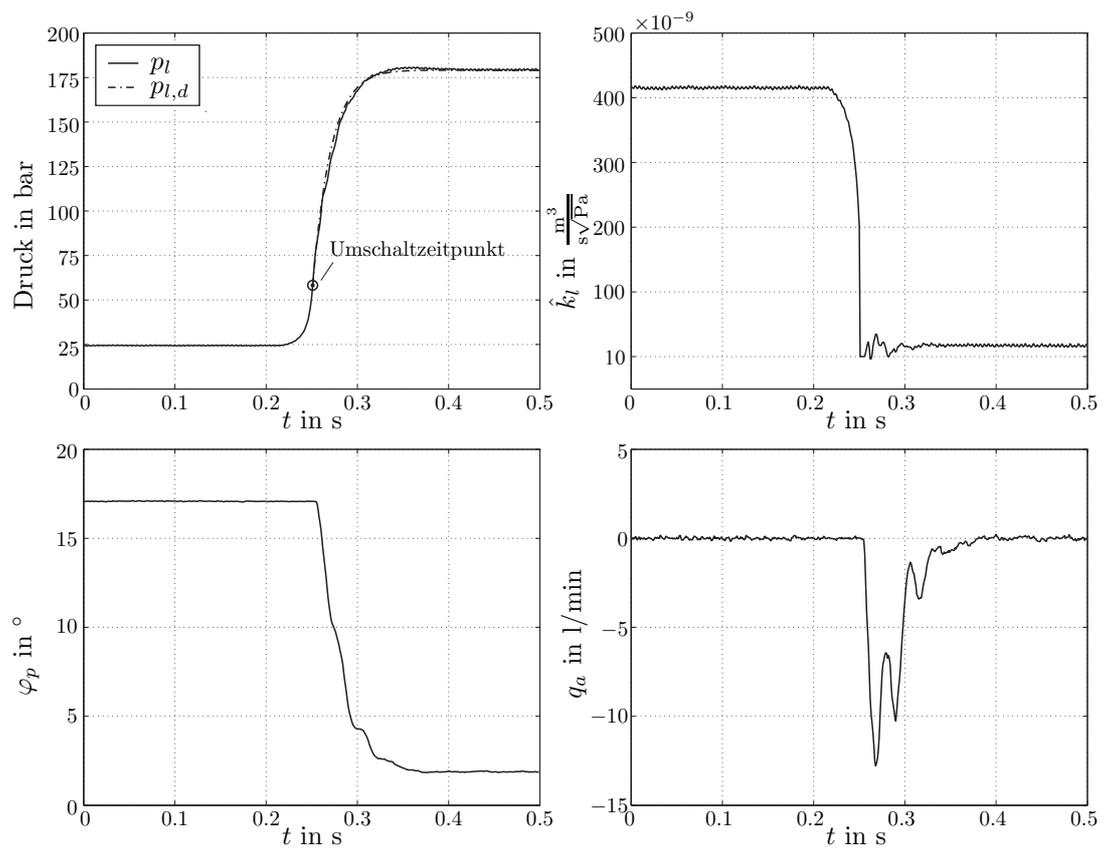


Abbildung 14: Messergebnisse für die Umschaltstrategie zwischen Volumenstromregelung und Lastdruckregelung.

Zusammenfassend zeigen die Messergebnisse sowohl für die Lastdruckregelung als auch für die Umschaltstrategie eine ausgezeichnete Regelgüte sowie eine hohe Robustheit und damit die praktische Verwendbarkeit der Regelungsstrategie.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein neues (nichtlineares) Konzept zur Regelung des Lastdruckes sowie des Volumenstroms einer eigenversorgten Axialkolbenpumpe mit veränderlicher Last vorgestellt. Dazu wurde im ersten Schritt der grundlegende Aufbau des elektrohydraulischen Systems sowie dessen mathematisches Modell beschrieben. Der Reglerentwurf wurde dabei dadurch erschwert, dass das Modell einen schaltenden Charakter aufweist, was aus der Eigenversorgung der Pumpe resultiert. Weiterhin stellte die unbekanntes, sich schnell ändernde Last eine Herausforderung im Reglerentwurf dar. Zur Lösung der Regelungsaufgaben wurde eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, bestehend aus einer Vorsteuerung und einer Rückführung, verwendet. Anschließend wurde die Lastdruckregelung um eine Schätzung der Last erweitert. Die Vorteile dieses Ansatzes sind (i) der systematische Nachweis der Stabilität des gesamten geschlossenen Kreises basierend auf der Stabilitätstheorie nach Lyapunov, (ii) der modellbasierte Entwurf, welcher eine einfache Adaptierung des Regelungskonzepts auf andere Baugrößen der gleichen Bauform erlaubt, sowie (iii) die einfache Parametrierung des Reglers anhand einiger weniger Parameter. In Simulationen und Messungen wurde die Eignung der Regelungsstrategie für den praktischen Einsatz gezeigt, wobei vor allem eine hohe Regelgüte und Robustheit beobachtet wurden. Schließlich wurde die praktische Anwendbarkeit der Regelungsstrategie und eine Verbesserung im Vergleich zu klassischen industriellen Lösungen vom industriellen Kooperationspartner hervorgehoben.

A Stabilitätsbeweis

A.1 Vorsteuerung FF^{II} mit System Σ^{II}

Wendet man die Vorsteuerung FF^{II} auf das System Σ^{II} an, so erhält man das Fehler-System (14). Unter Verwendung der certainty equivalence condition, w_c von (17) und dem Regler (19) mit (20), berechnet sich die zeitliche Änderung von W_c entlang einer Lösungskurve von (14) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_c = & -\frac{\delta_2 k_l \lambda_p}{A_a r_a k_p} \left(\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}} \right) e_p \\ & - \frac{\delta_2}{A_a r_a} \left(\frac{\lambda_p^2}{k_p} e_p^2 + \frac{\lambda_p \lambda_\varphi}{k_p} e_p e_\varphi + \lambda_\varphi e_\varphi^2 \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Die rechte Seite von (48) ist negativ definit, wenn die Bedingung

$$4k_p > \lambda_\varphi > 0 \quad (49)$$

erfüllt ist. Dies impliziert auch die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises (14), (19).

A.2 Vorsteuerung FF^I mit System Σ^{II}

Aufgrund des unabhängigen Umschaltens der Vorsteuerung vom System kann es vorkommen, dass die Vorsteuerung FF^I auf das System Σ^{II} angewandt wird und umgekehrt die Vorsteuerung FF^{II} auf Σ^I angewandt wird. Verwendet man FF^I in Kombination mit Σ^{II} , so erhält man das Fehlersystem

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a} q_{a,c} \quad (50a)$$

$$\frac{d}{dt}e_p = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p e_\varphi - k_l \sqrt{e_p + p_{l,d}} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} - q_a \right). \quad (50b)$$

Setzt man noch das Regelgesetz (19) in (50) ein und verwendet man die certainty equivalence condition, so ergibt sich die Änderung von W_c entlang einer Lösungskurve des Fehlersystems (50) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_c = & -\frac{\delta_2 k_l \lambda_p}{A_a r_a k_p} \left(\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}} \right) e_p \\ & - \frac{\delta_2 \lambda_\varphi}{A_a r_a} e_\varphi^2 - \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} e_p q_a. \end{aligned} \quad (51)$$

Dieses Ergebnis entspricht (21) bis auf den letzten indefiniten Term

$$-\frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} e_p q_a. \quad (52)$$

Da der Aktorvolumenstrom q_a für das System Σ^{II} positiv ist, ist dieser indefinite Term (52) negativ für $e_p > 0$. Daher ist \dot{W}_c negativ definit für $e_p > 0$. Um nun eine äquivalente Beziehung für $e_p < 0$ zu zeigen wird die Stellgröße q_a durch $q_a = q_{a,d} + q_{a,c}$ in (51) ersetzt, wobei $q_{a,c}$ aus (19) verwendet wird. Damit kann (51) in die Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_c = & -\frac{\delta_2 k_l \lambda_p}{A_a r_a k_p} \left(\sqrt{e_p + p_{l,d}} - \sqrt{p_{l,d}} \right) e_p - \frac{\delta_2}{A_a r_a} \\ & \left(\frac{\lambda_p^2}{k_p} e_p^2 + \frac{\lambda_p \lambda_\varphi}{k_p} e_p e_\varphi + \lambda_\varphi e_\varphi^2 \right) - \frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} e_p q_{a,d}, \end{aligned} \quad (53)$$

umgeschrieben werden, was bis auf den letzten indefiniten Term

$$-\frac{\delta_2 \lambda_p}{A_a r_a k_p} e_p q_{a,d} \quad (54)$$

dem Ausdruck (48) entspricht. FF^I ist nur aktiv, wenn $q_{a,d}$ negativ ist. Daher ist der Ausdruck (54) negativ für $e_p < 0$ was unmittelbar die negative Definitheit von \dot{W}_c für $e_p < 0$ nachweist, vorausgesetzt, dass wieder (49) erfüllt ist. Zusammengefasst wurde damit gezeigt, dass die zeitliche Änderung von W_c entlang einer Lösungskurve von (50) negativ definit ist. Dies impliziert die Stabilität des Systems für den Fall, dass die Vorsteuerung FF^I in Kombination mit dem System Σ^{II} und dem Regler (19) verwendet wird.

A.3 Vorsteuerung FF^{II} mit System Σ^I

Der letzte zu untersuchende Fall ist die Anwendung der Vorsteuerung FF^{II} auf das System Σ^I . In diesem Fall ergibt sich das Fehlersystem zu

$$\frac{d}{dt}e_\varphi = -\frac{1}{A_a r_a} q_{a,c} \quad (55a)$$

$$\frac{d}{dt}e_p = \frac{\beta}{V_l} \left(k_p e_\varphi - k_l \sqrt{e_p + p_{l,d}} + \hat{k}_l \sqrt{p_{l,d}} + q_{a,d} \right). \quad (55b)$$

Verwendet man äquivalente Argumente wie im letzten Teilabschnitt, so kann auch in diesem Fall gezeigt werden, dass die Änderung der gemeinsamen Lyapunov-Funktion (17) entlang einer Lösungskurve des Fehlersystems (55) für alle $\lambda_p > 0$ und alle λ_φ die die Ungleichung (49) erfüllen negativ definit ist.

Literatur

- [1] J.F. Blackburn, G. Reethof und J.L. Shearer, *Fluid Power Control*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1960.
- [2] M.S. Branicky, “Studies in hybrid systems: Modeling, analysis and control”, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 1995.
- [3] M.S. Branicky, “Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, Nr. 4, S. 475–482, 1998.
- [4] R.A. DeCarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson und B. Lennartson, “Perspectives and results on stability and stabilizability of hybrid systems”, *Proc. of the IEEE*, Vol. 88, Nr. 7, S. 1069–1082, 2000.
- [5] F. Findeisen, *Ölhydraulik*. Berlin, Deutschland: Springer, 2006.
- [6] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon, “Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples”, *International J. of Control*, Vol. 61, Nr. 6, S. 1327–1361, 1995.
- [7] F. Fuchshumer, “Modellierung, analyse und nichtlineare modellbasierte regelung von verstellbaren axialkolbenpumpen”, Dissertation, Technische Universität Wien, Wien, Österreich, 2009.
- [8] J. Grabbel und M. Ivantysynova, “An investigation of swash plate control concepts for displacement controlled actuators”, *Int. Journal of Fluid Power*, Vol. 6, Nr. 2, S. 19–36, 2005.
- [9] H. Havlicsek und A. Alleyne, “Nonlinear control of an electrohydraulic injection molding machine via iterative adaptive learning”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 4, Nr. 3, S. 312–323, 1999.

- [10] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. London, UK: Springer, 2001.
- [11] J. Ivantysyn und M. Ivantysynova, *Hydrostatische Pumpen und Motoren*. Würzburg, Deutschland: Vogel, 2006.
- [12] M. Krstić, I. Kanellakopoulos und P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1995.
- [13] H. Lausch und P. Reinhardt, “Schaltungsanordnung zur Druckregelung in einem hydraulischen System”, Deutsches Patent 4 102 087A1, 1992.
- [14] X. Li, G. Ouyang, X.P. Guan und R. Du, “Ram position control in plastic injection molding machines with higher-order iterative learning”, *Control and Intelligent Systems*, Vol. 34, Nr. 1, S. 64–72, 2006.
- [15] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Boston, USA: Birkhäuser, 2003.
- [16] N.D. Manring, *Hydraulic Control Systems*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2005.
- [17] N.D. Manring und R.E. Johnson, “Modeling and designing a variable-displacement open-loop pump”, *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, Nr. 2, S. 267–271, 1996.
- [18] D. McCloy und H.R. Martin, *Control of Fluid Power: Analysis and Design*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1980.
- [19] H.E. Merritt, *Hydraulic Control Systems*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1967.
- [20] K. Takeuchi, Y. Akita und O. Hayakawa, “Control apparatus of variable delivery pump”, US Patent 4 932 840, 1990.
- [21] D. Wu, R. Burton, G. Schoenau und D. Bitner, “Establishing operating points for a linearized model of a load sensing system”, *Int. Journal of Fluid Power*, Vol. 3, Nr. 2, S. 47–54, 2002.

Systematische Wellendigital-Synthese für eine Klasse passiver verteilter Systeme

Christiane Leuer und Karlheinz Ochs
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik,
Ruhr-Universität Bochum
leuer@nt.rub.de, ochs@nt.rub.de*

Zusammenfassung

Die digitale Nachbildung passiver physikalischer Systeme mit dem Wellendigital-Konzept liefert numerische Algorithmen mit vielen wünschenswerten Eigenschaften. Liegt die Beschreibung des Systems lediglich in Form von Differentialgleichungen vor, so erweist sich die Nachbildung in der Regel als äußerst schwierig. Die Schwierigkeit besteht hierbei in der Synthese einer für die Wellendigitalmodellierung geeigneten Schaltung, die dem Entwickler ein tiefes schaltungstheoretisches Verständnis abverlangt. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, wird hier eine systematische Synthese einer kanonischen elektrischen Schaltung mit passiven Bauelementen angegeben. Für die Überführung dieser Schaltung in ein realisierbares Wellendigitalmodell werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt und an Beispielen aus Elektrodynamik, Mechanik und Kernphysik erläutert.

1 Einleitung

Angesichts der steigenden Leistungsfähigkeit digitaler Signalprozessoren wird es immer attraktiver, physikalische Systeme digital nachzubilden. Diese Nachbildungen können auf digitalen Signalprozessoren, oder mit Hilfe von Hardware-Beschreibungssprachen auf anwendungsspezifischen Chips, programmiert werden. Im Gegensatz zum physikalischen System können die Programme flexibel modifiziert oder erweitert werden. Anders als bei einer Simulation, die nur in einem kurzen Zeitraum durchgeführt wird, muss eine digitale Nachbildung das Systemverhalten über lange Zeitspannen hinweg imitieren. Eingebaut in Mobilfunktelefone, Autoradios, etc. müssen digitale Nachbildungen jahrelang zuverlässig arbeiten und unterliegen deshalb strengen Anforderungen. Aus Effizienzgründen werden stets möglichst geringe Wortlängen gefordert, wodurch Signale und Koeffizienten einer digitalen Nachbildung relativ groben Quantisierungen unterliegen. Die Nachbildung muss daher einerseits Signalquantisierungen geeignet berücksichtigen und andererseits eine geringe Koeffizientenempfindlichkeit aufweisen.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

Dies wird beim Wellendigital(WD)-Konzept [2] erreicht, indem die Passivität des physikalischen Systems auf das nachbildende WD-Modell übertragen wird. Diese Nachbildung ist insbesondere für lange Betriebsdauern geeignet, da die Quantisierung der Signale und der Koeffizienten unter Berücksichtigung der Passivität auf einfachste Weise durchgeführt werden kann. Durch die Einbeziehung physikalischer Eigenschaften überträgt sich zudem das Lokalisierungsprinzip und prädestiniert den WD-Algorithmus somit für eine massive Parallelverarbeitung [6].

Die WD-Modellierung eines analogen passiven Systems erfolgt in mehreren Schritten, deren Ausgangspunkt ein Verhaltensmodell ist. Die Koordinaten des Verhaltensmodells werden zunächst transformiert, um systematisch zu einem mehrdimensional kausalen und passiven Modell zu gelangen. Dieses nun bezüglich der neuen Koordinaten kausale und passive Modell wird durch eine intern passive Referenzschaltung nachgebildet, die elementweise in ein algorithmisches Modell in Form einer realisierbaren WD-Struktur überführt werden kann.

Die größte Schwierigkeit bei der Anwendung des WD-Konzeptes liegt im Auffinden einer geeigneten Referenzschaltung, das dem Entwickler fundierte Kenntnisse der Schaltungstheorie, sehr viel Erfahrung und Intuition abverlangt. Zur Unterstützung des Entwicklers stellen wir für eine Klasse partieller Differentialgleichungen eine systematische Methode zur Herleitung einer Referenzschaltung vor. Bei der Referenzschaltung handelt es sich nicht um eine real existierende Schaltung, sondern vielmehr um eine elektrische Repräsentation mathematischer Gleichungen. Während die Beschreibung in Form von Differentialgleichungen relativ abstrakt ist, erleichtert die elektrische Interpretation eine Beurteilung des Systemverhaltens. Die Entlastung des Entwicklers beim Auffinden einer Referenzschaltung geht dabei so weit, dass sich sogar die WD-Algorithmen automatisch generieren lassen. Dazu wurde das in [10] vorgestellte Verfahren weiter ausgearbeitet und auf weitere Beispiele angewandt.

Dieser Konferenzbeitrag ist wie folgt aufgebaut: Im Abschnitt 2 wird die betrachtete Klasse von Systemen eingeführt. Es folgen die Koordinatentransformation sowie die systematische Synthese einer intern mehrdimensional passiven elektrischen Schaltung in Abschnitt 4. Die Überführung in eine realisierbare WD-Struktur wird in Abschnitt 5 behandelt. Dabei werden zwei Ansätze vorgestellt: Die WD-Struktur kann vollkommen schematisch aus einer Faktorisierung der Streumatrix des energieneutralen Netzes oder durch manuelle Umformungen der elektrischen Schaltung in eine Referenzschaltung gewonnen werden, deren elementweise Überführung in den WD-Bereich frei von verzögerungsfreien gerichteten Schleifen ist. Zur Demonstration der Methode werden in Abschnitt 6 die Leitungsgleichungen, die Timoshenko-Gleichungen, die Maxwell-Gleichungen, die Neutronendifusionsgleichungen und die Navier-Gleichung herangezogen.

2 Problemstellung

Betrachtet werden verteilte lineare passive physikalische Systeme, in denen sich alle Vorgänge mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Der Ortsvektor \mathbf{r} der $k - 1$ unabhängigen kartesischen Ortskoordinaten des Systems sowie die Zeit t werden in einem Vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T, v_k t]^T$ zusammengefasst. Dabei wird die Zeit mit einer positiven Ge-

schwindigkeit v_k gewichtet, um identische Dimensionen aller Koordinaten zu erhalten. Für drei Ortskoordinaten ergibt sich beispielsweise $\mathbf{x} = [x, y, z, v_4 t]^T$. Als Ausgangspunkt der digitalen Nachbildung werden die partiellen Differentialgleichungen (PDEs)

$$(\mathbf{L}_t D_t + \sum_{\xi} \mathbf{L}_{\xi} D_{\xi} + \mathbf{Z}) \mathbf{i} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{L}_t, \mathbf{L}_{\xi}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

betrachtet, wobei die Operatoren D_t und D_{ξ} die partiellen Ableitungen

$$D_t = \partial/\partial t \quad \text{bzw.} \quad D_{\xi} = \partial/\partial \xi \quad (2)$$

sind und ξ die Menge aller Ortskoordinaten durchläuft. Die gestellten Anforderungen an das physikalische System implizieren folgende Einschränkungen an die Matrizen [18]:

1. Die Forderung nach einem passiven System führt auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$(\mathbf{Z} + \mathbf{Z})^T \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_{\xi} = \mathbf{L}_{\xi}^T, \quad \mathbf{L}_t = \mathbf{L}_t^T \geq \mathbf{0}. \quad (3)$$

2. Mit der zusätzlichen Forderung nach endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit verschärft sich die letztgenannte Bedingung von positiver Semidefinitheit auf positive Definitheit:

$$\mathbf{L}_t > \mathbf{0}. \quad (4)$$

Jede Ortsverschiebung kann folglich mit einer Verzögerung linear kombiniert werden. PDEs, die Probleme mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit beschreiben, werden als hyperbolische PDEs bezeichnet [4].

3. Die Forderung nach Linearität des physikalischen Systems ist in dem Sinne zu verstehen, dass das Superpositionsprinzip erfüllt ist. Dazu dürfen die vorkommenden Matrizen von Zeit und Ort, nicht jedoch von \mathbf{i} abhängen.

Insgesamt liegt mit diesen Einschränkungen ein passives lineares hyperbolisches PDE-System vor.

Im Gegensatz zu einem Verhaltensmodell in Form einer einzigen PDE der Ordnung n besitzt ein System der Form (1) aus n gekoppelten PDEs erster Ordnung zusätzliche Strukturinformation, die Aussagen über die Passivität des Systems ermöglicht sowie das Auffinden einer Referenzschaltung erleichtert [6].

3 Koordinatentransformation

Das passive PDE-System wird im Folgenden durch eine intern mehrdimensional (MD) passive elektrische Schaltung modelliert. Die interne MD-Passivität der Referenzschaltung bewirkt Kausalität der zugehörigen WD-Struktur und ermöglicht die Sicherstellung ihrer Robustheit gegenüber Quantisierungsfehlern [7].

MD-Schaltungen unterscheiden sich von klassischen Schaltungen lediglich darin, dass die auftretenden Kondensatoren und Spulen nicht nur Zeit-, sondern auch Ortsableitungen repräsentieren. Die interne Passivität einer klassischen elektrischen Schaltung

lässt sich an der Passivität aller Bauelemente ablesen. Sie folgt aus der Energieerhaltung, die sich ausschließlich auf die Zeit bezieht und wird daher auch als interne physikalische bzw. 1D-Passivität bezeichnet. Die MD-Passivität bezieht sich dagegen auf sämtliche unabhängigen Koordinaten und überträgt die Konzepte der 1D-Passivität auf MD-Schaltungen. Für die Untersuchung der MD-Passivität wird zunächst MD-Kausalität vorausgesetzt, d. h., es wird eine positive Ablaufrichtung aller unabhängigen Koordinaten angenommen. Dies ist für die Koordinaten \mathbf{x} des betrachteten Systems i. A. nicht erfüllt. Um MD-Kausalität zu erreichen, wird entsprechend [7] eine Koordinatentransformation durchgeführt. Dazu werden die alten Koordinaten \mathbf{x} mit einer zeilenregulären Transformationsmatrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{k \times k'}$ über den Zusammenhang

$$\mathbf{x} = v_0 \mathbf{H} \mathbf{t} \quad (5)$$

in $k' \geq k$ neue Zeitkoordinaten $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_{k'}]^T$ transformiert. Umgekehrt erhält man mit einer Rechtsinversen \mathbf{H}^{-R} die Beziehung

$$\mathbf{t} = v_0^{-1} \mathbf{H}^{-R} \mathbf{x} . \quad (6)$$

Die positive Geschwindigkeit v_0 sorgt lediglich für konsistente physikalische Dimensionen und kann beliebig gewählt werden. Durch die Transformation ergibt sich zwischen den Differentialoperatoren in alten und neuen Koordinaten $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}$ bzw. $\mathbf{D}_{\mathbf{t}} = [D_{t_1}, \dots, D_{t_{k'}}]^T$ der Zusammenhang

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}} = v_0^{-1} \mathbf{H}^{-RT} \mathbf{D}_{\mathbf{t}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{t}} = v_0 \mathbf{H}^T \mathbf{D}_{\mathbf{x}} . \quad (7)$$

Der Operator $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}$ setzt sich dabei aus den Ortsableitungen D_{ξ} sowie der gewichteten Zeitableitung $v_k^{-1} D_t$ zusammen.

Wahl der Transformationsmatrix. Eine besonders vorteilhafte Wahl für die Transformationsmatrix \mathbf{H} und ihre Rechtsinverse ist

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{k-1} & -\mathbf{1}_{k-1} \\ \mathbf{e}_{k-1}^T & \mathbf{e}_{k-1}^T \end{bmatrix} , \quad \mathbf{H}^{-R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{k-1} & \frac{\mathbf{e}_{k-1}}{k-1} \\ -\mathbf{1}_{k-1} & \frac{\mathbf{e}_{k-1}}{k-1} \end{bmatrix} , \quad (8)$$

wobei \mathbf{e}_{k-1} einen Vektor aus $(k-1)$ Einsen und $\mathbf{1}_{k-1}$ eine Einheitsmatrix der Dimension $(k-1)$ bezeichnet. Die Transformation liefert $k' = 2(k-1)$ neue Koordinaten. Die neuen Differentialoperatoren D_{t_k} ergeben sich jeweils als Paare, indem für jede der Ortskoordinaten ξ eine positive oder negative Ortsableitung zu einer positiven Zeitableitung addiert wird:

$$D_{\xi_+} = v_0 (v_k^{-1} D_t + D_{\xi}) \quad \text{und} \quad D_{\xi_-} = v_0 (v_k^{-1} D_t - D_{\xi}) . \quad (9)$$

Umgekehrt können die neuen Differentialoperatoren durch Addition und Subtraktion zu einer reinen Zeit- oder einer reinen Ortsableitung kombiniert werden

$$D_{\xi_+} + D_{\xi_-} = \frac{2v_0}{v_k} D_t \quad \text{bzw.} \quad D_{\xi_+} - D_{\xi_-} = 2v_0 D_{\xi} . \quad (10)$$

Für drei Ortskoordinaten erhält man beispielsweise $\mathbf{D}_x = [D_x, D_y, D_z, v_4^{-1}D_t]^T$ und $\mathbf{D}_t = [D_{x_+}, D_{x_-}, D_{y_+}, D_{y_-}, D_{z_+}, D_{z_-}]^T$. Werden die ursprünglichen Differentialoperatoren durch die neuen ausgedrückt, so kann das PDE-System (1) umgeordnet werden zu

$$\left[\sum_{\xi} (\mathbf{L}_{\xi_+} D_{\xi_+} + \mathbf{L}_{\xi_-} D_{\xi_-}) + \mathbf{Z} \right] \mathbf{i} = \mathbf{u}_0 \quad (11)$$

mit den transformierten Induktivitätsmatrizen

$$\mathbf{L}_{\xi_+} = \frac{1}{2v_0} \left(\frac{v_k}{k-1} \mathbf{L}_t + \mathbf{L}_{\xi} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_{\xi_-} = \frac{1}{2v_0} \left(\frac{v_k}{k-1} \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_{\xi} \right). \quad (12)$$

Aus der Symmetrie der ursprünglichen Induktivitäten folgt die Symmetrie aller transformierten Induktivitäten \mathbf{L}_{ξ_+} und \mathbf{L}_{ξ_-} . Die entsprechenden Überlegungen für eine Koordinatentransformation mit beliebiger Transformationsmatrix \mathbf{H} finden sich in [10].

3.1 Mehrdimensionale Kausalität

Nach [6] ist das physikalische System in den neuen Koordinaten MD-kausal, wenn „für jedes stattfindende Phänomen keine der neuen Koordinaten jemals abnimmt, während mindestens eine tatsächlich zunimmt“. Für die hier betrachteten linearen Systeme und die Koordinatentransformation nach Gleichung (8) ergibt sich daraus die schon für orthogonale Koordinatentransformationen bekannte Bedingung

$$v_k \geq \sqrt{k-1} v_{\max}, \quad (13)$$

wobei v_{\max} die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit der betrachteten Phänomene bezeichnet [6].

3.2 Mehrdimensionale Passivität

Die Bedingungen der MD-Passivität können anhand von Abbildung 1 veranschaulicht werden. Dazu interpretiert man in Gleichung (11) den Vektor \mathbf{i} als Vektor von Spulenströmen und die rechte Seite \mathbf{u}_0 als Vektor von Quellenspannungen idealer Spannungsquellen. Damit kommt \mathbf{Z} die Rolle einer Widerstandsmatrix zu, während \mathbf{L}_{ξ_+} und \mathbf{L}_{ξ_-} als Induktivitätsmatrizen mehrdimensionaler gekoppelter Spulen aufgefasst werden. Die Doppellinien in der Schaltung kennzeichnen Mehrtor-Elemente bzw. vektorielle Größen. Die im System gespeicherte Energiedichte \mathbf{w}_s besteht aus den Energiedichten aller Spulen. Für drei Ortskoordinaten erhält man beispielsweise

$$\mathbf{w}_s = [w_{x_+}, w_{x_-}, w_{y_+}, w_{y_-}, w_{z_+}, w_{z_-}]^T \quad \text{mit} \quad w_{\xi_{\pm}} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L}_{\xi_{\pm}} \mathbf{i}. \quad (14)$$

Die dem quellenfreien System in Abbildung 1b über die Systemgrenzen zugeführte Leistung ergibt sich zu $p = \mathbf{i}^T \mathbf{u}$.

Nach [6] ist ein hinreichend stetiges System MD-passiv, wenn es MD-kausal ist sowie

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{t}) \geq \mathbf{0} \quad (\text{elementweise}) \quad \text{und} \quad p(\mathbf{t}) \geq \mathbf{D}_{\mathbf{t}}^T \mathbf{w}_s(\mathbf{t}). \quad (15)$$

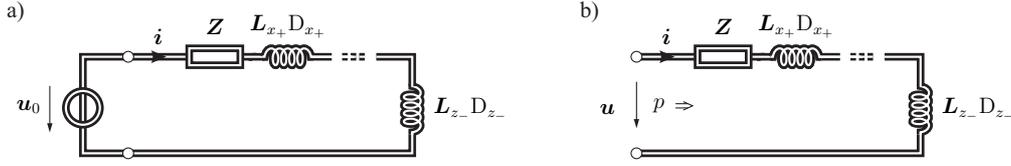


Abbildung 1: Interpretation der transformierten PDE durch eine elektrische Schaltung

Das transformierte System (11) ist somit MD-passiv in \mathbf{t} , wenn Bedingung (13) erfüllt ist und

$$\mathbf{L}_{\xi_+} = \mathbf{L}_{\xi_+}^T \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_{\xi_-} = \mathbf{L}_{\xi_-}^T \geq \mathbf{0}, \quad \forall \xi. \quad (16)$$

Gleichung (12) zeigt, dass für ausreichend großes v_k ein physikalisch passives System immer in ein MD-passives System transformiert werden kann. Eine lineare MD elektrische Schaltung ist intern MD-passiv, wenn sie MD-kausal ist und alle Bauelemente MD-passiv sind. Widerstände, Spulen und Kondensatoren sind MD-passiv, wenn sie nichtnegative Bauelementwerte besitzen, Gyratoren und Übertrager sind unabhängig von ihren Parametern MD-energieneutral.

4 Intern MD-passive elektrische Schaltung

Für das betrachtete PDE-System (1) bzw. das transformierte PDE-System (11) mit symmetrischen und positiv semidefiniten Induktivitätsmatrizen (16) soll eine intern MD-passive elektrische Schaltung angegeben werden.

Realisierung des quellen- und dynamikfreien Anteils. Die Widerstandsmatrix \mathbf{Z} beschreibt den quellen- und dynamikfreien Teil des Gesamtsystems. Eine kanonische, intern passive Realisierung ist in [16] zu finden. Dazu wird die Matrix \mathbf{Z} in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegt

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_a \quad \text{mit} \quad \mathbf{Z}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T), \quad \mathbf{Z}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T). \quad (17)$$

Die Matrix \mathbf{Z}_s ist nach Voraussetzung (3) positiv semidefinit und kann in

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{N}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{N}_0 \quad (18)$$

mit einer positiv semidefiniten Diagonalmatrix \mathbf{R}_0 und einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{N}_0 mit Einsen auf der Hauptdiagonalen zerlegt werden. Dazu kann die Cholesky-Faktorisierung bekanntlich auf positiv semidefinite Matrizen erweitert werden. Werden die Elemente der Matrix \mathbf{Z}_s mit $z_{\nu\mu}$ bezeichnet, die Elemente von \mathbf{N}_0 unterhalb der Hauptdiagonalen mit $n_{\nu\mu}$, und die Diagonalelemente der Matrix \mathbf{R}_0 mit $r_{\nu\nu}$, so ergibt sich die

Berechnungsvorschrift

$$\nu = \mu : \quad r_{\nu\nu} = z_{\nu\nu} - \sum_{\kappa=\nu+1}^n n_{\kappa\nu}^2 r_{\kappa\kappa}, \quad (19)$$

$$\nu > \mu : \quad n_{\nu\mu} = \begin{cases} \frac{1}{r_{\nu\nu}} \left(z_{\nu\mu} - \sum_{\kappa=\nu+1}^n n_{\kappa\nu} n_{\kappa\mu} r_{\kappa\kappa} \right) & \text{falls } r_{\nu\nu} \neq 0 \\ 0 & \text{falls } r_{\nu\nu} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Beginnend bei $\nu = \mu = n$ können mit diesen Beziehungen die Matrizen der Cholesky-Faktorisierung bestimmt werden. Der antimetrische Anteil \mathbf{Z}_a kann in

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{R}_G - \mathbf{R}_G^T \quad (21)$$

mit einer strikt unteren Dreiecksmatrix \mathbf{R}_G zerlegt werden.

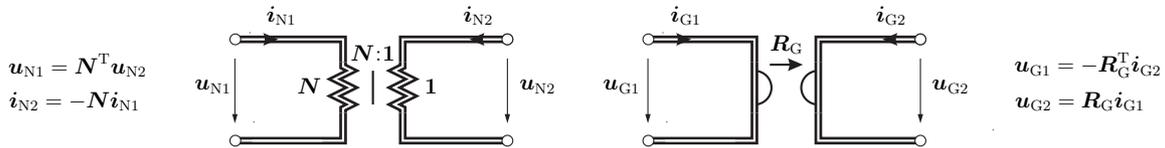


Abbildung 2: Mehrtor-Übertrager und Mehrtor-Gyrator

Mit den Bestimmungsgleichungen des in Abbildung 2 dargestellten Mehrtor-Übertragers [1] und Mehrtor-Gyrators [16] können der symmetrische und antimetrische Anteil der Matrix \mathbf{Z} mit den in Abbildung 3a,b dargestellten Schaltungen realisiert werden. Das Übersetzungsverhältnis $\mathbf{N}:1$ des Mehrtor-Übertragers wird in den folgenden Abbildungen je nach Platz auf eine der beiden im Bild gezeigten Arten angegeben.

Realisierung des dynamischen Anteils. Aufgrund ihrer Symmetrie und positiven Semidefinitheit können die transformierten Induktivitätsmatrizen $\mathbf{L}_{\xi_{\pm}}$ ebenso wie \mathbf{Z}_s mithilfe einer Cholesky-Zerlegung auf Diagonalform transformiert werden

$$\mathbf{L}_{\xi_+} = \mathbf{N}_{\xi_+}^T \mathbf{L}_{\xi_{0+}} \mathbf{N}_{\xi_+}, \quad \mathbf{L}_{\xi_-} = \mathbf{N}_{\xi_-}^T \mathbf{L}_{\xi_{0-}} \mathbf{N}_{\xi_-}. \quad (22)$$

Die unteren Dreiecksmatrizen $\mathbf{N}_{\xi_{\pm}}$ besitzen wiederum Einsen auf der Hauptdiagonalen, die Diagonalmatrizen $\mathbf{L}_{\xi_{0\pm}}$ enthalten ausschließlich nichtnegative Elemente. Damit können die transformierten Induktivitätsmatrizen in Anlehnung an [16] durch die in Abbildung 3c dargestellte Schaltung intern MD-passiv realisiert werden. Dafür müssen jedoch die Matrizen der Übersetzungsverhältnisse $\mathbf{N}_{\xi_{\pm}}$ im Bezug auf ξ_+ bzw. ξ_- konstant sein. Bei einer geeigneten Behandlung der Übergänge genügt hier auch eine lediglich abschnittsweise Konstanz. Die Verallgemeinerung der Synthese auf beliebig veränderliche Induktivitätsmatrizen ist zukünftigen Forschungsarbeiten vorbehalten.

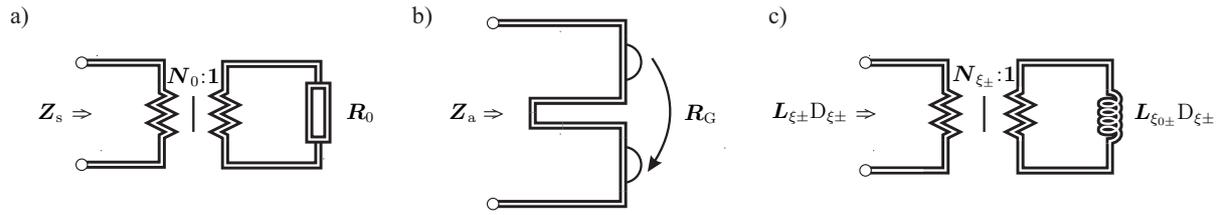


Abbildung 3: Kanonische intern MD-passive Realisierungen der Teilmatrizen

Verschaltung der Komponenten. Die betrachteten Komponenten werden in Reihe geschaltet, so dass sich ihre Spannungen addieren. Die rechte Seite \mathbf{u}_0 des PDE-Systems kann durch ideale Spannungsquellen realisiert werden. So ergibt sich die intern MD-passive Schaltung in Abbildung 4. Dabei wurde beispielhaft der Fall für 3 Ortskoordinaten gezeichnet. Aufgrund der Diagonalgestalt der Matrizen $\mathbf{L}_{\xi_{0\pm}}$ sind alle auftretenden Spulen ohne Kopplung. Die Schaltung ist kanonisch in dem Sinne, dass sie systematisch aufgestellt werden kann und die Anzahl der Freiheitsgrade der Anzahl der Bauelemente entspricht.

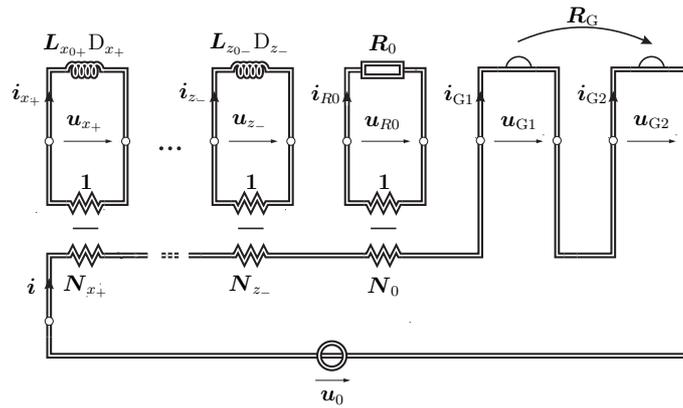


Abbildung 4: Intern MD-passive Schaltung mit idealen Spannungsquellen

5 Wellendigital-Struktur

Mithilfe des WD-Konzeptes [2] soll das betrachtete PDE-System in eine realisierbare WD-Struktur überführt werden. Dazu führt man torweise anstelle der elektrischen Größen Leistungswellen

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u} + \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{i} \right), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u} - \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{i} \right) = \mathbf{S} \mathbf{a}, \quad (23)$$

ein. Ein Tor stellt dabei ein Klemmenpaar dar, an dem ein- und ausfließender Strom identisch sind. Die positiv definite Diagonalmatrix \mathbf{R} wird als Matrix der Torbezugswiderstände bezeichnet. Aus ihr ergibt sich durch Inversion der Diagonalelemente die Matrix \mathbf{R}^{-1} . Die Vektoren \mathbf{i} und \mathbf{u} stellen Torströme und Torspannungen dar, \mathbf{a} und \mathbf{b}

werden als ein- und ausfallende Wellen bezeichnet. Für energieneutrale Mehrtore hängen sie über die Streumatrix \mathbf{S} zusammen. Die Streumatrizen eines Mehrtor-Übertragers und eines Mehrtor-Gyrators sind in Tabelle 1 dargestellt.

		$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} 2\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^T - 1 & 2\mathbf{P}\mathbf{Q} \\ 2\mathbf{Q}\mathbf{P}^T & 2\mathbf{Q} - 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Q} = (\mathbf{1} + \mathbf{P}^T\mathbf{P})^{-1}$ $\mathbf{P} = \mathbf{R}_1^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}^T\mathbf{R}_2^{\frac{1}{2}}$
		$\mathbf{S}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{1} - 2\mathbf{P} & -2\mathbf{P}\mathbf{Q}^T \\ 2\mathbf{Q}\mathbf{P} & 2\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T - \mathbf{1} \end{bmatrix}$ $\mathbf{P} = (\mathbf{1} + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}$ $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_2^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_G\mathbf{R}_1^{-\frac{1}{2}}$

Tabelle 1: Zur Berechnung der Streumatrizen von Mehrtor-Übertrager und -Gyrator

Die WD-Realisierung der Spulen. Für die Überführung der in der Schaltung verwendeten Bauelemente und Verbindungen in den WD-Bereich wird auf [2] verwiesen. An dieser Stelle wird lediglich die WD-Realisierung der Spulen betrachtet. Eine Diskretisierung der Beziehung $\mathbf{u} = \mathbf{L}_{\xi_{0\pm}} \mathbf{D}_{\xi_{\pm}} \mathbf{i}$ mit der Trapezregel führt auf

$$\mathbf{b}(t) = -\mathbf{a}(t - \Xi_{\pm}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_{\xi_{\pm}} = \frac{2}{\Xi_{\pm}} \mathbf{L}_{\xi_{0\pm}} \quad (24)$$

und dem Verschiebungsvektor $\Xi_{\pm} = \Xi_{\pm} \mathbf{e}_{\xi_{\pm}}$. Dabei bezeichnet $\mathbf{e}_{\xi_{\pm}}$ den Einheitsvektor in Richtung der entsprechenden neuen Koordinate.

Im Diskreten liegt ein Gitter von Rechenpunkten vor, dessen zeitliche und örtliche Schrittweiten im Folgenden mit T bzw. X bezeichnet werden. Damit jeder Verschiebungsvektor Ξ_{\pm} , der von einem Gitterpunkt ausgeht, wieder auf einem Gitterpunkt endet und dabei keine Orts- oder Zeitschichten „übersprungen“ werden, müssen die Schrittweiten Ξ_{\pm} die Bedingung

$$v_k T = \Xi_{\pm} = X \quad (25)$$

erfüllen. Jede Zeit- und Ortsschicht hängt so nur von der unmittelbar vorhergehenden Schicht ab, was zu einem minimalen Speicheraufwand führt. Damit ergeben sich die Verschiebungsvektoren bezüglich der Einheitsvektoren \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_{ξ} der alten Koordinaten zu

$$\Xi_{+} = \mathbf{T} + X\mathbf{e}_{\xi}, \quad \Xi_{-} = \mathbf{T} - X\mathbf{e}_{\xi} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = T\mathbf{e}_t. \quad (26)$$

Die reine Zeitverschiebung wird mit \mathbf{T} bezeichnet. Die Geschwindigkeit v_k stellt gerade das Verhältnis aus zeitlicher und örtlicher Schrittweite dar, siehe Gleichung (25).

