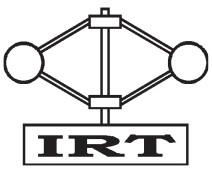
SSRP 2007

15. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

M. Horn, M. Hofbaur, N. Dourdoumas (Hrsg.)

17. - 20. 9. 2007
Schloss Retzhof, Leibnitz, Österreich

ISBN: 978-3-901439-07-0
© Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz



http://www.irt.tugraz.at

TU Graz
Graz University of Technology

Vorwort

Das *Steirische Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung* findet heuer zum 15. Mal im Schloss Retzhof, dem Bildungshaus des Landes Steiermark statt. Die Veranstaltung wird vom Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz durchgeführt und verfolgt das Ziel, aktuelle Arbeiten auf den Gebieten der Regelungs- und Prozessautomatisierungstechnik in universitärer und industrieller Forschung zu erörtern. Die Beiträge des Seminars sind einem breiten Spektrum von Aufgabenstellungen gewidmet. Der vorliegende Tagungsband ist eine Zusammenstellung der eingelangten Manuskripte und Vortragsunterlagen. Den Autoren sei an dieser Stelle für die Sorgfalt bei der Erstellung ihrer Tagungsbandbeiträge gedankt.

Graz, im September 2007

Inhaltsverzeichnis

Manuskripte

Steuerbarkeitsmaße für lineare zeitinvariante Systeme - Eine kritische Studie
Sonja Moschik, Nicolaos Dourdoumas 3

Ein Multimodellansatz zur mengenbasierten Zustandsschätzung von dynamischen Systemen
Sylvia Horn, Klaus Janschek 23

Discontinuous and Continuous Sliding Mode
Karel Jezernik 35

Modellbasierte Signalplausibilisierung für integrierte Fahrdynamikregelungskonzepte
Werner Kober, Andreas Kresitschnig 45

Echtzeitableitungsschätzung am Beispiel automotiver Anwendungen
Josef Zehetner, Martin Horn 59

Optimale Fahrzeugführung für Rennsportsimulationen
Christian Prettenthaler, Martin Rudigier, Martin Horn 77

Entwurf eines Sollwertgenerators für Fahrdynamikregelsysteme
Walter Rosinger, Stefan Eitzinger, Wolfgang Hirschberg, Stefan Volkwein 117

Performance Gradients under Spherical Uncertainties
Alexander Weinmann 141

Die Konstruktion flacher Ausgänge durch sukzessive Elimination und Reduktion
Kurt Schlacher , Markus Schöberl 165

Entwicklung eines humanoiden Roboters (HWM)
Wolfgang Werth 171

Modellbasierte Diagnose und Rekonfiguration eines autonomen mobilen Roboters
Franz Wotawa 181

Neue Methode zur Regelung von Petersen Spulen: Theorie und Betriebserfahrung
Gernot Druml 191

Ein Beitrag zur Beobachtbarkeitsanalyse von verteilt parametrischen Systemen
Karl Rieger, Kurt Schlacher 209

Enhancement of the Knowledge Base of Already Trained and Untrained Neural Networks
Alexander Viehweider 227

Kurzfassungen

Industrialisierung von Regelungstechnik am Beispiel der Fahrwerkselektronik
Helmut Hochschwarzer 253

Modellierung von Wärmeübertragern in Biomassefeuerungsanlagen
Markus Gölles, Robert Bauer 255

Manuskripte

Steuerbarkeitsmaße für lineare zeitinvariante Systeme - Eine kritische Studie

S. Moschik, N. Dourdoumas
TU-Graz, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik,
8010 Graz, Kopernikusgasse 24
sonja.moschik@tugraz.at*, nicolaos.dourdoumas@tugraz.at

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es in der Literatur vorgestellte Maße zur Quantifizierung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zusammenzufassen und einer kritischen Bewertung zu unterziehen. Die Maße werden zunächst kurz vorgestellt und anschließend soll anhand von drei Beispielen überprüft werden, welche Maße sich in der Anwendung als effizent und zuverlässig erweisen.

1 Einleitung

Für das hier betrachtete kontinuierliche lineare zeitinvariante System (LZI System)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\text{x}n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\text{x}m}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\text{x}n}$ existieren einfach anzuwendende Kriterien zur Untersuchung der Steuer- und Beobachtbarkeit. Diese Kriterien liefern im Allgemeinen eine Ja-Nein Aussage. Das heißt man erhält nur die Information, ob ein System steuerbar bzw. beobachtbar ist oder nicht.
Neben dem Vorhanden oder nicht Vorhanden sein dieser Systemeigenschaft, stellen sich aber noch weitere wichtige Fragen, für deren Beantwortung ein tieferer Einblick in das Steuer- und Beobachtbarkeitsverhalten des Systems notwendig ist. Dies kann mit den in dieser Arbeit vorgestellten Maßen erfolgen, die Informationen darüber liefern wie „gut“ oder „schlecht“ eine Zustandsvariable steuerbar und/oder beobachtbar ist.
Mit diesen Informationen können dann Aussagen darüber getroffen werden, welche