Die Umwandlung der Quellen. In der intern MD-passiven Schaltung in Abbildung 4 sichert die galvanische Trennung bei Übertragern und Gyrotoren die Erfüllung der Torbedingungen an den einzelnen Elementen. Problematisch bei dieser Schaltung sind jedoch die idealen Quellen, die im WD-Bereich zu verzögerungsfreien gerichteten Schleifen führen. Um dieses Problem zu umgehen, werden wie in [16] die idealen Spannungsquellen über den $N_0:1$ -Übertrager transformiert und mit den ohmschen Widerständen R_0 zu resistiven Spannungsquellen kombiniert, siehe Abbildung 5a.

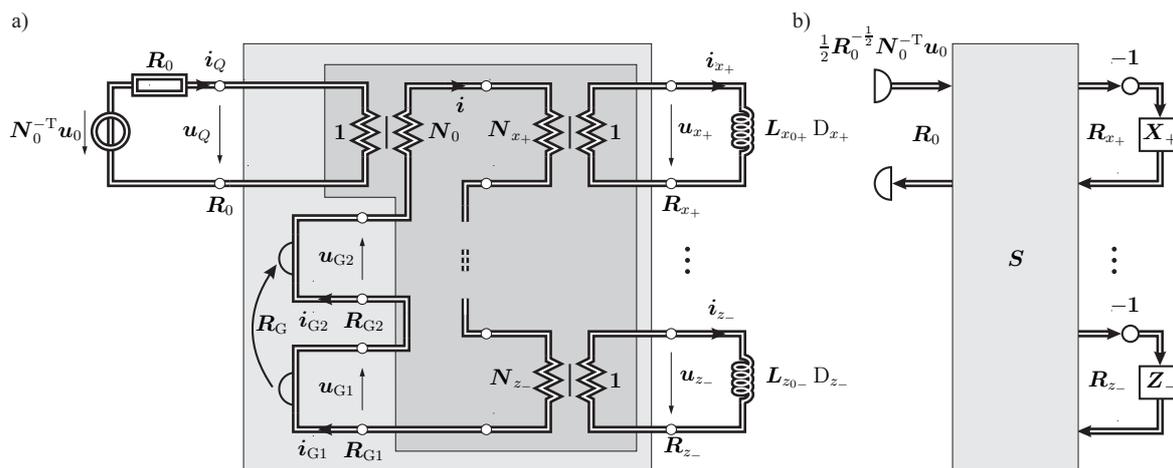


Abbildung 5: Intern MD-passive Schaltung und Schema der WD-Struktur

5.1 Schematische Erzeugung der WD-Struktur

Eine elementweise Überführung der in Abbildung 5a dargestellten intern MD-passiven Schaltung in den WD-Bereich führt i. A. noch immer zu verzögerungsfreien gerichteten Schleifen in der WD-Struktur. Um diese zu vermeiden, kann die WD-Realisierung des Koppelnetzes (hellgrau hinterlegt), das alle energieneutralen Elemente der Schaltung enthält, direkt aus dessen Streumatrix S gewonnen werden. Aufgrund der Energieneutralität des Koppelnetzes ist S unitär und kann mit einer Householder- bzw. Givens-Faktorisierung zerlegt werden. So entsteht eine realisierbare WD-Struktur, die elementweise in eine intern MD-passive Referenzschaltung überführt werden kann [9], [14].

Für die Bestimmung von S wird zuerst das in Abbildung 5a dunkelgrau hinterlegte Verbindungsnetz betrachtet, das alle energieneutralen reziproken Elemente der Schaltung enthält. Es besitzt die verallgemeinerte Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix B_c sowie die Matrix der Torbezugswiderstände R_c mit

$$B_c = [N_0^T \quad -N_{x+}^T \quad \dots \quad -N_{z-}^T \quad -1 \quad -1] , \quad (27)$$

$$R_c = \text{diag} [R_0 \quad R_{x+} \quad \dots \quad R_{z-} \quad R_{G1} \quad R_{G2}] . \quad (28)$$

Für die Matrizen der Torbezugswiderstände R_{G1} und R_{G2} des Gyrotors können beliebige positiv definite Diagonalmatrizen gewählt werden. Damit ergibt sich nach [13] die

Leistungswellen-Streumatrix des Verbindungsnetzes zu

$$\mathbf{S}_c = \mathbf{1} - 2\mathbf{C}^+\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{c,11} & \mathbf{S}_{c,12} \\ \mathbf{S}_{c,21} & \mathbf{S}_{c,22} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}_c \mathbf{R}_c^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{S}_{c,22} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad (29)$$

wobei \mathbf{C}^+ die Moore-Penrose-Inverse der Matrix \mathbf{C} bezeichnet. Wird nun der Mehrtor-Gyrator mit dem Verbindungsnetz zusammengefasst, so entsteht das Koppelnetz, dessen Streumatrix mit der Streumatrix \mathbf{S}_G des Mehrtor-Gyrators aus Tabelle 1 zu

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{c,11} + \mathbf{S}_{c,12} \mathbf{S}_G (\mathbf{1} - \mathbf{S}_{c,22} \mathbf{S}_G)^{-1} \mathbf{S}_{c,21} \quad (30)$$

berechnet werden kann. Kurzschlüsse, die durch singuläre Matrizen \mathbf{Z}_s oder $\mathbf{L}_{\xi_{0\pm}}$ entstehen, führen ebenso wie Leerläufe einzelner Tore, die sich durch Entartung von Parametern ergeben, zu verzögerungsfreien gerichteten Schleifen im WD-Bereich. Sie werden aufgrund ihrer Energieneutralität zum Koppelnetz gezählt und führen auf eine modifizierte Streumatrix \mathbf{S} von kleinerer Dimension. So ergibt sich schließlich das in Abbildung 5b dargestellte Schema einer realisierbaren WD-Struktur.

Mit dem beschriebenen Verfahren kann für jedes passive PDE-System der Form (1) eine intern MD-passive Schaltung und die zugehörige realisierbare WD-Struktur synthetisiert werden. Aus der WD-Struktur kann schließlich eine Referenzschaltung des Systems abgeleitet werden. Die Vorgehensweise ist schematisch und führt zu automatisch generierbaren aber relativ aufwändigen Referenzschaltungen und WD-Algorithmen. Der Aufwand der Householder-Faktorisierung, der quadratisch zur Dimension der Streumatrix ansteigt, kann verringert werden, indem das Koppelnetz zuerst in Serien- und Parallelverbindungen sowie nicht weiter zerlegbare Einheiten aufgespalten wird. Auch diese Aufspaltung ist automatisierbar [17].

5.2 Vereinfachungen der Schaltung

Eine andere Möglichkeit, eine realisierbare WD-Struktur zu erhalten, besteht in einer manuellen Nachbearbeitung der elektrischen Schaltung. Die Schaltung aus Abbildung 5a wird dabei so umgeformt, dass Elemente mit besonders einfacher WD-Struktur entstehen. Im Idealfall führen diese Umformungen direkt auf eine Referenzschaltung. Andernfalls kann die Schaltung zumindest aufgespalten werden in einen möglichst großen Anteil, der elementweise in eine realisierbare WD-Struktur überführt werden kann und ein verbleibendes, stark reduziertes Koppelnetz, das mit der oben beschriebenen Methode synthetisiert wird. Dieser Ansatz wird anhand der in Abschnitt 6 dargestellten Beispiele verdeutlicht. Er erfordert zwar schaltungstheoretische Kenntnisse, führt aber zu deutlich reduzierten Referenzschaltungen und folglich zu effizienteren WD-Algorithmen. Die Umformungen der Schaltung basieren im Wesentlichen auf den folgenden Äquivalenzen:

1. Zwei Übertrager mit den Übersetzungsverhältnissen $N:1$ und $-N:1$ können wie in Abbildung 6 gezeigt, zu einem Jaumann-Adaptor kombiniert werden [3]. Während die elementweise Überführung in den WD-Bereich bei Schaltung a zu verzögerungsfreien gerichteten Schleifen führt, ist die zu Schaltung b gehörige WD-Struktur bei geeigneter Wahl der Torbezugswiderstände problemlos realisierbar. Das T-förmige

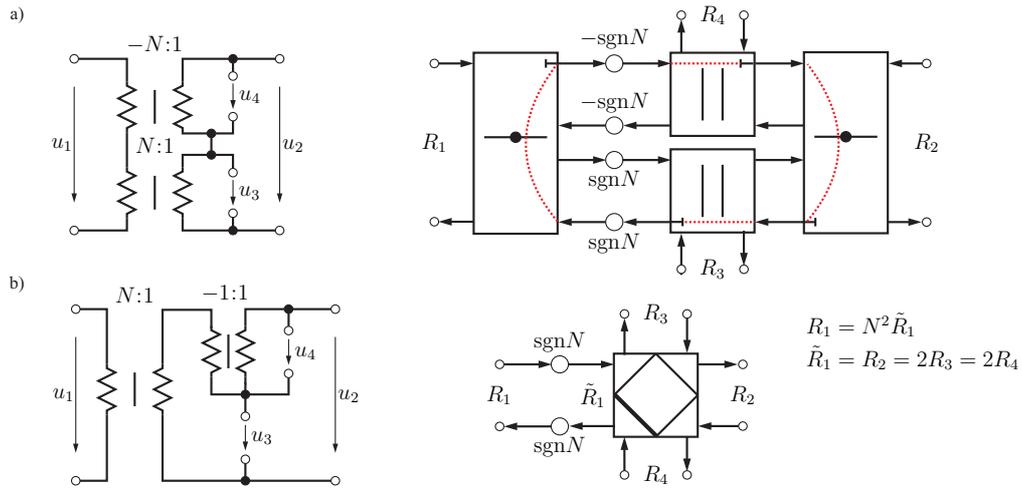


Abbildung 6: Umformung eines Übertragernetzes zu einem Jaumann-Adaptor

Symbol rechts in Abbildung 6a kennzeichnet ein reflexionsfreies Tor, dessen ausfallende Welle nicht von seiner einfallenden Welle abhängt. Die gestrichelte Linie markiert beispielhaft eine der auftretenden verzögerungsfreien gerichteten Schleifen.

2. Mit der in Abbildung 7 dargestellten Umformung kann eine Spule, die in diesem Fall eine zeitliche Ableitung repräsentiert, auf die andere Seite des Jaumann-Adaptors transformiert werden. Diese Äquivalenz gilt ausschließlich für Übersetzungsverhältnisse N , die von der Ortsvariablen ξ und der Zeit t unabhängig sind. Sie dient im Folgenden dazu, die Anzahl der Spulen in einer Schaltung zu reduzieren.

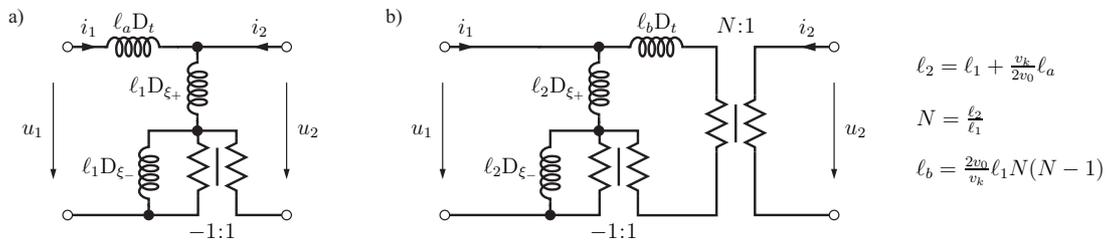


Abbildung 7: Transformation einer Spule auf die andere Seite eines Jaumann-Adaptors

6 Beispiele

Als Beispiele dienen Systeme aus ganz unterschiedlichen Bereichen, zu denen bereits WD-Modelle existieren, für die also schon Referenzschaltungen vorliegen, die mit sehr viel Erfahrung und schaltungstheoretischem Verständnis hergeleitet worden sind [3], [5], [8], [11], [12], [15]. Das vorgestellte Verfahren wird im Folgenden genutzt, um für diese Systeme systematisch Referenzschaltungen zu synthetisieren. Dazu wird jeweils zuerst eine intern MD-passive Schaltung nach Abbildung 5a aufgestellt, die dann mit den gezeigten Umformungen manuell nachbearbeitet wird. Ein Vergleich der schematisch erzeugten

Schaltungen mit den bereits bekannten Schaltungen ermöglicht eine Beurteilung des Verfahrens.

6.1 Die Leitungsgleichungen

Die Leitungsgleichungen beschreiben die Ausbreitung elektromagnetischer Vorgänge entlang einer parallel zur x -Achse liegenden Leitung und stellen ein lineares passives hyperbolisches PDE-System dar

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_t} D_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_x} D_x + \underbrace{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix}}_{\mathbf{i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_0}. \quad (31)$$

Dabei bezeichnen $\ell(x) > 0$ und $c(x) > 0$ den Induktivitäts- und Kapazitätsbelag der Leitung, $r(x, t) \geq 0$ den Widerstandsbelag und $g(x, t) \geq 0$ den Leitwertbelag. Die Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung wird mit $u(x, t)$ bzw. $i(x, t)$ bezeichnet.

Herleitung einer Referenzschaltung. Aufgrund der Diagonalgestalt der Matrix \mathbf{Z} ist kein Gyrotornetz erforderlich und man erhält $\mathbf{N}_0 = \mathbf{1}_2$ und $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Z}$. Mit der Transformationsmatrix nach Gleichung (8) liefert die Cholesky-Zerlegung der transformierten Induktivitätsmatrizen

$$\mathbf{L}_{x_{0\pm}} = \mathbf{diag}[\ell_1, \ell_2], \quad \mathbf{N}_{x_{\pm}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm N & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Der Deutlichkeit halber sei darauf hingewiesen, dass für die Synthese des dynamischen Anteils die Übersetzungsverhältnisse $\mathbf{N}_{x_{\pm}}$ abschnittsweise konstant sein müssen. Dieser Aspekt wird für die weiteren Beispiele nicht mehr aufgegriffen; hier führt er auf die Forderung nach einem abschnittsweise konstanten Induktivitätsbelag.

Die elektrische Schaltung nach Abbildung 5a lässt sich mit der in Abbildung 6 gezeigten Äquivalenz, der Beziehung (10) sowie durch eine Elimination des $N:1$ -Übertragers weiter vereinfachen. Die resultierende Referenzschaltung sowie die zugehörige WD-Struktur sind in Abbildung 8 dargestellt. Die Maschengleichungen der Maschen 1 und 2 repräsentieren die entsprechenden Zeilen des PDE-Systems. Die Referenzschaltung besitzt einen vergleichbaren Aufwand wie die bekannte Realisierung [5] und ist intern MD-passiv, wenn

$$v_2 \geq v_{\max} = \max(1/\sqrt{\ell c}), \quad (33)$$

wobei v_{\max} die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen auf der Leitung bezeichnet. Die Bedingung für MD-Passivität ist identisch mit der Bedingung für MD-Kausalität (13).

6.2 Die Timoshenko-Gleichungen

Die aus der Balkentheorie stammenden Timoshenko-Gleichungen

$$\rho A D_t^2 w = D_x [A \kappa G (D_x w + \psi)] + q \quad (34)$$

$$\rho J D_t^2 \psi = D_x (E J D_x \psi) - A \kappa G (D_x w + \psi) \quad (35)$$

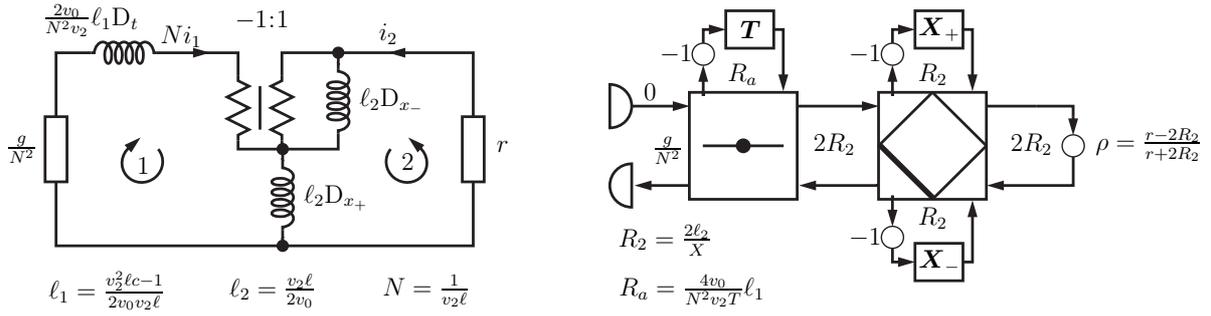


Abbildung 8: Referenzschaltung und WD-Struktur der Leitungsgleichungen

können durch Einführung der Geschwindigkeit v , der Winkelgeschwindigkeit ω , des Drehmomentes M und der Querkraft Q mit

$$v = D_t w, \quad \omega = D_t \psi, \quad M = E J D_x \psi, \quad Q = A \kappa G (D_x w + \psi) \quad (36)$$

sowie den Abkürzungen

$$a = \rho A > 0, \quad b = (A \kappa G)^{-1} > 0, \quad c = \rho J > 0, \quad d = (E J)^{-1} > 0, \quad (37)$$

in das lineare hyperbolische passive PDE-System [15]

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} b D_t & 0 & -D_x & -1 \\ 0 & d D_t & 0 & -D_x \\ -D_x & 0 & a D_t & 0 \\ 1 & -D_x & 0 & c D_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ M \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

umgeformt werden. Dabei bezeichnet $w(x, t)$ die transversale Auslenkung des Biegebalkens, $\psi(x, t)$ den Auslenkungswinkel, $q(x, t)$ eine Streckenlast, $\rho(x)$ die Dichte des Balkens, $E(x)$ den Elastizitätsmodul, $G(x)$ den Gleitmodul, $J(x)$ das Flächenträgheitsmoment, $A(x)$ den Balkenquerschnitt und $\kappa(x)$ den Timoshenko-Scher-Koeffizienten.

Herleitung einer Referenzschaltung. Aufgrund der schiefsymmetrischen Matrix $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a$ handelt es sich um ein verlustfreies System. Die Matrix \mathbf{R}_G besitzt lediglich in Zeile 4 und Spalte 1 den von null verschiedenen Eintrag 1. Eine Koordinatentransformation nach Gleichung (8) und eine anschließende Cholesky-Faktorisierung der transformierten Induktivitätsmatrizen führen auf

$$\mathbf{L}_{x_{0\pm}} = \mathbf{diag} [l_1, l_2, l_3, l_4], \quad \mathbf{N}_{x_{\pm}} = \mathbf{1}_4 \mp \mathbf{P}. \quad (39)$$

Die Matrix \mathbf{P} besitzt die von null verschiedenen Elemente $p_{31} = n_1$ und $p_{42} = n_2$. Mit diesen Parametern ist die Schaltung nach Abbildung 5a vollständig bestimmt. Sie kann unter Ausnutzung der Äquivalenz in Abbildung 6 und Gleichung (10) sowie nach Elimination des $n_2 : 1$ -Übertragers in die Referenzschaltung in Abbildung 9 überführt werden. Die Maschen 1 bis 4 realisieren die entsprechenden Zeilen des PDE-Systems.

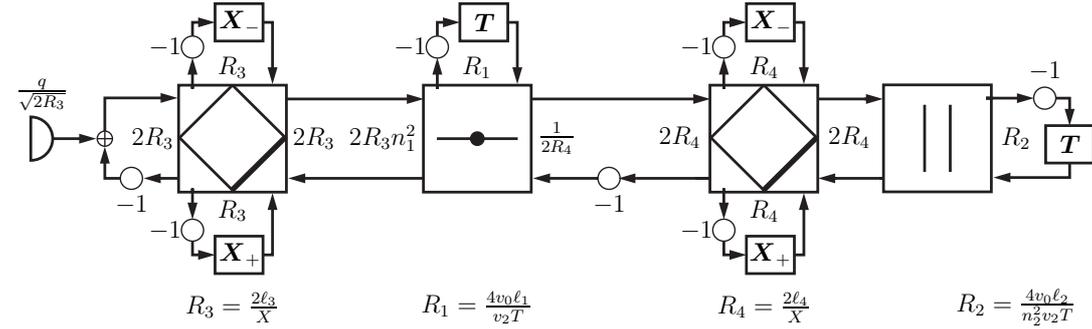
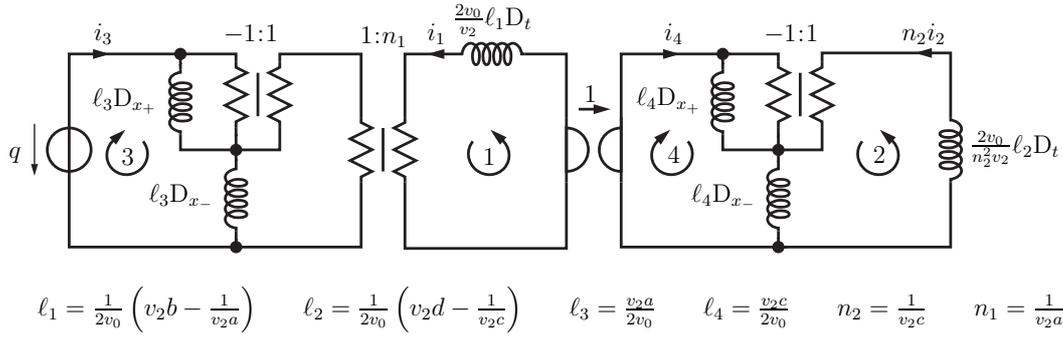


Abbildung 9: Referenzschaltung und WD-Struktur der Timoshenko-Gleichungen

Die vorliegende Referenzschaltung spart im Vergleich zur bekannten Schaltung [5] zwei Induktivitäten ein und führt so auf einen effizienteren Algorithmus. Für

$$v_2 \geq \max\left(1/\sqrt{ab}, 1/\sqrt{cd}\right) \iff v_2 \geq \max\left(\sqrt{\kappa G/\rho}, \sqrt{E/\rho}\right) \quad (40)$$

ist die Referenzschaltung intern MD-passiv. Die beiden Wurzelterme stellen gerade die charakteristischen Geschwindigkeiten des Systems dar [15]. Die Bedingung für MD-Passivität ist also wiederum identisch mit der Bedingung für MD-Kausalität (13).

6.3 Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon D_t \mathbf{E} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \mu D_t \tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (41)$$

geben den Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und magnetischer Erregung $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$ in einem linearen isotropen Medium mit der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r}, t) \geq 0$, der Permittivität $\varepsilon(\mathbf{r}) > 0$, der Permeabilität $\mu(\mathbf{r}) > 0$ und der freien Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ an. In kartesischen Koordinaten erhält man daraus das lineare passive

hyperbolische PDE-System

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} \sigma + \varepsilon D_t & 0 & 0 & 0 & D_z & -D_y \\ 0 & \sigma + \varepsilon D_t & 0 & -D_z & 0 & D_x \\ 0 & 0 & \sigma + \varepsilon D_t & D_y & -D_x & 0 \\ 0 & -D_z & D_y & \mu D_t & 0 & 0 \\ D_z & 0 & -D_x & 0 & \mu D_t & 0 \\ -D_y & D_x & 0 & 0 & 0 & \mu D_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_x \\ -J_y \\ -J_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Herleitung einer Referenzschaltung. Aufgrund der Diagonalgestalt der Matrix \mathbf{Z} ergibt sich $\mathbf{R}_G = \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}_0 = \mathbf{1}_6$. Der quellen- und dynamikfreie Anteil der Schaltung zerfällt in jeweils drei gleiche Widerstände mit den Werten σ bzw. μ . Eine Koordinatentransformation nach Gleichung (8) und eine anschließende Cholesky-Zerlegung der transformierten Induktivitätsmatrizen liefert

$$\mathbf{L}_{x_{0\pm}} = \text{diag}[\ell_1, \ell_2, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_3], \quad \mathbf{N}_{x_{\pm}} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{P}, \quad (43)$$

$$\mathbf{L}_{y_{0\pm}} = \text{diag}[\ell_2, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_3], \quad \mathbf{N}_{y_{\pm}} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{Q}, \quad (44)$$

$$\mathbf{L}_{z_{0\pm}} = \text{diag}[\ell_2, \ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_3, \ell_3], \quad \mathbf{N}_{z_{\pm}} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{R}, \quad (45)$$

mit den nicht-verschwindenden Elementen $p_{62} = q_{43} = r_{51} = N$ und $p_{53} = q_{61} = r_{42} = -N$ der Matrizen \mathbf{P} , \mathbf{Q} und \mathbf{R} sowie

$$\ell_1 = \frac{v_4 \varepsilon}{6v_0}, \quad \ell_2 = \frac{v_4^2 \varepsilon \mu - 9}{6v_0 v_4 \mu}, \quad \ell_3 = \frac{v_4 \mu}{6v_0}, \quad N = \frac{3}{v_4 \mu}. \quad (46)$$

Damit kann die Schaltung nach Abbildung 5a synthetisiert werden, die sich für

$$v_4 \geq 3/\sqrt{\varepsilon \mu} = 3v_{\max} \quad (47)$$

intern MD-passiv verhält. Diese Bedingung ist deutlich schärfer als die Bedingung für MD-Kausalität (13), was auf eine Ineffizienz der Schaltung hindeutet. Zur Verringerung der Grenze für v_4 kann die entstehende Schaltung mit der in Abbildung 6 gezeigten Äquivalenz und Gleichung (10) vereinfacht werden. Werden nun alle $N:1$ -Übertrager eliminiert und alle Spulen einer Masche, die Zeitableitungen repräsentieren, zusammengefasst, so erhält man die Referenzschaltung in Abbildung 10. Für interne MD-Passivität ergibt sich die abgeschwächte Bedingung

$$v_4 \geq \sqrt{6}v_{\max}. \quad (48)$$

Durch das Umformen der Schaltung bzw. das Verschieben und Zusammenfassen von Spulen wird somit die Grenze für MD-Passivität verringert. Da die Passivitäts-Bedingung immer noch schärfer als die Grenze für MD-Kausalität ist, wird die Referenzschaltung mit der Äquivalenz aus Abbildung 7 weiter vereinfacht. Dazu werden die Spulen mit der Induktivität ℓ_β jeweils in Reihenschaltungen aus zwei gleichen Spulen aufgeteilt. So erhält man die reduzierte Referenzschaltung in Abbildung 11. Sie besitzt 3 Spulen weniger als

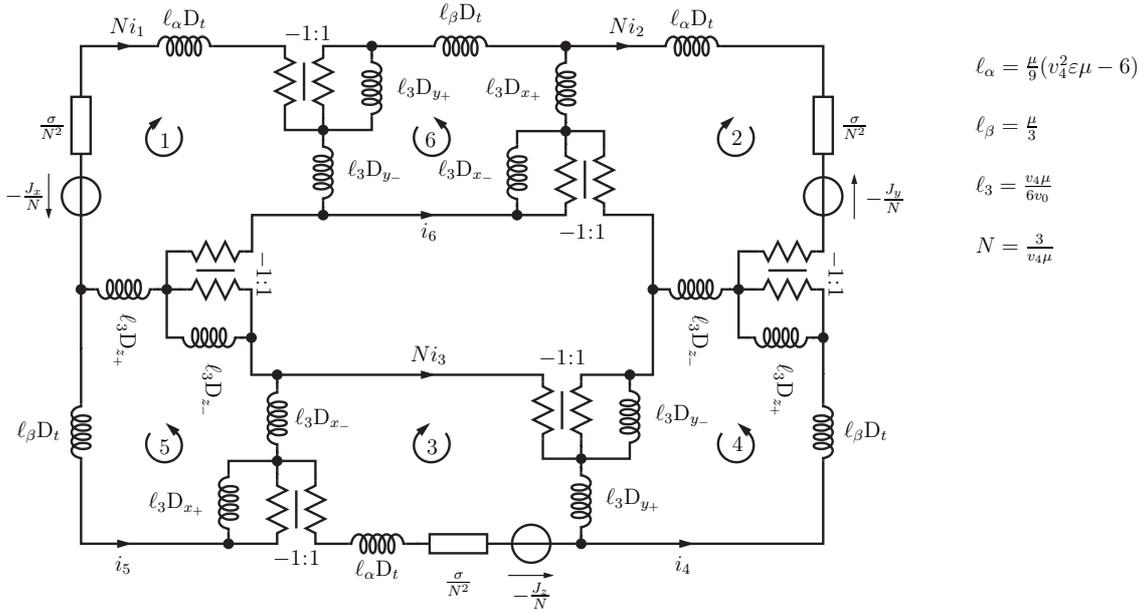


Abbildung 10: Referenzschaltung der Maxwell-Gleichungen

die ursprüngliche Schaltung und führt zu einer noch weiter abgeschwächten Bedingung an v_4 . Für interne MD-Passivität muss in der resultierenden Schaltung nur noch

$$v_4 \geq 2/\sqrt{\varepsilon\mu} = 2v_{\max} \quad (49)$$

erfüllt sein. Damit stellt die MD-Passivität immer noch eine etwas schärfere Forderung an v_4 als die MD-Kausalität. Die Referenzschaltung kann jedoch mit den betrachteten Umformungen nicht weiter vereinfacht werden. Die Bedingung an v_4 ist identisch mit der in [3] angegebenen, die vorliegende Schaltung kommt jedoch mit 3 Spulen weniger aus. In der zugehörigen WD-Struktur bedeutet dies eine Einsparung von je 3 Verzögerungen und Adaptoren, siehe Abbildung 11.

6.3.1 Zerlegung in Teilsysteme

Bei der Berechnung der transformierten Induktivitätsmatrizen $\mathbf{L}_{\xi\pm}$ nach Gleichung (12) werden auch in den Zeilen, in denen \mathbf{L}_ξ keine Elemente enthält und somit gar keine Ortsableitungen vorhanden sind, zeitliche Ableitungen ergänzt. So entstehen in der Schaltung Spulen zur Repräsentation von Zeitableitungen, die später durch Verschiebung wieder eliminiert werden können. Werden nur dort Zeitableitungen ergänzt, wo tatsächlich Ortsableitungen auftreten, so ergibt sich direkt eine reduzierte Schaltung. Dazu wird das ursprüngliche PDE-System (1) in Teilsysteme für die einzelnen Ortskoordinaten zerlegt

$$\left[\sum_{\xi} (\mathbf{L}_{\xi} D_{\xi} + \mathbf{L}_{t\xi} D_t) + \mathbf{L}_{tt} D_t + \mathbf{Z} \right] \mathbf{i} = \mathbf{u}_0, \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}_t = \sum_{\xi} \mathbf{L}_{t\xi} + \mathbf{L}_{tt}. \quad (50)$$

Für jedes dieser Teilsysteme kann die Koordinatentransformation nach Gleichung (8) mit $k = 2$ nun separat durchgeführt werden. Dies entspricht einer Ausnutzung der Beziehun-

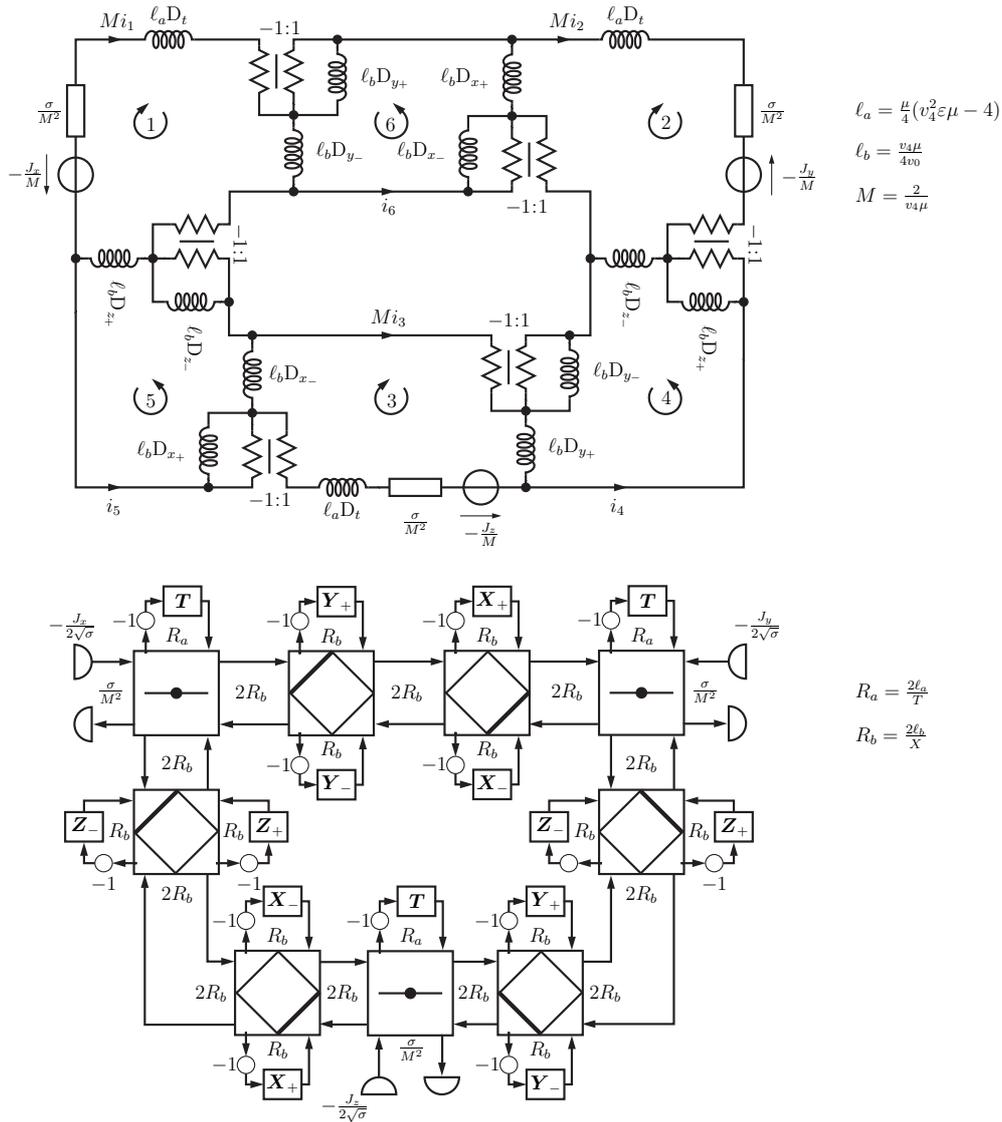


Abbildung 11: Vereinfachte Referenzschaltung und WD-Struktur der Maxwell-Gleichungen

gen (10) und die transformierten Induktivitätsmatrizen ergeben sich zu

$$\mathbf{L}_{\xi\pm} = \frac{1}{2v_0}(v_k \mathbf{L}_{t\xi} \pm \mathbf{L}_{\xi}) . \quad (51)$$

Um alle transformierten Induktivitätsmatrizen positiv semidefinit wählen zu können, werden für $\mathbf{L}_{t\xi}$ Diagonalmatrizen angesetzt, die jeweils genau in den Zeilen positive Einträge besitzen, in denen die zugehörigen Matrizen \mathbf{L}_{ξ} mindestens einen von null verschiedenen Eintrag haben. Dies führt auf den Ansatz

$$\mathbf{L}_{tx} = \mathbf{diag}[0, \alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_5, \alpha_6] , \quad \mathbf{L}_{ty} = \mathbf{diag}[\beta_1, 0, \beta_3, \beta_4, 0, \beta_6] , \quad (52)$$

$$\mathbf{L}_{tz} = \mathbf{diag}[\gamma_1, \gamma_2, 0, \gamma_4, \gamma_5, 0] , \quad \mathbf{L}_{tt} = \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_{tx} - \mathbf{L}_{ty} - \mathbf{L}_{tz} \quad (53)$$

mit freien Parametern α_κ , β_κ und γ_κ .

Bestimmung der freien Parameter. Eine Cholesky-Zerlegung der nach Gleichung (51) transformierten Induktivitätsmatrizen liefert

$$\mathbf{L}_{x0\pm} = \mathbf{diag}[0, \ell_{x2}, \ell_{x3}, 0, \ell_{x5}, \ell_{x6}], \quad \mathbf{N}_{x\pm} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{P}, \quad (54)$$

$$\mathbf{L}_{y0\pm} = \mathbf{diag}[\ell_{y1}, 0, \ell_{y3}, \ell_{y4}, 0, \ell_{y6}], \quad \mathbf{N}_{y\pm} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{Q}, \quad (55)$$

$$\mathbf{L}_{z0\pm} = \mathbf{diag}[\ell_{z1}, \ell_{z2}, 0, \ell_{z4}, \ell_{z5}, 0], \quad \mathbf{N}_{z\pm} = \mathbf{1}_6 \pm \mathbf{R}, \quad (56)$$

mit den von null verschiedenen Elementen p_{62} , p_{53} , q_{61} , q_{43} , r_{51} und r_{42} der Übertragermatrizen. Die entstehende Schaltung kann unter Ausnutzung von Abbildung 6 und Gleichung (10) in die Referenzschaltung in Abbildung 12 umgeformt werden. Dabei fällt auf,

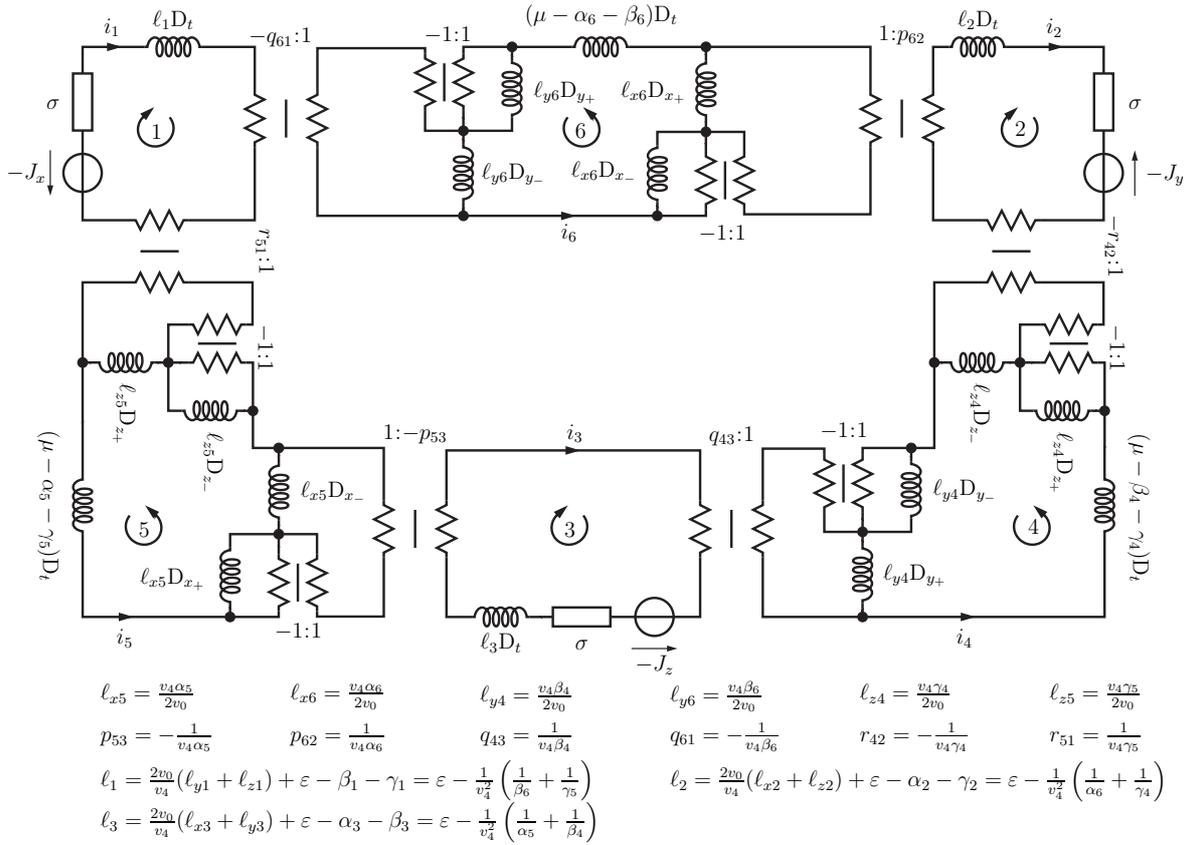


Abbildung 12: Referenzschaltung der Maxwell-Gleichungen abhängig von α_κ , β_κ , γ_κ

dass die Induktivitäten $\ell_{\xi\kappa}$ mit $\kappa < 4$ in der Referenzschaltung nicht mehr auftreten. Sie wurden unter Verwendung von Gleichung (10) zu Induktivitäten zeitlicher Spulen kombiniert und anschließend mit den Elementen von \mathbf{L}_{tt} zu ℓ_1 , ℓ_2 und ℓ_3 zusammengefasst. Damit haben die Parameter α_κ , β_κ und γ_κ mit $\kappa < 4$ keinen Einfluss mehr auf die Schaltung. Für interne MD-Passivität müssen die restlichen freien Parameter sowie die Geschwindigkeit v_4 so gewählt werden, dass alle Induktivitäten nichtnegativ sind. Gleichzeitig soll die Schaltung möglichst effizient werden. Dies lässt sich erreichen, indem die Parameter so gewählt werden, dass drei der Spulen verschwinden

$$\mu = \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_5 + \gamma_5 = \alpha_6 + \beta_6 \quad (57)$$

und die Schranke für die Geschwindigkeit v_4 ,

$$v_4 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \max \left[\left(\frac{1}{\beta_6} + \frac{1}{\gamma_5} \right), \left(\frac{1}{\alpha_6} + \frac{1}{\gamma_4} \right), \left(\frac{1}{\alpha_5} + \frac{1}{\beta_4} \right) \right], \quad (58)$$

möglichst gering wird. Dazu wählt man alle verbleibenden Parameter identisch zu

$$\beta_4 = \gamma_4 = \alpha_5 = \gamma_5 = \alpha_6 = \beta_6 = \mu/2 \quad (59)$$

und erhält nach Elimination der Übertrager wiederum die vereinfachte Referenzschaltung in Abbildung 11. Diese Referenzschaltung kann also entweder durch eine Nachbearbeitung der ursprünglichen Schaltung oder direkt mit Hilfe einer Zerlegung des PDE-Systems nach den einzelnen Ortskoordinaten erreicht werden.

6.4 Die Neutronendiffusionsgleichungen

Ein Ansatz, um die Neutronendiffusionsgleichungen in zwei Energiegruppen mit einem WD-Modell nachzubilden, besteht in der „Hyperbolisierung“ des zugrunde liegenden parabolischen PDE-Systems [8], [12]. Dabei wird das PDE-System durch das geeignete Hinzufügen von Zeitableitungen so umgeformt, dass es ausschließlich endliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten zulässt. Eine mögliche Hyperbolisierung liefert

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} D_t + \frac{1}{d_3} & -\frac{1}{d_4} & D_x & D_y & D_z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{d_5} & \frac{1}{v_2} D_t + \frac{1}{d_6} & 0 & 0 & 0 & D_x & D_y & D_z \\ D_x & 0 & \frac{1}{v_{1x}} D_t + \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_y & 0 & 0 & \frac{1}{v_{1y}} D_t + \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_{1z}} D_t + \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_x & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_{2x}} D_t + \frac{1}{d_2} & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_{2y}} D_t + \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & D_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_{2z}} D_t + \frac{1}{d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ j_{1x} \\ j_{1y} \\ j_{1z} \\ j_{2x} \\ j_{2y} \\ j_{2z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (60)$$

Die hinzugefügten Zeitableitungen werden mit positiven Geschwindigkeiten v_{1x} bis v_{2z} gewichtet. Sie sorgen lediglich für konsistente physikalische Dimensionen und können beliebig gewählt werden. Die Parameter $d_\nu > 0$ berechnen sich aus den mittleren freien Weglängen bzw. den makroskopischen Wirkungsquerschnitten der im Reaktor verwendeten Materialien [11], die Geschwindigkeiten der schnellen und thermischen Neutronen erfüllen den Zusammenhang $v_1 \gg v_2$. Die Neutronenflussdichte für Neutronen der Energiegruppe g wird mit φ_g bezeichnet, die Neutronenstromdichte \mathbf{j}_g setzt sich aus den Komponenten j_{gx} , j_{gy} und j_{gz} zusammen. Für

$$d_3 \leq \frac{4}{d_6} \left(\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_5} \right)^{-2} \quad (61)$$

ist die Matrix \mathbf{Z}_s positiv semidefinit und die Neutronendiffusionsgleichungen werden durch ein passives PDE-System beschrieben. Dieser Fall beschreibt jedoch einen Reaktor, der nicht zu einer Kernspaltung fähig ist, und ist daher praktisch ohne Bedeutung.

Herleitung einer Referenzschaltung. Mit der Koordinatentransformation nach Gleichung (8) und den in Abschnitt 4 eingeführten Zerlegungen können die Elemente der elektrischen Schaltung in Abbildung 5a berechnet werden, die sich unter Ausnutzung von Abbildung 6 und Gleichung (10) in die Schaltung in Abbildung 13 überführen lässt. Die Maschengleichungen der Maschen 1 bis 8 stellen die entsprechenden Zeilen der hyperbolisierten Neutronendiffusionsgleichungen dar. Durch die beliebig angenommenen Geschwindigkeiten v_{1x} bis v_{2z} entstehen Freiheitsgrade in der Schaltung, die zur Reduzierung des Aufwands genutzt werden können.

Es zeigt sich, dass die unter der Voraussetzung passiver Systeme eingeführte Schaltungssynthese auch bei nicht passiven Systemen anwendbar ist. In dem für eine Kernspaltung relevanten Fall wird je nach Materialparameter lediglich der Widerstand r_1 negativ, während die restliche Schaltung weiterhin intern MD-passiv realisierbar ist.

Die Spulen der Abbildung 13 mit den Induktivitäten $\frac{4w_0}{v_4}\ell_\nu$, $\nu = 3 \dots 8$, lassen sich noch eliminieren. Zu diesem Zweck werden die Spulen, wie in Abbildung 7 gezeigt, auf die andere Seite der Jaumann-Adaptoren transformiert. Hieraus entsteht die reduzierte Schaltung in Abbildung 14, wobei Kombinationen von Übertragern und Spulen zusammengefasst worden sind. Diese Umformung spart nicht nur 6 Spulen ein, sondern schwächt zudem die Forderung an v_4 für nichtnegative Induktivitäten ab.

6.4.1 Zerlegung in Teilsysteme

Eine Alternative, um zur reduzierten elektrischen Schaltung zu gelangen, stellt wiederum das Zerlegen des hyperbolisierten PDE-Systems in Teilsysteme dar. In Anlehnung an Abschnitt 6.3.1 wählt man den Ansatz

$$\mathbf{L}_{tx} = \mathbf{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, \alpha_6, 0, 0], \quad \mathbf{L}_{ty} = \mathbf{diag}[\beta_1, \beta_2, 0, \beta_4, 0, 0, \beta_7, 0], \quad (62)$$

$$\mathbf{L}_{tz} = \mathbf{diag}[\gamma_1, \gamma_2, 0, 0, \gamma_5, 0, 0, \gamma_8], \quad \mathbf{L}_{tt} = \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_{tx} - \mathbf{L}_{ty} - \mathbf{L}_{tz}. \quad (63)$$

Die entstehende Schaltung wird mit der in Abbildung 6 gezeigten Äquivalenz vereinfacht. Die freien Parameter α_ν , β_ν und γ_ν können schließlich zu

$$\alpha_3 v_{1x} = \beta_4 v_{1y} = \gamma_5 v_{1z} = \alpha_6 v_{2x} = \beta_7 v_{2y} = \gamma_2 v_{2z} = 1 \quad (64)$$

festgelegt werden, um die Zahl der Bauelemente zu reduzieren. Damit erhält man gerade die in Abbildung 14 gezeigte Schaltung.

6.4.2 Wellendigital-Struktur

Wie in [11] gezeigt, stellt die in Abbildung 14 angegebene Schaltung noch keine Referenzschaltung dar, da ihre elementweise Überführung in den WD-Bereich verzögerungsfreie gerichtete Schleifen enthält. Um diese zu vermeiden, wird die WD-Struktur der in Abbildung 15a dargestellten Teilschaltung mithilfe des Verfahrens aus Abschnitt 5.1 gewonnen.

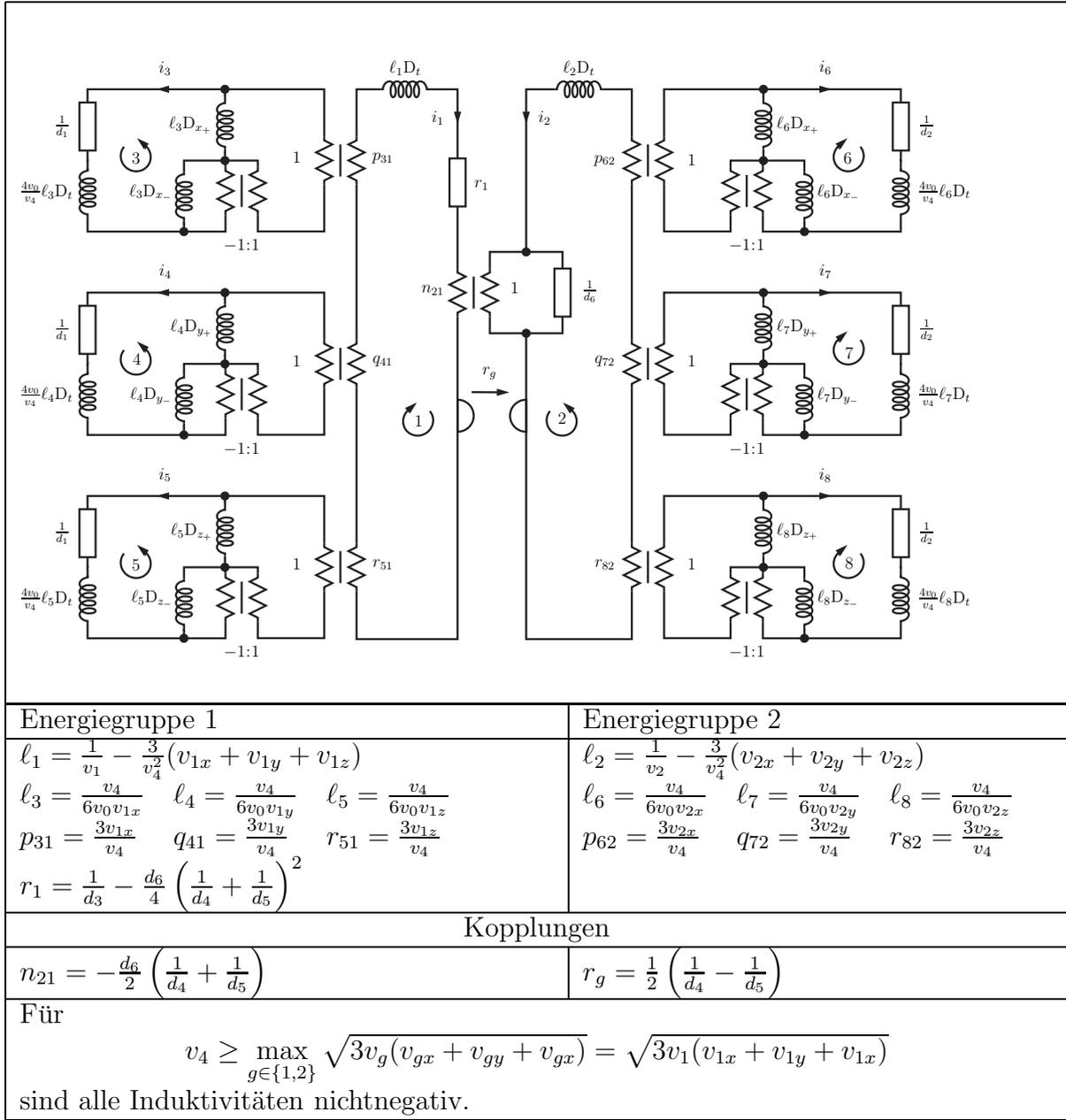


Abbildung 13: Elektrische Schaltung der hyperbolisierten Neutronendiffusionsgleichungen

Householder-Faktorisierung des verbleibenden Koppel-3-Tores. Das Verbindungsnetz der Teilschaltung ist in Abbildung 15b dargestellt. Es besitzt die Torspannungen und Torströme

$$\mathbf{u}_c = [u_1, u_2, u_r, u_{G1}, u_{G2}]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{i}_c = [i_1, i_2, i_r, -i_{G1}, -i_{G2}]^T, \quad (65)$$

und wird durch die verallgemeinerte Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -n_{21} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

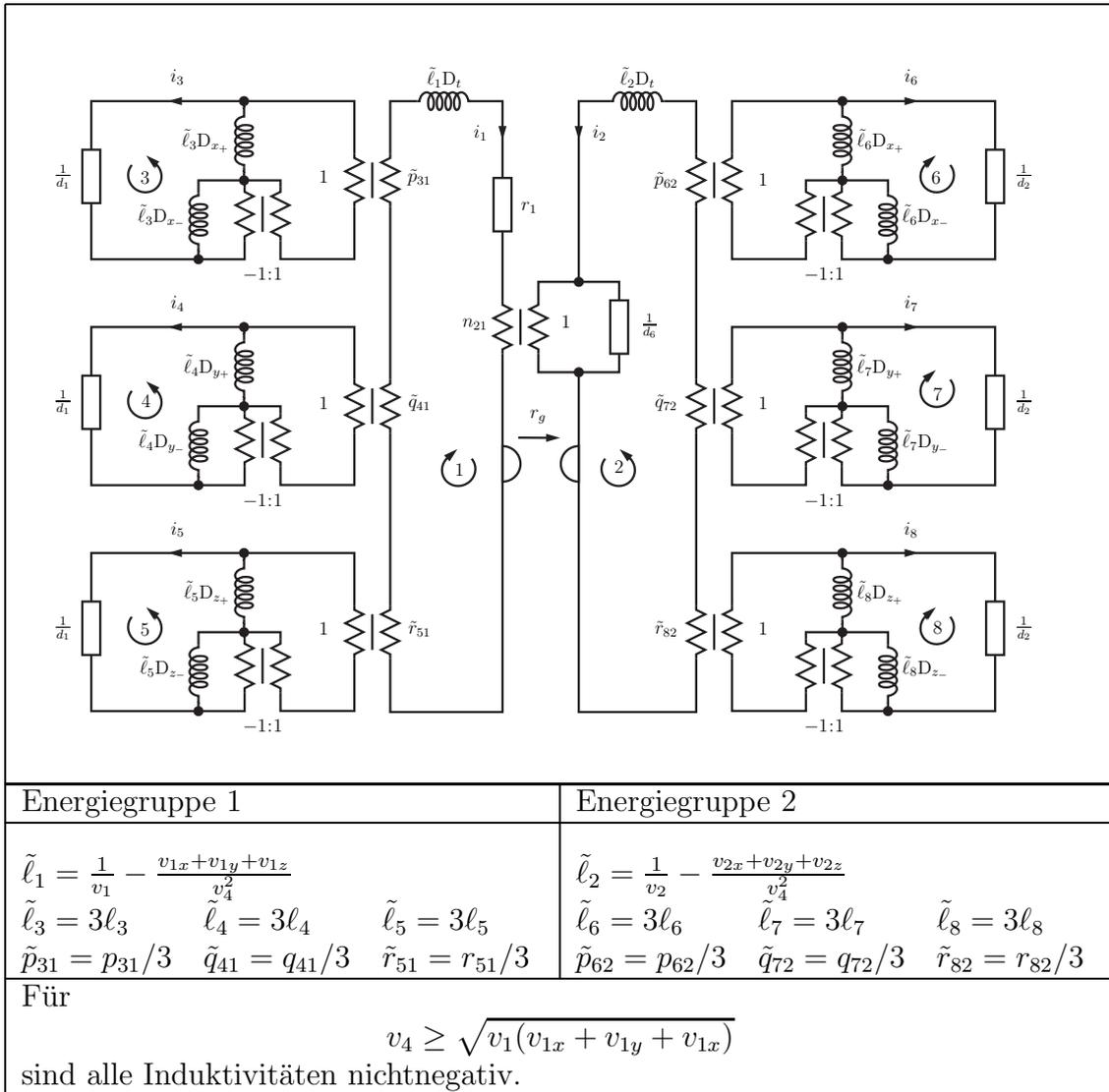


Abbildung 14: Modifizierte Schaltung der Abbildung 13

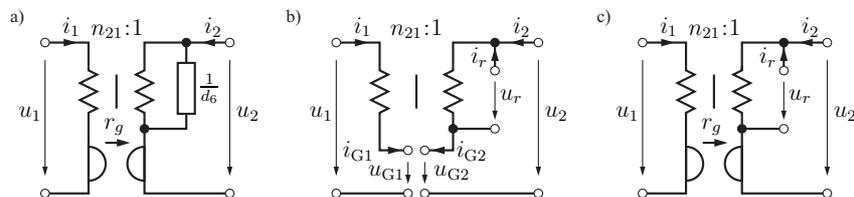


Abbildung 15: Teilschaltung, zugehöriges Verbindungsnetz und Koppel-3-Tor

beschrieben. Die Matrix der Torbezugswiderstände wählt man zu

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{diag}[R_{c1}, R_{c2}, d_6^{-1}, R_{G1}, R_{G2}] \quad \text{mit} \quad R_{G1} = R_{G2} = |r_g|. \quad (67)$$

Dabei werden R_{c1} und R_{c2} so festgelegt, dass die entsprechenden Tore an den Serienadaptern reflexionsfrei abgeschlossen sind. Mit den Gleichungen (29) und (30) kann nun

die Streumatrix \mathbf{S} des in Abbildung 15c dargestellten Koppel-3-Tores bestimmt werden, die mit einer Givens-Faktorisierung [9] auf Diagonalgestalt transformiert werden kann:

$$\mathbf{Q}_{32}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{31}\mathbf{S} = \mathbf{R} = \text{diag}[\rho_1, \rho_2, \rho_r], \quad \rho_\nu = \pm 1. \quad (68)$$

Dabei setzt die Multiplikation mit $\mathbf{Q}_{\mu\nu}$ das Element von \mathbf{S} in Zeile μ und Spalte ν zu null. Die Matrizen $\mathbf{Q}_{\mu\nu}$ sind Householder-Matrizen der Form

$$\mathbf{Q}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{31} \\ 0 & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{32} \\ 0 & & \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Damit kann die Matrix \mathbf{S} in

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}_{31}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{32}\mathbf{R} \quad (70)$$

zerlegt werden. Im Gegensatz zur in [11] angegebenen Schaltung muss hier nur noch ein restliches Koppel-3-Tor anstatt eines Koppel-4-Tores realisiert werden. Da die Faktorisierung einen quadratischen Aufwand besitzt, entspricht dies einer Aufwands-Halbierung, d. h., es werden anstatt 6 nur 3 Householder-Matrizen benötigt. Abbildung 17 zeigt die resultierende WD-Struktur; die Realisierung der Streumatrix \mathbf{S} ist in Abbildung 16 dargestellt. Dabei bezeichnen $s_{\mu\nu}$, $s'_{\mu\nu}$ und $s''_{\mu\nu}$ die Elemente in Zeile μ und Spalte ν der entsprechenden Streumatrizen. Die Referenzschaltung der Neutronendifusionsgleichungen erhält man, indem nach [9] die zur WD-Struktur in Abbildung 16 elementweise korrespondierende elektrische Schaltung berechnet wird.

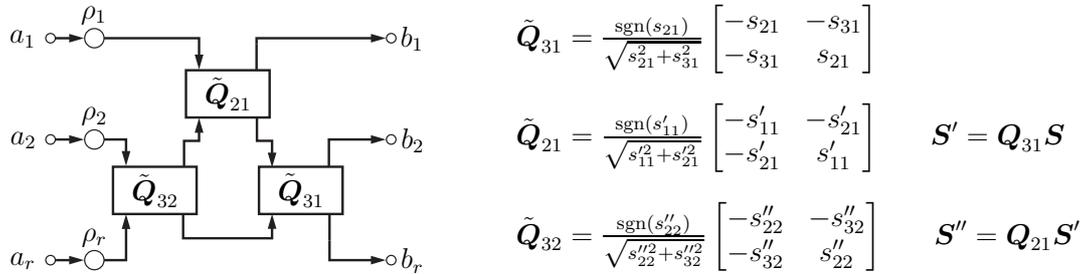


Abbildung 16: Schema der WD-Struktur des verbleibenden Koppel-3-Tores

6.5 Die Navier-Gleichung

Die Navier-Gleichung

$$\varrho D_t^2 \mathbf{u} = -\mu \text{rot rot } \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (71)$$

mit der Fluid-Dichte ϱ , den Lamé-Konstanten (Viskositätskoeffizienten) $\lambda, \mu > 0$, der von außen erzwungenen Kraftdichte \mathbf{f} und dem Verformungsvektor \mathbf{u} beschreibt die

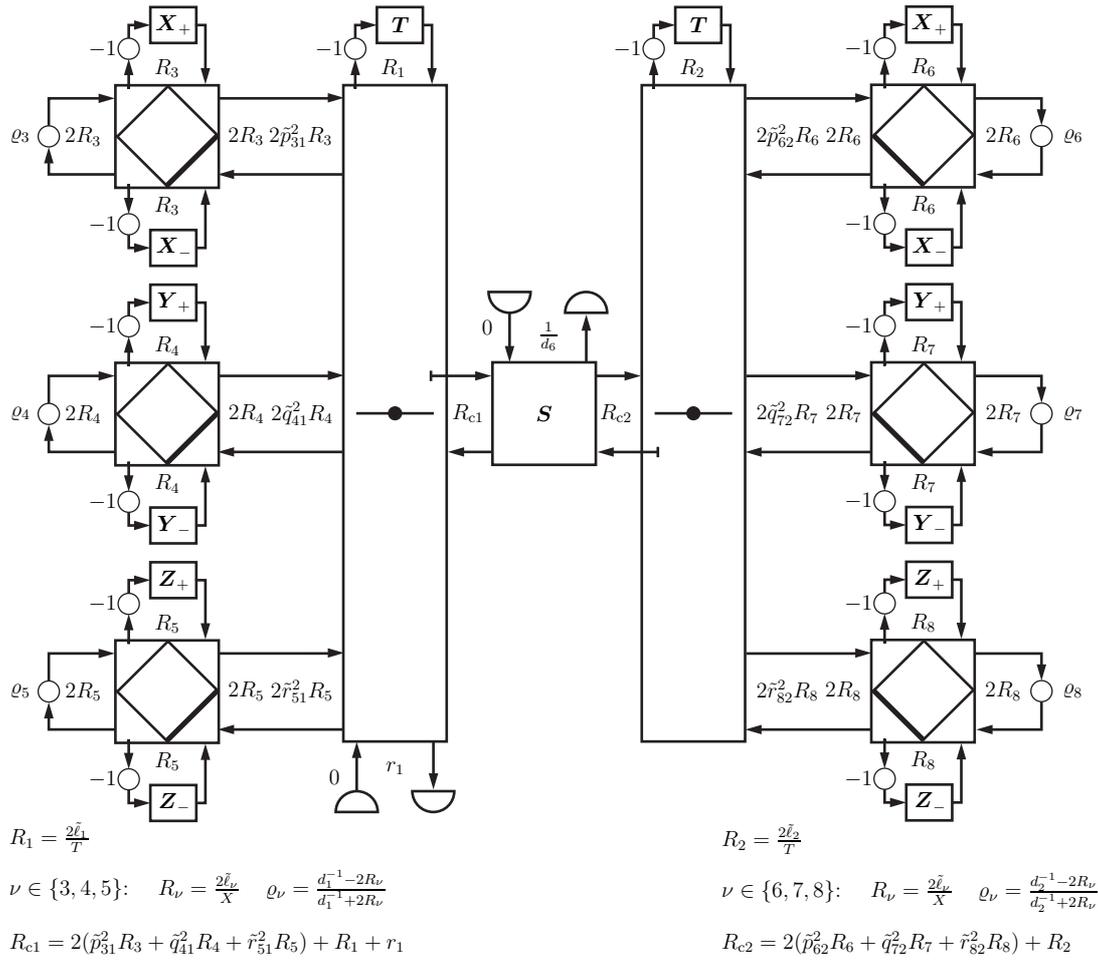


Abbildung 17: Schema der WD-Struktur der Neutronendifusionsgleichungen

Schallausbreitung in einem Festkörper. Sie lässt sich in kartesischen Koordinaten durch Einführung des Spannungstensors \mathbf{T} als

$$\varrho \mathbf{D}_t^2 \mathbf{u} = \begin{bmatrix} D_x T_{11} + D_y T_{12} + D_z T_{13} \\ D_x T_{21} + D_y T_{22} + D_z T_{23} \\ D_x T_{31} + D_y T_{32} + D_z T_{33} \end{bmatrix} + \mathbf{f}, \quad \text{mit } T_{ij} = \begin{cases} \mu [D_j u_i + D_i u_j], & i \neq j \\ (2\mu + \lambda) D_i u_i + \lambda \sum_{\nu \neq i} D_\nu u_\nu & i = j \end{cases}$$

kompakt anschreiben. Mit den zeitlichen Ableitungen

$$\mathbf{v} = D_t \mathbf{u} \quad \text{und} \quad D_t T_{ij} = \begin{cases} \mu [D_j v_i + D_i v_j], & \text{falls } i \neq j \\ (2\mu + \lambda) D_i v_i + \lambda \sum_{\nu \neq i} D_\nu v_\nu & \text{falls } i = j \end{cases} \quad (72)$$

ergibt sich unter Ausnutzung der Symmetrie des Tensors $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ nach einigen Umformungen das lineare passive und hyperbolische PDE-System [15]

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} \varrho D_t & 0 & 0 & -D_x & 0 & 0 & -D_y & 0 & -D_z \\ 0 & \varrho D_t & 0 & 0 & -D_y & 0 & -D_x & -D_z & 0 \\ 0 & 0 & \varrho D_t & 0 & 0 & -D_z & 0 & -D_y & -D_x \\ -D_x & 0 & 0 & \beta D_t & -\gamma D_t & -\gamma D_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_y & 0 & -\gamma D_t & \beta D_t & -\gamma D_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_z & -\gamma D_t & -\gamma D_t & \beta D_t & 0 & 0 & 0 \\ -D_y & -D_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} D_t & 0 & 0 \\ 0 & -D_z & -D_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} D_t & 0 \\ -D_z & 0 & -D_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} D_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{1}{2\mu} - \gamma \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}. \quad (74)$$

Herleitung einer Referenzschaltung. Wegen $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ entfällt der dynamikfreie Anteil der elektrischen Schaltung. Eine Koordinatentransformation nach Gleichung (8) und anschließende Cholesky-Zerlegung der transformierten Induktivitätsmatrizen liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{x_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[l_1, l_2, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_6, l_6], & \mathbf{N}_{x_{\pm}} &= \mathbf{1}_9 \mp \mathbf{P} - \mathbf{K}, \\ \mathbf{L}_{y_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[l_2, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_6, l_6], & \mathbf{N}_{y_{\pm}} &= \mathbf{1}_9 \pm \mathbf{Q} - \mathbf{K}, \\ \mathbf{L}_{z_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[l_2, l_2, l_1, l_3, l_4, l_5, l_6, l_6, l_6], & \mathbf{N}_{z_{\pm}} &= \mathbf{1}_9 \mp \mathbf{R} - \mathbf{K}, \end{aligned}$$

mit den in Tabelle 2 aufgeführten Induktivitäten und den von null verschiedenen Elementen der Matrizen \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{K} . Damit sind alle Parameter der in Abbildung 5a dargestellten elektrischen Schaltung bestimmt. Sind sämtliche Induktivitäten l_1 bis l_6 nichtnegativ, so ist die entstehende Schaltung intern MD-passiv. Dies ist für

$$v_4 \geq 3 \max(c_S, c_D) = 3c_D \quad \text{mit} \quad c_S = \sqrt{\mu/\varrho}, \quad c_D = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\varrho} \quad (75)$$

der Fall, wobei c_S und c_D die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Scher- und Druckwellen bezeichnen [15].

$l_1 = \frac{v_4^2 \varrho - 9(2\mu + \lambda)}{6v_0 v_4}$	$l_2 = \frac{v_4^2 \varrho - 9\mu}{6v_0 v_4}$	$l_3 = \frac{v_4}{6v_0} \frac{1}{2\mu + \lambda}$	$l_4 = \frac{v_4}{24v_0} \frac{(2\mu + \lambda)}{\mu(\mu + \lambda)}$	$l_5 = \frac{v_4 \beta}{6v_0}$	$l_6 = \frac{v_4}{6v_0 \mu}$
$r_{43} = \frac{3\lambda}{v_4}$	$r_{53} = \frac{6\mu\lambda}{v_4(2\mu + \lambda)}$	$r_{63} = \frac{3}{v_4 \beta}$	$r_{82} = \frac{3\mu}{v_4}$	$r_{91} = r_{82}$	
$q_{42} = r_{43}$	$q_{52} = \frac{12\mu(\mu + \lambda)}{v_4(2\mu + \lambda)}$	$q_{71} = r_{82}$	$q_{83} = r_{82}$		
$p_{41} = \frac{3(2\mu + \lambda)}{v_4}$	$p_{72} = r_{82}$	$p_{93} = r_{82}$			
$k_{54} = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}$	$k_{64} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$	$k_{64} = k_{65}$			

Tabelle 2: Parameter zur elektrischen Nachbildung der Navier-Gleichung

Da \mathbf{L}_t im Gegensatz zu den vorher betrachteten Beispielen keine Diagonalmatrix darstellt, ergeben sich hier kompliziertere, weniger schwach besetzte Matrizen der Übersetzungsverhältnisse. Die resultierende Schaltung wird sehr unübersichtlich und lässt sich mit den eingeführten Umformungen nicht mehr wesentlich vereinfachen.

6.5.1 Zerlegung in Teilsysteme

Um einfachere Strukturen zu erhalten, kann das PDE-System wie in Abschnitt 6.3.1 beschrieben in Teilsysteme zerlegt werden. Dies führt auf den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{tx} &= \mathbf{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \alpha_7, 0, \alpha_9], & \mathbf{L}_{ty} &= \mathbf{diag}[\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, \beta_5, 0, \beta_7, \beta_8, 0], \\ \mathbf{L}_{tz} &= \mathbf{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0, 0, \gamma_6, 0, \gamma_8, \gamma_9], & \mathbf{L}_{tt} &= \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_{tx} - \mathbf{L}_{ty} - \mathbf{L}_{tz}. \end{aligned}$$

Eine Cholesky-Zerlegung der nach Gleichung (51) transformierten Induktivitätsmatrizen liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{x_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[\ell_{x1}, \ell_{x2}, \ell_{x3}, \ell_{x4}, 0, 0, \ell_{x7}, 0, \ell_{x9}], & \mathbf{N}_{x\pm} &= \mathbf{1}_9 \mp \mathbf{P}, \\ \mathbf{L}_{y_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[\ell_{y1}, \ell_{y2}, \ell_{y3}, 0, \ell_{y5}, 0, \ell_{y7}, \ell_{y8}, 0], & \mathbf{N}_{y\pm} &= \mathbf{1}_9 \mp \mathbf{Q}, \\ \mathbf{L}_{z_{0\pm}} &= \mathbf{diag}[\ell_{z1}, \ell_{z2}, \ell_{z3}, 0, 0, \ell_{z6}, 0, \ell_{z8}, \ell_{z9}], & \mathbf{N}_{z\pm} &= \mathbf{1}_9 \mp \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Die Impedanzmatrix des rein zeitlichen Teilsystems ergibt sich zu

$$\mathbf{L}_{tt} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{d1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{d2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} \beta - \alpha_4 & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \beta - \beta_5 & -\gamma \\ -\gamma & -\gamma & \beta - \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (76)$$

sowie den Diagonalmatrizen

$$\mathbf{L}_{d1} = \mathbf{diag}[\varrho - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1, \varrho - \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2, \varrho - \alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3], \quad (77)$$

$$\mathbf{L}_{d2} = \mathbf{diag}[\mu^{-1} - \alpha_7 - \beta_7, \mu^{-1} - \beta_8 - \gamma_8, \mu^{-1} - \alpha_9 - \gamma_9]. \quad (78)$$

Formt man die entstehende Schaltung mit Abbildung 6 und Gleichung (10) um und fasst in jeder Masche alle Spulen mit zeitlichen Ableitungen zusammen, so ergibt sich die Schaltung in Abbildung 18. Dabei fällt auf, dass die Schaltung wiederum nicht von den Induktivitäten $\ell_{\xi\kappa}$ bzw. den Parametern α_κ , β_κ und γ_κ mit Indizes $\kappa < 4$ abhängt. Das verbleibende 3-Tor realisiert 3 vollständig gekoppelte Spulen und erfüllt den Zusammenhang

$$[u_4, u_5, u_6]^T = \mathbf{L}_k \mathbf{D}_t [i_4, i_5, i_6]^T. \quad (79)$$

Die Bestimmung der Parameter. Für interne MD-Passivität müssen alle vorkommenden Induktivitäten nichtnegativ und die verbleibende Induktivitätsmatrix \mathbf{L}_k positiv semidefinit sein. Die Forderung nach einer möglichst effizienten Schaltung ist für eine minimale Anzahl von Bauelementen und eine minimale obere Schranke für die Geschwindigkeit v_4 erfüllt. Die Parameter müssen also derart bestimmt werden, dass:

1. die Induktivitäten ℓ_7 , ℓ_8 und ℓ_9 verschwinden, d. h.,

$$\alpha_7 + \beta_7 = \beta_8 + \gamma_8 = \alpha_9 + \gamma_9 = \mu^{-1}. \quad (80)$$

2. die durch die Bedingung

$$v_4 \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \max \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha_4} + \frac{1}{\beta_7} + \frac{1}{\gamma_9}}, \sqrt{\frac{1}{\alpha_7} + \frac{1}{\beta_5} + \frac{1}{\gamma_8}}, \sqrt{\frac{1}{\alpha_9} + \frac{1}{\beta_8} + \frac{1}{\gamma_6}} \right) \quad (81)$$

vermittelte Grenze für die Geschwindigkeit v_4 möglichst gering wird.

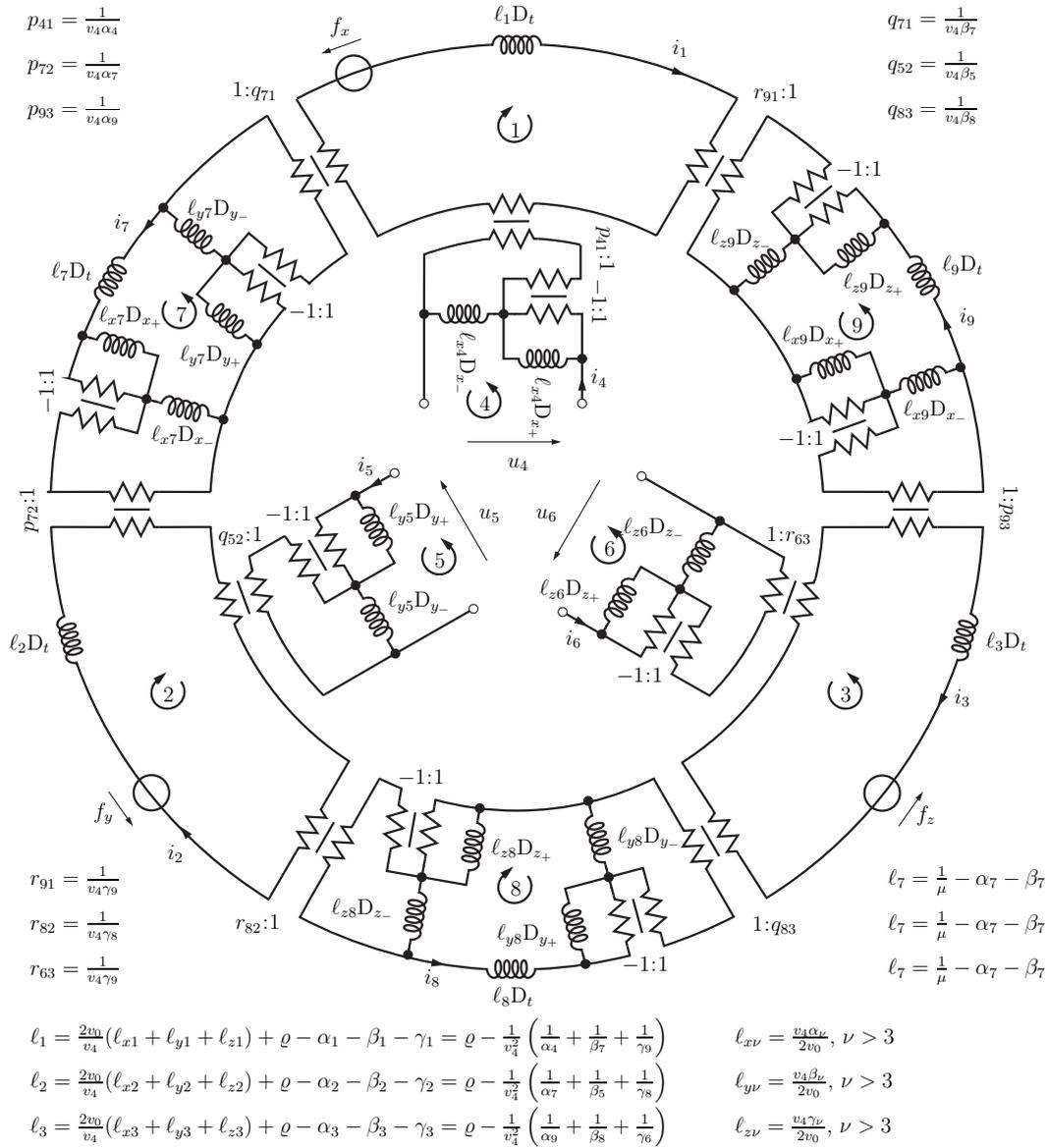


Abbildung 18: Schaltung der Navier-Gleichung in Abhängigkeit der Parameter $\alpha_\kappa, \beta_\kappa, \gamma_\kappa$

3. das verbleibende Induktivitätsnetz intern passiv realisierbar ist

$$\mathbf{L}_k \geq \mathbf{0}. \quad (82)$$

Die Parameter α_4, β_5 und γ_6 müssen möglichst groß gewählt werden, damit die untere Schranke für v_k möglichst gering wird. Gleichzeitig dürfen sie nur so groß werden, dass die Matrix \mathbf{L}_k weiterhin positiv semidefinit bleibt. Es lässt sich zeigen, dass alle geforderten Bedingungen für

$$\alpha_7 = \beta_7 = \beta_8 = \gamma_8 = \alpha_9 = \gamma_9 = (2\mu)^{-1}, \quad \alpha_4 = \beta_5 = \gamma_6 = (2\mu + 3\lambda)^{-1} \quad (83)$$

erfüllt sind. Damit ergibt sich die Schaltung in Abbildung 19.

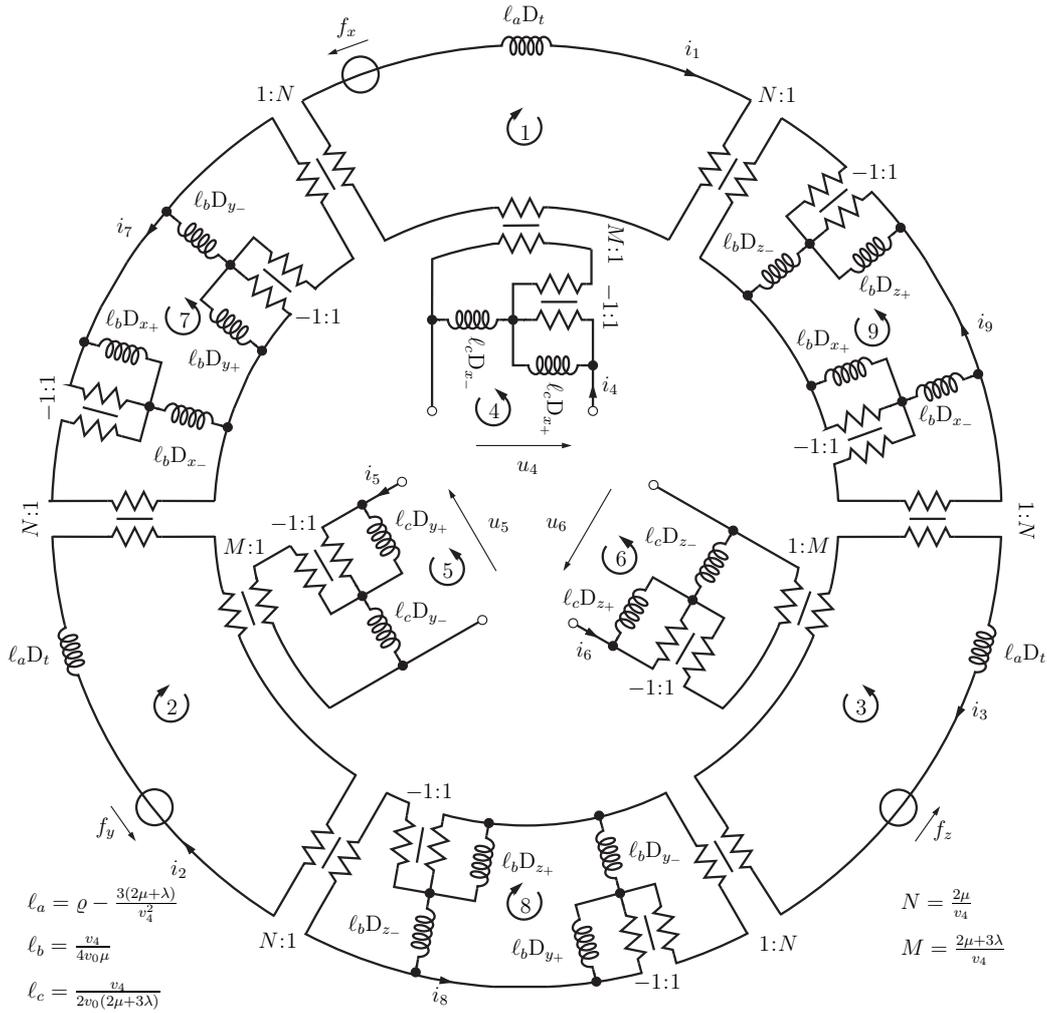


Abbildung 19: Schaltung der Navier-Gleichung

Die Bedingung für interne MD-Passivität

$$v_4 \geq \sqrt{3} \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho} = \sqrt{3} v_{\max}, \quad (84)$$

ist identisch mit der Bedingung für MD-Kausalität. Das verbleibende 3-Tor der 3 vollständig gekoppelten Spulen besitzt die Impedanzmatrix

$$\mathbf{L}_k \mathbf{D}_t = \ell_0 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}_t \quad \text{mit} \quad \ell_0 = \frac{\lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} = 2\gamma, \quad (85)$$

und kann durch die in Abbildung 20a dargestellte Schaltung mit ausschließlich ungekoppelten Spulen intern MD-passiv realisiert werden.