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

Zustandsvariablen gemessen werden müssen um eine hinreichend gute Beobachtbarkeit zu erreichen. Hat man bei der Wahl der Platzierung der Aktoren und Sensoren gewisse Freiheiten, kann mit Hilfe der Maße versucht werden, diese möglichst effektiv anzuordnen. Weiters kann mit den Maßen auch eine Aussage über die Empfindlichkeit des Systems auf Grund von Parameterungenauigkeiten getroffen werden. D.h. wenn das nicht exakt modellierte System beispielsweise „schlecht“ steuerbar ist, ist unter Umständen das reale System auf Grund von Parametertoleranzen oder Parameterschwankungen nicht steuerbar. Mit Hilfe der Maßzahlen kann die Dominanz einzelner Systemteile beurteilt werden, welche es ermöglicht, die Ordnung eines komplexen Systems durch Vernachlässigung der Systemteile mit den geringsten Einfluss auf das Gesamtsystem zu reduzieren.

Zur Bewertung der Steuer- und Beobachtbarkeit linearer Systeme wurden in der Vergangenheit eine Vielzahl unterschiedlicher Maßzahlen eingeführt. Im ersten Teil dieser Arbeit werden Maße zur Beurteilung der Steuerbarkeit von Zustandsvariablen vorgestellt und anhand einfacher Beispiele versucht dem Leser die Probleme, die bei der Anwendung auftreten können näher zu bringen. Da die Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zueinander dual sind und die Beobachtbarkeitsmaße somit analog eingeführt werden können, werden diese nicht gesondert betrachtet. Im zweiten Teil werden die vorgestellten Maße miteinander verglichen und anhand von drei Beispielen auf deren Anwendbarkeit überprüft.

2 Steuerbarkeitsmaße für LZI Systeme

Will man die Steuerbarkeit eines Systems quantifizieren, muss zunächst geklärt werden, wie die Begriffe „gut“ und „schlecht“ steuerbar zu verstehen sind. Um einen besseren Einblick zu erhalten, betrachten wir ein LZI System mit einer besonderen Struktur, der sogenannten Modalform.

2.1 Modalform

Die Modalform kann durch die Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_{R1}, \mathbf{x}_{R2}, \ldots, \mathbf{x}_{Rn}]\zeta = \mathbf{X}_R\zeta$$

erhalten werden. Die Spalten der Matrix $\mathbf{X}_R$ entsprechen den Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{x}_{Rk}$ der Matrix $\mathbf{A}$. Unter der Voraussetzung, dass die (n,n)-Matrix $\mathbf{A}$ verschiedene Eigenwerte λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ besitzt, sind die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig und die Transformationsmatrix $\mathbf{X}_R$ ist regulär. Mit der Beziehung $\mathbf{X}_R^{-1} = \mathbf{X}_L$, wobei die Spalten von $\mathbf{X}_L$ den Links-Eigenvektoren $\mathbf{x}_{Lk}$ der Matrix $\mathbf{A}$ entsprechen, erhält man das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \mathbf{X}_L\mathbf{A}\mathbf{X}_R\zeta + \mathbf{X}_L\mathbf{B}\mathbf{u} =: \hat{\mathbf{A}}\zeta + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{X}_R\zeta =: \hat{\mathbf{C}}\zeta \end{aligned} \tag{2}$$

mit der nun in Diagonalform vorliegenden Systemmatrix

$$\mathbf{X}_L\mathbf{A}\mathbf{X}_R = \hat{\mathbf{A}} = \text{diag}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Die Ein- und Ausgangsmatrizen des modaltransformierten Systems erhält man durch die Beziehungen

$$\mathbf{X}_L\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n^T \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{C}\mathbf{X}_R = \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_1 & \hat{\mathbf{c}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix}.$$

Diese Transformation führt zu einem entkoppelten System mit n Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\zeta}_k = \lambda_k \zeta_k + \hat{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{u}. \tag{3}$$

Der Einfluß der Zeilen von $\hat{\mathbf{B}}$ auf die Steuerbarkeit der entsprechenden Teilsysteme ist nun direkt sichtbar (siehe auch Abbildung 1).