Wellendigital-Realisierung. Die synthetisierte Schaltung stellt noch keine Referenzschaltung dar, da ihre direkte Überführung in den WD-Bereich auf verzögerungsfreie

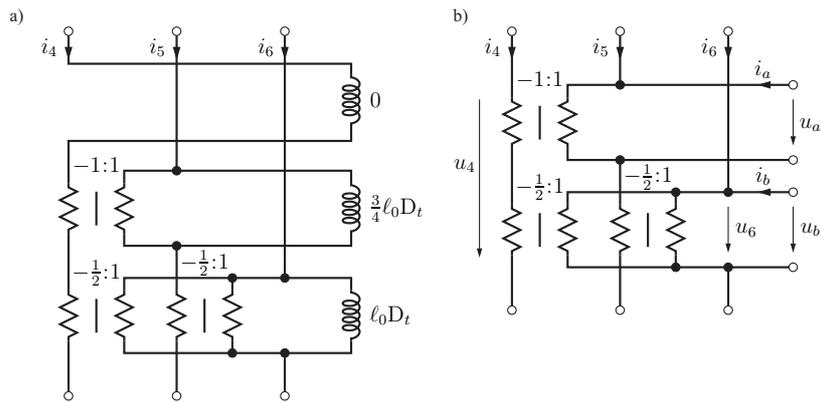


Abbildung 20: Intern MD-passive Realisierung und Verbindungsnetz der 3 vollständig gekoppelten Spulen

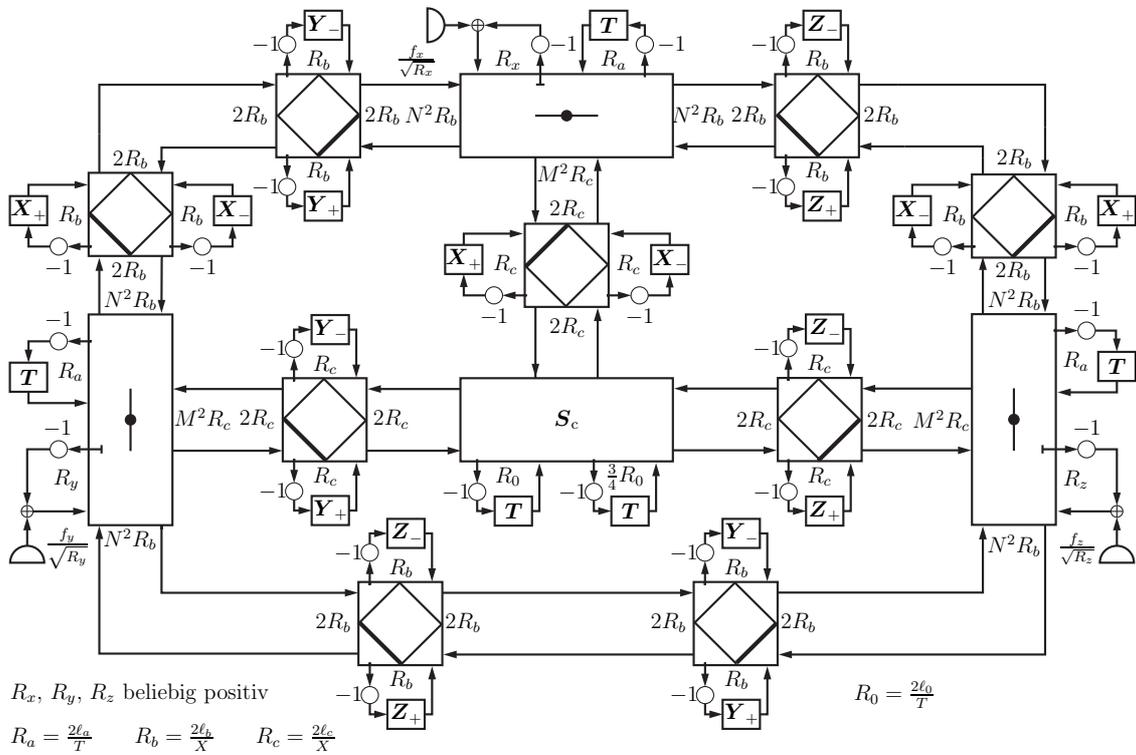


Abbildung 21: Schema der WD-Struktur der Navier-Gleichung

gerichtete Schleifen führt. Um diese zu vermeiden wird die in Abbildung 20a dargestellte Teilschaltung nach der in Abschnitt 5.1 vorgestellten Methode realisiert. Dazu werden zuerst die beiden zeitlichen Induktivitäten extrahiert. Das verbleibende Verbindungs-5-Tor (Abbildung 20b) besitzt die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix \mathbf{B}_c und die Matrix der

Torbezugswiderstände \mathbf{R}_c mit

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_c = \mathbf{diag} \left[2R_c, 2R_c, 2R_c, \frac{3}{4}R_0, R_0 \right], \quad R_0 = \frac{2\ell_0}{T}.$$

Die zugehörige Streumatrix \mathbf{S}_c kann nach Gleichung (29) berechnet und mit einer Householder-Faktorisierung zerlegt werden. So entsteht die in Abbildung 21 dargestellte realisierbare WD-Struktur. Die Referenzschaltung der Navier-Gleichung erhält man, indem nach [9] die zur WD-Struktur elementweise korrespondierende elektrische Schaltung berechnet wird.

7 Fazit

In diesem Konferenzbeitrag ist die WD-Modellierung von extern passiven physikalischen Systemen behandelt worden, die sich durch ein lineares hyperbolisches PDE-System beschreiben lassen. Für die WD-Modellierung ist eine Synthese angegeben worden, mit der man systematisch zu einer kanonischen intern MD-passiven elektrischen Schaltung gelangt. Diese Schaltung dient einerseits als elektrische Repräsentation der PDEs und andererseits zur Umformung in eine Referenzschaltung, zu der eine realisierbare WD-Struktur elementweise korrespondiert.

Zu den PDEs ist eine elektrische Schaltung synthetisiert worden, bei der mögliche Verluste in Innenwiderständen von Spannungsquellen konzentriert sind, während die verbleibende elektrische Schaltung auf Mehrtor-Elementen mit einer intern MD-verlustfreien Realisierung basiert. Ausgehend von dieser elektrischen Schaltung wurden zwei Methoden zum Auffinden einer Referenzschaltung für ein WD-Modell vorgestellt. Bei der ersten Methode wird die Streumatrix des energieneutralen Teils der elektrischen Schaltung berechnet und für eine Schaltungssynthese faktorisiert. Die zweite Methode fußt auf einer manuellen Umformung der elektrischen Schaltung mit Hilfe von Äquivalenzen.

Um die Brauchbarkeit und Güte der vorgeschlagenen Methoden zu überprüfen, sind verschiedene Beispiele untersucht worden, zu denen verifizierte WD-Modelle existieren. Für eine Einführung sind die Leitungsgleichungen und die Timoshenko-Gleichungen gewählt worden, zu denen systematisch eine reziproke bzw. verlustfreie Schaltung synthetisiert worden sind. Die vorgeschlagene Methode hat für die Maxwell-Gleichungen eine elektrische Schaltung geliefert, deren Effizienz sich sukzessive durch Umformungen steigern ließ. Dass die Methodik sich selbst bei einem nicht passiven System erfolgreich anwenden lässt, konnte am Beispiel der Neutronendifusionsgleichungen gezeigt werden. Hier hat die systematische Vorgehensweise im Vergleich zur bislang bekannten Implementierung erstaunlicherweise zu einer deutlich aufwandsärmeren Realisierung geführt. Als letztes Beispiel ist die Navier-Gleichung untersucht worden, wobei die spezielle Herausforderung in der Synthese einer intern MD-passiven elektrischen Schaltung für drei vollständig induktiv gekoppelte Spulen bestand. Wie sich anhand der Beispiele herausgestellt hat, begünstigt eine Zerlegung des Systems in Teilsysteme mit freien Parametern die Synthese. Die Parameter ließen sich hierbei durch die Forderung nach einer minimalen intern MD-passiven Schaltung festlegen.

Wenngleich die Faktorisierung der Streumatrix des energieneutralen Netzes automatisierbar ist, liefert sie im Allgemeinen lediglich suboptimale Ergebnisse. Die Umformung der elektrischen Schaltung mit Hilfe der angegebenen Äquivalenzen führt dagegen zu einer deutlichen Steigerung der Effizienz. Ihr Nachteil besteht in der manuellen Vorgehensweise, weshalb es wünschenswert ist, die Umformung der elektrischen Schaltung in eine Referenzschaltung zu automatisieren. Auf diese Weise könnte man zukünftig computergestützt von einer PDE über eine Referenzschaltung zum WD-Modell gelangen.

Literatur

- [1] V. Belevitch. *Classical network theory*. Holden-Day, 1968.
- [2] A. Fettweis. Wave digital filters: Theory and practice. *Proceedings of the IEEE*, 74(2):270–327, 1986.
- [3] A. Fettweis. Multidimensional wave digital filters for discrete-time modelling of maxwell’s equations. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 5:183–201, 1992.
- [4] A. Fettweis. Multidimensional wave-digital principles: From filtering to numerical integration. *Proceedings of the IEEE International Conference Acoustics Speech, Signal Processing, Adelaide, Australia*, (6):173–181, 1994.
- [5] A. Fettweis. Numerical integration of partial differential equations using wave-digital principles. Collection of detailed viewgraphs, 2000-2002. Sections 13+16.
- [6] A. Fettweis. Robust numerical integration using wave-digital concepts. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, (17):7–25, 2006.
- [7] A. Fettweis and G. Nitsche. Transformation approach to numerically integrating pdes by means of wdf principles. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, (2):127–159, 1991.
- [8] H. D. Fischer. Anwendung von Wellen-Digitalfiltern auf parabolische PDEs: Neutronendiffusion in 2 Energiegruppen. *Siemens Arbeitsbericht, KWU/U8 241-89/76*, 1989.
- [9] D. Fränken. *Passive Systeme zur Verarbeitung komplexer zeitdiskreter Signale*. Shaker Verlag, 1997. Dissertation.
- [10] C. Leuer and K. Ochs. Systematic derivation of reference circuits for wave digital modeling of passive linear partial differential equations. *Proc. of the 52nd Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2009. Zur Veröffentlichung angenommen.
- [11] K. Luhmann. *Die numerische Lösung der Neutronendiffusionsgleichungen in zwei Energiegruppen mit dem Wellendigital-Konzept*. Cuvillier Verlag, 2004. Dissertation.

- [12] K. Luhmann and K. Ochs. A novel interpretation of the hyperbolization method used to solve the parabolic neutron diffusion equations by means of the wave digital concept. *International Journal of Numerical Modeling: Electronic networks, devices and fields*, (19):345–364, 2006.
- [13] K. Meerkötter. *Beiträge zur Theorie der Wellendigitalfilter*. 1979. Dissertation.
- [14] K. Meerkötter and D. Fränken. Digital realization of connection networks by voltage-wave two-port adaptors. *AEÜ International Journal of Electron. Communication*, 50(6):1–6, 1996.
- [15] G. Nitsche. *Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit Hilfe von Wellendigitalfiltern*. VDI Verlag, 1993. Dissertation.
- [16] K. Ochs. Wave digital modeling of passive systems in linear state-space form. *International Journal of Numerical Modelling*, 2009. Zur Veröffentlichung angenommen.
- [17] K. Ochs and B. Stein. On the design and use of wave digital structures. *Notes in Computer Science tr-ri-01-228, University of Paderborn, Deutschland, Department of Mathematics and Computer Science*, 2001.
- [18] M. Vollmer. *Automatische Code-Erzeugung zur numerischen Integration partieller Differentialgleichungen für sicherheitskritische Anwendungen*. Cuvillier Verlag Göttingen, 2004. Dissertation.

Tracking ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen mit Zufallsmatrizen

Michael Feldmann
FGAN Forschungsinstitut für
Kommunikation, Informationsverarbeitung
und Ergonomie (FKIE)
D-53343 Wachtberg
feldmann@fgan.de

Dietrich Fränken
Data Fusion Algorithms
and Software
EADS Deutschland GmbH
D-89077 Ulm
dietrich.fraenken@eads.com

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden zwei Verfahren zum Tracking ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen diskutiert. Neben einem Zufallsvektor zur Darstellung des kinematischen Zustandes (Position und Geschwindigkeit des Schwerpunktes) verwenden die untersuchten Verfahren eine symmetrische, positiv definite Zufallsmatrix zur Repräsentation der Ausdehnung. Während das erste Verfahren davon ausgeht, dass statistische Sensorfehler wesentlich kleiner als die Ausdehnung sind und daher im Rahmen des Schätzprozesses vernachlässigt werden können, verzichtet das zweite auf diese grundlegende Annahme und berücksichtigt den Einfluss sowohl der physikalischen Objektausdehnung als auch eines Sensorfehlers auf die Streuung der Messungen.

1 Einführung

In vielen Tracking-Anwendungen werden die interessierenden Objekte als punktförmig angenommen, d. h., ihre Ausdehnung wird im Vergleich zu Sensorauflösung und -fehler als vernachlässigbar klein behandelt. Im Hinblick auf zunehmend leistungsfähigere Sensoren ist diese Annahme jedoch nicht immer haltbar, etwa beim Tracking im Nahbereich von Sensoren, wo unterschiedliche Streuzentren der jeweiligen Objekte eine fluktuierende Zahl von Reflexionen hervorrufen können. Aus den Reflexionen, die einem Objekt zuzuordnen sind, kann nicht nur der kinematische Zustand des Objektes, sondern auch seine Ausdehnung geschätzt werden, indem man die Streuung der Messungen ins Verhältnis zum erwarteten statistischen Sensorfehler setzt. Mehr als die genannten Größen lassen sich andererseits auch nicht verlässlich im (entgegengesetzten) Fall schätzen, dass eine zu schlechte Sensorauflösung ein individuelles Tracking einzelner Mitglieder einer Gruppe unmöglich macht. Eine frühe Arbeit zu diesem Thema ist [1], einen Überblick bis ins Jahr 2004 liefert [2].

Im vorliegenden Aufsatz werden Verfahren zur Behandlung derartiger Probleme untersucht, welche neben einem Zufallsvektor zur Darstellung des kinematischen Zustandes

eine symmetrische, positiv definite Zufallsmatrix zur Repräsentation der Ausdehnung verwenden. Ausgangspunkt ist ein solches jüngst vorgeschlagenes Bayes-Verfahren [3,4], welches allerdings seinerseits davon ausgeht, dass der Sensorfehler viel kleiner als die Objektausdehnung ist. Je nach Anwendungsfall ist diese Annahme aber nicht stets haltbar, der resultierende Schätzer weist dann einige nachteilhafte Eigenschaften auf [5,6]: Geschätzte Ausdehnung und Positions-Schätzfehlervarianz sind eng miteinander verkoppelt, und obwohl Vorhersage und Aktualisierung der Kinematik formal an das Kalman-Filter erinnern, erhält man für alle Raumrichtungen dieselbe effektive Kalman-Verstärkung. Darüber hinaus impliziert eine spezielle Annahme hinsichtlich des dynamischen Verhaltens eine mit steigender Ausdehnung wachsende Reaktivität der Objekte. Sind die Sensorfehler nun signifikant, schätzt das Verfahren letztlich Ausdehnung *plus* Sensorfehler, was einen überproportional großen Schätzfehler bewirkt.

Die folgenden Abschnitte beinhalten zunächst eine Zusammenfassung der beiden Verfahren aus [3,4] und [5,6]. Danach werden einige grundlegende Eigenschaften der für die Schätzung der Ausdehnung maßgeblichen Verteilung diskutiert. Nach der Diskussion weiterer hieraus resultierender Besonderheiten der betrachteten Schätzer erfolgt ein Vergleich durch Simulationsergebnisse.

2 Ein Bayes-Ansatz

Der Bayes-Ansatz aus [3,4] verwendet als Schätzgrößen neben dem kinematischen Zustand des Zentroiden, repräsentiert durch den Zufallsvektor \mathbf{x}_k , die physikalische Ausdehnung, beschrieben durch eine symmetrische, positiv definite (SPD) Zufallsmatrix \mathbf{X}_k . Letzteres entspricht einer ellipsoidalen Objektausdehnung. Es wird nun angenommen, dass zu jedem Umlauf k jeweils n_k unabhängige Messungen

$$\mathbf{y}_k^j = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k^j \quad (1)$$

vorliegen. Hierbei umfasst $\mathbf{x}^T = [\mathbf{r}^T, \dot{\mathbf{r}}^T]$ Position und Geschwindigkeit in zwei oder drei räumlichen Dimensionen, während \mathbf{y}_k^j jeweils Positionsmessungen sein sollen. Als weitere Notation verwenden wir $\mathbf{Y}_k := \{\mathbf{y}_k^j\}_{j=1}^{n_k}$ zur Bezeichnung der Menge von n_k Messungen in einem gegebenen Umlauf k sowie $\mathcal{Y}_k := \{n_\varkappa, \mathbf{Y}_\varkappa\}_{\varkappa=0}^k$ für die Sequenz dieser Mengen über die Umläufe hinweg.

Wie bereits erwähnt ist die entscheidende Annahme in [3,4], dass statistische Fehler der einzelnen Messungen \mathbf{y}_k^j wesentlich kleiner als die Ausdehnung sind. Dann wird aber die Streuung der Messungen durch die Ausdehnung dominiert, was durch ein normalverteiltes „Messrauschen“ \mathbf{w}_k^j mit Erwartungswert Null und Varianz \mathbf{X}_k modelliert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem kinematischen Zustand, Ausdehnung und Zahl der Messungen die Menge \mathbf{Y}_k zu messen, ergibt sich damit zu

$$p(\mathbf{Y}_k | n_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \prod_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^j; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k), \quad (2)$$

wobei

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\exp(-[\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}] / 2)}{\sqrt{|2\pi \boldsymbol{\Sigma}|}} \quad (3)$$

die Dichte der *Normalverteilung* mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Varianz $\boldsymbol{\Sigma}$ bezeichnet. Mit der „mittleren Messung“ und der „Messstreuung“

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{y}_k^j, \quad \bar{\mathbf{Y}}_k = \sum_{j=1}^{n_k} (\mathbf{y}_k^j - \bar{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k^j - \bar{\mathbf{y}}_k)^T \quad (4)$$

lässt sich Gleichung (2) nun leicht zu

$$p(\mathbf{Y}_k | n_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \propto \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \frac{\mathbf{X}_k}{n_k}) \times \mathcal{W}(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, \mathbf{X}_k) \quad (5)$$

umformen, wobei

$$\mathcal{W}(\mathbf{X}; m, \mathbf{C}) = \frac{|\mathbf{X}|^{\frac{m-d-1}{2}}}{2^{\frac{md}{2}} \Gamma_d(\frac{m}{2}) |\mathbf{C}|^{\frac{m}{2}}} \text{etr}(-\frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{C}^{-1}) \quad (6)$$

mit $m \geq d$ die Dichte der *Wishart-Verteilung* [7] einer d -dimensionalen SPD Zufallsmatrix \mathbf{X} mit erwarteter SPD Matrix $m\mathbf{C}$ bezeichnet, $\text{etr}(\cdot)$ eine Abkürzung für $\exp(\text{tr}(\cdot))$ darstellt und Γ_d die multivariate Gammafunktion ist.

Wie in [3, 4] gezeigt wurde, kann man die Dichte $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{y}_{k-1})$ einer geeigneten *konjugierten a-priori-Verteilung* zu (2) als Produkt zweier Dichten

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{y}_{k-1}) = \mathcal{IW}(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (7)$$

und

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{y}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k) \quad (8)$$

schreiben. Hierbei ist $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{y}_{k-1})$ die Dichte der matrixvariaten *inversen Wishart-Verteilung* [7] mit der Parameterdarstellung

$$\mathcal{IW}(\mathbf{X}; m, \mathbf{C}) = \frac{|\mathbf{C}|^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{md}{2}} \Gamma_d(\frac{m}{2}) |\mathbf{X}|^{\frac{m+d+1}{2}}} \text{etr}(-\frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}) \quad (9)$$

und erwarteter SPD Matrix $\mathbf{C}/(m-d-1)$ für $m-d-1 > 0$, während \otimes das *Kronecker-Produkt* [8] bezeichnet, das z. B.

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11}\mathbf{X}_k & \tilde{p}_{12}\mathbf{X}_k \\ \tilde{p}_{21}\mathbf{X}_k & \tilde{p}_{22}\mathbf{X}_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

ergibt. Dieser Ansatz für die a-priori-Verteilung führt tatsächlich auf eine a-posteriori-Verteilung derselben Form.

Die Aktualisierung des kinematischen Zustandes ergibt sich mit diesem Ansatz und

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_d, \mathbf{0}_d] = \tilde{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{I}_d \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{H}} = [1, 0] \quad (11)$$

zu

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + (\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d)(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}), \quad \tilde{S}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^T + \frac{1}{n_k}, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} - \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}\tilde{S}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^T, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^T\tilde{S}_{k|k-1}^{-1}, \quad (13)$$

und erinnert damit formal stark an die entsprechenden Gleichungen des Kalman-Filters. Allerdings ist die Parametermatrix $\tilde{\mathbf{P}}$ lediglich von der Dimension 2×2 , und man erhält eine Kalman-Verstärkung $\tilde{\mathbf{K}}$ mit jeweils einer Komponente für Position und Geschwindigkeit sowie eine skalare Innovationskovarianz \tilde{S} . Die Aktualisierung der matrixvariablen Dichte berechnet sich zu

$$\nu_{k|k} = \nu_{k|k-1} + n_k, \quad \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \tilde{S}_{k|k-1}^{-1} \mathbf{N}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k, \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{k|k-1} = (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}) (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1})^T. \quad (15)$$

Die zugehörigen Gleichungen zur Vorhersage aus [3, 4] lauten

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = (\tilde{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \tilde{\mathbf{F}}^T + \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (16)$$

wobei $\tilde{\mathbf{F}}$ und $\tilde{\mathbf{Q}}$ Zustandsübergangsmatrix bzw. Varianz des Prozessrauschens einer entsprechenden Bewegung in einer räumlichen Dimension sind. Unter der Annahme, dass sich die Ausdehnung tendenziell nicht über der Zeit ändert, führt der Ansatz $\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1}$ mit

$$\mathbf{X}_{k|k-1} := E[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}}{\nu_{k|k-1} - d - 1} \quad (17)$$

in Verbindung mit einer steigenden Unsicherheit der Positionsschätzung gemäß [3, 4] auf heuristische Gleichungen zur Vorhersage:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \frac{\nu_{k|k-1} - d - 1}{\nu_{k-1|k-1} - d - 1} \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}, \quad \nu_{k|k-1} = \exp(-T/\tau) \nu_{k-1|k-1}. \quad (18)$$

Hier ist T die Dauer der Vorhersage, während die Zeitkonstante τ die Agilität repräsentiert, mit der das Objekt seine Ausdehnung bzw. Orientierung im Raum ändern kann (wobei ein größeres τ ein weniger agiles Objekt bedeutet).

Zum Abschluss dieses Abschnittes sollte festgehalten werden, dass lediglich (7) bereits die Marginaldichte $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$ bezeichnet. Dagegen zeigt sich, dass die Marginaldichte $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{X}_k$ einer *Student-t-Verteilung* [7] genügt. Aus dieser kann dann insbesondere der mittlere quadratische Schätzfehler für den kinematischen Zustand berechnet werden.

3 Ein modifizierter Ansatz

Als Konsequenz der bereits aufgeführten Schwächen des Bayes-Ansatzes aus [3, 4] wurde in [5, 6] ein modifizierter Ansatz vorgeschlagen, der neben der Ausdehnung auch den Beitrag des statistischen Sensorfehlers mit Varianz \mathbf{R} zur Streuung der Messungen berücksichtigt, indem das „Messrauschen“ in Gleichung (1) als normalverteilt mit Varianz $\mathbf{X}_k + \mathbf{R}$ angesetzt wird:

$$p(\mathbf{Y}_k | n_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \prod_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}(\mathbf{y}_k^j; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k + \mathbf{R}). \quad (19)$$

Eine konjugierte a-priori-Verteilung, die sowohl unabhängig von \mathbf{R} als auch analytisch handhabbar ist, lässt sich allerdings hierzu nicht finden. Es sind also einige geeignete Approximationen erforderlich.

Der modifizierte Ansatz aus [5,6] verwendet für die Aktualisierung der Kinematik des Zentroiden die Standardgleichungen des Kalman-Filters:

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_{k|k-1} [\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}] , \quad \mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \frac{\mathbf{Y}_{k|k-1}}{n_k} , \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_{k|k-1}\mathbf{S}_{k|k-1}\mathbf{K}_{k|k-1}^T , \quad \mathbf{K}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} . \quad (21)$$

Dabei ist

$$\mathbf{Y}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1} + \mathbf{R} \quad (22)$$

die vorhergesagte Varianz einer einzelnen Messung. Bei dieser Form der Aktualisierung wird die mit der geschätzten Ausdehnung einhergehende Unsicherheit stillschweigend vernachlässigt, womit es sich aber bei $\mathbf{S}_{k|k-1}$ ganz offensichtlich lediglich um eine Approximation der wahren Innovationskovarianz handelt.

Formal wird bei dem Vorschlag aus [5,6] die (unbekannte) Dichte der Kinematik bei gegebener Ausdehnung durch ihre (unbekannte) Marginalie approximiert, wobei jeweils eine Normalverteilung zugrunde gelegt ist:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) \approx p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) . \quad (23)$$

Wie zuvor wird auch hier angenommen, dass die (marginalisierte) a-priori-Dichte der Ausdehnung einer Wishart-Verteilung gemäß Gleichung (7) genügt und dass die zugehörige (eigentlich ebenfalls unbekannt) a-posteriori-Dichte von derselben Form ist. Als Aktualisierung der Schätzung $\mathbf{X}_{k|k}$ (anstelle des Parameters $\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}$) wird wiederum, in Analogie zu Gleichung (14), eine gewichtete Summe der vorhergesagten Ausdehnung $\mathbf{X}_{k|k-1}$, des Terms $\mathbf{N}_{k|k-1}$ aus Gleichung (15) und der Messstreuung $\bar{\mathbf{Y}}_k$ aus Gleichung (4) verwendet. Die Gewichtung erfolgt jedoch an dieser Stelle mit Hilfe von matrixwertigen Faktoren, die derart gewählt werden, dass die gewichteten Terme im Falle $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}$ als Erwartungswerte skalare Vielfache der Matrix $\mathbf{X}_{k|k-1}$ ergäben.

Zu diesem Zweck werden (z. B. via Cholesky-Faktorisierung) Wurzeln der Matrizen $\mathbf{X}_{k|k-1}$, $\mathbf{S}_{k|k-1}$ und $\mathbf{Y}_{k|k-1}$ mit

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^T \quad (24)$$

usw. bestimmt. Man definiert

$$\hat{\mathbf{N}}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1/2} \mathbf{N}_{k|k-1} (\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1/2})^T (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^T , \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} \mathbf{Y}_{k|k-1}^{-1/2} \bar{\mathbf{Y}}_k (\mathbf{Y}_{k|k-1}^{-1/2})^T (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^T , \quad (26)$$

und führt damit die Aktualisierung der Schätzung $\mathbf{X}_{k|k}$ wie folgt durch:

$$\mathbf{X}_{k|k} = \frac{1}{\alpha_{k|k}} \left(\alpha_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1} + \hat{\mathbf{N}}_{k|k-1} + \hat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} \right) , \quad \alpha_{k|k} = \alpha_{k|k-1} + n_k . \quad (27)$$

Mit der angenommenen (näherungsweise) Unabhängigkeit der Schätzungen von Kinematik und Ausdehnung, die in (23) zum Ausdruck kommt, und unter der weiteren Annahme unabhängiger dynamischer Modelle für diese beiden Größen kann man für die Vorhersage einerseits wiederum die Standardgleichungen des Kalman-Filters

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1|k-1}, \quad \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (28)$$

verwenden, während, basierend auf derselben Heuristik wie im vorigen Abschnitt, die Verwendung von

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1} \quad (29)$$

vorgeschlagen wurde. Im folgenden Abschnitt wird noch aufgezeigt werden, dass die Fehlervarianz der Ausdehnungsschätzung in etwa proportional zu $1/(\alpha_{k|k} - 2)$ ist, und zwar sowohl für sehr große Werte von $\alpha_{k|k}$ als auch für Werte nahe bei 2, wobei stets $\alpha_{k|k} > 2$ gelten muss. Als Konsequenz dieser Beobachtungen wurde in [6] vorgeschlagen, entweder einen exponentiellen Anstieg der Varianz mit der Zeit gemäß

$$\alpha_{k|k-1} = 2 + \exp(-T/\tau)(\alpha_{k-1|k-1} - 2) \quad (30)$$

oder einen linearen Anstieg gemäß

$$\alpha_{k|k-1} = 2 + \frac{\alpha_{k-1|k-1} - 2}{1 + (T/\tau)(\alpha_{k-1|k-1} - 2)} \quad (31)$$

zu verwenden.

4 Schätzfehler und Moment-Matching

Die beiden in diesem Aufsatz betrachteten Verfahren nehmen übereinstimmend an, dass die Marginaldichte der Ausdehnung einer inversen Wishart-Verteilung genügt. Dies hat Auswirkungen auf die weiteren Betrachtungen. Um die Notation zu verkürzen, wird im weiteren Verlauf teilweise auf die explizite Ausweisung der bis zu einem Zeitpunkt akkumulierten Messungen verzichtet. So wird etwa verkürzt $E[\mathbf{X}_k]$ anstelle von $E[\mathbf{X}_k|\mathcal{Y}_k]$ geschrieben, also mit der Parameterdarstellung (9)

$$E[\mathbf{X}_k] = \mathbf{X}_{k|k} = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}}{\alpha_{k|k}} \quad \text{mit} \quad \alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1. \quad (32)$$

Es sei nun $\hat{\mathbf{X}}_k$ eine beliebige Schätzung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix \mathbf{X}_k . Der mittlere quadratische Fehler (engl. mean square error, kurz MSE) \hat{e} dieser Schätzung werde durch Summation über alle MSEs der einzelnen Elemente von $\hat{\mathbf{X}}_k$ in Bezug auf die zugehörigen Elemente von \mathbf{X}_k ermittelt. Da sowohl $\hat{\mathbf{X}}_k$ als auch \mathbf{X}_k SPD Matrizen sind, kann dieser Fehler als

$$\hat{e}_{k|k} = \text{tr} E[(\hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{X}_k)^2] \quad (33)$$

geschrieben werden. Es zeigt sich nun, dass dieser Ausdruck gerade dann minimal wird, wenn man $\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_{k|k}$ wählt. Wie im vektorvariaten Fall ist also auch hier der bedingte Erwartungswert der MMSE-Schätzer. Der zugehörige MSE $e_{k|k}$ berechnet sich aus der Varianz

$$\text{Var} [\mathbf{X}_k] := E[(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k|k})^2] = E[\mathbf{X}_k^2] - \mathbf{X}_{k|k}^2 \quad (34)$$

gemäß

$$e_{k|k} = \text{tr} \text{Var} [\mathbf{X}_k]. \quad (35)$$

Für eine SPD Zufallsmatrix, die einer inversen Wishart-Verteilung genügt, ist mit den Zusammenhängen in [7] die Varianz durch

$$\mathbf{V}_{k|k} := \text{Var} [\mathbf{X}_k] = \frac{\alpha_{k|k} \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k})\mathbf{X}_{k|k} + (\alpha_{k|k} + 2)\mathbf{X}_{k|k}^2}{(\alpha_{k|k} + 1)(\alpha_{k|k} - 2)} \quad (36)$$

gegeben, was auf einen MMSE von

$$e_{k|k} = \frac{\alpha_{k|k} \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k})^2 + (\alpha_{k|k} + 2) \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2)}{(\alpha_{k|k} + 1)(\alpha_{k|k} - 2)} \quad (37)$$

für $\alpha_{k|k} > 2$ führt.

Mit diesen Ergebnissen wird offensichtlich, dass ein so genanntes *Moment-Matching* – dies ist die Bestimmung der Parameter einer (inversen Wishart-)Verteilung aus gegebenen Momenten erster und zweiter Ordnung – lediglich einen zusätzlichen Parameter $\alpha_{k|k}$ frei lässt, sobald die erwartete Matrix $\mathbf{X}_{k|k}$ bestimmt wurde. Demnach ist nicht zu erwarten, dass man Gleichung (36) unter allen Umständen vollständig erfüllen kann. Dagegen kann die Gültigkeit von Gleichung (37) stets erreicht werden. Von dieser Gleichung ausgehend findet man zunächst eine quadratische Gleichung $e_{k|k}\alpha_{k|k}^2 - p_{k|k}\alpha_{k|k} - q_{k|k} = 0$ und damit die Lösung

$$\alpha_{k|k} = \frac{p_{k|k} + \sqrt{p_{k|k}^2 + 4e_{k|k}q_{k|k}}}{2e_{k|k}} \quad (38)$$

mit

$$p_{k|k} = e_{k|k} + \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k})^2 + \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2) > e_{k|k}, \quad q_{k|k} = 2(e_{k|k} + \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2)) > 2e_{k|k}. \quad (39)$$

Hierbei ist zu beachten, dass in (38) nicht das negative Vorzeichen vor der Wurzel verwendet werden kann, da dies ein negatives $\alpha_{k|k}$ liefern würde. Dagegen bewirkt das gewählte Vorzeichen offenbar stets $\alpha_{k|k} > 2$ und liefert somit jeweils eine gültige Lösung.

5 IMM

Das so genannte *Interacting Multiple Model* (kurz IMM) ist ein bekanntes Verfahren, mit dem sich zuverlässlich auch solche Objekte tracken lassen, deren dynamisches Verhalten lediglich über gewisse Zeiträume hinweg konstant ist. Bei einem IMM wird also zusätzlich modelliert, dass das zu trackende Objekt gelegentlich zwischen unterschiedlichen Dynamikmodellen wechseln kann. Details zu diesem Verfahren sind in ausreichendem Maße in

der Literatur zu finden, so etwa in [9]. An dieser Stelle soll aufgezeigt werden, wie sich der modifizierte Ansatz des Abschnittes 3 in einem IMM einsetzen lässt.

Bezeichnet $\pi_{k-1|k-1}^i$ die Gültigkeitswahrscheinlichkeit des Dynamikmodells i (von insgesamt R) zum Zeitpunkt $k-1$, so beginnt ein Verarbeitungszyklus mit der Berechnung der vorhergesagten Gültigkeitswahrscheinlichkeiten $\pi_{k|k-1}^j = \sum_{i=1}^R \pi^{ij} \pi_{k-1|k-1}^i$, wobei π^{ij} die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels von Modell i zu Modell j bezeichnet. Als nächstes werden die Mischungswahrscheinlichkeiten $\pi_{k-1|k-1}^{i|j} = \pi^{ij} \pi_{k-1|k-1}^i / \pi_{k|k-1}^j$ berechnet. Damit wird ein Interaktionsschritt durchgeführt. Für die Kinematik ergibt sich

$$\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{i|j} \mathbf{x}_{k-1|k-1}^i, \quad (40)$$

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{i|j} \left\{ \mathbf{P}_{k-1|k-1}^i + \left[\mathbf{x}_{k-1|k-1}^i - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{0j} \right] \left[\mathbf{x}_{k-1|k-1}^i - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{0j} \right]^T \right\} \quad (41)$$

als Standardschritt. Diesem Schritt liegt ein Moment-Matching zugrunde, bei dem die tatsächlich entstehenden (marginalen) Gauß-Mischdichten durch gewöhnliche Gauß-Dichten mit übereinstimmenden ersten und zweiten Momenten ersetzt werden. Wie zuvor erwähnt wurde, kann für die inversen Wishart-Verteilungen der Ausdehnung lediglich ein Moment-Matching durchgeführt werden, welches erster Ordnung vollständig, jedoch zweiter Ordnung nur skalar ist. Ein solches Vorgehen führt auf

$$\mathbf{X}_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{i|j} \mathbf{X}_{k-1|k-1}^i, \quad (42)$$

$$e_{k-1|k-1}^{0j} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{i|j} \left\{ e_{k-1|k-1}^i + \text{tr} \left(\left(\mathbf{X}_{k-1|k-1}^i - \mathbf{X}_{k-1|k-1}^{0j} \right)^2 \right) \right\}. \quad (43)$$

Ausgehend von den so gewonnenen Anfangszuständen wird jedes Modell individuell mit den Messungen aktualisiert.

Im Laufe der weiteren Verarbeitung sind noch die modellspezifischen Messwahrscheinlichkeiten $\Lambda_{k|k-1}^j = p(\mathbf{Y}_k | j, \mathbf{Y}_{k-1})$ zu berechnen. Auch an dieser Stelle ist man auf eine geeignete Approximation angewiesen. Wir schreiben

$$\Delta_{k|k-1}^j := \bar{\mathbf{Y}}_k - (n_k - 1)(\mathbf{X}_{k|k-1}^j + \mathbf{R}) = \Delta \mathbf{Y}_k^j + (n_k - 1)(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k|k-1}^j) \quad (44)$$

mit

$$\Delta \mathbf{Y}_k^j := \bar{\mathbf{Y}}_k - (n_k - 1)(\mathbf{X}_k + \mathbf{R}). \quad (45)$$

Die Varianz von $\Delta \mathbf{Y}_k^j$ kann näherungsweise dadurch bestimmt werden, dass man die unbekannte Größe \mathbf{X}_k durch die modellspezifische Vorhersage $\mathbf{X}_{k|k-1}^j$ ersetzt und damit jeweils die Wishart-Verteilung $\mathcal{W}(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, \mathbf{X}_{k|k-1}^j + \mathbf{R})$ unter Berücksichtigung der Zusammenhänge in [7] auswertet. Es ergibt sich die Approximation

$$\text{Var}[\Delta \mathbf{Y}_k^j] \approx (n_k - 1) \left(\text{tr}(\mathbf{Y}_{k|k-1}^j) \mathbf{Y}_{k|k-1}^j + (\mathbf{Y}_{k|k-1}^j)^2 \right) \quad (46)$$

mit $\mathbf{Y}_{k|k-1}^j$ wie in Gleichung (22). Aus

$$\text{Var}[\Delta_{k|k-1}^j] = \text{Var}[\Delta \mathbf{Y}_k^j] + (n_k - 1)^2 \mathbf{V}_{k|k-1}^j \quad (47)$$

mit $\mathbf{V}_{k|k-1}^j$ nach Gleichung (36) resultiert der Vorschlag, für $n_k \geq 2$

$$\Lambda_{k|k-1}^j \propto \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1}^j, \mathbf{S}_{k|k-1}^j) \cdot \frac{\text{etr} \left(-\frac{1}{2} \Delta_{k|k-1}^j (\text{Var}[\Delta_{k|k-1}^j])^{-1} \Delta_{k|k-1}^j \right)}{|2\pi \text{Var}[\Delta_{k|k-1}^j]|^{\frac{d+1}{4}}} \quad (48)$$

und für $n_k = 1$ den Ausdruck $\Lambda_{k|k-1}^j \approx \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1}^j, \mathbf{S}_{k|k-1}^j)$ zu verwenden.

Mit dieser Approximation können die aktualisierten Gültigkeitswahrscheinlichkeiten $\pi_{k|k}^j = \Lambda_{k|k-1}^j \pi_{k|k-1}^j / (\sum_{i=1}^R \Lambda_{k|k-1}^i \pi_{k|k-1}^i)$ bestimmt werden. Lediglich zu Ausgabezwecken berechnet man dann noch die gemischten Schätzungen \mathbf{x}_k und \mathbf{X}_k in Analogie zu den Gleichungen (40) bis (43) mit $\pi_{k-1|k-1}^{i,j}$ ersetzt durch $\pi_{k|k}^j$.

6 Konfidenzbereiche

Im Zuge eines Schätzprozesses interessiert in der Regel nicht nur der Schätzwert selber, sondern auch der mit diesem Wert verbundene MSE. Für die Schätzung $\mathbf{x}_{k|k}$ der Kinematik ist dieser MSE durch $\text{tr Var}[\mathbf{x}_k]$ und für den Schätzwert der Ausdehnung, wie wir oben gesehen haben, ganz entsprechend durch $\text{tr Var}[\mathbf{X}_k]$ gegeben. Wesentlich aussagekräftiger als diese reinen Zahlen sind graphisch darstellbare Konfidenzbereiche. Für Schätzungen von Zustandsvektoren ist das Vorgehen bekannt. Mit $\text{Var}[\mathbf{x}_k] = \mathbf{P}_{k|k}$ und einem festgelegten Vertrauenswert c berechnet man ein Höhenniveau $h = h(c)$ derart, dass

$$P\{(\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k) \leq h\} = c \quad (49)$$

gilt. Unter der Annahme einer Normalverteilung kann $h(c)$ numerisch bestimmt werden, da $(\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)$ dann einer χ^2 -Verteilung genügt. Die Ellipse aller Punkte $\mathbf{c}_{k|k}$, für die

$$\mathbf{a}_{k|k}^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = h \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_{k|k} := \mathbf{c}_{k|k} - \mathbf{x}_{k|k} \quad (50)$$

gilt, ist dann die Grenze eines Bereiches in dem, bei bestimmtem Schätzwert $\mathbf{x}_{k|k}$, der wahre Wert \mathbf{x}_k mit Wahrscheinlichkeit c liegen wird (siehe Abbildung 1).

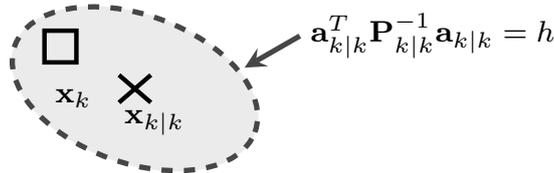


Abbildung 1: Konfidenzgebiet für einen normalverteilten Zufallsvektor (nur Positions-komponente). Dargestellt sind die geschätzte Position (\times), die wahre Position (\square) sowie die Grenze des Konfidenzbereiches ($---$).

Wie ist aber eine entsprechende Darstellung für die Ausdehnung? Obwohl $\text{Var}[\mathbf{X}_k]$ wiederum eine SPD Matrix ist, bleibt die Bedeutung einer hierdurch definierten Ellipse unklar, zumal die so erhaltenen Punkte die physikalische Einheit einer Fläche hätten. Um die Frage zu klären, ist zunächst zu erörtern, was genau die geschätzte Ausdehnung sein soll. Zeichnet man eine Ellipse

$$\mathbf{a}_{k|k}^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = h, \quad (51)$$

so lässt sich diese unmittelbar als geschätzte Ausdehnung interpretieren. Im Gegensatz zu oben ist h hier ein geeignet gewählter, jedoch fester Wert. Angesichts der getroffenen Interpretation von Gleichung (51) wäre die wahre Ausdehnung dann durch

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_k = h \quad (52)$$

gegeben. Also muss es das Ziel sein, ein Gebiet derart anzugeben, dass man mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit c ein \mathbf{X}_k vorliegen hat, bei dem alle Punkte \mathbf{a}_k , die für dieses \mathbf{X}_k Gleichung (52) genügen, innerhalb des Gebietes liegen. Wie in Abbildung 2 dargestellt kann ein derartiges \mathbf{X}_k hinsichtlich sowohl der Orientierung als auch des Halbachsenverhältnisses von der geschätzten Matrix $\mathbf{X}_{k|k}$ abweichen.

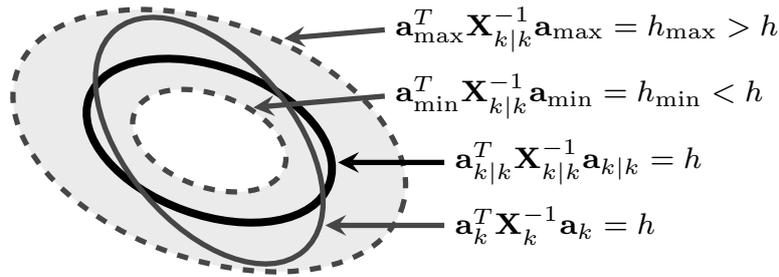


Abbildung 2: Konfidenzgebiet für eine SPD Zufallsmatrix mit einer inversen Wishart-Verteilung. Dargestellt sind die geschätzte Ausdehnung (—), die wahre Ausdehnung (—) sowie die Grenzen des Konfidenzbereiches (---).