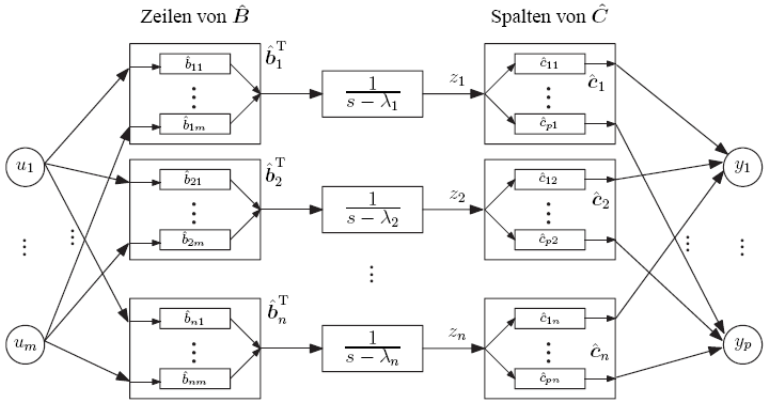


Abbildung 1: Modalform [18]

Dies führt direkt zum Kriterium nach GILBERT: Ein System der Ordnung n in Modalform ist bei einfachen Eigenwerten λ_k $(k = 1, \dots, n)$ genau dann steuerbar, wenn die Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$ des transformierten Systems keine Nullzeilen besitzt.

2.1.1 Definitionen von Steuerbarkeitsmaßen

Die Steuerbarkeitsmaße fußen auf der Idee das kleine Einträge in den entsprechenden Zeilen $\hat{\mathbf{b}}_k$ der transformierten Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$ auf eine „schlecht“ steuerbare Zustandsvariable hinweisen. Da in diesem Fall Aussagen im Modalraum getroffen werden, wird in der Literatur oft von der Steuerbarkeit eines Eigenwertes gesprochen. Für

die Einführung einer Maßzahl gibt es durch Normierung der Zeilen von $\hat{\mathbf{B}}$ theoretisch viele Möglichkeit.

Konno: Das modale Steuerbarkeitsmaß nach Konno ist wie folgt definiert

$$a_k = \sqrt{\hat{\mathbf{b}}_k^H \hat{\mathbf{b}}_k} \tag{4}$$

und findet bei der Steuerbarkeitsanalyse elastischer Roboter Anwendung [18].

Lückel und Müller [14]: Das Maß

$$\kappa_{sk} = \frac{\mathbf{x}_{kL}^H \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{x}_{kL}}{\mathbf{x}_{kL}^H \mathbf{x}_{kL}} e^{-2Re\{\lambda_k\}} \tag{5}$$

besteht einerseits aus der Normierung der Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$ und dem zusätzlichen Term $e^{-2Re\{\lambda_k\}}$, der zu einer unterschiedlichen Bewertung von stabilen und instabilen Eigenwerten führt. Die zu Grunde liegende Idee für die Einführung dieses Terms ist, dass ein stabiler Eigenwert den Regelvorgang in den Ursprung unterstützt, während ein instabiler Eigenwert diesem entgegenwirkt.

Litz [16]: Da die von Lückel und Müller eingeführte Verkoppelung zwischen Steuerbarkeit und Stabilität, wie später gezeigt wird, zu unerwünschten Verzerrungen der Maßzahlen führen kann, wurde von Litz das von der Stabilitätsverkopplung bereinigte Maß eingeführt

$$\kappa_k = \frac{\mathbf{x}_{kL}^H \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{x}_{kL}}{\mathbf{x}_{kL}^H \mathbf{x}_{kL}}. \tag{6}$$

2.2 Übertragungsmatrix des modaltransformierten Systems

Die Übertragungsmatrix des Systems in Modalform (2) errechnet sich aus

$$\mathbf{G}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{E} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_1 & \hat{\mathbf{c}}_2 & \dots & \hat{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n^T \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Betrachtet man die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_k(s)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{s-\lambda_k} \begin{bmatrix} \hat{c}_{1k}\hat{b}_{k1} & \dots & \hat{c}_{1k}\hat{b}_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_{pk}\hat{b}_{k1} & \dots & \hat{c}_{pk}\hat{b}_{km} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_k(s)} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

eines entkoppelten Teilsystems mit dem Eigenwert λ_k, so wird ersichtlich, dass für die Steuer- und Beobachtbarkeit das Produkt aus $\hat{c}_{ik}$ und $\hat{b}_{kj}$ von Bedeutung ist. Wird die

Matrix $\mathbf{G}_k$ zur Nullmatrix, dann ist dieses Teilsystem entweder nicht steuerbar, nicht beobachtbar oder nicht steuerbar und nicht beobachtbar. Wenn eine Spalte dieser Matrix dem Nullvektor entspricht, hat die zugehörige Eingangsgröße keinen Einfluß auf die Aussgangsgrößen. Enthält die Matrix $\mathbf{G}_k$ eine Nullzeile, dann liefert die zugehörige Ausgangsgröße keine Information.

2.2.1 Maßdefinitionen

Auch hier kann wieder die Überlegung benutzt werden, dass „kleine" Werte von $\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}$ auf „schlechte" Steuerbarkeit und/oder Beobachtbarkeit hinweisen. Die im Folgenden vorgestellten Maße für Regelbarkeit, Polverschiebbarkeit und Dominanz wurden auf Grund von unterschiedlichen Überlegungen eingeführt, wodurch die verschiedenen Interpretationen zustandekommen. Diese Maße messen, unter Benutzung des Produkts $\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}$, alle die gleiche Systemeigenschaft und liefern somit, wie auch anhand der Maßdefinitionen leicht erkennbar, ähnliche Ergebnisse.

Regelbarkeitsmaß nach Hippe [12]: Das Regelbarkeitsmaß gibt Auskunft über die Beeinflußbarkeit eines Eigenwerts durch einen Regler. Beim Entwurf eines optimalen Zustandsreglers zeigt sich, dass einige Eigenwerte der Strecke relativ stark verändert werden, während sich andere nur sehr wenig von der ursprünglichen Lage entfernen. Letztere werden in [12] als schlecht regelbar bezeichnet. Das die Regelbarkeit bewertende Maß für den Eigenwert λ_k bezogen auf das Eingangs-Ausgangspaar (u_j, y_i) ist definiert zu

$$|\varrho_k^{ij}| = |\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}|. \tag{9}$$

Polempfindlichkeitsmaß nach Litz [15]: Bei konstanter Rückführung des Systemausgangs auf den Systemeingang

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mp} \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

gilt für das absolute Polempfindlichkeitsmaß

$$S_{r_{ji}}^{\lambda_k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ji}} = \hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj} \tag{10}$$

und für das relative Polempfindlichkeitsmaß

$$s_{r_{ji}}^{\lambda_k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ji}} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}}{\lambda_k} \tag{11}$$

mit λ_k dem Eigenwert des geschlossenen Kreises. Die beiden Polempindlichkeitsmaße liefern im Allgemeinen komplexe Werte, wobei $Re\{S_{r_{ji}}^{\lambda_k}\}$ bzw. $Re\{s_{r_{ji}}^{\lambda_k}\}$ der Empfindlichkeit des Realteiles und $Im\{S_{r_{ji}}^{\lambda_k}\}$ bzw. $Im\{s_{r_{ji}}^{\lambda_k}\}$ der Empfindlichkeit des Imaginärteiles des Eigenwerts λ_k entspricht.

Dominanzmaß nach Litz [16]: Das Maximalmaß M_k und das Summenmaß Σ_k bezogen auf den Eigenwert λ_k wurden wie folgt definiert

$$M_k = \max_{i=1}^{p} \left(\max_{j=1}^{m} \left| \frac{\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}}{\lambda_k} \right| \right) \tag{12}$$

$$\Sigma_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\hat{c}_{ik}\hat{b}_{kj}}{\lambda_k} \right| . \tag{13}$$

Das Maximalmaß macht eine generelle Aussage über die Dominanz des Eigenwertes, während durch die Bestimmung des Summenmaßes erkannt wird, ob ein Eigenwert mit einem sehr hohen Beitrag in einem einzigen Übertragungskanal eventuell trotz eines hohen Maximalmaßes insgesamt nur einen geringen Beitrag zum Systemverhalten leistet [18].

2.3 Minimale Energie

Eine weitere Möglichkeit zur Maßdefinition ergibt sich, wenn für die Quantifizierung der Steuerbarkeit davon ausgegangen wird, dass ein Zustand $\mathbf{x_1}$ besser steuerbar ist als ein Zustand $\mathbf{x}_2$, wenn für die Überführung nach $\mathbf{0}$ weniger Steuerenergie notwendig ist. Für die Steuerenergie gilt

$$W(t_1, t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Durch die Wahl

$$u(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T(t-t_0)}\mathbf{Q}_S^{-1}(t_1, t_0)\mathbf{x}_0 \tag{15}$$

mit der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T(e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)})^T\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

kann ein beliebiger Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ mit der minimal notwendigen Energie W_S in den Zustand $\mathbf{0}$ überführt werden. Für ein steuerbares System gilt für die minimale Steuerenergie die Beziehung

$$W_S(t_1, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T\mathbf{Q}_S^{-1}(t_1, t_0)\mathbf{x}_0. \tag{17}$$

2.3.1 Steuerbarkeitsmaße

KALMAN schlägt als Maß für die „Güte“ der Steuerbarkeit die Spur oder die Determinante der Matrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$ vor. Die Spur gibt den Mittelwert der minimal notwendige Steuerenergie an, um einen Anfandswert $||\mathbf{x}_0|| = 1$ nach Null zu überführen. Die Determinante gibt Auskunft über das Volumen in dem Anfangszustände liegen, die mit

einer bestimmten maximalen Energie nach Null gebracht werden können [13].