In [6] wurde vorgeschlagen, als Grenzen eines Konfidenzbereiches zwei durch einen Wert $f = f(c) > 1$ definierte Höhenlinien zu wählen, die wie in Abbildung 2 gezeigt ebenfalls durch die Schätzung $\mathbf{X}_{k|k}$ bestimmt werden. Konkret bedeutet dies die Forderung einer Wahrscheinlichkeit c für das Vorliegen einer Matrix \mathbf{X}_k derart, dass

$$h_{\min} = h/f \leq \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_k \leq h \cdot f = h_{\max} \quad (53)$$

für alle \mathbf{a}_k gilt, die Gleichung (52) genügen. Wie in [6] gezeigt wurde, ist dies aber äquivalent dazu, dass

$$h/f \leq \mathbf{a}_{k|k}^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k} \leq h \cdot f \quad (54)$$

für alle $\mathbf{a}_{k|k}$ gilt, die Gleichung (51) genügen. Die Bedingung (54) wiederum ist genau dann für alle $\mathbf{a}_{k|k}$ erfüllt, wenn sie für diejenigen besonderen Werte $\mathbf{a}_{k|k}$ erfüllt ist, die extreme Werte von $\mathbf{a}_{k|k}^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k}$ liefern, und eine Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen zeigt, dass letztlich die von h unabhängigen Bedingungen

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Z}_k) \geq 1/f \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_k) \leq f \quad (55)$$

mit

$$\mathbf{Z}_k := (\mathbf{X}_{k|k}^{1/2})^T \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k|k}^{1/2}, \quad \mathbf{X}_{k|k}^{1/2} (\mathbf{X}_{k|k}^{1/2})^T = \mathbf{X}_{k|k} \quad (56)$$

einzuhalten sind. Man benötigt demnach die Verbundverteilung von kleinstem und größtem Eigenwert von \mathbf{Z}_k .

Genügt nun aber \mathbf{X}_k einer inversen Wishart-Verteilung mit erwarteter Matrix $\mathbf{X}_{k|k}$ und Parameter $\alpha_{k|k}$, dann besitzt die in (56) definierte Zufallsmatrix \mathbf{Z}_k eine Standard-Wishart-Verteilung gemäß

$$\mathbf{Z}_k \sim \mathcal{W} \left(\nu_{k|k}, \alpha_{k|k}^{-1} \mathbf{I} \right). \quad (57)$$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen c und f hängt also offenbar nicht vom Schätzwert $\mathbf{X}_{k|k}$ ab, sondern lediglich vom Parameter $\alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1$.

Aus [10] ist die Verbundverteilung der nach Größe sortierten Eigenwerte einer SPD Zufallsmatrix mit Standard-Wishart-Verteilung (57) bekannt. Für zwei räumliche Dimensionen ist die Dichte durch

$$p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{2}{\alpha_{k|k}}\right)^{\nu_{k|k}} \Gamma\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_{k|k}-1}{2}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_{k|k}}{2}(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})\right) \quad (58)$$

$$\cdot (\lambda_{\max} \lambda_{\min})^{(\nu_{k|k}-3)/2} \cdot (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

für $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\min} \geq 0$ gegeben. Hieraus erhält man nach einigen länglichen Rechnungen

$$c(f) = P\{1/f \leq \lambda_{\min} \wedge \lambda_{\max} \leq f\} \quad (59)$$

$$= P(2\beta, 2\Lambda_2) - P(2\beta, 2\Lambda_1) - \sqrt{\pi} \frac{e^{-\Lambda_1} \Lambda_1^\beta + e^{-\Lambda_2} \Lambda_2^\beta}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \cdot (P(\beta, \Lambda_2) - P(\beta, \Lambda_1)) \quad (60)$$

mit den Abkürzungen

$$\Lambda_1 := \frac{\alpha_{k|k}}{2f}, \quad \Lambda_2 := \frac{\alpha_{k|k} f}{2}, \quad \beta := \frac{\alpha_{k|k}}{2} + 1 \quad (61)$$

und der normalisierten unvollständigen Gammafunktion

$$P(r, x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x e^{-\xi} \xi^{r-1} d\xi. \quad (62)$$

Die Funktion $c(f)$ in Gleichung (59) ist offenbar streng monoton steigend und damit invertierbar. Die gesuchte Abbildung $f(c)$ kann hieraus für jede vorgegebene Konfidenz c mit Standardverfahren ermittelt werden.

7 Simulationsergebnisse

Um einen Vergleich der beiden Ansätze aus den Abschnitten 2 und 3 durchzuführen, wurde eine Gruppe mit 5 Mitgliedern getrackt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit von $v = 300$ m/s in der (x, y) -Ebene bewegten. Die Gruppenmitglieder waren linienförmig angeordnet mit jeweils 500 m Abstand zwischen benachbarten Mitgliedern.

Längere Phasen einer Geradeausbewegung wurden unterbrochen durch einen 45°- sowie zwei 90°-Turns (mit Radialbeschleunigungen von 2 g, 2 g bzw. 1 g), bevor sich die Gruppe zuletzt aufgespalten hat. Das Szenario wurde durch einen (fiktiven) Sensor mit Abtastzeit $T = 10$ s beobachtet, der unkorrelierte x - und y -Messungen mit Standardabweichungen von $\sigma_x = 500$ m bzw. $\sigma_y = 100$ m lieferte. Hierbei wurde eine Detektionswahrscheinlichkeit von jeweils $P_d = 80\%$ für jedes einzelne Gruppenmitglied angenommen. Damit ergibt sich für die Messungen eine Gauß-Mischdichte, und die Annahmen (2) bzw. (19) können nur (gute oder schlechte) Approximationen hiervon darstellen.

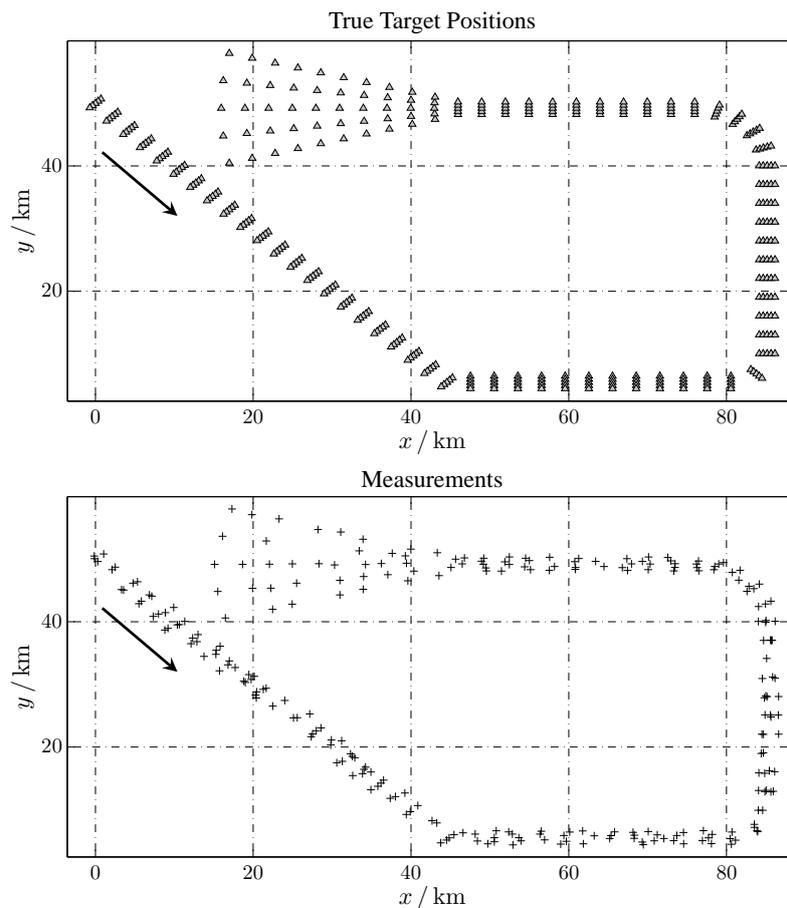


Abbildung 3: Untersuchtes Szenario einer Gruppe mit 5 Mitgliedern. Dargestellt sind zu jedem Zeitpunkt die Positionen der Gruppenmitglieder (oben) sowie die resultierenden Messungen (unten).

Abbildung 4 oben zeigt die erzielten Trackingergebnisse bei Anwendung des Verfahrens aus [3, 4]. Deutlich zu erkennen sind einerseits die Kopplung zwischen geschätzter Ausdehnung und Varianz der Positionsschätzung – die beiden Größen unterscheiden sich lediglich durch einen skalaren Faktor – sowie andererseits die nachteilhaften Konsequenzen der Tatsache, dass das Verfahren insgesamt Ausdehnung plus Messfehler schätzt: Das Verfahren reagiert bei diesem Szenario nur träge auf eine sich verändernde Orientierung der Gruppe und neigt insgesamt dazu, bei der Schätzung der Zentroidsposition dem je-

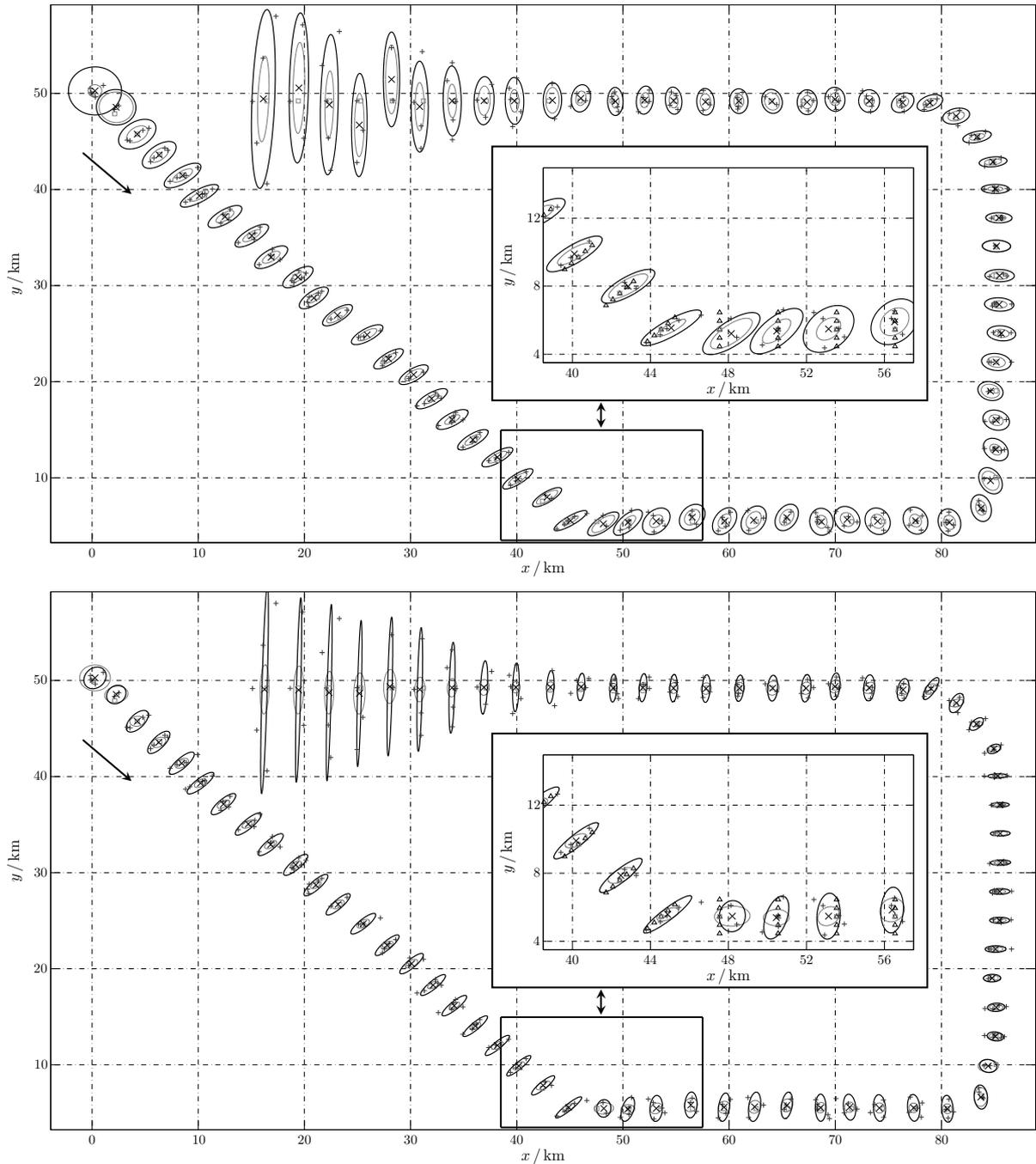


Abbildung 4: Trackingergebnisse zum Szenario aus Abbildung 3 bei Anwendung des Bayes-Ansatzes zum Gruppentracking aus [3, 4] (oben) und bei Anwendung des modifizierten Ansatzes aus [5, 6] unter Einsatz eines IMM mit drei Modellen (unten). Dargestellt sind zu jedem Zeitpunkt die Positionen der Gruppenmitglieder (\triangle), die Messungen ($+$), die geschätzte Position des Zentroiden (\times), die wahre Position des Zentroiden (\square), die geschätzte Ausdehnung ($- \cdot -$) sowie die Grenze des 90 %-Konfidenzbereiches zur Positionsschätzung ($- \cdot \cdot -$).

weiligen Schwerpunkt der Messungen zu folgen. Letzteres wird umso deutlicher, je größer die Ausdehnung der betrachteten Gruppe wird.

Als Alternative zum Verfahren aus [3,4] wurde anschließend ein IMM nach Abschnitt 5 angewendet. Es bestand aus drei Modellen mit jeweils näherungsweise konstanter Geschwindigkeit bei weißer Beschleunigung mit folgenden Einstellungen:

1. Geringes kinematisches Prozessrauschen bei niedriger Agilität der Ausdehnung.
2. Starkes kinematisches Prozessrauschen bei sehr hoher Agilität der Ausdehnung zur Berücksichtigung typischen Manöververhaltens.
3. Gemäßigtes kinematisches Prozessrauschen bei hoher Agilität der Ausdehnung zur Berücksichtigung von Änderungen von Form, Größe oder (absoluter) Orientierung ohne Manöver des Schwerpunktes.

In Abbildung 4 unten ist das hiermit erzielte Ergebnis dargestellt. Der Algorithmus zeigt sowohl das gewünschte glättende Verhalten während der Nicht-Manöver-Phasen als auch zeitnahe Reaktionen auf Manöver und/oder Veränderungen der Ausdehnung. Insbesondere kann das Verfahren der veränderten Orientierung ohne größere Verzögerung folgen.

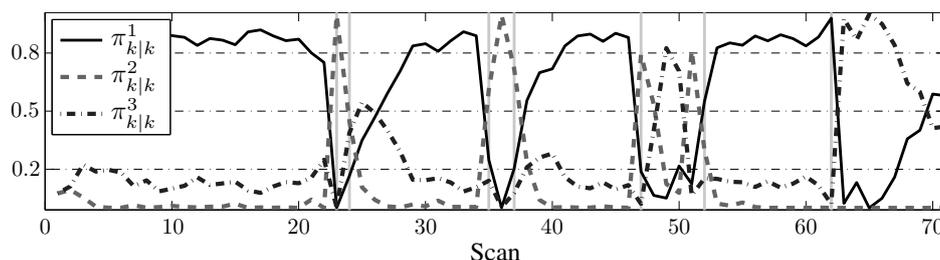


Abbildung 5: Gültigkeitswahrscheinlichkeiten nach Aktualisierung der 3 Modelle für das Szenario in Abbildung 3.

Abbildung 5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Gültigkeitswahrscheinlichkeiten der drei Modelle. Das Manövermodell reagiert auf plötzliche Veränderungen des Schwerpunktes. Nach Beendigung dieser Manöver (sowie in der Mitte des schwächeren 1 g-Manövers) zeigt das Modell für reine Ausdehnungsänderungen eine höhere Wahrscheinlichkeit, bevor das Nicht-Manöver-Modell nach Anpassung der Orientierung wieder den wesentlichen Beitrag liefert. Das Modell für reine Ausdehnungsänderungen ist auch in der Phase der Gruppenauflösung dominant, wo der Schwerpunkt kaum von der Geradeausbewegung mit konstanter Geschwindigkeit abweicht, sich die Größe der Gruppe aber rapide ändert.

Abbildung 6 stellt die modellspezifischen Werte $\alpha_{k|k}^j$ sowie den Gesamtwert $\alpha_{k|k}$ dar. Offenbar wird letzterer maßgeblich durch den spezifischen Wert des jeweils dominierenden Modells beeinflusst. Man beachte aber, dass das skalare Moment-Matching aus Abschnitt 4 bei der Berechnung von $\alpha_{k|k}$ nicht auf eine reine gewichtete Summe der einzelnen $\alpha_{k|k}^j$ führt, weshalb der kombinierte Wert durchaus kleiner sein kann als alle seiner Beiträge.

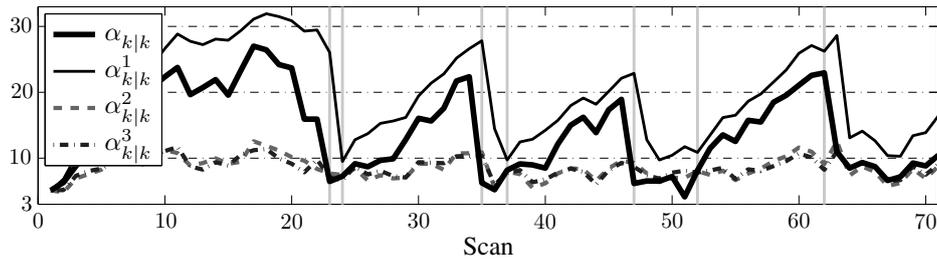


Abbildung 6: Modellspezifische Werte $\alpha_{k|k}^j$ und kombinierter Wert $\alpha_{k|k}$ für das Szenario in Abbildung 3.

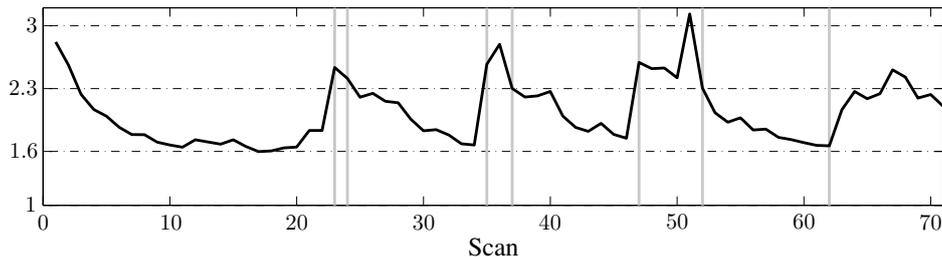


Abbildung 7: Verlauf des Wertes f aus Gleichung (59) bei einer Konfidenz von $c = 70\%$ für das Szenario in Abbildung 3.

Abbildung 7 schließt diesen Abschnitt mit der Darstellung des zeitlichen Verlaufs des Wertes f aus Gleichung (59) ab. Je größer dieser Wert und damit der Konfidenzbereich ist, desto weniger Verlässlichkeit wird der geschätzten Ausdehnung zugeschrieben. Der Verlauf zeigt klar die während eines Manövers und unmittelbar danach reduzierte Verlässlichkeit der Ausdehnungsschätzung, während Phasen einer Geradeausbewegung ohne Veränderung der räumlichen Anordnung ein zunehmendes Vertrauen bewirken.

8 Zusammenfassung

Zwei jüngst veröffentlichte Ansätze zum Tracking ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen, die jeweils mehr als eine Messung pro Umlauf liefern können, modellieren die Ausdehnung mit Hilfe einer symmetrischen, positiv definiten Zufallsmatrix, welche einer inversen Wishart-Verteilung genügt. In diesem Aufsatz wurden verschiedene damit in Zusammenhang stehende Aspekte beleuchtet. Im Kontext mit einem IMM sind Moment-Matching und die Berechnung der modellspezifischen Gültigkeitswahrscheinlichkeiten wesentliche Aspekte, und es wurde gezeigt, wie diese Aufgaben für den die Ausdehnung beschreibenden Teils des Schätzproblems gelöst werden können. Darüber hinaus wurde die Bestimmung eines Konfidenzbereiches für die Schätzung der Ausdehnung beleuchtet.

Zukünftige Arbeiten umfassen die Schätzung der Zahl der Gruppenmitglieder unter Berücksichtigung einer begrenzten Sensorauflösung sowie die hier nicht diskutierte und mit einigen Herausforderungen versehene Problematik einer entsprechenden Datenasso-

ziation.

Literatur

- [1] O. E. Drummond, S. S. Blackman, and G. C. Petrisor, “Tracking clusters and extended objects with multiple sensors,” in *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets*, vol. 1305, 1990, pp. 362–375.
- [2] M. J. Waxman and O. E. Drummond, “A bibliography of cluster (group) tracking,” in *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets*, vol. 5428, 2004, pp. 551–560.
- [3] W. Koch, “On Bayesian tracking of extended objects,” in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Multisensor Fusion & Integration for Intelligent Systems*, 2006.
- [4] —, “Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices,” *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, no. 3, pp. 1042–1059, 2008.
- [5] M. Feldmann and D. Fränken, “Tracking of extended objects and group targets using random matrices – A new approach,” in *Proc. ISIF Intern. Conf. on Information Fusion (FUSION)*, 2008, pp. 242–249.
- [6] —, “Advances on tracking of extended objects and group targets using random matrices,” in *Proc. ISIF Intern. Conf. on Information Fusion (FUSION)*, 2009, pp. 1029–1036.
- [7] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distributions*. Chapman & Hall, 1999.
- [8] D. A. Harville, *Matrix Algebra From a Statistician’s Perspective*. Springer, 1997.
- [9] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation (Theory, Algorithms and Software)*. John Wiley & Sons, 2001.
- [10] R. J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, ser. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, 1982.

Modellfreie Regelung von klimatechnischen Komponenten

Jakob Rehrl, Martin Horn
Alpen Adria Universität Klagenfurt
Institut für Intelligente Systemtechnologien
Lehrstuhl für Mess- und Regelungssysteme
Universitätsstraße 65-67
9020 Klagenfurt
jakob.rehrl@uni-klu.ac.at

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Temperaturregelung in einer raumlufttechnischen Anlage. Ein auf Basis numerischer Simulationen dimensionierter „intelligenter“ Regler wird einem klassischen Standardregler gegenüber gestellt. Die Regler werden an einer industriellen Anlage erprobt und im Hinblick auf ihre Leistungsfähigkeit verglichen.

1 Einleitung

Mit Hilfe raumlufttechnischer (RLT) Anlagen können Lufttemperatur und Luftfeuchte in Räumen auf gewünschte Werte eingestellt werden. Als Regler werden in der Praxis meist Proportional-Integral (PI)-Glieder eingesetzt. Da nur selten mathematische Modelle für RLT Anlagen vorhanden sind, die als Grundlage für den Reglerentwurf dienen können, basiert die Reglerdimensionierung oft auf zeitaufwändigen Versuchen an der realen Anlage. Um diese Hürde zu überwinden, werden im vorliegenden Beitrag Ansätze zur Modellierung der Komponenten einer RLT Anlage vorgestellt. Aufbauend auf diese Modelle wird ein sogenannter „intelligenter“ PI-Regler (i-PI-Regler) [2, 5, 1] entworfen und in weiterer Folge an einer realen Anlage getestet. Obwohl es sich bei dem Verfahren um einen „modellfreien“ Ansatz ¹ handelt, d.h. kein Modell benötigt wird, wird sich zeigen, dass die Modellbildung für den Entwurf des Reglers von enormer Bedeutung ist. Der i-PI-Regler wird einem PI-Regler gegenübergestellt, der mittels der bekannten Ziegler-Nichols „closed loop“ Methode [10, 6] entworfen wurde.

¹engl. model-free control [5]

2 Versuchsanlage

Für die Durchführung von Experimenten steht beim Kooperationspartner Fischer&Co. Luft- und Klimatechnik² in Graz die in Abbildung 1 dargestellte industrielle Versuchsanlage zur Verfügung. Wahlweise lässt sich der Testraum, in dem sich die Anlage befindet und/oder eine angrenzende Werkhalle mit der aufbereiteten Zuluft versorgen. Die Anlage bietet die Möglichkeit, Luft zu *kühlen*, zu *erwärmen*, zu *entfeuchten* und zu *befeuchten*. Die dazu verwendeten Komponenten sind in Abbildung 2 zu sehen und werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

2.1 Erwärmen der Luft

Zum Erwärmen der Luft steht ein Heizregister in Form eines Lamellenrohr-Kreuzstromwärmeübertragers zur Verfügung. Durch Variation der Wassereintrittstemperatur des Registers kann die Lufttemperatur beeinflusst werden.

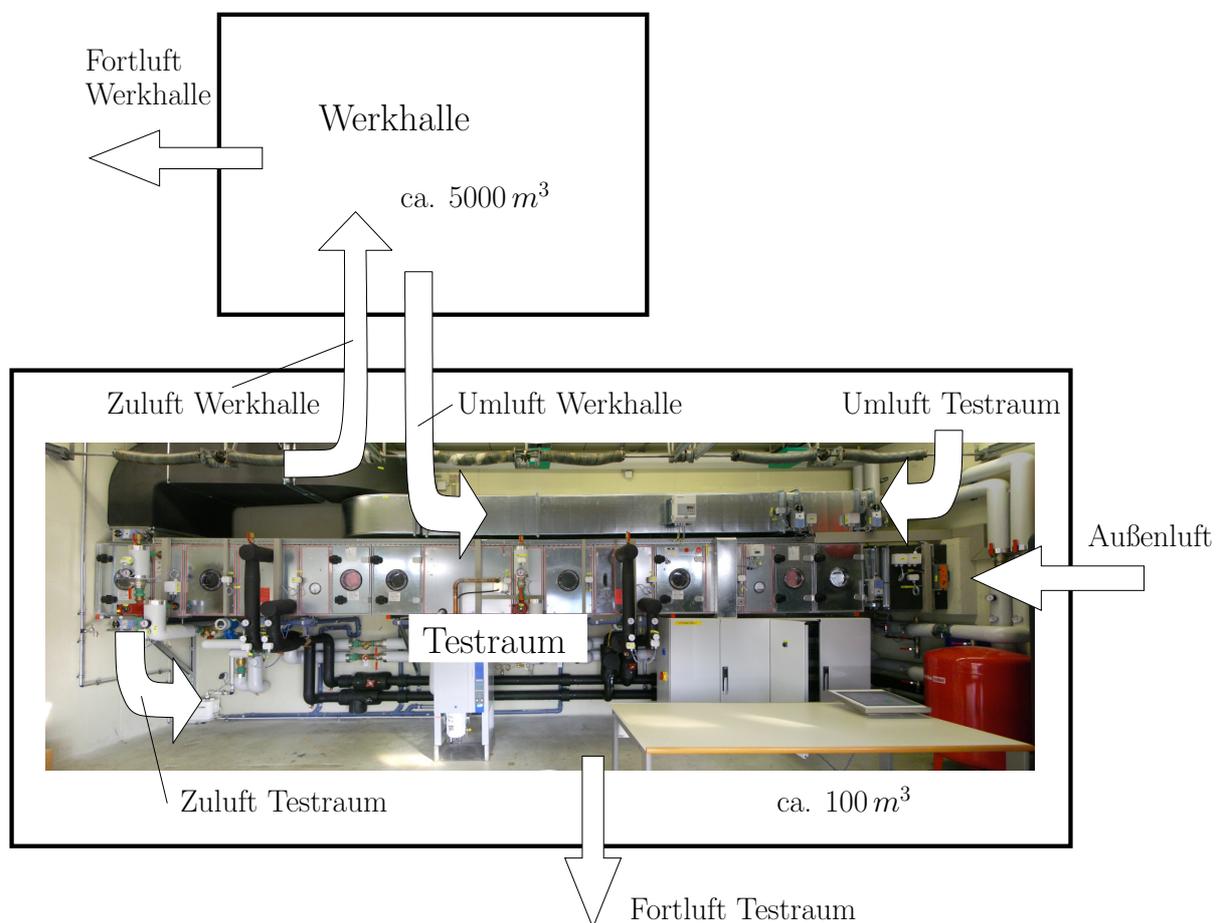


Abbildung 1: Versuchsanlage bei der Firma Fischer&Co. in Graz

²<http://fischer-co.at/>

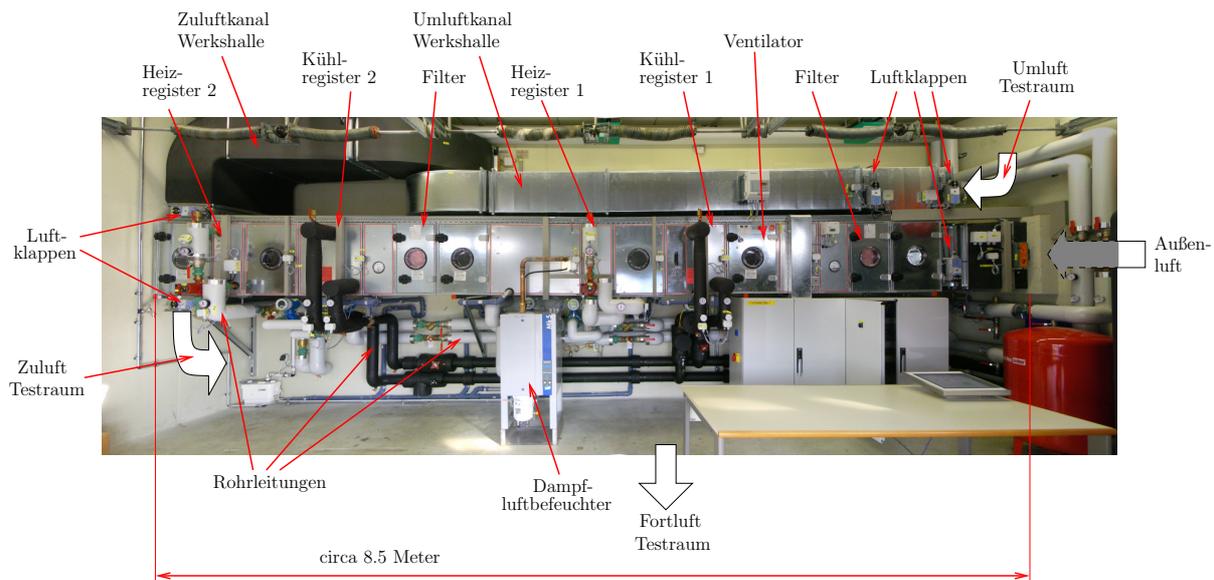


Abbildung 2: Komponenten der Versuchsanlage

2.2 Kühlen und Entfeuchten der Luft

Zum Kühlen und Entfeuchten der Luft ist ein Kühlregister vorhanden. Es handelt sich - wie auch beim Heizregister - um einen Lamellenrohr-Kreuzstromwärmeübertrager. Beim Kühlregister wird allerdings nicht die Wassereintrittstemperatur, sondern der Wassermassenstrom durch das Register variiert. Durch Abkühlen der Luft unter die Taupunkttemperatur lässt sich die absolute Feuchte der Luft absenken.

2.3 Befeuchter

Zur Erhöhung der Luftfeuchte ist ein elektrisch beheizter Dampf-luftbefeuchter vorhanden. Wasser wird verdampft und der Wasserdampf mit Hilfe einer Dampfzange in den Luftstrom eingebracht.

2.4 Ventilator, Luftklappen

Mit Hilfe der Luftklappen lässt sich festlegen, welcher Raum (Testraum und/oder Werkshalle) mit Zuluft versorgt wird. Außerdem kann das Verhältnis von Umluft und Außenluft eingestellt werden. Beim verwendeten freilaufenden Ventilator wird in der Einströmdüse der Differenzdruck gemessen. Daraus wird der Luftvolumenstrom berechnet. Die Drehzahl des Ventilators lässt sich mit Hilfe eines Frequenzumrichters variieren.

3 Modell der Regelstrecke

Die Regelstrecke besteht aus dem Kühlregister und der dazugehörigen Hydraulik. Ein mathematisches Modell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Kühlregisters

wird in [9, 8] angegeben. Eingangsgrößen des Modells sind Luft- und Wassermassenstrom, Wassereintrittstemperatur sowie Lufteintrittstemperatur und -feuchte. Ausgangsgrößen sind Wasseraustrittstemperatur sowie Luftaustrittstemperatur und -feuchte. Da es sich um ein System mit verteilten Parametern handelt, werden die Rohre in Segmente unterteilt und die einzelnen Segmente als Systeme mit konzentrierten Parametern aufgefasst. Die einzelnen Segmente werden entsprechend dem Aufbau des zu untersuchenden Wärmeübertragers vernetzt. Abbildung 3 zeigt exemplarisch einen Vergleich der Luftaustrittstemperatur zwischen Simulation und Messung. Der dem Kühlregister nachgeschaltete Tropfenabscheider wurde als Verzögerungsglied erster Ordnung (VZ1) modelliert.

Die Hydraulik wird durch eine statische Kennlinie modelliert, die den Zusammenhang zwischen Ventilhub und Wassermassenstrom wiedergibt. Da der Druck Δp in Abbildung 4 konstant gehalten wird, ist eine Modellierung auf diese Weise gerechtfertigt.

4 Regelungskonzept

In diesem Abschnitt wird der Einsatz eines i-PI-Reglers zur Temperaturregelung vorgestellt. Die Luftaustrittstemperatur $y = \vartheta_{LA}$ des Kühlregisters 2 (siehe Abbildung 2) soll geregelt werden. Als Stellgröße u steht die Ventilstellung zur Verfügung, vgl. Abbildung 4.

Die Idee zur modellfreien Regelung mit i-PI-Reglern wird zum Beispiel in [2, 5, 1] vorgestellt, Anwendungen sind in [7, 3, 4] zu finden. Es wird angenommen, dass sich die Strecke durch das dynamische System

$$E(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^\iota y}{dt^\iota}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\kappa u}{dt^\kappa}) = 0 \quad (1)$$

mit dem skalaren Eingang u und dem skalaren Ausgang y beschreiben lässt. Bei ι und κ handelt es sich um positive ganze Zahlen. Als lokales Streckenmodell lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen [2, 5, 1]

$$\dot{y} = F + \alpha u \quad \text{mit} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

angeben. Die Stellgröße u wird nach folgender Gleichung ermittelt:

$$u = \frac{1}{\alpha} [(\dot{r} - F) + u_c] \quad \text{mit} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (3)$$

wobei u_c der Ausgang eines PI-Reglers ist, d.h.

$$u_c = K_P e + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \text{wobei} \quad e = r - y. \quad (4)$$

Eine zeitdiskrete Version des Regelgesetzes (3), (4) wurde auf einem X20-System der Firma Bernecker und Rainer³ mit einer Abtastzeit von $T_a = 10 \text{ ms}$ realisiert. Dabei wird F in Gleichung (3) durch den Schätzwert

$$\hat{F}_k = \hat{y}_k - \alpha u_{k-1} \quad (5)$$

³<http://www.br-automation.com>

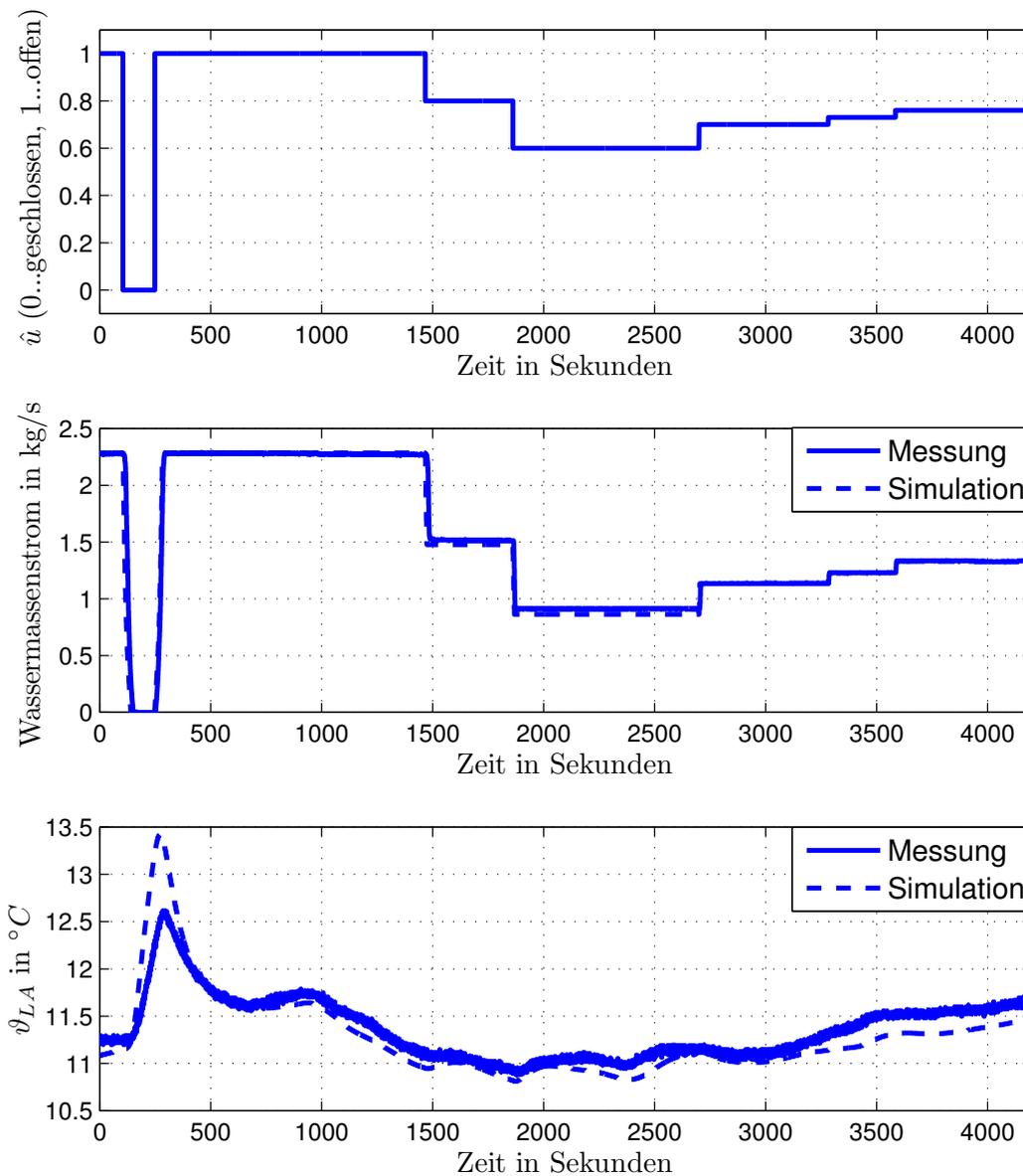


Abbildung 3: Vergleich Simulation / Messung beim Kühlregister

ersetzt, wobei $u_k = u(t_k)$, $\hat{y}_k = \hat{y}(t_k)$ ist. Der Schätzwert \hat{F}_k wird alle $T_u = 100\text{ ms}$ aktualisiert⁴, d.h.

$$t_k = k T_u \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Gemäß [2] wird α als Konstante angesetzt, die so gewählt wird, dass die Ausdrücke

⁴Der Index u steht für „Update“.

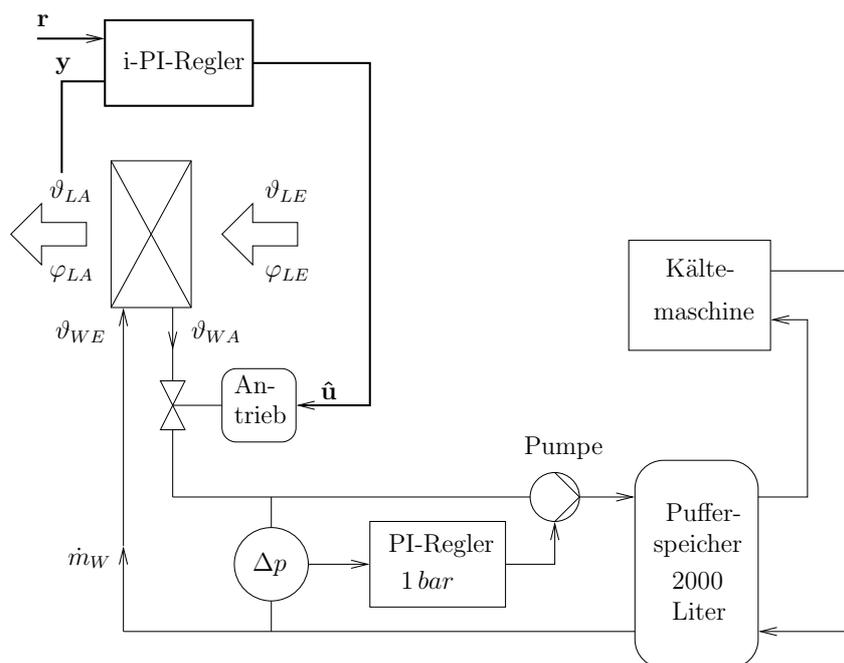


Abbildung 4: Temperaturregelkreis

$|\hat{F}_k|$ und $|\alpha u_k|$ Werte der gleichen Größenordnung annehmen. Die Struktur des resultierenden Regelkreises ist in Abbildung 5 zu sehen. Offensichtlich ist die Realisierung von zwei Differenzgliedern erforderlich. Hierfür steht eine große Anzahl an Algorithmen zur Verfügung. In [2] wird beispielsweise ein algebraisches Verfahren zur Schätzung der zeitlichen Ableitung eingesetzt, in [7] wird ein Differentiationsschema basierend auf Sliding-Mode Konzepten angewandt. In der vorliegenden Anwendung erwies sich der Einsatz von Differenzgliedern mit Verzögerungen (DT1) als vollkommen ausreichend.