Die von Benninger und Rivoir in [1] definierten Maße benutzt die Beziehung (17). Die Idee besteht darin die Energie W_S vorzugeben und die zugehörigen Auslenkungen einer Zustandsvariablen zu untersuchen. Die Menge aller Zustände die mit vorgegebenen W_S in den Ursprung überführt werden können, entspricht einem Hyperellipsoid, dessen Form und Lage im Zustandsraum von W_S bestimmt wird.
Für $W_S = 1$ dient als Maß für die Steuerbarkeit der Zustandsvariablen x_f der Abstand zwischen den Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt des Ellipsoids mit der positiven x_f-Achse, der durch

$$m_f = [(\mathbf{Q}_S^{-1})_{ff}]^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

mit $(\mathbf{Q}_S^{-1})_{ff}$ den f-ten Diagonalelement der Matrix $\mathbf{Q}_S^{-1}$, berechnet werden kann.
Ein Weiteres in [1] eingeführtes Maß beschreibt die Beeinflußbarkeit einer Zustandsvariable, für dessen Bestimmung die maximale Auslenkung der f-te Komponente dient und durch

$$v_f = [(\mathbf{Q}_S)_{ff}]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

berechnet wird (vgl. Abbildung 2).

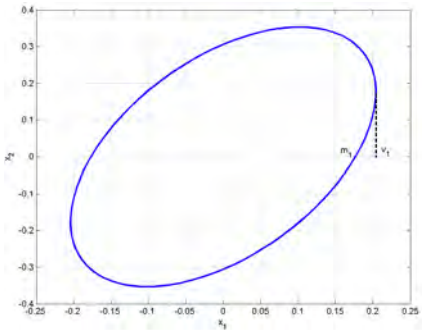


Abbildung 2: Bestimmung der Maßzahlen nach Benninger

Das Steuerbarkeitsmaß gibt demnach die größtmögliche Auslenkung auf der x_f-Achse an, während das Beeinflußbarkeitsmaß angibt, wie weit die f-te Komponente ausgelenkt werden kann, wenn auf die übrigen Komponenten keine Rücksicht genommen wird.
Wenn mindestens eine Zustandsvariable nicht steuerbar ist, ist die Gramsche Matrix singulär. Um die Steuerbarkeitsmaße der übrigen Zustandsvariablen zu berechnen, muss in diesem Fall bei der Ermittlung der Inversen auf die Pseudoinverse zurückgegriffen werden.

3 Vergleich der Maße

Die Maße sollen bezüglich der im Folgenden angeführten Forderungen miteinander verglichen werden:

- Unabhängigkeit von Koordinatentransformationen
  Eine Maßzahl soll für jedes äquivalente koordinatentransformierte System das gleiche Ergebnis liefern.

- Unabhängigkeit von der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren
  Da die Links- bzw. Rechts-Eigenvektoren einer Matrix nicht eindeutig sind, ist auch die Modalform eines Systems nicht eindeutig. Die Maßzahlen sollen aber auch in diesem Fall unabhängig von der Transformation in die Modalform das gleiche Ergebnis liefern.

- Konsistenz mit der Definition nach KALMAN
  Das bedeutet, dass das Steuerbarkeitsmaß Null wird, wenn das System die Steuerbarkeit verliert.

- Stetigkeit
  Bei nichtlinearen Systemen sollen linearisierte Modelle, deren Arbeitspunkte direkt neben einander liegen, zu ähnlichen Maßzahlen führen.

- Physikalische Interpretierbarkeit
  Es soll möglich sein anhand der Maßzahlen direkt auf die Steuerbarkeit der realen nichttransformierten Zustandsvariablen zu schließen.

3.1 Überprüfung der Forderungen

Die Maße a nach Konno, κ nach Lückel und Müller und κ_s nach Litz sind invariant gegenüger einer orthogonalen Zustandstransformation. Alle übrigen modalen Maße weisen einen Unabhängigkeit gegenüber regulären Zustandstransformationen auf. Bei dem Steuer- und Beeinflußbarbarkeitsmaß nach Benninger kann aus methodischen Gründen keine Invarianz gegenüber Transformationen gefordert werden, da in diesem Fall eine Untersuchung der Steuerbarkeit der Zustandsvariablen erfolgt.
Das Regelbarkeitsmaß, die Polempfindlichkeitsmaße und die Dominazmaße sind auf Grund der Produktbildung $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{C}\mathbf{X}_R\mathbf{X}_L\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B}$ und die Steuerbarkeitsmaße κ und κ_s sind wegen der Normierung mit $\mathbf{X}_L$ invariant gegenüber der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren. Für die Bestimmung der Maße nach Benninger und Rivoir m und v muss die Gramsche Matrix berechnet werden. Hierfür nutzt Benninger die Modalform, die eine analytische Berechnung der Gramschen Matrix ermöglicht, aber nicht invariant gegenüber der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren ist.
Die Forderungen nach Konsistenz und Stetigkeit sollen anhand von zwei einfachen Beispielen überprüft werden.