Für die Einstellung der Reglerparameter, d.h. die Wahl von K_P , K_I und α existieren bislang keine Einstellregeln, wie es sie beispielsweise für PI-Regler gibt, siehe [6]. Deshalb ist man auf Versuche an der Anlage oder auf Simulationen angewiesen. Da dynamische Vorgänge in RLT Anlagen sehr große Zeitkonstanten besitzen, ist die Einstellung des Reglers an der realen Strecke mit einem oft nicht vertretbaren Zeitaufwand verbunden. Aus diesem Grund wurden die Reglerparameter mit Hilfe von Simulationen festgelegt. Dabei erwies sich die Ermittlung geeigneter Parameter als unverhältnismäßig aufwändig. Die Einstellung von K_P , K_I und α erforderte eine Vielzahl von Simulationsläufen, eine Vorgangsweise die an der realen Anlage aus Zeit- und Kostengründen nicht möglich ist. Letztendlich haben sich die folgenden Werte als gut geeignet erwiesen:

$$K_P = 10^{-2} \quad K_I = 10^{-4} \quad \alpha = 10 \quad (7)$$

5 Ergebnisse

Die Luftaustrittstemperatur ϑ_{LA} des Kühlregisters 2 wurde zunächst auf 14°C eingestellt. Danach wurde die Referenzgröße r entsprechend Abbildung 6 auf 13°C abgesenkt. Dabei

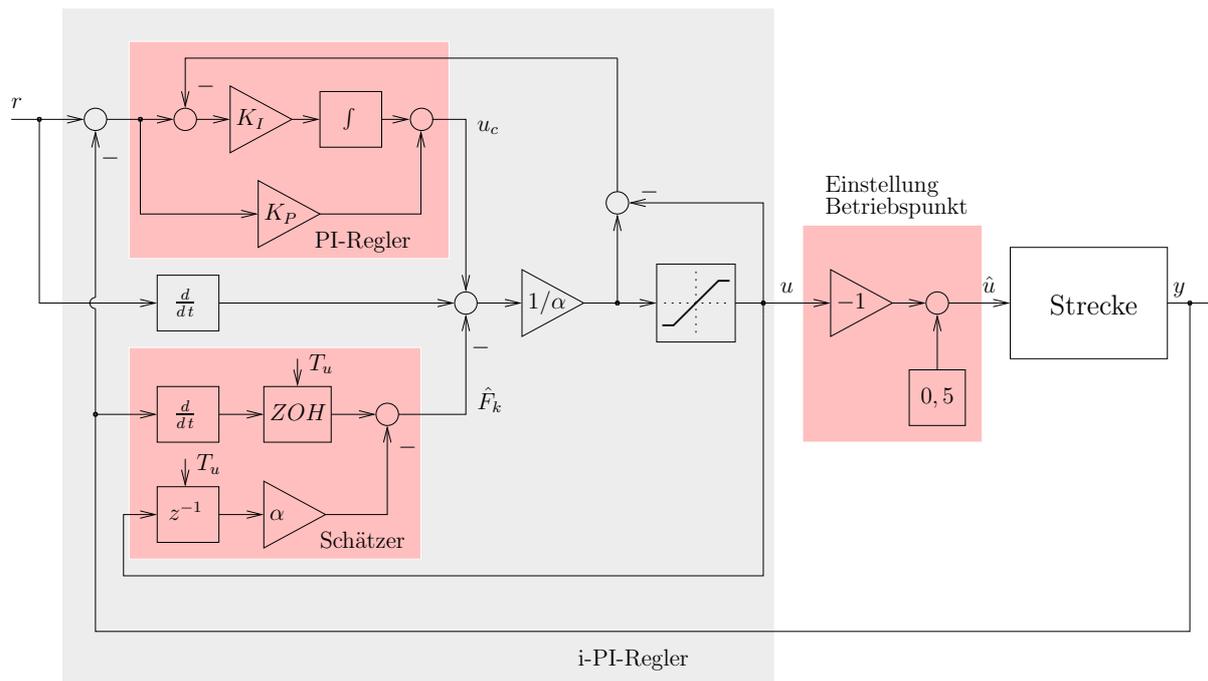


Abbildung 5: Struktur des i-PI-Reglers

betrug die Lufteintrittstemperatur in das Kühlregister 2 etwa $\vartheta_{LE} = 18^\circ C$, die relative Luftfeuchte etwa $\varphi_{LE} = 65\%$. Über die gesamte Dauer des Experiments können der Luftmassenstrom durch das Register sowie die Wassereintrittstemperatur in das Register als annähernd konstant vorausgesetzt werden, nämlich $\dot{m}_L \approx 2 \text{ kg/s}$ und $\vartheta_{WE} \approx 7^\circ C$.

5.1 Simulation

Das Ergebnis der numerischen Simulation des Regelkreises ist in Abbildung 6 zu sehen. Man beachte, dass im Gegensatz zum realen Experiment die Lufteintrittstemperatur ϑ_{LE} hier mit $17^\circ C$ festgelegt wurde. Dies ist darauf zurückzuführen, dass während der Durchführung der Simulationen die tatsächlichen Bedingungen an der realen Anlage nur schwer abgeschätzt werden konnten.

Das dynamische Verhalten des Regelkreises kann als zufriedenstellend bezeichnet werden. Das Überschwingen von etwa 30 % kann durch entsprechende Modifikation der Reglerparameter (7) sicherlich reduziert werden. Allerdings würde diese Maßnahme den Parametrierungsaufwand deutlich erhöhen. Die angegebenen Reglerparameter (7) können somit als guter Kompromiss zwischen notwendigem Aufwand und erzielbarer Leistungsfähigkeit gesehen werden.

5.2 Experiment

Der durch Simulation gefundene i-PI-Regler wurde *ohne* zusätzliche Modifikation an der realen Versuchsanlage erprobt. Zu Vergleichszwecken wurde ein nach der Ziegler-Nichols

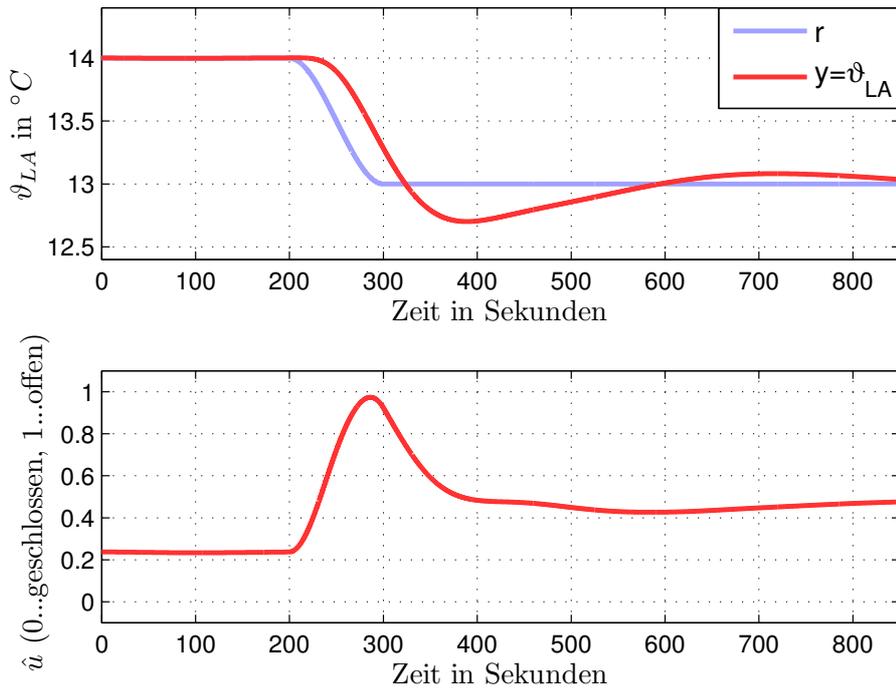


Abbildung 6: Simulation des Regelkreises mit dem i-PI-Regler

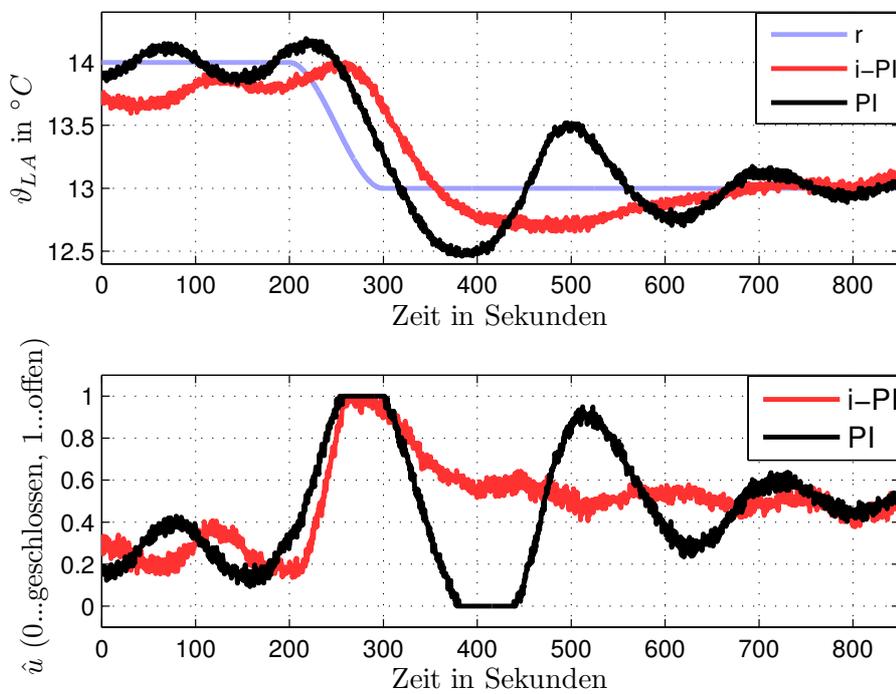


Abbildung 7: Messergebnisse zum i-PI- und zum PI-Regler

„closed-loop“ Methode [10] eingestellter PI-Regler mit den Parametern

$$K_{P,ZN} = 0,94 \quad K_{I,ZN} = 0,0153 \quad (8)$$

entworfen. Die entsprechenden Messergebnisse sind in Abbildung 7 dargestellt. Der Regelkreis basierend auf der i-PI-Strategie zeigt sehr ähnliches dynamisches Verhalten wie in der Simulation, vgl. Abbildung 6. Die Anwendung des klassischen PI-Reglers führt hingegen zu einem zu schwach gedämpften Verlauf der Luftaustrittstemperatur ϑ_{LA} . Dieses Verhalten könnte durch eine Nachjustierung der Reglerparameter verbessert werden, was wiederum mit einem entsprechenden Zeitaufwand verbunden ist.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Konzept der „intelligenten“ PI-Regler stellt einen interessanten Ansatz zur modellfreien Regelkreissynthese dar. Dies wird durch eine Reihe von erfolgreichen praktischen Anwendungen belegt. Ein Nachteil der Methode besteht zur Zeit noch darin, dass keinerlei Richtlinien zur Einstellung der Reglerparameter existieren. Im vorliegenden Fall wurden die Reglereinstellungen auf der Basis numerischer Simulationen gefunden. Hierfür wird ein Modell der Regelstrecke benötigt, was natürlich dem Prinzip der modellfreien Regelung widerspricht. Eine experimentelle Ermittlung der Reglerparameter war allerdings aufgrund der großen Zeitkonstanten nicht möglich.

Ein wesentlicher Vorteil des „intelligenten“ Konzeptes besteht darin, dass sich die Regelung automatisch an Veränderungen in der Regelstrecke anpasst. Das typischerweise nichtlineare Übertragungsverhalten raumluftechnischer Anlagen bei ständig wechselnden Betriebsbedingungen legt daher den Einsatz solcher Methoden nahe. Aus diesem Grund könnten „intelligente“ Regler in Zukunft eine interessante Alternative zu Reglern, wie sie traditionellerweise in klimatechnischen Anlagen eingesetzt werden, darstellen.

Die Durchführung dieser Arbeit wurde im Rahmen des Projektes „Hochgenaue Regelung klimatechnischer Anlagen“ von der österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft unterstützt.

Literatur

- [1] FLIESS, Michel ; JOIN, Cédric: Commande sans modele et commande a modele. e-STA, 5 2008
- [2] FLIESS, Michel ; JOIN, Cédric: Intelligent PID Controllers. In: *16th Mediterrean Conference on Control and Automation*. Ajaccio, France, 2008
- [3] FLIESS, Michel ; JOIN, Cédric: A model-free control for an engine throttle: a preliminary study. In: *Journal europeen des systemes automatisees (JESA)* 42 (2008), Nr. 2-3, S. 337–354

- [4] FLIESS, Michel ; JOIN, Cédric ; DELALEAU, Emmanuel ; BOURGEOT, Jean-Matthieu ; CHIRANI, Shabnam Arbab ; CALLOCH, Sylvain: Model-Free Control of Shape Memory Alloys Antagonistic Actuators. In: *17th IFAC World Congress*. Seoul, Rep. of Korea., 2008
- [5] FLIESS, Michel ; JOIN, Cédric ; MBOUP, Mamadou ; SIRA-RAMIREZ, Hebertt: Vers une commande multivariable sans modèle. In: *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2006)*. Bordeaux France, 2006
- [6] HORN, Martin ; DOURDOUMAS, Nicolaos: *Regelungstechnik*. München : Pearson-Studium, 2004
- [7] HORN, Martin ; REICHHARTINGER, Markus: Model-free Control of a Thermal Plant. In: *7th IEEE International Conference on Control and Automation (accepted for publication)*. Christchurch, New Zealand, 2009
- [8] REHRL, Jakob ; HORN, Martin: Analyse und Synthese eines Temperaturregelkreises mit Hilfe der harmonischen Balance. In: *at-Automatisierungstechnik* 56 (2008), Nr. 6, S. 296–306. <http://dx.doi.org/10.1524/auto.2008.0709>. – DOI 10.1524/auto.2008.0709
- [9] WIENING, Wolfgang: *Zur Modellbildung, Regelung und Steuerung von Wärmeübertragern zum Heizen und Kühlen von Luft*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1987 (Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 128)
- [10] ZIEGLER, J. G. ; NICHOLS, N. B.: Optimum Settings for Automatic Controllers. In: *Trans. ASME* 64 (1942), S. 759–768

Die Hydraulis bei Heron von Alexandria und ihre Rekonstruktion

Prof. D. Kalligeropoulos, Dr. S. Vasileiadou
Technological Education Institute (T.E.I). Piraeus
Thivon & P. Ralli 250, 12244 Athens, Greece
dkal@tepir.gr & svasil@tepir.gr

Kurzfassung

Die Hydraulis, das musikalische Instrument – Vorfahr der mittelalterlichen Orgel – wurde von Ktesibios (~300v.u.Z.) entdeckt und von Heron aus Alexandria (~100v.u.Z.) in seine Pneumatik (Theorem 42) beschrieben. Das Instrument enthält:

- *einen mechanischen Teil (durch Handkraft bewegliche Pumpe mit zwei Ventilen)*
- *einen hydraulischen Teil (altarähnlicher Behälter und glockenförmiger Kessel für die Druckregelung der Luft) und*
- *einen pneumatischen Teil (Handtasten und Rohrpfiffe für die Erzeugung der musikalischen Tönen).*

Es ist also eine besondere Anwendung der während der hellenistischen Zeit entwickelten Wissenschaft der Pneumatik mit einer interessanten hydraulisch- pneumatischen Druckregelung. Die funktionelle Rekonstruktion des Instrumentes aufgrund der heronischen Beschreibungen erlaubt uns ein besseres Verständnis sowohl für die technischen also auch auf die theoretischen und musikalischen Kenntnissen dieser Periode. Insbesondere wurden zwei Tonsysteme von je 24 Pfeifen konstruiert. Das eine mit der bekannten logarithmischen Skala von Bach, das andere mit der rationalen physikalischen Skala von Aristoxenos (~350v.u.Z.).

1. Einleitung

Das musikalische Tasteninstrument der Antike, Wasserorgel oder Hydraulis genannt, ist eine hellenistische Erfindung, die uns durch die römische and byzantinische Periode direkt zu der mittelalterlichen Kirchenorgel führt.

Ihr Erfinder ist, laut Athenaios und Philon aus Byzanz, der erste aus der Schule der Griechen Ingenieure aus Alexandria: Ktesibios (um 300 v.u.Z.). Eine Beschreibung dieser ersten, mit zwei mechanischen Luftpumpen ausgerüsteten, Hydraulis finden wir viel später im Werk “Über Architektur,, (10,8) des Römers Ingenieurs Vitruvius (27 v.u.Z.). Eine genaue, ausführliche jedoch entwickelte Beschreibung dieses musikalischen Instruments ist uns durch das erhaltene Werk “Pneumatika,, (1,42) des jüngeren alexandrinischen Ingenieurs: Heron (um 100 v.u.Z.) überliefert.

Ein wichtiger archäologischer Fund aus dem antiken Dion beim Olymp bestätigt die Geschichtlichkeit dieser Beschreibungen. Prof. D. Pantermalis entdeckte (1992) bei seinen Ausgrabungen den oberen Teil einer Hydraulis bestehend aus einer Reihe von bronzernen Rohrpeifen. Der Fund ist ihm archäologischen Museum von Dion ausgestellt.

2. Die heronische Beschreibung

Im ersten Buch des Werkes Pneumatika (die Kunst der Pneumatik), Theorem 42, mit dem Titel: *Konstruktion eines Hydraulischen Musikinstruments* oder *Bau einer Wasserorgel* (*Υδραυλικού Οργάνου Κατασκευή*), beschreibt Heron:

- die **Maschine** (μηχανή), nämlich den mechanischen und hydraulischen Teil des Instruments,
- das **Organon** (όργανον), den musikalischen Teil des Instruments,
- die **Funktion** des Instruments und die Erläuterung seiner Regelung.

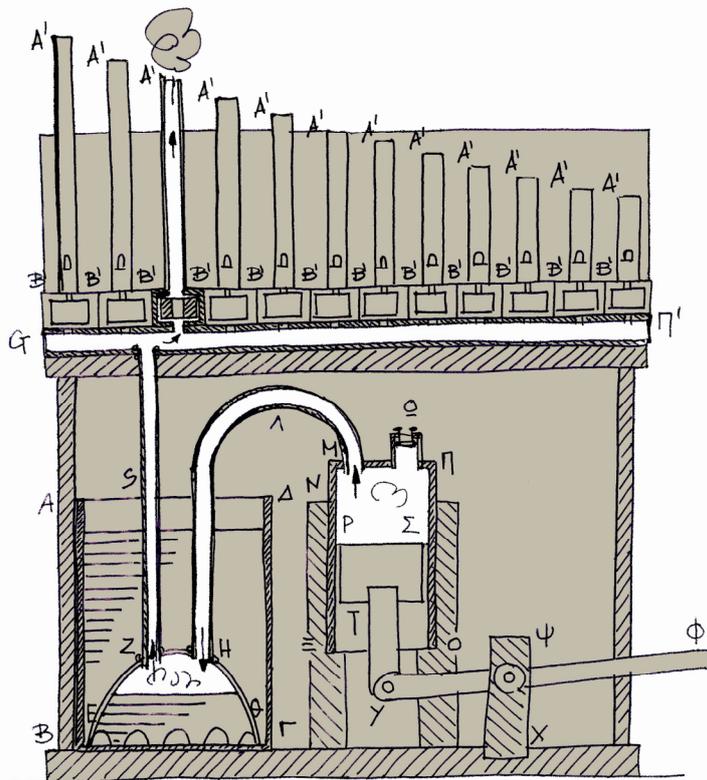


Fig. 1: Die antike Hydraulis nach Heron von Alexandria (skizze D. Kalligeropoulos)

Sowohl die Erfindung als auch die Konstruktion dieses musikalischen Instruments basieren auf dem physikalischen Konzept der Vorsokratischen Philosophen: Grundelemente der Materie sind: Erde, Wasser, Luft und der Energie: Feuer. Sie verbinden gleichzeitig die angewandte Wissenschaft der Mechanik mit den neuentwickelten Eigenschaften der Flüssigkeiten und der Gasen (Pneumatik).

Die einzelnen **Bestandteile des Instruments** sind folgende:

- Der **altarähnliche Behälter** (βωμίσκος) und der **glockenförmige Windkessel** (πνιγέυς) bilden den hydraulischen Mechanismus für die Einkesselung und die Kompression der Luft.

Der Windkessel dient hier als Regulator für die Druckregelung der eingekesselten Luft, die *“das Wasser in dem Behälter zum Steigen bringt und die Luft selbst so zusammengehalten wird, auf daß die Pfeifen immer Luft haben und tönen können,,*

- Die **Zylindrische Luftpumpe** (πυξίς) bestehend aus einem Kolben (εμβολεύς), einem handbeweglichen Hebel (κανών) und einem kleinen mechanisches Ventil (πυξίδιον).

Die Luftpumpe verschafft dem Windkessel die eingepresste Luft.

- Die **Rohrpfeifen** (αυλοί) für die Erzeugung der musikalischen Tönen.

Die Rohrpfeifen sind unten mit einem quer liegenden Rohr, für die Zufuhr der eingepressten Luft aus dem Windkessel, verbunden. Die verschiedenen Längen der Pfeifen erfolgen die verschiedenen Tönen.

- Die **Handtasten** (πλήκτρα) für die manuelle Auswahl der lautenden Rohrpfeifen, bestehend aus: einem Schubfach (γλωσσόκομον), einem Schieber (πώμα), einer hölzernen Taste (αγκωνίσκος) und einem Hornspatel (σπαθίον) für die automatische Rückstellung der Tasten.

Die **Funktion** der heronischen Hydraulis ist nun folgende:

- Ein Gehilfe arbeitet die **Handpumpe** und presst die Luft in den Kolben.
- Die **Ventile** regulieren die Ein- und Ausfuhr der Luft.
- Die eingepresste Luft in dem **Windkessel** behält ihren hohen Druck durch den hydraulischen Regelmechanismus des Behälters.

- Der Orgelspieler wählt durch den Druck auf die geeignete **Taste** die entsprechende **Rohrpfeife** und erzeugt somit den gewünschten Ton.

3. Die Rekonstruktion der Hydraulis

Das pneumatische, hydraulisch geregelte, musikalische Instrument der Wasserorgel, genannt Hydraulis, wurde durch die Jahrhunderte mehrmals rekonstruiert: Es gibt römische, byzantinische, mittelalterliche Rekonstruktionen und Variationen, wie auch kürzlich geschehene Rekonstruktionen der gefundenen Hydraulis von Dion.

Die **Schritte unserer Rekonstruktion** sind zusammengefaßt folgende:

- Wir haben uns ausschließlich auf die heronischen Beschreibungen gehalten. Wir haben versucht die **heronische Hydraulis** so treu wie möglich zu rekonstruieren.
- Die **Form**: Wir haben die einfachste, der heronischen Auffassung nächste, nämlich eine orthogonale Form des einheitlichen hölzernen **Korpus**, der sowohl den Wasserbehälter wie auch die eine Luftpumpe enthält.
- **Türen** erlauben die Einsicht im Inneren des Korpus.
- Die bronzene **Pumpe** wurde in einer Maschinenwerkstatt konstruiert. Zylinder und Kolben sind auf der Drehbank bearbeitet.
- Das **Ventil** für den Eingang der Luft ist nach den heronischen Beschreibungen treu nachgemacht. Ein neues Ventil für die Regelung des Luftausganges zum Windkessel wurde hinzugefügt.
- **Wasserbehälter** und **Windkessel** sind aus Kupfer bei einem Kupferschmied handgemacht und mit Kupferröhren verbunden.
- Die **Tastatur**: Hölzerne Tasten aus weissem afrikanischen Holz, hölzerne rechteckige Schieber mit einer senkrechten Bohrung, bronzene Schubfächer und Verbindungshebel, sowie neu eingeführten stählerne Spannfeder kontrollieren die Rohreingänge. Problematisch ist hier die gleichzeitige Sicherung der Dichtung und der freien Beweglichkeit der Tasten.
- Die **Rohrpfeifen**: Es sind 24 bronzene Pfeifen konstruiert, die die Breite von zwei Oktaven umfassen. Sie sind von oben mit einem bronzernen zylindrischen Deckel

gesperrt. Ihre frontale Öffnung ist für die kürzeren parabelförmig, für die längeren jedoch rechteckig, mit inneren Flügeln um Assonanzen zu vermeiden. Hölzerne Pforphen mit schräger Mündung sind im Eingang der Pfeifen eingesetzt.

- Die **Musikalität der Pfeifen**: Die Länge der Röhren bedingt die Frequenz der erzeugten Tönen. Eine bestimmte Anordnung, ein System, von mehreren Rohr Pfeifen erzeugt eine musikalische Skala.

Es wurden zwei Tonsysteme rekonstruiert, mit je 24 Röhren.

Das eine mit der bekannten logarithmischen Skala von Bach, nämlich mit 12 logarithmisch gleichen Halbtönen per Oktave, oder mit einem untereinander gleichen irrationalen Verhältnis: $a = \sqrt[12]{2} = 1,059$.

Das andere mit einer rationalen physikalischen Skala im Sinne des "harmonischen", Aristoxenos (370v.u.Z.) oder als eine Erweiterung des Diatonon von Didymos (10n.u.Z.) und Ptolemaios (165n.u.Z.) erdacht. Die Skala besitzt rationale Verhältnisse (Großer Ton: 9/8, kleiner Ton 10/9, Halbton: 16/15) und dazu sämtliche Töne und Halbtöne sind in den 16 ersten Harmonischen des Grundtons enthalten. Somit sind die Harmonischen aller Töne und Halbtönen der Skala in das Tonsystem enthalten und vom menschlichen Ohr harmonisch spürbar.



Fig. 2: Die Rekonstruktion der Hydraulis von Heron, D. Kalligeropoulos

4. Schlussbemerkungen

- Sowohl der archäologische Fund, als auch der gesamte Prozeß ihrer Rekonstruktion genau nach den heronischen Beschreibungen, bestätigt die Geschichtlichkeit dieser antiken Tastenorgel: Es handelt sich um eine Erfindung des 3ten Jh.v.u.Z.
- Die Kombination der Mechanik mit der Hydraulik und der Pneumatik, die Erfindung der hydraulischen Luftdruckregelung, die Idee für die Entwicklung der uralten Flöte in ein kompliziertes musikalisches Tasteninstrument, das eine Tonbreite von mehreren Oktaven ermöglicht, bilden sowohl eine wissenschaftlich-technologische als auch eine musikalische Neuerung.
- Heron traut sich sogar einen Schritt weiter: Er macht sein Musikinstrument von der menschlichen Energieleistung unabhängig. Im Theorem 43 beschreibt er einen interessanten Mechanismus für die automatische Funktion der Luftpumpe und schlägt eine autonome Hydraulik vor, die durch Ausnutzung der Energie des wehenden Windes, mittels einer Windmühle, selbsttätig die musikalischen Töne erzeugen kann. Das sind Schritte, die eine Industrielle Revolution voranmelden.

Literatur

- [1] Schmidt W., *Heron's von Alexandria Druckwerke*, Teubner Verlag, Leipzig 1899, Stuttgart 1976.
- [2] Lefas P., *Vitruv De Architectura*, Plethron Verlag, Athen 1996.
- [3] Williams A., *The Story of the Organ*, Walter Scott Publishing and Charles Scribner's Sons 1903, London 2009.
- [4] Kalligeropoulos D., Vasileiadou S., *Geschichte der Technologie und der Automaten*, Synchroni Ekdotiki Verlag, Athen 2005.

Stabilität linearer schaltender Systeme - ein Reglerentwurfsverfahren*

Kai Wulff[†], Fabian Wirth[‡], Robert Shorten[#]

[†]TU Ilmenau, Fachgebiet Regelungstechnik, Ilmenau

[‡]Uni Würzburg, Institut für Mathematik, Am Hubland, Würzburg

[#]NUI Maynooth, Hamilton Institute, Maynooth

`kai.wulff@tu-ilmenau.de`[†]

1 Einleitung

In vielen praktischen Anwendungen ist es zweckmäßig, die Regelstrecke durch lineare zeitvariante Modelle zu beschreiben. Beispielsweise kann eine nichtlineare Dynamik über einen großen Arbeitsbereich stückweise linear approximiert werden. In diesem Beitrag betrachten wir Regelstrecken, die zwischen einer Anzahl linearer zeitinvarianter Systembeschreibungen schalten. Hierbei wird die Systemdynamik zu jedem Zeitpunkt von genau einem dieser Untersysteme bestimmt. Die Systeme schalten autonom auf beliebige Art und Weise, ohne dass der Schaltvorgang beeinflusst werden kann.¹

Ein solches lineares geschaltetes System weist dynamisches Verhalten auf, das nicht allein durch die linearen zeitinvarianten Übertragungsfunktionen beschrieben werden kann. So ist sowohl das Stabilitätsverhalten als auch das transiente Verhalten wesentlich komplexer als bei linearen zeitinvarianten Regelkreisen. Der dynamische Einfluss des Schaltens reicht soweit, dass selbst Systeme, die ausschließlich aus stabilen zeitinvarianten Regelschleifen bestehen, instabiles Verhalten aufweisen können. Die Stabilitätsanalyse solcher Systeme ist außerordentlich komplex. Für den Fall, dass beliebiges Schalten zugelassen wird, kommen in der Regel Methoden der Lyapunovtheorie zum Einsatz. Für asymptotische Stabilität bei beliebigen Schalten muss die Existenz einer *gemeinsamen* Lyapunovfunktion nachgewiesen werden.

Trotz einer Vielzahl von Ergebnissen auf diesem Gebiet gibt es wenige konstruktive Verfahren zum Entwurf und zur Analyse von schaltenden Regelkreisen [4, 3, 9]. Insbesondere sind für Systeme höherer Ordnung nur für sehr eingeschränkte Systemklassen präzise (notwendige und hinreichende) Stabilitätskriterien bekannt. Im Allgemeinen muss dann

*Dieser Beitrag basiert zu wesentlichen Teilen auf den Ergebnissen in [16, 15]

[†]Korrespondenz bitte an diese Adresse

¹Um mit einem traditionellem Lösungsbegriff arbeiten zu können, soll einschränkend angenommen werden, dass auf einem endlichen Zeitintervall eine endliche Anzahl von Schaltzeitpunkten auftreten.

auf numerische Methoden (z. B. LMI-basierte Methoden) zum Nachweis der Stabilität zurückgegriffen werden. Ein nicht unerheblicher Nachteil solcher Ansätze besteht darin, dass lediglich die Existenz eines bestimmten Typen von Lyapunovfunktion (z. B. quadratische Funktion) geprüft wird. Ein solcher Nachweis ist jedoch nur hinreichend für die Stabilität des beliebig schaltenden Systems.

Für Systeme geringer Ordnung sind hingegen Methoden zum Stabilitätsnachweis bekannt, die zum Teil weit über jene der quadratischen Stabilität hinausgehen, siehe z. B. [6, 2, 14, 17]. Insbesondere für Eingrößensysteme dritter Ordnung sind auf Basis der Ergebnisse in [7, 1] numerische Verfahren entwickelt worden, mit denen die Stabilitätsgrenze beliebig genau angenähert werden kann [5, 13].

Neben der Stabilität des Regelungssystem ist das Übergangsverhalten ein wichtiges Entwurfskriterium. Dabei ist für schaltende Systeme neben den klassischen Forderungen an Führungs- und Störverhalten insbesondere das Übergangsverhalten bei Schaltvorgängen zu betrachten. Während zeitinvariante Systeme nur dann ein Übergangsverhalten aufweisen, wenn sich eine der Eingangsgrößen ändert, kann bei schaltenden Systemen auch durch die Schaltvorgänge eine Dynamik induziert werden (siehe Abschnitt 6 für ein Beispiel).

In diesem Beitrag wird ein Regelungsentwurf für ein autonom schaltendes lineares Eingrößensystem mit N Untersystemen betrachtet. Es wird eine schaltende Reglerarchitektur vorgeschlagen, bei der für jeden Streckenmodus ein geeigneter linearer Regler entworfen wird. Zu den Schaltzeitpunkten der Strecke wird die Stellgröße durch Umschalten der Reglerausgänge auf die schaltende Strecke aufgebracht. Der mit diesem Regler geschlossene Regelkreis kann wiederum als lineares schaltendes System betrachtet werden. Wir untersuchen Stabilitätseigenschaften des geschlossenen Kreises und zeigen, dass transientenfreies Schalten unter bestimmten Bedingungen möglich ist.

2 Problemstellung

Wir betrachten eine Regelstrecke deren dynamisches Verhalten durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(n_p)} = \sum_{l=0}^{n_p-1} q_l(t)y^{(l)} + p_0(t)u \quad (1)$$

beschrieben wird, wobei $y^{(n_p)}$ die n_p -te Ableitung von y bezeichnet und $p_0(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{P}_0$, $q_l(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{Q}_l$ stückweise konstante Funktionen mit $\mathcal{P}_0 = \{p_{01}, \dots, p_{0N}\}$, $N \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Q}_l = \{q_{l1}, \dots, q_{lN}\}$, $l = 0, \dots, n_p - 1$ sind. Wir nehmen an, dass $p_0(\cdot)$ und $q_l(\cdot)$ identische Unstetigkeitsstellen aufweisen, also dass gilt: $p_0(t) = p_{0k}$ wenn $q_l(t) = q_{lk}$ für $l = 0, \dots, n_p - 1$; $k \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ bezeichnet den Modus der Regelstrecke. Damit kann die Streckendynamik zu jedem Zeitpunkt t durch eine der N linearen zeitinvarianten Systeme:

$$\dot{x}_p(t) = A_k x_p(t) + b_k u(t), \quad k \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \quad (2a)$$

$$y(t) = c^T x_p(t) \quad (2b)$$

beschrieben werden, wobei $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ die stetige Zustandsvariable der Regelstrecke bezeichnet. Die Systemmatrix im Modus k ist durch

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -q_{0,k} & -q_{1,k} & \cdots & \cdots & -q_{n_p-1,k} \end{pmatrix},$$

gegeben; für die Ein- und Ausgangsvektoren erhält man $c = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in \mathbb{R}^{n_p}$ und $b_k = (0 \ \cdots \ 0 \ p_{0k})^T \in \mathbb{R}^{n_p}$. Weiterhin assoziieren wir mit jedem Modus $k \in \mathcal{I}$ die streng proper Übertragungsfunktion

$$P_k(s) = c^T (sI - A_k)^{-1} b_k.$$

Es sei angenommen, dass die Spezifikation für den geschlossenen Regelkreis in jedem dieser Modi gleich ist. In diesem Sinn kann das Schalten der Streckendynamik als Störung betrachtet werden. Ein solches Schalten der Streckendynamik sei aber unmittelbar erkennbar.

Unter diesen Annahmen soll nun ein Regler gefunden werden, so dass der geschlossene Regelkreis

1. für jeden Streckenmodus $k \in \mathcal{I}$ (in etwa) das gleiche Führungsverhalten aufweist,
2. für beliebiges Schalten zwischen den Streckenmodi asymptotisch stabil ist,
3. möglichst geringes Übergangsverhalten beim Schalten zwischen den Streckenmodi aufweist und
4. keine Zustandsrücksetzung des Reglers notwendig ist.

In diesem Beitrag wird ein Reglerentwurf vorgeschlagen, mit dem diese Anforderungen erfüllt werden können.

3 Entwurfsverfahren

Wir betrachten die Reglerstruktur wie sie Blockschaltbild 1 dargestellt ist. Für jeden Modus der Strecke wird ein Regler $C_k(s)$ entworfen, so dass die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden. Jeder dieser Regler wird als zeitinvariantes, lineares System realisiert. Bei jedem Schaltvorgang der Strecke wird dann der entsprechende Regler im Regelkreis aktiviert, indem der Ausgang des Regler u_k auf die Stellgröße geschaltet wird. Hierbei wird vereinfacht angenommen, dass das Schalten der Strecke und das Aufschalten des Reglerausgangs gleichzeitig geschieht.

Die einzelnen Regler $C_k(s)$ seien in der Zustandsdarstellung

$$\dot{x}_k(t) = K_k x_k(t) + l_k e(t) \tag{3a}$$

$$u_k(t) = m_k^T x_k(t) + j_k e(t) \tag{3b}$$

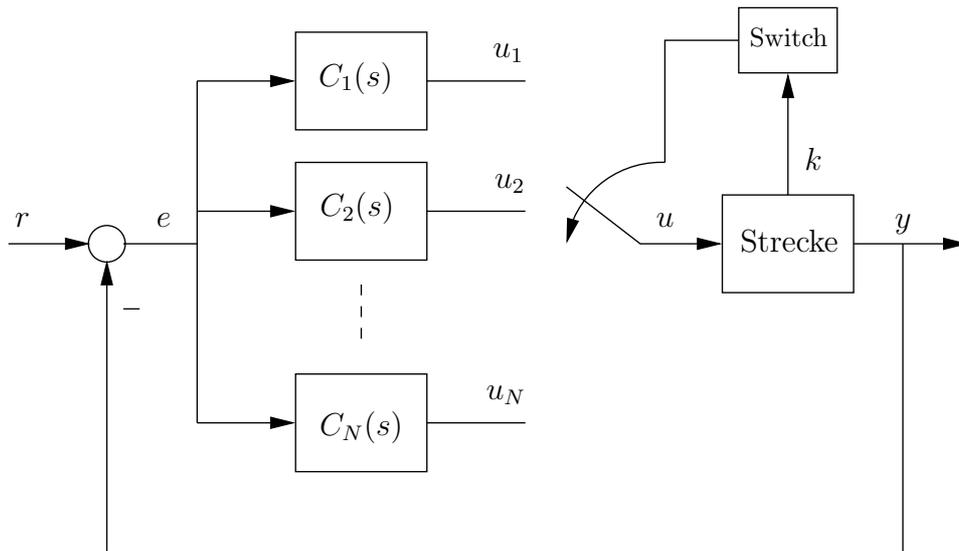


Abbildung 1: Structure of the switched linear control system

realisiert, wobei $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ der Zustandsvektor des k -ten Regler für die Strecke im Modus $k \in \mathcal{I}$ ist. Während der Reglereingang $e(t) \in \mathbb{R}$ für alle Regler $C_k(s)$ gleich ist, liefert jeder Regler ein eigenes Stellsignal $u_k(t) \in \mathbb{R}$. Für die Realisierung der Regler wählen wir die Regelungsnormform mit $K_k \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $l_k, m_k^T \in \mathbb{R}^{n_c}$ und $j_k \in \mathbb{R}$. Die jeweiligen Übertragungsfunktionen sind mit

$$C_k(s) = m_k^T (sI - K_k)^{-1} l_k + j_k$$

gegeben.

Für den Reglerentwurf wird nun folgender Ansatz vorgeschlagen:

1. Wähle einfache Vorgabepole $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p+n_c}\} \subset \mathbb{C}_-$, so dass die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt sind.
2. Entwerfe für jeden Streckenmodus $k \in \mathcal{I}$ einen Regler $C_k(s)$ mittels Polvorgabeverfahren, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises

$$\frac{C_k(s)P_k(s)}{1 + C_k(s)P_k(s)}$$

für jeden Modus $k \in \mathcal{I}$ gleich den Vorgabepolen Λ sind.

Es sei weiter angenommen, dass die so entworfenen Regler $C_k(s)$ gleichfalls ausschließlich Pole in der offenen linken Halbebene aufweisen.

Aus dem Entwurfsansatz folgt unmittelbar, dass die Reglerpole von den Entwurfs Polen verschieden sind, also $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \lambda \notin \sigma(K_k), k \in \mathcal{I}$. Dieser Umstand kann leicht durch Widerspruch belegt werden: Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises im Modus k ist

$$D_{P_k}(s)D_{C_k}(s) + N_{P_k}(s)N_{C_k}(s), \quad (4)$$

wobei $N(s)$, $D(s)$ das Zähler- bzw. Nennerpolynom der Übertragungsfunktionen $P(s)$ und $C(s)$ im entsprechenden Modus k bezeichnen. Sei λ nun eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (4). Falls λ ebenso ein Eigenwert von K_k ist, also $D_{Ck}(\lambda) = 0$, so muss entweder $N_{Ck}(\lambda) = 0$ oder $N_{Pk}(\lambda) = 0$ gelten. Erstere Beziehung lässt sich ausschließen, da sich die Nullstelle von $N_{Ck}(s)$ mit dem Pol des Reglers kürzen würde; Letztere ist aufgrund der betrachteten Systemklasse auszuschließen.

Ein naheliegender alternativer Ansatz ist es, den schaltenden Regler mit einem gemeinsamen Zustandsraum zu realisieren, so dass lediglich die Reglerparameter geschaltet werden. Dieser Ansatz führt zu einem kleineren Zustandsraum für den geschlossenen Regelkreis, wie am Ende des nächsten Abschnitts kurz erläutert wird. Jedoch weisen die Systemmatrizen dann nicht die im nächsten Abschnitt diskutierten Eigenschaften auf, welche die Grundlage für die Stabilitätsanalyse bilden.

4 Stabilität des Regelkreises

Für den geschlossenen Regelkreis ergibt sich das schaltende lineare System der Form:

$$\dot{x}(t) = H(t)x(t), \quad (5)$$

wobei sich der Zustandsvektor $x \in \mathbb{R}^n$, $n = n_p + Nn_c$ aus den Komponenten des Zustands der Strecke x_p und denen der Reglerzustände x_k , $k \in \mathcal{I}$ zusammensetzt:

$$x = (x_p^T \quad x_1^T \quad \cdots \quad x_N^T)^T.$$

Die Funktion $H : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_N\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stückweise konstant und die einzelnen Systemmatrizen der Modi $k \in \mathcal{I}$ sind durch

$$H_k = \begin{pmatrix} A_k - b_k j_k c^T & b_1 m_1^T \delta_{1k} & \cdots & b_N m_N^T \delta_{Nk} \\ -l_1 c^T & K_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_N c^T & 0 & & K_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

gegeben, wobei δ_{kj} das Kroneckersymbol bezeichnet.

Bei der Stabilitätsanalyse des linearen, schaltenden Systems wird in der Regel die asymptotische Stabilität (5) betrachtet, da diese äquivalent zur BIBO-Stabilität des Eingangsausgangsverhaltens (12)-(13) ist, siehe z. B. [8].

Für asymptotische Stabilität von (5) für beliebiges Schalten muss eine *gemeinsame* Lyapunovfunktion für alle Systemmatrizen existieren. D. h., die Stabilität der einzelnen Systemmatrizen ist lediglich notwendig jedoch nicht hinreichend für die Stabilität des geschalteten Systems. Aus der Struktur der Systemmatrizen H_k ist ersichtlich, dass die Ordnung des geschlossenen Regelkreises mit der Ordnung der Regler n_c und Anzahl der Modi N bilinear zunimmt ($n = n_p + Nn_c$). Wie eingangs ausgeführt, sind präzise Analysewerkzeuge bislang lediglich für Systeme von sehr geringer Ordnung bekannt. Die Matrizen H_k weisen jedoch strukturelle Eigenschaften auf, die genutzt werden können,

um die Komplexität der Stabilitätsanalyse zu reduzieren. Im Folgenden sollen diese Eigenschaften kurz beschrieben und die daraus hergeleiteten Stabilitätsbetrachtungen zusammengefasst werden. Eingehende Diskussion der Ergebnisse und deren Beweise finden sich in [15].

Strukturelle Eigenschaften

Die Systemmatrizen H_k des geschalteten Regelkreises weisen einige strukturellen Eigenschaften auf, die für die Stabilitätsanalyse genutzt werden können. Wie man leicht sieht, sind die Matrizen H_k bis auf die n_p -te Zeile identisch. Dies ist insbesondere der gewählten Reglerarchitektur geschuldet, bei der alle Regler mit einem separaten Zustandsvektor realisiert werden. Damit gilt für die Differenz zweier Systemmatrizen H_k, H_l :

$$\text{rang}(H_k - H_l) = 1. \quad (7)$$

Aus diesem wichtigen Merkmal lassen sich zwei weitere strukturelle Eigenschaften ableiten:

Aufgrund des gewählten Regleransatzes haben alle Systemmatrizen die Eigenwerte Λ gemeinsam. Darüber hinaus lässt sich feststellen, dass die verbleibenden Eigenwerte von H_k aus denen der jeweils inaktiven Regler $K_l, l \neq k$ bestehen. Es ergibt sich also für das Spektrum

$$\sigma(H_k) = \Lambda \cup \bigcup_{l \neq k} \sigma(K_l).$$

Wir stellen fest, dass die Matrizen H_k paarweise $n_p + (N - 1)n_c$ gemeinsame Eigenwerte besitzen.

Eine weitere Konsequenz des gewählten Regleransatzes besteht darin, dass der den Entwurfspolen Λ zugehörige Unterraum unabhängig von k ist. So lässt sich folgender Hilfssatz zeigen [15].

Lemma 4.1 *Sei $\lambda \in \Lambda$ ein einfacher Eigenwert für alle $H_k, k \in \mathcal{I}$. Dann haben H_k den zu λ gehörigen Eigenvektor gemeinsam, d. h. es existiert ein Vektor $v \neq 0$, so dass für alle $k \in \mathcal{I}$ gilt:*

$$H_k v = \lambda v. \quad (8)$$

Wenn also wie gefordert die Vorgabeeigenwerte Λ einfach sind, so haben alle Systemmatrizen des geschlossenen Kreises $n_p + n_c$ Eigenvektoren gemeinsam.

Bemerkung: Grundlage der Ergebnisse dieses Abschnitts ist das Merkmal (7). Diese Eigenschaft ist sowohl von der Streckenordnung n_p unabhängig als auch von der Anzahl der Modi N . Bei einer Realisierung des schaltenden Reglers mit gemeinsamen Zustandsraum ergibt sich für die Systemmatrix des geschlossenen Kreises im Modus k :

$$H_k = \begin{pmatrix} A_k - b_k j_k c^T & b_k m_k^T \\ -l_k c^T & K_k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{I}.$$

Während die Ordnung des geschlossenen Systems nun lediglich $n_p + n_c$ beträgt, also unabhängig von der Zahl der Modi ist, geht die Eigenschaft (7) verloren. Damit ist die Vereinfachung der Stabilitätsanalyse wie sie im Folgenden beschrieben wird nicht mehr möglich.

Stabilitätsanalyse

Diese strukturellen Eigenschaften können genutzt werden, um die Komplexität des Stabilitätsproblems zu reduzieren. Allgemein kann gezeigt werden [15], dass das geschaltete System (5) der Ordnung $n_p + Nn_c$ genau dann für beliebiges Schalten asymptotisch stabil ist, wenn ein daraus abgeleitetes schaltendes System von reduzierter Ordnung $(N - 1)n_c$ für beliebiges Schalten asymptotisch stabil ist.

Für zwei Spezialfälle kann die Stabilitätsanalyse noch weiter vereinfacht werden. Wir betrachten den Fall, in dem die Entwurfsvorgaben aus Abschnitt 3 durch Regler erster Ordnung erfüllt werden und die Strecke eine beliebige Anzahl von Modi aufweist. Hier lässt sich mit Hilfe der Resultate in [10] und [11] zeigen, dass der schaltende geschlossene Regelkreis stets asymptotisch stabil ist, wenn die Entwurfsvorgaben erfüllt sind [15].

Im zweiten Fall wird ein System mit $N = 2$ und beliebiger Ordnung betrachtet. Es kann gezeigt werden, dass der geschlossene Regelkreis (5) genau dann asymptotisch stabil für beliebiges Schalten ist, wenn das geschaltete System, das lediglich aus den Reglermatrizen besteht, asymptotisch stabil ist [15]. Genauer:

Theorem 4.1 *Man betrachte das schaltende System (2) mit $N = 2$ und sei (5) mit (9) aus dem Entwurfsverfahren in Abschnitt 3 hervorgegangen, so dass die Reglermatrizen K_k disjunkte Spektren aufweisen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Das schaltende System*

$$x(t) = H(t)x(t), \quad \text{mit } H(t) \in \mathcal{H} = \{H_1, H_2\}, \quad x \in \mathbb{R}^{n_p + Nn_c} \quad (9)$$

ist für beliebiges Schalten asymptotisch stabil.

- *Das schaltende System*

$$x(t) = K(t)x(t), \quad \text{mit } K(t) \in \mathcal{K} = \{K_1, K_2\}, \quad x \in \mathbb{R}^{n_c} \quad (10)$$

ist für beliebiges Schalten asymptotisch stabil.

Dieses Resultat vereinfacht die Stabilitätsanalyse deutlich gegenüber der des Originalsystems. Anstelle eines schaltenden Systems der Ordnung $n_p + 2n_c$ kann die Stabilität anhand eines Systems n_c -ter Ordnung durchgeführt werden. Für eine Regelstrecke mit 2 Modi der Ordnung 3 ergibt sich beispielsweise ein geschlossener Regelkreis der Ordnung $n = 9$. Mit Theorem 4.1 kann dieses schaltende System mit den Methoden für Systeme dritter Ordnung aus [5, 13] beliebig genau auf Stabilität untersucht werden. Darüber hinaus kann Stabilität ausschließlich anhand der entworfenen Regler bestimmt werden und ist damit ein konstruktives Kriterium zum Entwurf stabiler schaltender Regler.

5 Regler mit Integrierern

In der gewählten Reglerarchitektur ist stets nur einer der N Regler in dem geschlossenen Regelkreis aktiv. Damit muss grundsätzlich gefordert werden, dass jeder Regler eine BIBO-stabile Übertragungsfunktion besitzt. Somit sind beispielsweise Integrierer für die einzelnen Regler ausgeschlossen. In diesem Abschnitt betrachten wir Variationen der vorgeschlagenen Reglerstruktur, die Integriereranteile in der Reglerdynamik zulassen.

Um eine fortwährende Fehlerintegration durch einen nicht-aktiven Regler zu vermeiden, ist es naheliegend den Integrierer stets aktiv im geschlossenen Regelkreis zu betreiben. Der Integriereranteil wird dann aus den einzelnen Reglern ausgegliedert und als gemeinsamer Integrierer vor oder nach der schaltenden Reglerstruktur realisiert (siehe Abbildungen 2 und 3).²

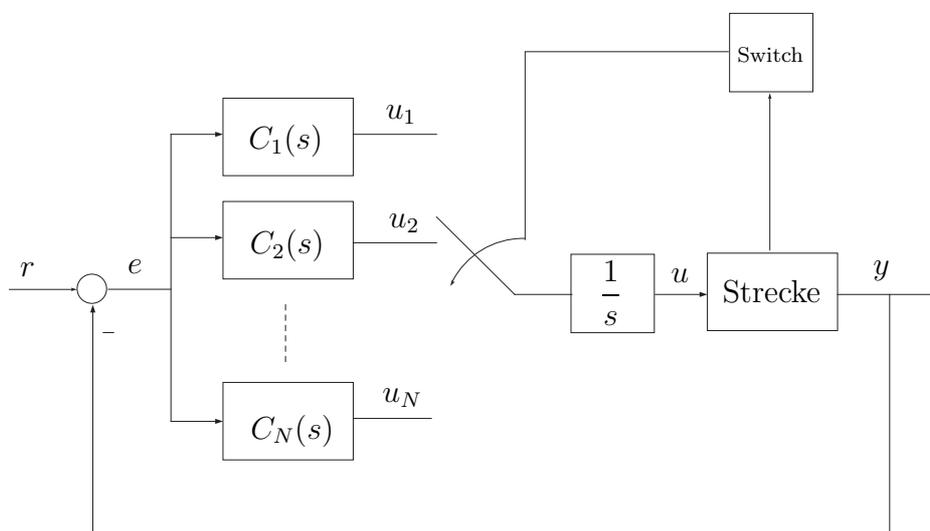


Abbildung 2: Regleransatz mit gemeinsamen Integrierer nach schaltender Reglerstruktur

Bei einer Positionierung des gemeinsamen Integrierers wie in Abbildung 2 erhält man für die Stellgröße die Beziehung

$$\dot{u} = u_k$$

wobei die Reglerausgänge weiter mit

$$u_k = m_k x_k - j_k c^T x_p + j_k r$$

gegeben sind. Mit dem Zustandsvektor $x = (x_p^T \ u^T \ x_i^T \ \dots \ x_N^T)^T$ erhält man dann für

²Bei diesem Ansatz wird angenommen, dass alle Regler einen Integriereranteil gleicher Ordnung aufweisen. Dies sollte aber für die meisten Anwendungen keine große Einschränkung darstellen.

die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises im Modus k

$$H_k = \begin{pmatrix} A_k & b_k & 0 & \cdots & 0 \\ -j_k c^T & 0 & m_1^T \delta_{1k} & \cdots & m_N^T \delta_{Nk} \\ -l_1 c^T & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -l_N c^T & 0 & \cdots & 0 & K_N \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathcal{I}.$$

Man beachte, dass die Einträge mit Kroneckersymbolen nun in der hinzugekommenen Zeile, die dem Integriererzustand zugeordnet ist, auftreten. Es ist leicht zu sehen, dass die einzelnen Systemmatrizen H_k sich in mehr als einer Zeile unterscheiden und Differenzen zweier Systemmatrizen H_k nicht wie zuvor einen Rang von eins haben. Dies war jedoch Grundlage für die Analyse in Abschnitt 4. Die Stabilitätsresultate sind somit nicht mehr anwendbar.

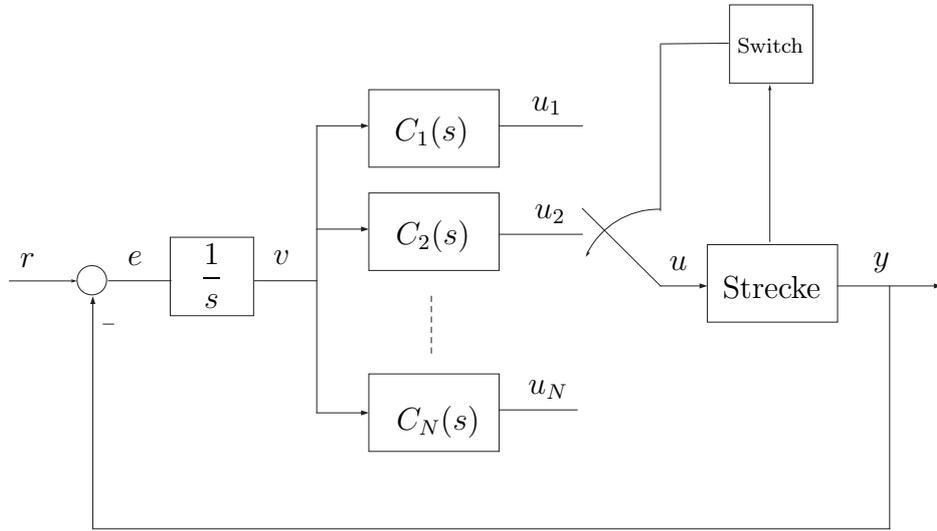


Abbildung 3: Regleransatz mit gemeinsamen Integrierer vor schaltender Reglerstruktur

Dieses Problem kann vermieden werden, indem der gemeinsame Integrierer *vor* dem schaltenden Regler positioniert wird (Abbildung 3). Für den Integrierer gilt dann:

$$\dot{v} = -c^T x + r$$

und mit dem Zustandsvektor $x = (x_P^T \ v^T \ x_k^T \ \cdots \ x_N^T)^T$ erhält man für die Systemmatrizen des geschlossenen Kreises:

$$H_k = \begin{pmatrix} A_k & b_k j_k & b_1 m_1^T \delta_{1k} & \cdots & b_N m_N^T \delta_{Nk} \\ -c^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_1 & K_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & l_N & & 0 & K_N \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathcal{I}. \quad (11)$$

Damit gilt (7) weiterhin. Durch Realisierung der Regler mit gemeinsamen Integrierer vor der schaltenden Reglerstruktur bleiben also die strukturellen Eigenschaften aus Abschnitt 4 erhalten, so dass eine Reduktion der Stabilitätsanalyse weiterhin möglich ist. Insbesondere lassen sich damit schaltende Regelkreise mit PID-Reglern beliebig genau auf Stabilität untersuchen [5, 13].

6 Übergangsverhalten

Durch das Schalten der Systemdynamik kann unerwünschtes Übergangsverhalten induziert werden. In diesem Abschnitt wird kurz gezeigt, dass durch eine zusätzliche Forderung der hier betrachtete Reglerentwurf so erweitert werden kann, dass kein Übergangsverhalten auftritt, wenn im stationären Zustand geschaltet wird. Zudem lässt sich beobachten, dass der so entworfene Regelkreis auch für Eingangssprünge ein verbessertes Übergangsverhalten aufweisen kann.

Um das Übergangsverhalten zu analysieren, betrachten wir das Ein-Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises, das für jeden Modus $k \in \mathcal{I}$ durch

$$\dot{x}(t) = H_k x(t) + F_k r(t) \quad (12)$$

$$y(t) = G x(t) \quad (13)$$

gegeben sei, wobei $F_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die Vorfilterverstärkung und $G \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ die konstante Ausgangsmatrix des Systems ist. Zur Veranschaulichung des durch Schalten induzierten Übergangsverhaltens betrachten wir folgendes Beispiel:

Wir betrachten Regelstrecke (1) mit linearer, schaltender Dynamik und zwei Modi. Das Ein-Ausgangsverhalten der Strecke im jeweiligen Modus sei durch die beiden Übertragungsfunktionen

$$P_1(s) = \frac{1}{s+14} \quad \text{und} \quad P_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

gegeben. Die Pole des geschlossenen Regelkreises seien mit $\Lambda = \{-2, -20\}$ vorgegeben.

Die Regler mit den Übertragungsfunktionen

$$C_1(s) = \frac{-72}{s+8} \quad \text{und} \quad C_2(s) = \frac{-17}{s+19}$$

lösen das Polvorgabeproblem für den jeweiligen Modus. Zur Kompensation der stationären Verstärkung wählen wir die Vorfilter $F_1 = \frac{-1}{72}$ und $F_2 = \frac{-1}{17}$.

Der geschlossene Regelkreis hat damit für jeden Modus das Ein-Ausgangsverhalten mit der Übertragungsfunktion

$$T_k(s) = \frac{C_k(s)P_k(s)}{1 + C_k(s)P_k(s)} = \frac{40}{s^2 + 22s + 40}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Wählen wir nun die schaltende Reglerstruktur aus Abschnitt 3, so ist der geschlossene Regelkreis (9) für beliebiges Schalten asymptotisch stabil, weil das Polvorgabeproblem mit Reglern erster Ordnung gelöst wurde (siehe Abschnitt 4). Damit ist das Ein-Ausgangsverhalten BIBO-stabil, siehe z. B. [8].

In Abbildung 4a ist die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises dargestellt, wobei die Systemmatrix alle zehn Zeiteinheiten geschaltet wird. Obwohl das Übergangsverhalten immer wieder Abklingt, weist die Sprungantwort zu den Schaltzeitpunkten deutliche Spitzen auf. Offenbar wird die Dynamik des Systems zu den Schaltzeitpunkten stets von Neuem angeregt.

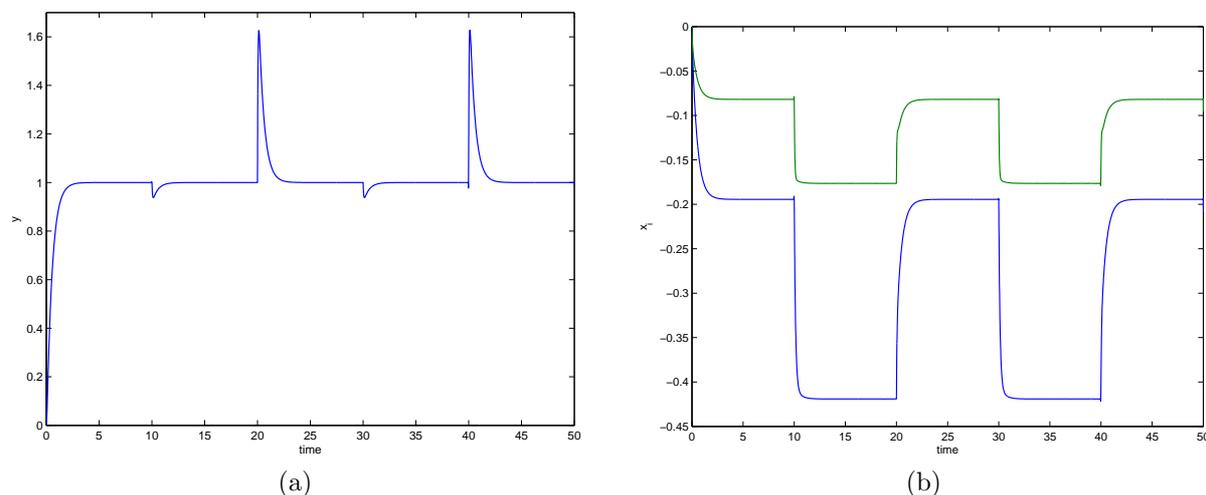


Abbildung 4: Sprungantwort des geschalteten Regelkreises bei Schalten der Systemmatrix alle 10 Zeiteinheiten. Teil (a) zeigt den Verlauf des Ausgangs, Teil (b) den Verlauf der Reglerzustände $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Bei Betrachten der zeitlichen Verläufe der Reglerzustände in Abbildung 4b wird deutlich, dass die Regler in jedem Modus einen anderen stationären Zustand annehmen.

Theorem 6.1 *Das schaltende Ein-Ausgangsverhalten (12)-(13) weist für Schalten im stationärem Zustand kein Übergangsverhalten auf, genau dann wenn gilt:*

$$H_k^{-1}F_k = H_l^{-1}F_l, \quad \forall k, l \in \mathcal{I}.$$

Beweis: Seien t_i mit $i \in \mathbb{N}$ die Schaltzeitpunkte der Systemdynamik und $t_{i|k}$ ein Schaltzeitpunkt zu dem das System von Modus k in Modus l schaltet. Sei weiterhin $x(t_{i|k}) = \hat{x}^{(k)} = -H_k^{-1}F_k r$, wobei $\hat{x}^{(k)}$ den stationären Zustand des zeitinvarianten Systems im Modus k für den konstanten Eingang r bezeichnet. Während des Intervalls $t_{i|k} \leq t < t_{i|k+1}$ ist die Systemdynamik durch

$$\dot{x}(t) = H_l x(t) + F_l r(t)$$

bestimmt. Mit der Forderung $\dot{x}(t) \equiv 0$ und dem Anfangszustand $\hat{x}^{(k)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -H_l \hat{x}^{(k)} + F_l r \\ 0 &= -H_l H_k^{-1} F_k r + F_l r \\ H_k^{-1} F_k r &= H_l^{-1} F_l r. \end{aligned}$$

Mit $r = \text{konstant} \neq 0$ ist der Beweis komplett. □

Mit der Bedingung aus Theorem 6.1 wird sichergestellt, dass kein Übergangsverhalten auftritt, wenn die Dynamik im stationären Zustand schaltet. Für den Reglerentwurf kann diese Forderung in eine Bedingung an die Reglerübertragungsfunktionen formuliert werden. Als Ursache für die Transienten beim Schalten kann das Einschwingverhalten der Regler nach dem Schaltzeitpunkt gesehen werden. Während der Regler $C_k(s)$ im geschlossenen Kreis aktiv ist, gilt für den Ausgang u_l des Reglers $C_l(s)$:

$$U_l(s) = \frac{C_l(s)}{1 + C_k(s)P_k(s)}R(s). \quad (14)$$

Nehmen wir nun an, dass der geschlossene Regelkreis (praktisch) einen stationären Zustand erreicht hat, d. h. es gelte $\dot{x} \approx 0$. Damit ist impliziert, dass ebenso die Reglerausgänge u_l (etwa) konstant sind für $l \in \mathcal{I}$. Für den stationären Endwert des Reglerausgangs u_l bei aktivem Regler $C_k(s)$ gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_l(s)}{1 + C_k(s)P_k(s)} = \gamma_{l,k},$$

wobei $\gamma_{l,k} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung aus Theorem 6.1 erhält man nun die Forderung, dass für alle Reglerausgänge u_l gilt:

$$\gamma_{l,k} = \gamma_l \quad \forall k \in \mathcal{I} \quad (15)$$

und somit $\gamma_{l,k}$ unabhängig von dem aktiven Regler k ist.

Bemerkung: Falls die Regelstrecke in jedem Modus einen Integrierer aufweist, ist Bedingung (14)-(15) stets erfüllt. Anderenfalls reduziert sich die Bedingung zu der Forderung

$$K_{C_k}K_{P_k} = \gamma \quad \forall k \in \mathcal{I},$$

wobei K_{C_k} und K_{P_k} die Verstärkung des Reglers bzw. der Strecke im Modus k bezeichnet.

Durch Formulierung der Bedingung von Theorem 6.1 im Frequenzbereich, läßt sie sich als Nebenbedingung im Polvorgabeentwurf aus Abschnitt 3 aufnehmen. Dabei erhöht sich die Reglerordnung um 1. Das folgenden zusammenfassende Beispiel zeigt, dass sich transientenfreies Schalten und Stabilität mit dem vorgeschlagenen Regleransatz mit Integrierer vereinen lassen.

7 Numerisches Beispiel

Wir betrachten die Regelstrecke mit 2 Modi mit den Übertragungsfunktionen

$$P_1(s) = \frac{2}{s+9}, \quad P_2(s) = \frac{1}{s+8}.$$

Als Spezifikation für den geschlossenen Regelkreis seien die Pole $\Lambda = \{-0.5 \pm i, -10\}$ vorgegeben. Weiter sei gefordert, dass die Regler einen Integrierer aufweisen.

Das Polvorgabeproblem wird mit

$$C_1(s) = \frac{-3.38s + 6.25}{s(s+2)}, \quad C_2(s) = \frac{-12.75s + 12.5}{s(s+3)}$$

für den jeweiligen Modus gelöst. Bei Implementierung des Reglers mit Integrierer vor der geschalteten Reglerstruktur, erhalten wir für den geschlossenen Regelkreis:

$$H_1 = \begin{pmatrix} -9 & -6.75 & 26 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_2 = \begin{pmatrix} -8 & -12.75 & 0 & 50.75 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

und $F_1 = F_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$, $G_1 = G_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Wie anhand der Systemmatrizen leicht ersichtlich ist, ist der schaltende Anteil des Regler von erster Ordnung ($K_1 = -2, K_2 = -3$). Damit ist die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für beliebiges Schalten sichergestellt.

Betrachten wir nun das Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Für die Sprungantwort in Modus 1 erreicht das System den stationären Zustand

$$\hat{x}^{(1)} = -H_1^{-1}F_1 = (1 \ 1.4 \ 0.7 \ 0.48)^T$$

und in Modus 2 ergibt sich

$$\hat{x}^{(2)} = -H_2^{-1}F_2 = (1 \ 1.92 \ 0.96 \ 0.64)^T.$$

Damit ist die Bedingung aus Theorem 6.1 nicht erfüllt, so dass ein Übergangsverhalten zu den Schaltzeitpunkten zu erwarten ist. In Abbildung 5a ist die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises dargestellt, wobei die Systemdynamik alle 20 Zeiteinheiten schaltet. Zu den Schaltzeitpunkten wird jeweils ein deutliches Einschwingverhalten ausgelöst.

Um die Bedingungen (14) und (15) für übergangsfreies Schalten im stationären Zustand zu erfüllen, wird ein weiterer Reglerfreiheitsgrad benötigt. Als zusätzlichen Vorgabepol wählen wir $\lambda = -20$. Durch Lösen des Polvorgabeproblems mit Nebenbedingung (15) erhalten wir die Reglerübertragungsfunktionen

$$C_1(s) = \frac{2.7s^2 - 6.25s + 125}{s^3 + 22s^2 + 27.78s} \quad \text{und} \quad C_2(s) = \frac{16s^2 - 12.5s + 250}{s^3 + 23s^2 + 31.25s}.$$

Für die Implementierung der Regler in Regelungsnormalform mit gemeinsamen Integrierer vor der schaltenden Reglerstruktur erhalten wir für die Systemmatrizen des geschlossenen Regelkreises:

$$H_1 = \begin{pmatrix} -9 & 5.5 & 98.0 & -132.9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -27.8 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -31.3 & -23 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 0 & 0 & -250 & -380.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -27.8 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -31.3 & -23 \end{pmatrix} \quad (17)$$

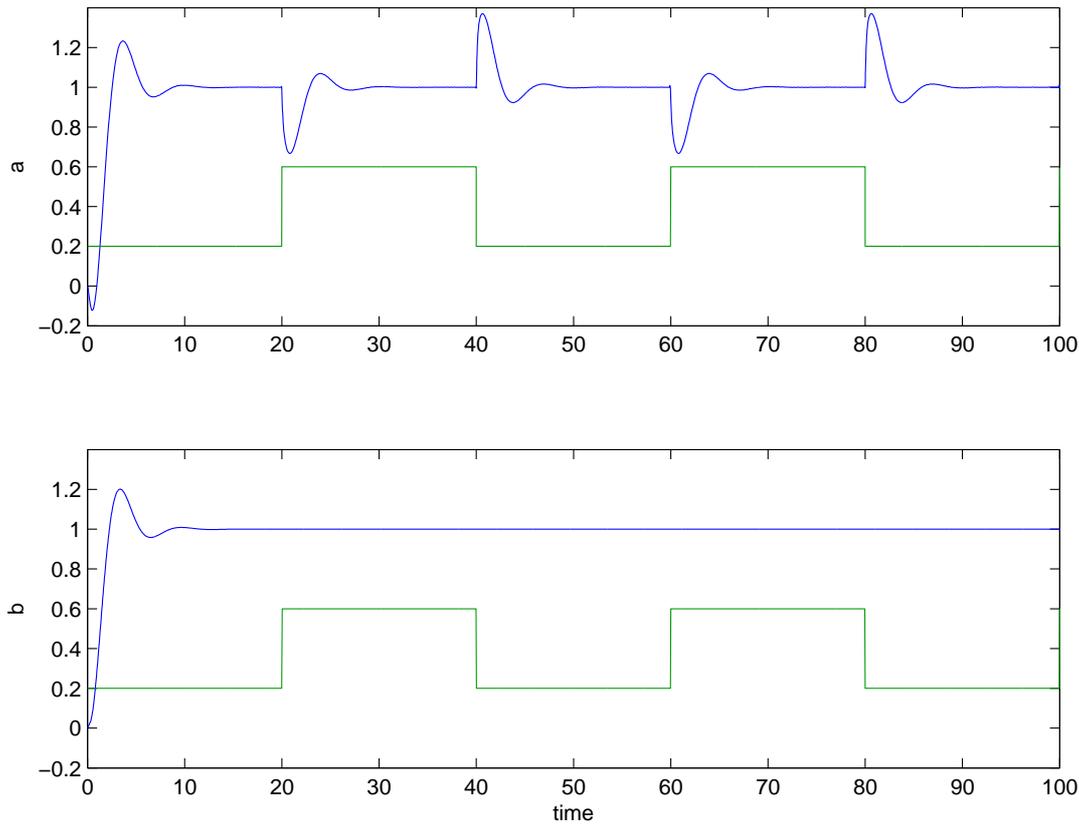


Abbildung 5: (a) Sprungantwort des stabilen schaltender Regelkreis (16) mit Übergangsverhalten zu den Schaltzeitpunkten, (b) Sprungantwort des stabilen schaltenden Regelkreises (17) mit Nebenbedingung (15); der untere Graph stellt jeweils das skalierte Schaltsignal dar.

Mit Theorem 4.1 lässt sich nun die Stabilität des geschlossenen Regelkreises leicht anhand des schaltenden Systems (10) mit

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -27.8 & -22 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -31.3 & -23 \end{pmatrix},$$

überprüfen. Nach Theorem 3.1 in [12] existiert eine gemeinsame quadratische Lyapunovfunktion für (10) genau dann, wenn gilt: $\sigma(K_1 K_2) \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$. Die Eigenwerte des Matrixprodukts $K_1 K_2$ sind $\lambda_1 \approx 2$ und $\lambda_2 \approx 445$. Somit existiert eine gemeinsame quadratische Lyapunovfunktion für (10) und der geschlossene schaltende Regelkreis (5) ist für beliebiges Schalten stabil.

In Abbildung 5b ist die Sprungantwort des schaltenden, geschlossenen Regelkreises (5) mit Systemmatrizen (17) dargestellt. Auch hier wird die Systemdynamik alle 20 Zeiteinheiten geschaltet. Wie man leicht sieht, sind die Einschwingvorgänge zu den Schaltzeitpunkten verschwindend gering.

8 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird ein Reglerentwurfsverfahren für schaltende lineare Systeme vorgestellt. Kern des Ansatzes bildet eine schaltende Reglerstruktur, bei dem mehrere Regler als lineare zeitinvariante Systeme mit lokalen Zustandsräumen realisiert werden. Zusammen mit dem vorgeschlagenen Polvorgabeansatz ergibt sich ein schaltender geschlossener Regelkreis, dessen Stabilitätsverhalten durch Betrachtung von Systemen mit deutlich reduzierter Systemordnung bestimmt werden kann. Dies ermöglicht die Anwendung von Stabilitätskriterien mit Gültigkeit für Systeme geringer Ordnung auf eine größere Klasse von Systemen.

Eine Variation der Reglerstruktur und des Polvorgabeansatzes erlaubt sowohl den Einsatz von Integrieranteilen für die Regler als auch eine Verbesserung des Übergangsverhaltens beim Schalten der Systemdynamik. Durch numerische Beispiele werden das Entwurfsverfahren und das Verhalten beim Schalten der Systemdynamik illustriert.

Literatur

- [1] N. E. Barabanov. On the Aizerman problem for third-order nonstationary systems. *Differential Equations*, 29(10):1439–1448, 1993.
- [2] Ugo Boscin. Stability of planar switched systems: the linear single input case. *SIAM J. Control Optimization*, 41(1):89–112, 2002.
- [3] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilisability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, 2000.
- [4] Daniel Liberzon and A. Stephen Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70, 1999.
- [5] Micheal Margaliot and Christos Yfoulis. Absolute stability of third-order systems – a numerical algorithm. *Automatica*, 42(10):1705–1711, 2006.
- [6] Andrezej Polański. On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions. *Automatica*, 36:573–578, 2000.
- [7] E. S. Pyatnitskii and L. B. Rapoport. Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 57(3):219–229, 1996.
- [8] Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2nd edition, 1996.
- [9] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49(4):545–592, 2007.

- [10] R. N. Shorten and F. Ó Cairbre. A proof of the global attractivity for a class of switching systems using a non-quadratic Lyapunov approach. *Institute of Mathematics and its Applications : Journal of Mathematical Control and Information*, 8:341–353, 2001.
- [11] R. N. Shorten and F. Ó Cairbre. A new methodology for the stability analysis of pairwise triangular and related switching systems. *Institute of Mathematics and its Applications: Journal of Applied Mathematics*, 67:441–457, 2002.
- [12] Robert N. Shorten and Kumpati S. Narendra. On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4):618–621, 2003.
- [13] K. Wulff and R. Shorten. On maximum sector bounds for absolute stability of single-input single-output systems. *International Journal of Control*, 80(6), 2006.
- [14] K. Wulff, R. N. Shorten, and P. Curran. On the 45° region and the uniform asymptotic stability of classes of second order parameter varying and switched systems. *International Journal of Control*, 75(11):812–823, 2002.
- [15] K. Wulff, F. Wirth, and R. Shorten. A control design method for a class of switched linear systems. *Automatica*, in press, 2009.
- [16] Kai Wulff, Fabian Wirth, and Robert Shorten. On the stabilisation of a class of SISO switched linear systems. In *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 3976–3981, Seville, Spain, 2005.
- [17] Christos A. Yfoulis and Robert Shorten. A numerical technique for stability analysis of linear switched systems. In Rajeev Alur and George J. Pappas, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control*, Lecture Notes in Computer Science, pages 631 – 645. Springer-Verlag, 2004.

Aktive Diagnose nicht unterscheidbarer Systemverhalten

M. Hofbaur¹, L. Travé-Massuyès²

¹TU Graz, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik,
Kopernikusgasse 24, Graz

²LAAS-CNRS,

7 Avenue du Colonel Roche, Toulouse, Frankreich

`michael.hofbaur@TU Graz.at`*, `louise@laas.fr`

Zusammenfassung

Hybride Systeme mit Modi deren dynamische Eingangs-/ Ausgangsverhalten sehr ähnlich, wenn nicht sogar ident, sind stellen eine große Herausforderung für hybride Beobachter und Diagnoser dar. Modi mit einem derartigen Beobachtbarkeitsdefekt werden in der Literatur daher auch als *nicht unterscheidbar* bezeichnet. In diesem Manuskript werden wir allerdings zeigen, dass eine hybride Beobachtung derartiger Systeme dennoch nicht aussichtslos ist und eine hybride Beobachtung und Diagnose derartiger Systeme sehr wohl möglich ist. Wesentlich für die korrekte Klassifizierung ist ein durch Mode-Wechsel *aktives* Verhalten des hybriden Systems. Als Grundlage für unsere Betrachtung erweitern wir die in der hybride Diagnose üblichen Mode-spezifischen Analytic Redundancy Relations (ARRs) durch ihre *zeitvariable* Form für *Mode-Sequenzen*. Diese Darstellung ermöglicht es uns, den Begriff *nicht unterscheidbar* wesentlich enger zu fassen und unseren hybriden Beobachter Algorithmus (hME) wesentlich zu verbessern.

1 Einleitung

Mechatronische Systeme erzielen ihre Funktionalität durch die Interaktion von mechanischen, elektrischen und Computer-basierten Komponenten. Dies führt zu einem komplexen dynamischen Verhalten, bei dem kontinuierlich-wertige dynamische Vorgänge durch diskrete Wertänderungen (z.B.: Schaltvorgänge) ergänzt werden. Diese Interaktion von schnellen, diskreten Wertänderungen mit i.a. langsameren, dynamischen Vorgängen im System können durch sogenannte Hybride Modelle elegant modelliert werden. Diese Modelle beschreiben die diskreten Dynamiken durch Automaten bzw. Discrete Event Systeme (DES) und ergänzen diese mit kontinuierlich-wertigen dynamischen Modellen, wie

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

zum Beispiel (gewöhnliche) lineare oder nicht-lineare Differenzen- bzw. Differentialgleichungsmodelle. Dies führt zu einem Modell mit mehreren (unter Umständen sehr vielen) Betriebs- und Fehlerzuständen (Modi) und dem zu jedem Mode assoziierten dynamischen Modell.

Ein derartiges hybrides Modell stellt nun eine leistungsfähige Basis für modell-basierte Methoden der Regelung und Automatisierung von mechatronischen Systemen zur Verfügung. Ein Automatisierungssystem zur Kontrolle eines derartigen Systems benötigt die Fähigkeit, das dynamische Systemverhalten durch Messung und Zustandsschätzung zu beobachten. Diese Zustandsschätzung erfordert eine gemeinsame Ermittlung des Betriebs-/Fehler-Mode und des assoziierten kontinuierlich-wertigen Zustandes des Systems. Diese hybride Beobachtung bzw. hybride Zustandsschätzung stellt ein rechentechnisch komplexes Problem dar, da ein Beobachter streng genommen jede mögliche Mode-Sequenz mit ihrem zugehörigen dynamischen Verhalten auf ihre Konsistenz mit dem gemessenen Systemverhalten prüfen muss. Ist man lediglich am Betriebs- und insbesondere Fehler-Mode des Systems interessiert, so bezeichnet man die Systembeobachtung auch als hybride Diagnose. Nichtsdestotrotz benötigt auch diese Aufgabe eine Betrachtung der diskreten und kontinuierlich-wertigen Dynamiken im System und kann nicht getrennt von der kontinuierlich-wertigen Zustandsschätzung durchgeführt werden.

Der Großteil der Arbeiten im Bereich der hybriden Beobachtung/Diagnose beschäftigt sich mit der angesprochenen rechentechnischen Komplexität und bietet sub-optimale, dafür aber rechentechnisch handhabbare, Schätzmethoden für hybride Systeme [1, 5, 7, 18, 9, 14, 4, 8]. In der vorliegenden Arbeit möchten wir allerdings eine andere Schwierigkeit in der hybriden Beobachtung betrachten. Es ist durchaus möglich, dass zwei oder sogar mehrere Modi des Systems ähnliches, wenn nicht sogar gleiches, Verhalten bezüglich der Ein- und Ausgänge des Systems zeigen. Es ist daher für einen hybriden Beobachter sehr schwierig, wenn nicht sogar unmöglich, solche, in der Literatur auch als *nicht unterscheidbare* (*non-discernable*) bezeichnete, Modi entsprechend zu klassifizieren. Um dieses Problem näher zu betrachten, werden wir in diesem Manuskript ein sehr einfaches, allerdings mit eben diesem Beobachtungsdefekt behaftetes, 2-Mode System betrachten. Als Lösungsmethode schlagen wir die Verwendung von *zeitvarianten Analytic Redundancy Relations (ARR)* vor und werden zeigen, wie diese auch für Systeme mit einer Vielzahl von Modi erfolgreich zur hybriden Beobachtung und Diagnose eingesetzt werden können.

2 Hybrides Modell

Hybride Systeme bzw. hybride Modelle stellen einen Sammelbegriff für eine große Vielzahl von unterschiedlichsten Modellierungsformen für gemischt wert-kontinuierlich/wert-diskrete dynamische Systeme dar. Abhängig von dem jeweiligen Anwendungsfall liegt das Hauptaugenmerk, und damit auch die Modellierungskomplexität, entweder bei der diskret- oder kontinuierlich-wertigen Dynamik.

Um auf die wesentlichen Merkmale des gestellten Problems der nicht unterscheidbaren Modi zu fokussieren, werden wir uns im Zuge dieses Beitrages auf ein einfaches hybrides Modell ähnlich den sogenannten Jump-linear, bzw. switched-linear hybrid Modellen [19], konzentrieren. Die kontinuierlich-wertige Dynamik des Modells wird hierbei durch ein

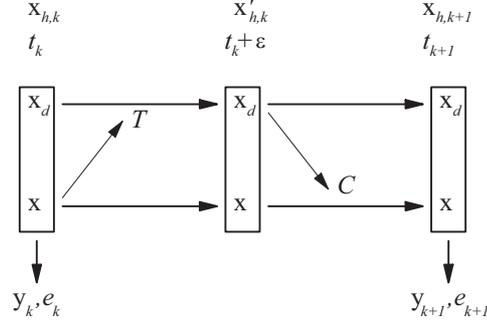


Abbildung 1: Dynamische Evolution des Hybriden Modells.

lineares zeit-diskretes Zustandsraummodell (Abtastzeit T_s) der Form

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_k, \quad (2)$$

beschrieben, wobei $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^{n_u}$ und $\mathbf{y}_k \in \mathfrak{R}^{n_y}$ die Valuerungen des (kontinuierlichwertigen) Zustandes, der Eingangsgröße und der Messgröße zum Zeitpunkt $t = kT_s$ beschreibt. Durch den Index i wird die Abhängigkeit des Modells von dem Mode bzw. diskreten Zustand $\mathbf{x}_{d,k} = q_i$ dargestellt. Somit definiert die Valuerung des Mode \mathbf{x}_d zum Zeitpunkt $t = kT_s$ die kontinuierliche Evolution des Zustandes \mathbf{x} im Zeit-Intervall $(k-1)T_s < t \leq kT_s$. Wir werden in weiterer Folge diesen kontinuierlichen Teil des hybriden Modells auch als $\Xi := \langle \zeta, Q, C \rangle$ bezeichnen, wobei $\zeta = \{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}\}$ alle kontinuierlichwertigen (aber zeit-diskreten!) Variablen des Systems zusammenfasst, $Q = \{q_1, \dots, q_l\}$ die Menge der Modi des Systems bezeichnet und C das Mode-abhängige Zustandsraummodell (1-2) bezeichnet.

In einem hybriden Modell wird bezüglich der diskreten Dynamik eine infrequente, dafür aber abrupte, diskretwertige Evolution vorausgesetzt. Das heißt, Mode Übergänge erfolgen mit vernachlässigbarer Zeitverzögerung und es kann angenommen werden, dass pro Abtastzeit maximal ein Mode-Wechsel erfolgt. In unserem zeitdiskreten Modell nehmen wir darüber hinaus an, dass ein Mode-Wechsel unmittelbar nach dem Abtastzeitpunkt $t = kT_s$ erfolgt und somit der neue Mode im darauf folgenden Zeitintervall die kontinuierliche Dynamik bestimmt. In Abbildung 1 ist diese zeitliche Abfolge der diskret- und kontinuierlichwertigen Dynamik dargestellt.

Wir modellieren Mode-Übergänge durch den diskretwertigen Teil des hybriden Modells in der Form eines Discrete-Event Systems (DES). Im Detail beschreiben wir ein DES als

$$M := \langle Q, \Sigma, T, Q_0 \rangle, \quad (3)$$

mit der Menge der Modi $Q = \{q_1, \dots, q_l\}$, der Menge der Ereignisse (Events) $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n_e}\}$, der Zustandsübergangsfunktion $T : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ und der Menge der An-

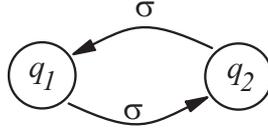


Abbildung 2: Diskretes Modell mit zwei Modi q_1 und q_2 .

fangszustände Q_0 . Natürlich müssen nicht alle Ereignisse σ_j beobachtbar sein. Aus diesem Grund definieren wir mit $\Sigma_O \subseteq \Sigma$ die Untermenge der beobachtbaren Ereignisse. Als Zustandsvariable für den Mode verwenden wir wie bereits eingeführt \mathbf{x}_d . Für die beobachtbaren Ereignisse verwenden wir als Variable e . Die Valuierung von e zum Zeitpunkt k kann durch beobachtbare Ereignisse $\sigma_j \in \Sigma_O$ oder der leeren Valuierung ϵ erfolgen: $e_k \in \{\Sigma_O, \epsilon\}$, wobei ϵ natürlich auch für alle nicht beobachtbaren Ereignisse steht.