Beispiel 1: Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = \alpha$ und $\lambda_2 = -2$. Durch Betrachten der Determinante der Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_u$

$$|\mathbf{S}_u| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(\alpha + 3) \tag{20}$$

kann festgestellt werden, dass das System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ für $\alpha = -3$ nicht steuerbar ist.
Der Parameter α soll in diesem Beispiel von -5,5 bis 1,5 variiert werden. Abbildung 3 zeigt die Steuerbarkeitsmaße κ nach Litz und κ_s nach Lückel und Müller. Beide Maße für den Eigenwert λ_1 sind für $\alpha = -3$ gleich 0 und geben somit, wie auch alle übrigen Maße, den Steuerbarkeitsverlust korrekt wieder. Der Term $e^{-2Re\{\lambda_k\}}$ in κ_s bewirkt eine

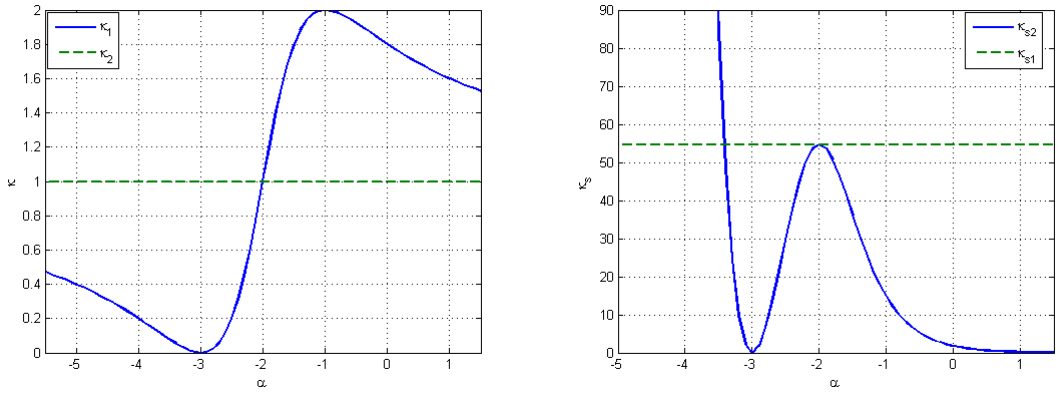


Abbildung 3: Steuerbarkeitsmaß κ nach Litz und κ_s nach Lückel und Müller

Verkopplung der Steuerbarkeit mit der Stabilität des betrachteten Eigenwertes. Dies führt, wie in Abbildung 3 zu sehen, zu Verzerrungen des Steuerbarkeitsmaßes. Für $\alpha < -3$ steigt das Maß sehr rasch an und strebt für positive Werte von α gegen 0. Im Allgemeinen ist eine Verkopplung zwischen Steuerbarkeit und Stabilität nicht wünschenswert, da diese beiden Systemeigenschaften unabhängig von einander sind.
Das System hat an der Stelle $\alpha = -2$ einen doppelten Eigenwert, der wie in Abbildung 4 beispielhaft für das Maß a nach Konno dargestellt, zu einer Unstetigkeitsstelle führt. Die Unstetigkeit bei mehrfachen Eigenwerten zeigen all die Maße, die auf der Modalform bzw. den Kriterium von Gilbert fußen, da dieses nur für den Fall einfacher Eigenwerte definiert ist. Das in Abbildung 4 dargestellte relative Polempfindlichkeits-

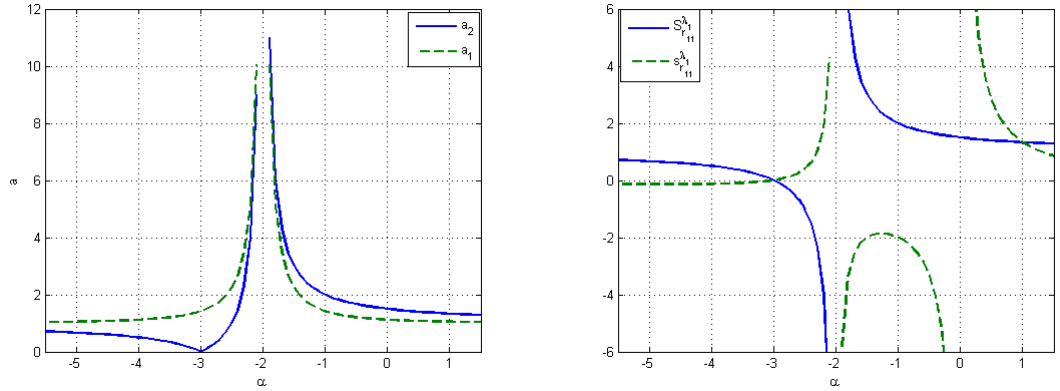


Abbildung 4: Steuerbarkeitsmaß a nach Konno und Polempfindlichkeitsmaße S und s nach Litz

maß $s_{r11}^{\lambda_1}$ zeigt an der Stelle $\alpha = 0$ eine weitere Unstetigkeitsstelle, die alle die Maße zeigen, die durch den Eigenwert dividiert werden. Die Unstetigkeitsstellen führen dazu, dass die Maße in der Nähe dieser Stellen sehr hohe Werte annehmen, was fälschlicherweise als gute Steuerbarkeit interpretiert werden kann.

Beispiel 2: Gegeben sei das in Modalform vorliegende System

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1+\alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -1 + \alpha$. Für $\alpha = 0$ ist das System nicht steuerbar. Beide Zustandsvariablen können zwar über den Stelleingang $\mathbf{u}$ beeinflußt werden, aber es kann nicht jeder beliebige Zustand erreicht werden, da die beiden entkoppelten Teilsysteme $G_k(s) = \frac{1}{s+1}$ identsch sind und somit das gleiche dynamische Verhalten aufweisen.
Diesen Sachverhalt geben nur die in Abbildung 5 dargestellten Steuer- und Beeinflußbarkeitsmaße m und v nach Benninger korrekt wieder. Das Steuerbarkeitsmaß m zeigt an der Stelle $\alpha = 0$ den Steuerbarkeitsverlust an und das Beeinfusbarkeitsmaß v zeigt, dass das System im betrachteten Intervall $\alpha \in [-0,5\ 0,5]$ beeinflußbar bleibt.
Da das System in Modalform vorliegt, erhält man von α unabhängige Eigenvektoren. Daher sind auch die modalen Maße, die nicht von λ abhängig sind, konstant und geben somit den Steuerbarkeitsverlust bei $\alpha = 0$ nicht wieder. Für dieses Beispiel sind alle auf der Modalform basierenden Maße nicht konsistent zu den KALMANschen Begriffen. Da die Maße gerade im Falle innerer Verkopplungen falsch liegen, liegt der Verdacht nahe, dass nicht die Steuerbarkeit bewertet wird, sondern Aussagen über die Beeinflußbarkeit getroffen werden [1].

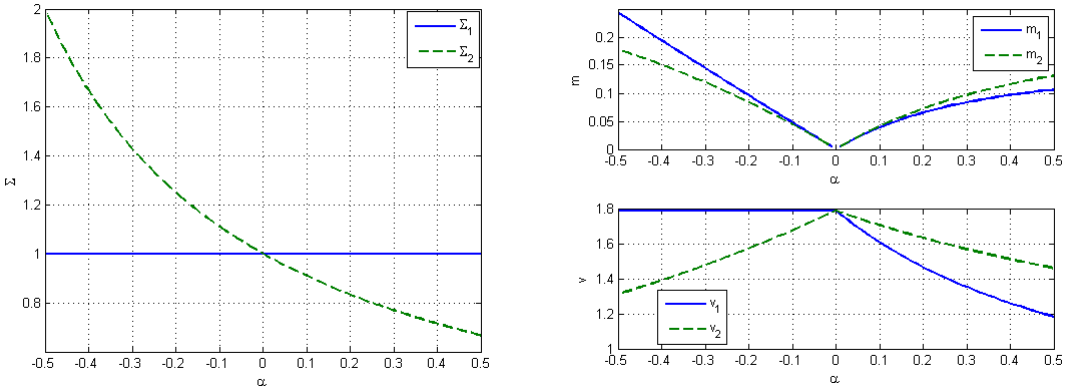


Abbildung 5: Das Summenmaß Σ nach Litz als Beispiel eines nicht konsistenten Maßes (links) und das konsistente Maß m nach Benninger (rechts)

4 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden werden für die Beispiele „Wagen mit Stab“ , „Hubmagnet“ und „Doppelpendel“ Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße bestimmt. Es wird untersucht, welches der Maße im Falle von konkreten Anwendungsbeispielen zuverlässige Ergebnisse liefert.

4.1 Wagen mit Stab

Als erstes Beispiel sollen die Steuerbarkeitsmaße an einem sehr einfachen Modell, des in Abbildung 6 dargestellten Wagens mit Stab, untersucht werden. Aus dem 2. Newtonschen Axiom erhält man die Bewegungsgleichung des Wagens

$$(M+m)\ddot{x} = F + ml\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - ml\ddot{\varphi}\cos\varphi \qquad (21)$$

und für die Bewegung des Stabes die Differentialgleichung

$$\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} = g\sin\varphi. \qquad (22)$$

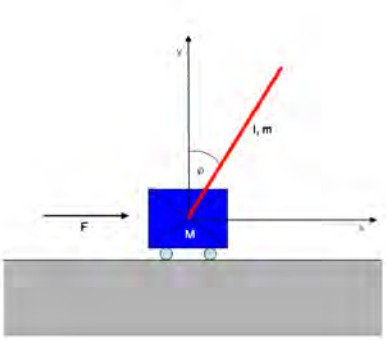


Abbildung 6: Wagen mit Stab

Mit $l = 1$, $g = 10$ und der Annahme, dass $m << M$ und somit vernachlässigt werden kann, ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= F \\ \ddot{\varphi} &= 10\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (23)$$