Zusammenfassend bezeichnen wir das Paar

$$S = \langle \Xi, M \rangle \quad (4)$$

als unser hybrides Modell mit dem hybriden Zustand

$$\mathbf{x}_h = \langle \mathbf{x}_d, \mathbf{x} \rangle \quad (5)$$

bestehend aus dem Mode \mathbf{x}_d und kontinuierlich-wertigen Zustand \mathbf{x} .

2.1 Beispiel

Für die folgenden Betrachtungen sei ein hybrides Modell mit zwei Modi $Q = \{q_1, q_2\}$ angeführt. Die Mode-Übergänge $q_1 \rightarrow q_2$ und $q_2 \rightarrow q_1$ sind, wie in Abbildung 2 dargestellt, über ein gemeinsames (beobachtbares) Ereignis $\Sigma = \Sigma_O = \{\sigma\}$ definiert. Weiters gelte für den Anfangszustand des DES $Q_0 = \{q_1, q_2\}$. Das heißt, beide Zustände sind potentielle Anfangszustände des Systems. Dieser Umstand und die unspezifische Übergangsbeschreibung durch das gemeinsame Ereignis σ verhindert eine Schätzung des Mode $\mathbf{x}_{d,k}$ durch Beobachtung der Ereignissequenz $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. Das zugehörige kontinuierlich-wertige Modell Ξ der Form (1-2) sei durch die folgenden Systemparameter definiert:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -2.1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = 1. \quad (7)$$

Diese Systemparameter definieren zwei dynamische Modelle mit identer Übertragungsfunktion

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \frac{z^2 + 1.7z - 1.7}{z^2 - 1.3z + 0.4} = \frac{3z - 2.1}{z^2 - 1.3z + 0.4} + 1. \quad (8)$$

Mann könnte auch sagen, dass die dynamischen Modelle der Modi unterschiedliche Zustandsrepräsentationen eines gemeinsamen dynamischen Eingangs-/Ausgangsverhaltens darstellen. Aus diesem Grund stellt die hybride Beobachtung und Diagnose dieses hybriden Modells auch ein nicht triviales Problem dar.

3 Hybride Beobachtung und Diagnose

Die Aufgabe eines hybriden Beobachters ist die Bereitstellung eines Schätzwertes $\hat{\mathbf{x}}_k$ für den hybriden Zustand des Systems $\mathbf{x}_{h,k}$. Im Detail kann die Aufgabe der hybriden Beobachtung folgendermaßen definiert werden:

Hybride Beobachtung: Berechne auf der Basis des hybriden Modells S und der zeitdiskreten Reihen für die Systemeingänge $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, die Messwerte $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ und die diskreten Ereignisse $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ den Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_k$ des hybriden Zustandes \mathbf{x}_h zum Zeitpunkt $t = kT_s$, bestehend aus dem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_{d,k}$ für den Mode \mathbf{x}_d und dem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_k$ für den kontinuierlich-wertigen Zustand \mathbf{x} .

Durch die Mode-Übergänge erhalten wir ein nicht-eindeutiges kontinuierlich-wertiges Verhalten des Systems. Aus diesem Grund ist eine gesonderte Betrachtung der Mode-Sequenz und der kontinuierlich wertigen Evolution des Systems nicht möglich. Ein hybrider Beobachter muss daher als Beobachtungshypothesen *alle möglichen Mode-Sequenzen* auf ihre Konsistenz mit den gemessenen Systemgrößen überprüfen. Aufgrund der mit dem Beobachtungszeitraum exponentiell anwachsende Anzahl von Beobachtungshypothesen ergibt sich für die hybride Beobachtung, selbst bei Systemen mit einer geringen Anzahl von Modi, ein rechentechnisch unlösbares Problem. Aus diesem Grund beschränkt man sich bei sub-optimalen Ansätzen für die hybride Beobachtung auf in ihrer Länge beschränkten Mode-Sequenzen [1, 5] oder fokussiert gezielt auf die Untermenge der wahrscheinlichsten Beobachtungshypothesen [12, 7, 9, 10, 18, 16]. Der Schätzwert für den kontinuierlichen Zustand wird anhand eines entsprechend der Beobachtungshypothese (Mode-Sequenz) und der Funktionsweise des Algorithmus dimensioniertes und instanziiertes dynamisches Filter ermittelt.

Im Gegensatz zur hybriden Beobachtung berechnet eine hybride Diagnose lediglich den Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_{d,k}$ für den Mode $\mathbf{x}_{d,k}$ des Systems. Aufgrund der verwobenen kontinuierlichen und diskreten Evolution des Systems kann diese Aufgabe allerdings nur durch die gemeinsame Betrachtung der diskret- und kontinuierlich-wertigen Dynamiken des Systems erfolgen. Ähnlich wie bei der hybriden Beobachtung werden Diagnose Hypothesen, genauer gesagt in diesem Fall Mode-Hypothesen, auf ihre Konsistenz mit den gemessenen und bekannten Systemgrößen verglichen. Dieser Konsistenztest erfolgt durch die Berechnung eines sogenannten Residuums \mathbf{r} , welches bei Konsistenz einen Wert $\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$ annimmt. Die Berechnung eines Residuums kann hierbei ähnlich der hybriden Beobachtung über Beobachter/Filter erfolgen [15], durch Systemidentifikation [13, 11] generiert werden oder durch sogenannte *Analytic Redundancy Relations (ARR)* [8, 6] gebildet werden.

Analytic Redundancy Relations setzen die Systemein- (\mathbf{u}) und -ausgänge (\mathbf{y}) über einen Beobachtungszeitraum der Länge $p + 1$ in Beziehung. Zu diesem Zweck bildet man die für den Beobachtungszeitraum zusammengefassten Ein- und Ausgänge

$$U_k := [\mathbf{u}_{k-p}^T, \dots, \mathbf{u}_k^T]^T, \quad Y_k := [\mathbf{y}_{k-p}^T, \dots, \mathbf{y}_k^T]^T, \quad (9)$$

und formuliert anhand der Systemgleichungen (1-2) für den Mode q_i folgende analytische Beziehung

$$Y_k = \mathbf{O}_i \mathbf{x}_{k-p} + \mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) U_k \quad (10)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{O}_i := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^p \end{bmatrix} \quad (11)$$

und

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i & \mathbf{D}_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{p-1} \mathbf{B}_i & \cdots & \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Wählt man nun den Beobachtungszeitraum, bzw. den Parameter p , hinreichend groß so existiert eine zur Matrix \mathbf{O}_i orthogonale Matrix $\mathbf{\Omega}_i$, sodass gilt

$$\mathbf{\Omega}_i \mathbf{O}_i = \mathbf{0}.$$

Damit lässt sich nun die Abhängigkeit vom Zustand \mathbf{x}_{k-p} in (10) durch (links) Multiplikation mit $\mathbf{\Omega}_i$ eliminieren. Dies definiert die ARR für den Mode q_i

$$\mathbf{\Omega}_i Y_k = \mathbf{\Omega}_i \mathbf{O}_i \mathbf{x}_{k-p} + \mathbf{\Omega}_i \mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) U_k \quad (13)$$

$$\mathbf{\Omega}_i Y_k = \mathbf{\Omega}_i \mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) U_k. \quad (14)$$

Auf Basis dieser ARR lässt sich ein Residuum-Vektor $\mathbf{r}_{i,k}$ für Mode q_i wie folgt definieren:

$$\mathbf{r}_{i,k} := \mathbf{\Omega}_i Y_k - \mathbf{\Omega}_i \mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) U_k. \quad (15)$$

Dieser Residuum-Vektor erlaubt nun folgenden Konsistenztest¹

$$\tilde{r}_{ij,k} := \begin{cases} 0 & \text{wenn gilt } |r_{ij,k}| = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, m_i \quad (16)$$

und man erhält den binären Residuum Vektor für den Mode q_i zum Zeitpunkt k als

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i,k} := [\tilde{r}_{i1,k}, \dots, \tilde{r}_{im_i,k}]^T. \quad (17)$$

Hybride Diagnose erfolgt nun durch die parallele Auswertung von (15) für alle Modi $q_i, i = 1, \dots, l$ [6]. Verwendet man darüber hinaus einen Discrete-Event Diagnoser [17] zur Beobachtung der diskreten Dynamik anhand der beobachtbaren Ereignisse, so kann die Menge der möglichen diskreten Modi weiter eingeschränkt werden [2]. In [16] konnten wir weiters zeigen, dass die Verwendung dieses ARR-basierten Konsistenztests auch zur gezielten Selektion und damit besseren Einschränkung von Hypothesen für die hybride Beobachtung verwendet werden kann.

¹Natürlich wird in einem realen Umfeld aufgrund von unvermeidbaren Störungen (Messrauschen, etc.) die Bedingung durch die Angabe einer oberen Schranke ε_{ij} für $|r_{ij,k}|$ ersetzt werden.

3.1 Nicht unterscheidbare Betriebszustände

Der ARR Test (15-16) überprüft die Konsistenz der Ein- und Ausgangs Sequenz mit der Mode-Hypothese $\mathbf{x}_{d,k} = q_i$. Genauer gesagt, aufgrund des durch p spezifizierten Beobachtungszeitraums gilt

$$\mathbf{x}_{d,j} = q_i, j = k - p, \dots, k \rightarrow \tilde{\mathbf{r}}_{i,k} \equiv \mathbf{0}. \quad (18)$$

Es ist allerdings durchaus möglich, daß mehrere Modi eines Systems konsistente, d.h. zu Null evaluierende, ARRs aufweisen. Das eingangs angeführte Beispiel kann dies schön verdeutlichen. Die Evaluierungs-Form der ARRs (15) für $p = 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,k} &:= \mathbf{\Omega}_1 Y_k - \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{L}(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1) U_k \\ &= \begin{bmatrix} 0.2369 & -0.7701 & 0.5923 \end{bmatrix} Y_k - \begin{bmatrix} -1.0070 & 1.0070 & 0.5923 \end{bmatrix} U_k. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2,k} &:= \mathbf{\Omega}_2 Y_k - \mathbf{\Omega}_2 \mathbf{L}(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2) U_k \\ &= \begin{bmatrix} 0.2369 & -0.7701 & 0.5923 \end{bmatrix} Y_k - \begin{bmatrix} -1.0070 & 1.0070 & 0.5923 \end{bmatrix} U_k. \end{aligned} \quad (20)$$

ist für beide Modi des Systems ident! Dies ist natürlich kein Zufall, sondern eine direkte Konsequenz des identen Eingangs-/Ausgangsverhaltens der beiden Modi. Ein Umstand, der durch die identen Übertragungsfunktionen (8) bereits intuitiv logisch erscheint.

In der Literatur werden derartige Modi daher als *nicht unterscheidbar* (non-discernable [6, 3]) bezeichnet. Im Detail kann diese Eigenschaft durch folgende Bedingung festgestellt werden. Zwei Modi q_i und q_j eines hybriden Systems sind nicht unterscheidbar dann und genau dann, wenn gilt [6]

$$\text{Null}(\mathbf{O}_i^T) = \text{Null}(\mathbf{O}_j^T) \subseteq \text{Null}(\Delta_{ij}^T) \quad (21)$$

wobei Δ_{ij} folgendermaßen zu wählen ist

$$\Delta_{ij} := \mathbf{L}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) - \mathbf{L}(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \mathbf{D}_j). \quad (22)$$

Diese Bedingungen können effizient durch folgende Rangbestimmungen überprüft werden:

$$\text{Rang}(\mathbf{O}_1) = \text{Rang}(\mathbf{O}_2) = \text{Rang}([\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \Delta_{ij}]) \quad (23)$$

Diese Eigenschaft, bzw. dieser hybride Beobachtbarkeitsdefekt kann natürlich durch eine Systemanalyse anhand der Bedingung (23) überprüft werden und so auch bei Systemen mit einer größeren Anzahl von Modi jene identifiziert werden, die durch eine parallele Auswertung der ARRs nicht unterschieden werden können. Wohl aber liefert die Evaluierung der ARRs (in, um genau zu sein, nahezu allen Fällen) eine klare Indikation für einen Mode-Übergang wie in Abbildung 4 für die Simulation aus Abbildung 3 zu sehen ist. Diese Evaluierung der Residuen zu Werten ungleich Null wird durch den Mode Übergang im Beobachtungszeitraum

$$(k-p)T_s \dots kT_s$$

hervorgehoben. Aus diesem Grund liefern ARR basierte hybride Beobachter/Diagnoser den Schätzwert für den Mode erst um (mindestens) p Zeitschritte verzögert.

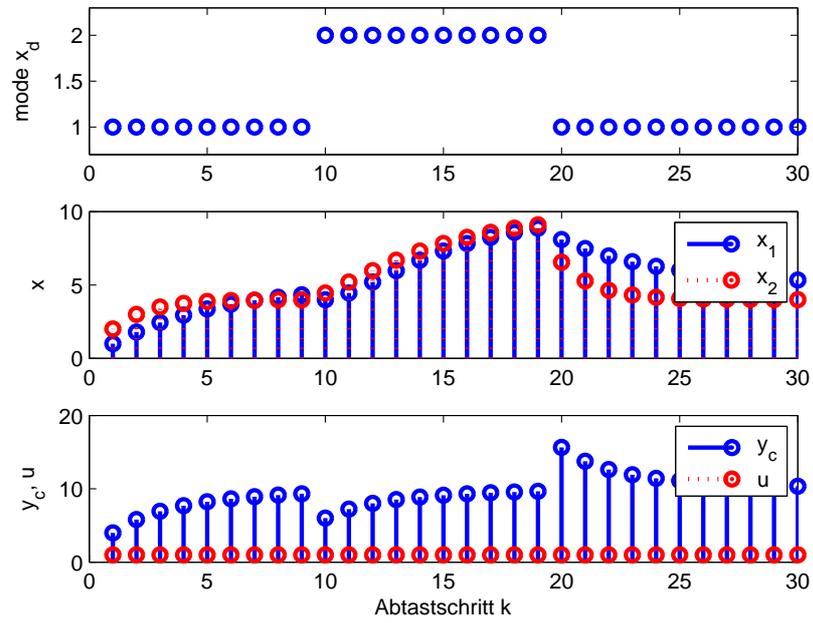


Abbildung 3: Simulation des 2-Mode Beispiels mit 2 Mode Wechsel.

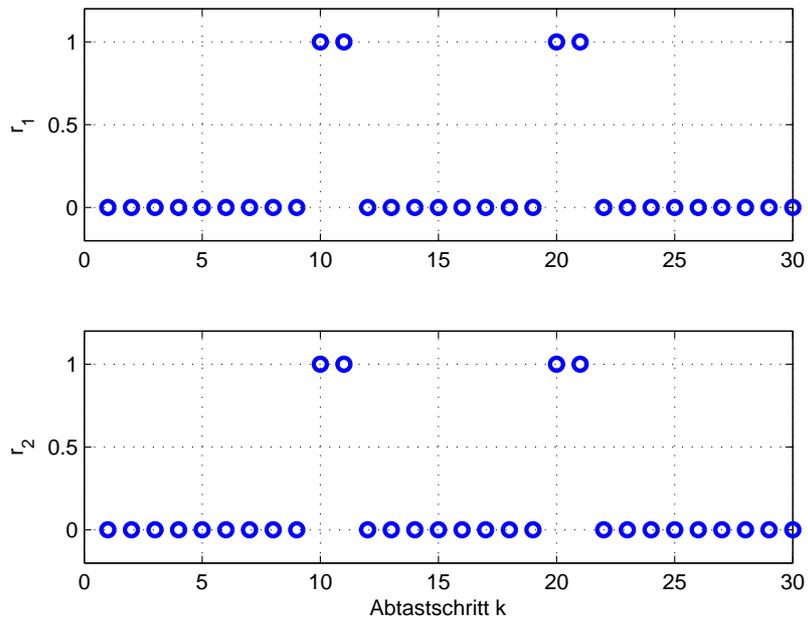


Abbildung 4: Residuen $\mathbf{r}_{1,k}$ und $\mathbf{r}_{2,k}$ für obiges Simulationsbeispiel.

3.2 Zeitvariante Analytic Redundancy Relations

ARR basierte hybride Beobachter/Diagnoser verwenden eine Menge von Mode-spezifischen ARR's und werten diese parallel aus. Durch diese Vorgangsweise werden daher streng genommen die beobachteten Eingangs- und Ausgangsdaten des Systems auf ihre Konsistenz mit den möglichen Mode Hypothesen überprüft. Dies ist im Kontrast zu hybriden Beobachtern, welche *Mode-Sequenz Hypothesen* evaluieren. Fasst man allerdings das Hybride System als *zeitvariantes* dynamisches System auf, so können ARR's auch für Mode-Sequenz Hypothesen formuliert werden.

Die Basis hierfür bilden die nun zeit-variant formulierten Matrizen \mathbf{O} und \mathbf{L} . Für einen durch $p = 2$ dimensionierten Beobachtungszeitraum mit einer zugehörigen Mode Sequenz $\{q_\nu, q_\xi, q_\iota\}$, das heißt,

$$\mathbf{x}_{d,k-2} = q_\nu \rightarrow \mathbf{x}_{d,k-1} = q_\xi \rightarrow \mathbf{x}_{d,k} = q_\iota$$

lauten diese exemplarisch

$$\mathbf{O}(\{q_\nu, q_\xi, q_\iota\}) := \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\nu \\ \mathbf{C}_\xi \mathbf{A}_\xi \\ \mathbf{C}_\iota \mathbf{A}_\iota \mathbf{A}_\xi \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \{q_\nu, q_\xi, q_\iota\}) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_\xi \mathbf{B}_\xi & \mathbf{D}_\xi & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_\iota \mathbf{A}_\iota \mathbf{B}_\xi & \mathbf{C}_\iota \mathbf{B}_\iota & \mathbf{D}_\iota \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Analog zu (15) können wir damit Residuen für Mode Sequenzen folgendermaßen formulieren

$$\mathbf{r}_{\{\nu,\xi,\iota\},k} := \mathbf{\Omega}_{\{\nu,\xi,\iota\}} Y_k - \mathbf{\Omega}_{\{\nu,\xi,\iota\}} \mathbf{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \{q_\nu, q_\xi, q_\iota\}) U_k. \quad (26)$$

mit der Matrix

$$\mathbf{\Omega}_{\{\nu,\xi,\iota\}} = \text{Null} \left(\mathbf{O}(\{q_\nu, q_\xi, q_\iota\})^T \right)^T \quad (27)$$

Die auf dieser Basis formulierten ARR's ermöglichen nun eine detailliertere Beobachtung des hybriden Systems. Allerdings erhält man für ein hybrides System mit l Zuständen auch eine unter Umständen sehr große Anzahl von

$$l^{p+1} \quad (28)$$

möglichen ARR's für die hybride Beobachtung. In unserem einfachen 2-Mode Beispiel sind dies bereits $2^3 = 8$ ARR's. Eine parallele Auswertung aller ARR's ist daher im Allgemeinen sicherlich nicht zielführend. Wohl aber ermöglicht die gezielte Auswahl von ARR-Tests für Mode-Sequenz Hypothesen eine detailliertere hybride Beobachtung/Diagnose.

In Abbildung 5 sind sechs Residuen für die Mode Sequenzen

$$\{q_1, q_1, q_1\}, \{q_1, q_1, q_2\}, \{q_1, q_2, q_2\}, \{q_2, q_2, q_2\}, \{q_2, q_2, q_1\}, \{q_2, q_1, q_1\}$$

dargestellt. Es ist klar ersichtlich, dass der Mode Übergang $q_1 \rightarrow q_2$ durch die Residuen $\mathbf{r}_{\{1,1,2\},k}$, $\mathbf{r}_{\{1,2,2\},k}$ und der Übergang $q_2 \rightarrow q_1$ durch die Residuen $\mathbf{r}_{\{2,2,1\},k}$, $\mathbf{r}_{\{2,1,1\},k}$ klar erkannt und vor allem auch unterschieden werden kann. Eine Auswertung des Verhaltens

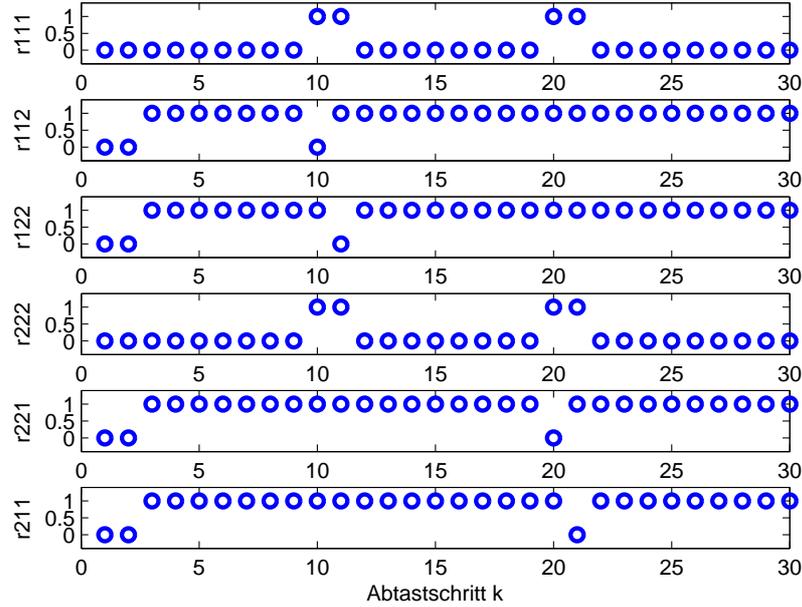


Abbildung 5: Residuen $\mathbf{r}_{\{\nu,\xi,\epsilon\},k}$ für obiges Simulationsbeispiel.

eines hybriden Systems mittels der zeitvarianten ARRn ermöglicht daher die Ermittlung eines Schätzwertes des Betriebszustandes für Systeme, welche eingangs und auch in der Literatur als nicht-unterscheidbar bezeichnet werden! Wesentlich für den Beobachtungsprozess ist allerdings ein bezüglich der Modi *aktives* Verhalten. Dieses kann zum Beispiel durch eine gezielte Injektion von Events, welche entsprechende Mode Übergänge zur Folge haben, erzwungen werden.

Weiters legt diese Betrachtung eine erweiterte Fassung der Definition von *nicht-unterscheidbaren* Modi nahe. Für zwei Modi q_i und q_j eines hybriden Systems (4) und einen Beobachtungszeitraum der Länge $p + 1$ erhält man insgesamt $\lambda = 2^{p+1}$ mögliche Mode Sequenzen $\bar{\mathcal{Q}} = \{\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_{\lambda-1}\}$. Auf Basis dieser Menge der möglichen Mode Sequenzen bezeichnen wir zwei Modi q_i und q_j als *aktiv nicht unterscheidbar* sofern für alle $\mathcal{Q}_\nu \in \bar{\mathcal{Q}}$ und $\mathcal{Q}_\xi \in \bar{\mathcal{Q}}$ und dem folgendermaßen definierten $\tilde{\Delta}_{\nu\xi}$

$$\tilde{\Delta}_{\nu\xi} := \mathbf{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathcal{Q}_\nu) - \mathbf{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathcal{Q}_\xi) \quad (29)$$

gilt:

$$\text{Rang}(\mathbf{O}_{\mathcal{Q}_\nu}) = \text{Rang}(\mathbf{O}_{\mathcal{Q}_\xi}) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathcal{Q}_\nu} \\ \mathbf{O}_{\mathcal{Q}_\xi} \\ \tilde{\Delta}_{\nu\xi} \end{bmatrix} \right) . \quad (30)$$

3.3 Hypothesen Filterung für hybride Beobachtung

Hybride Beobachtung mit hME [10] erfolgt durch eine gezielte Auswahl von Mode-Sequenz Hypothesen mit einer anschließenden kontinuierlich-wertigen Filterung. In [16] konnten wir zeigen, dass die Verwendung von ARRn eine Verbesserung des Algorithmus durch eine gezieltere Fokussierung auf die wahrscheinlichsten Beobachtungs-Hypothesen

möglich ist. Allerdings haben wir dafür lediglich Mode-spezifische ARRr verwendet und die Selektion nach der kontinuierlichen Filterung durchgeführt. Im Gegensatz dazu ermöglichen die oben eingeführten zeitvarianten ARRr eine radikal einfachere und damit auch effizientere Einbindung in das hME Konzept.

hME erzielt die rechentechnische Effizienz durch zwei ineinander verwobene Suchprozesse. Das exponentielle Anwachsen der möglichen Mode-Sequenzen wird durch einen sogenannten Beam-Search Vorgang beschränkt. Dieser übergeordnete Suchprozess beschränkt die Anzahl der betrachteten Hypothesen auf eine durch den Anwender wählbare obere Schranke. Abbildung 6 stellt diese Funktionsweise graphisch für eine obere Schranke von $\lambda = 4$ dar. Jeder Knoten stellt hierbei eine Beobachtungshypothese

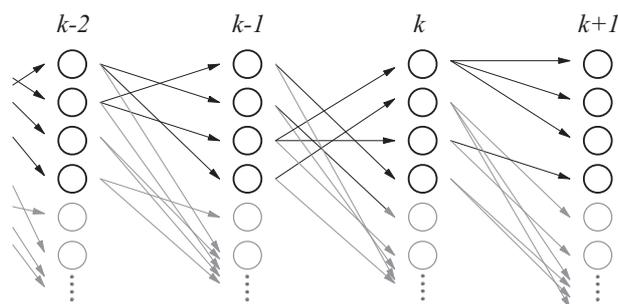


Abbildung 6: Beam-Search Prozedur für hME.

mit dem zugehörigen Schätzwert dar. Jeder Pfad im Graphen definiert eine spezifische Mode-Sequenz mit ihrer zugehörigen kontinuierlich-wertigen Evolution. Die hybride Beobachtung erfolgt rekursiv und erweitert zu jedem Zeitpunkt schrittweise den Graphen. Hierzu wird die Berechnung der möglichen Folgehypothesen/Folgezustände durch eine unterlagerte Suchprozedur bewerkstelligt. Diese berechnet gezielt die wahrscheinlichsten Folgezustände und vermeidet daher die rechentechnisch aufwändige kontinuierliche Filterung für unwahrscheinliche Hypothesen so gut wie möglich. Abbildung 7a zeigt den zugehörigen Such-Baum, in dem mittels der sogenannten A*-Suche operiert wird. Der Suchprozess bestimmt schrittweise anhand des DES Modellteiles (3) eine mögliche Folgehypothese und bewertet diese mittels der nachfolgenden kontinuierlichen Filterung. Das entsprechende Filter wird hierbei zur Laufzeit des Beobachters abgeleitet, bzw. aus einem Zwischenspeicher (Cache), welcher die zuletzt verwendeten Filter beinhaltet, bezogen. Die Auswertung des Filters liefert auch den kontinuierlich-wertigen Schätzwert \hat{x}_k .

Als Verbesserung dieser Vorgangsweise schlagen wir die Einbindung eines ARR Konsistenztests *vor der kontinuierlichen Filterung* in den hME Suchablauf vor. Dies bedeutet allerdings, dass wir wie in Abbildung 7b dargestellt die kontinuierliche Schätzung doppelt durchführen (ARR basiert und Filter basiert). Allerdings erzielen wir durch diese ARR basierte Hypothesen-Vorfilterung die Möglichkeit, nicht unterscheidbare Modi im System klar zu unterscheiden. Auch Modi mit sehr ähnlichen Eingangs/Ausgangs Dynamiken können damit besser klassifiziert werden. Die Vorselektion verwirft weiters Hypothesen und verhindert damit die kontinuierliche Filterung in mehreren Fällen. Dieser Umstand kann den zusätzlichen Rechenaufwand durch Ableitung und Evaluierung der zeitvarianten ARRr durchaus kompensieren! Die zeitvarianten ARRr werden aus Effizienzgründen

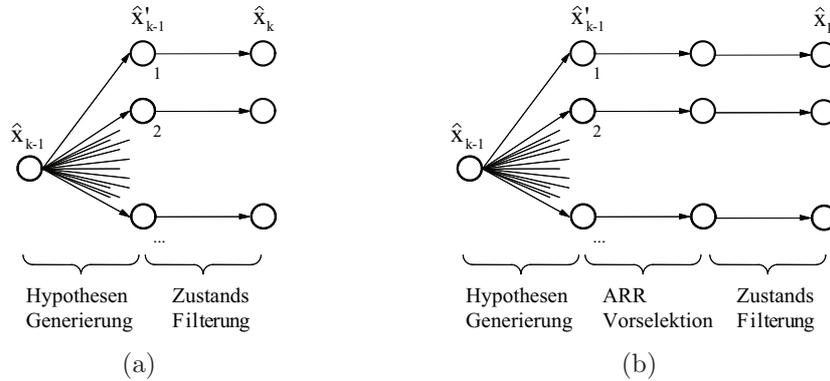


Abbildung 7: A* Suchbaum für Hypothesenexpansion.

ebenfalls durch on-line Ableitung während der Laufzeit und Zwischenspeicherung der häufigsten ARRs gehandhabt.

3.4 Beispiel

Abbildung 8 zeigt das Verhalten des erweiterten hME Algorithmus mit dem eingangs vorgestellten 2-Mode Beispiel und den in Abbildung 3 dargestellten Simulationsdaten. Das bei der Transition emittierte Ereignis σ wird hierbei als nicht-beobachtbar angenommen.

Wir starten den Beobachter zum Zeitpunkt $k = 3$ mit keiner Mode Information, das heisst, beide Modes q_1 und q_2 sind mögliche Beobachter Hypothesen zu den Zeitpunkten $k \leq 2$. Die Hypothesen Generierung des hME Algorithmus erweitert diese beiden Anfangssequenzen zu den insgesamt 4 Folgehypothesen.

$$\begin{aligned}
 \{q_1, q_1, q_1\} &\rightarrow \{\{q_1, q_1, q_1\}, \{q_1, q_1, q_2\}\} \\
 \{q_2, q_2, q_2\} &\rightarrow \{\{q_2, q_2, q_2\}, \{q_2, q_2, q_1\}\}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Durch die ARR Evaluierung können 2 Hypothesen ($\{q_1, q_1, q_2\}$ und $\{q_2, q_2, q_1\}$) ausgeschlossen werden und beide verbleibenden Hypothesen ($\{q_1, q_1, q_1\}$ und $\{q_2, q_2, q_2\}$) werden durch kontinuierliche Filterung mit dem Schätzwert für $\hat{\mathbf{x}}$ ergänzt. Ab dem Zeitpunkt des ersten Mode Wechsels ($k = 10$) fokussiert hME durch die ARR Vorselektion auf den richtigen Mode und liefert damit das korrekte Beobachtungsergebnis trotz der nicht unterscheidbaren Systemdynamiken!

4 Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Einführung von zeitvariablen Analytic Redundancy Relations konnten wir zeigen, dass in einem hybriden System mit bisher als nicht-unterscheidbar klassifizierten Modi eine Mode-Schätzung bzw. Diagnose in fast allen Fällen möglich wird. Dies stellt eine wesentliche Verbesserungsmöglichkeit für hybride Beobachter und Diagnostiker

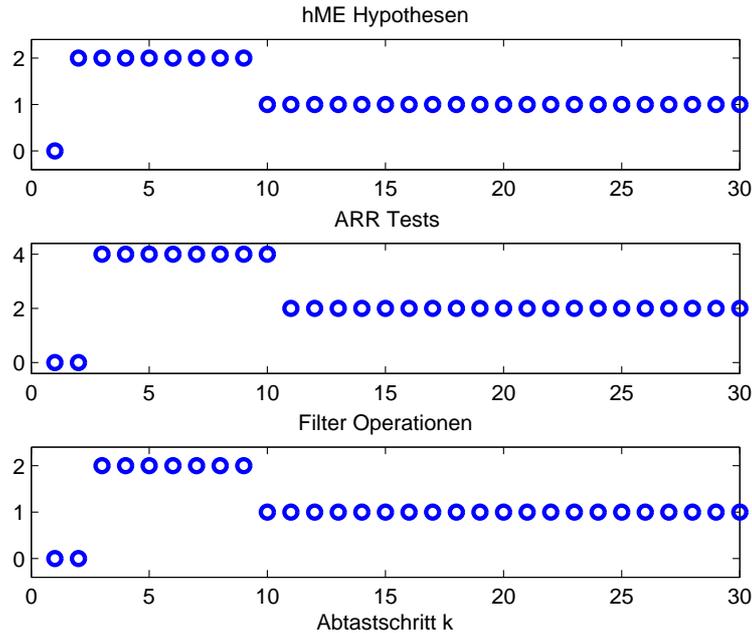


Abbildung 8: Analyse des erweiterten hME Algorithmus.

dar. Mit der Einführung der zeitvariablen ARR's steigt allerdings die Anzahl der möglichen Konsistenztests für ein hybrides System stark an. Aus diesem Grund ist die in ARR basierten Diagnosemethoden übliche parallele Auswertung aller ARR's aufgrund des rechentechnischen Aufwands nicht zielführend. In Verbindung mit einem durch gezielte Hypothesen-Generierung arbeitenden hybriden Beobachter kann allerdings durch die von uns vorgeschlagenen zeitvariablen ARR's eine Vorselektion erfolgen, die zu einer wesentlich besseren Fokussierung des Algorithmus auf die wahrscheinlichsten Beobachter-Hypothesen führt. Darüber hinaus kann ein solcher Beobachter die vormals als nicht unterscheidbar klassifizierten Modes klar unterscheiden.

Die potentiell große Anzahl der möglichen ARR's legt eine Ableitung derselben zur Laufzeit des Beobachters nahe. Dies kann bei linearen Systemen, wie in diesem Manuskript vorgestellt, sehr leicht erfolgen. Möchte man allerdings auch nichtlineare hybride Systeme erfolgreich mit dieser Vorselektion ausstatten, so empfiehlt es sich, die Anwendung auf jene problematischen Modi zu beschränken, die anhand ihres dynamischen Eingangs- Ausgangsverhaltens schwer zu unterscheiden sind. All jene Hypothesen, welche über keine vorberechnete ARR verfügen, werden dann durch die kontinuierliche Filterung entsprechend klassifiziert.

Danksagung

Die beschriebenen Forschungsarbeiten wurden im Rahmen des FWF Projektes *Modellbasierte Regelung für rekonfigurierbare mobile Roboter* (P20041-N15) durchgeführt.

Literatur

- [1] G.A. Ackerson and K.S. Fu. On state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15:10–17, 1970.
- [2] M. Bayouhdh, L. Travé-Massuyès, and X. Olive. Coupling continuous and discrete event system techniques for hybrid system diagnosability analysis. In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 08), Patras, Greece*, pages 219–223, 2008.
- [3] M. Bayouhdh, L. Travé-Massuyès, and X. Olive. Hybrid systems diagnosis by coupling continuous and discrete event techniques. In *Proceedings of the IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 7265–7270, 2008.
- [4] E. Benazera, L. Travé-Massuyès, and P. Dague. State tracking of uncertain hybrid concurrent systems. In *Proceedings of the 13th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX02)*, pages 106–114, May 2002.
- [5] H.A.P. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:780–783, 1988.
- [6] V. Cocquempot, T. El Mezyani, and M. Staroswiecki. Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals. In *IEEE/IFAC-ASCC : Asian Control Conference*, 2004.
- [7] N. de Freitas. Rao-blackwellised particle filtering for fault diagnosis. In *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference 2002*, volume 4, pages 1767–1772, 2002.
- [8] J. Gertler. Analytical redundancy methods in failure detection and isolation. In *Preprints of the IFAC SAFEPROCESS Symposium*, pages 9–21, 1991.
- [9] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Mode estimation of probabilistic hybrid systems. In *Hybrid Systems: Computation and Control, HSCC 2002*, volume 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–266. Springer Verlag, 2002.
- [10] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Hybrid estimation of complex systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 34(5):2178–2191, October 2004.
- [11] R. Isermann. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods - an introduction. *Control Engineering Practice*, 5(5):639–652, May 1997.
- [12] X.R. Li and Y. Bar-Shalom. Multiple-model estimation with variable structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:478–493, 1996.
- [13] L. Ljung and T. Glad. On global identifiability for model parametrizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30:265–276, 1994.

- [14] S. Narasimhan and G. Biswas. An approach to model-based diagnosis of hybrid systems. In *Hybrid Systems: Computation and Control, HSCC 2002*, volume 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 308–322. Springer Verlag, 2002.
- [15] R. Patton and J. Chen. Observer-based fault detection and isolation: robustness and applications. *Control Engineering Practice*, 5(5):671–682, May 1997.
- [16] Th. Rienmüller, M. Mayouddh, M. Hofbaur, and L. Travé-Massuyès. Hybrid estimation through synergic mode-set focusing. In *Proceedings of the IFAC SAFEPROCESS Symposium*, 2009.
- [17] M. Sampath, R. Sengputa, S. Lafortune, K. Sinnamohideen, and D. Teneketzi. Diagnosability of discrete event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40:1555–1575, Sept. 1995.
- [18] V. Verma, G. Gordon, R. Simmons, and S. Thrun. Real-time fault diagnosis. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 11(2):56–66, 2004.
- [19] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastry. Observability of linear hybrid systems. In *Hybrid Systems: Computation and Control, HSCC 2003*, volume 2623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 526–539. Springer Verlag, 2003.

Kurzfassungen

Eine fahrzeugübergreifende X-by-Wire Plattform für Fahrzeuge zur Ausführung umfassender Fahr- und Assistenzfunktionen

Reinhard Reichel, Michael Armbruster
Institut für Luftfahrtssysteme (ILS), Universität Stuttgart
reinhard.reichel@ils.uni-stuttgart.de

Gegenstand dieses Beitrags ist eine fahrzeugübergreifende X-by-Wire Plattform zur Ausführung jeglicher Fahr- und Assistenzfunktionalität ohne mechanisches Backup unter Anwendung des neuen FlexRay Bussystems. Hierbei bedeutet „fahrzeugübergreifend“ zum einen „fahrzeugumfassend“, also Zugriff auf alle Informations- und Stellorgane, zum anderen generisch, also weitgehend funktions- und fahrzeugunabhängig.

Die Entwicklung dieser Plattform fand im Rahmen des EU Forschungsprojektes SPARC statt, das von der Firma Daimler AG geleitet wurde. Plattformarchitekturentwicklung, Entwicklung des Plattformmanagements mit Redundanzmanagement, Gesamtintegration und Verifikation wurden am ILS durchgeführt.

Inhalt des Vortrags wird sein:

- Überblick über funktionelle Anforderungen an die X-by-Wire Plattform.
- Herleiten allgemeiner quantitativer Sicherheitsanforderungen für sicherheitskritische X-by-Wire Systeme im Automotivbereich basierend auf dem „Ausfallschaden/Häufigkeits Axiom“ und dem „Linearen Risiko Axiom“
- Darstellen eines neuen Verfahrens zur Ausfallmodellierung. Heute übliche Verfahren basieren auf einzelnen Fehler-Modes von Komponenten. Im Gegensatz dazu basiert das neue Verfahren auf Fehlerklassen. Damit ist es möglich, bei der Analyse auch „byzantinische“ Fehler mit zu berücksichtigen und konsequent Entwurfsanforderungen herzuleiten.
- Systematisches Herleiten von Anforderungen an die Plattformstruktur, das Redundanzmanagement, die Plattformkonsistenz aus den quantitativen „Top Level“ Sicherheitsanforderungen.

Um auch den generischen Ansatz der Plattform zu demonstrieren wurde die Plattform in drei Testfahrzeuge – einen Smart und zwei Lkw – eingebaut und auf der Teststrecke erprobt. Ein Kurzfilm zeigt schließlich Ausschnitte aus der Fahrerprobung.

Konstruktion flacher Ausgänge

Kurt Schlacher und Markus Schöberl

Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung
Johannes Kepler Universität Linz
Altenberger Straße 69, 4040 Linz

Betrachtet werden Systeme von n_e gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f^i(t, z, z_1) = 0, \quad i = 1, \dots, n_e \quad (1)$$

in der unabhängigen Variablen t und den n_z abhängigen Variablen $z = (z^\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, n_z$. Mit $z_1 = (z_1^\alpha)$ werden die Jet- oder Ableitungskoordinaten erster Stufe des Bündels \mathcal{Z} mit den Koordinaten (t, z) bezeichnet. Als flacher Ausgang wird nun ein Bündel \mathcal{Y} mit Koordinaten (t, y) , $y = (y^\kappa)$ bezeichnet, wenn eine surjektive Abbildung $\phi : J^n(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Z}$ so existiert, dass ihre Erweiterung zur Abbildung $\phi_e : J^n(\mathcal{Y}) \rightarrow J(\mathcal{Z})$ die Beziehung

$$f^i \circ \phi_e = 0, \quad i = 1, \dots, n_e$$

erfüllt. Mit $J(\mathcal{B})$ bzw. $J^n(\mathcal{B})$ wird die 1-te bzw. die n -te Jet Mannigfaltigkeit eines Bündels \mathcal{B} bezeichnet. In den Arbeiten [1] und [2] wurde bereits gezeigt, dass die durch (1) gegebene Mannigfaltigkeit $\mathcal{S} \subset J(\mathcal{Z})$ über jedem Punkt (t, z) eine lineare Varietät \mathcal{V} mit $\mathcal{V}_{(t,z)} \subset \mathcal{S}_{(t,z)}$ enthalten muss. Dieses Ergebnis wird nun nochmals hergeleitet, wobei noch gezeigt wird, dass es zur Existenz einer dynamischen Erweiterung

$$g^j(t, z, z_1) = p^j, \quad j = 1, \dots, n_p \quad (2)$$

von (1) äquivalent ist, die gestattet (1,2) in der Form

$$a_\alpha^k(t, z, p) z_1^\alpha + b^k(t, z, p) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e + n_p$$

zu schreiben. Z.B. in [3] wird gezeigt, wie (2) systematisch konstruiert werden kann. In diesem Vortrag werden aufbauend auf den obigen Überlegungen Algorithmen vorgeschlagen, welche die systematische Bestimmung flacher Ausgänge erlauben.

Literatur

- [1] P. Rouchon.: Necessary Condition and Genericity of Dynamic Feedback Linearization, J. of Math. Sys., Est., and Contr. Vol 4, pp. 1-14, 1994.
- [2] W. M. Sluis.: A necessary condition for dynamic feedback linearization, Sys. Contr. Letters (21), pp. 277-283, 1993.
- [3] K. Schlacher, M. Schöberl.: Construction of Flat Outputs By Reduction and Elimination, CD Proceedings IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2007, pp. 666-671, 2007.