Durch die Wahl der Zustandsvariablen $x_1 := \varphi$, $x_2 := \dot{\varphi}$ und $u := \frac{M}{F}$ erhält man das Zustandsraummodell der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= 10\sin x_1 - u\cos x_1 \end{aligned} \qquad (24)$$

mit den Ruhelagen: $x_{2,R} = 0$, $u_R = 10\frac{\sin x_{1,R}}{\cos x_{1,R}}$ für beliebige $x_{1,R}$. Für die Linearisierung des Systems werden die Jacobi Matrizen in der Ruhelage

$$\Delta\mathbf{A} := \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10\cos x_{1,R} + u_R \sin x_{1,R} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{10}{\cos x_{1,R}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (25a)$$

$$\Delta\mathbf{b} := \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_{1,R} \end{bmatrix} \qquad (25b)$$

berechnet. Im Folgenden werden die Steuerbarkeitsmaße des linearisierten Modells im Intervall $x_{1,R} \in [-\pi, \pi]$ betrachtet. Die Matrix $\Delta\mathbf{A}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{10}{\cos x_{1,R}}}$, die für $x_{1,R} = \pm\frac{\pi}{2}$ nicht definiert sind. Ist $x_{1,R} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nimmt der Cosinus positive Werte an, weshalb die Matrix $\Delta\mathbf{A}$ zwei reelle Eigenwerte besitzt, während im restlichen Intervall der Cosinus negativ ist und die Matrix somit ein rein imaginäres Eigenwertpaar besitzt. Es ist leicht zu sehen, dass das System für $x_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ nicht steuerbar ist, da an diesen Stellen $\Delta\mathbf{b}$ zum Nullvektor wird.

Alle modalen Maße, mit Ausnahme des Steuerbarkeitsmaßes κ_s nach Lückel und Müller, liefern einen recht ähnlichen Verlauf und zeigen den Verlust der Steuerbarkeit korrekt an. In Abblidung 7 ist beispielhaft das Ergebnis für das Steuerbarkeitsmaß κ nach

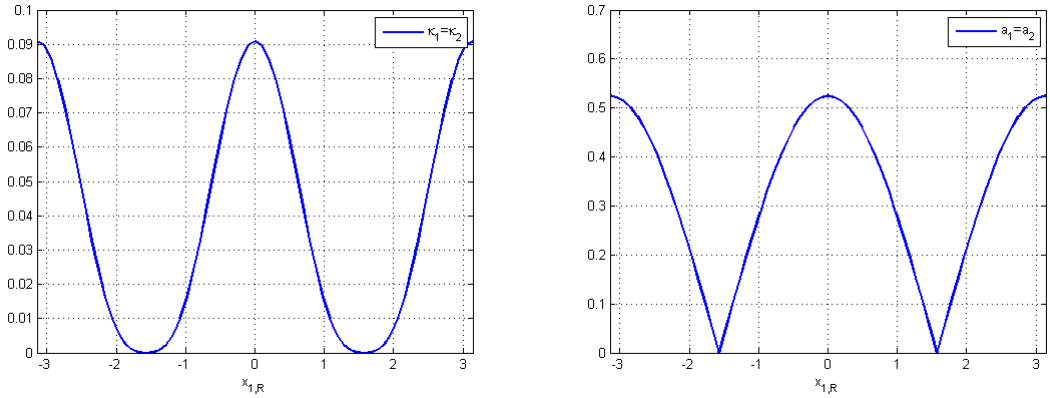


Abbildung 7: Sterubarkeitsmaße κ und a für verschieden Stabpositionen

Litz und a nach Konno dargestellt. Die Maße liefern für konjugiert komplexe Eigenwertpaare den gleichen Wert, was physikalisch sinnvoll erscheint, da ein solches Paar stets einer pysikalischen Eigenschaft zugeordnet werden kann.
Da die Realteile der Eigenwerte der Matrix $\Delta\mathbf{A}$ für $x_{1,R} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ betragsmäßig sehr hohe Werte annehmen, während im Rest des untersuchten Intervalls diese gleich Null sind, liefern die Steuerbarkeitsmaße κ_s auf Grund der Multiplikation mit $e^{-2Re\{\lambda\}}$ unbrauchbare Ergebnisse.
Das Steuerbarkeitsmaß von Benninger zeigt an, dass die Zustandsvariable $x_2 = \dot{\varphi}$ besser steuerbar ist als $x_1 = \varphi$, was rein intuitv nicht unmittelbar erkennbar ist.

4.2 Hubmagnet

Als zweites Beispiel sollen die Steuerbarkeitsmaße des in Abbildung 8 dargestellten Hubmagneten für verschiedene Kugelmassen untersucht werden. Für den elektrischen Kreis gilt die Differentialgleichung

$$u = Ri + \frac{d}{dt}(Li) \tag{26}$$

und für die Bewegung der Kugel in vertikale Richtung

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dy}. \tag{27}$$

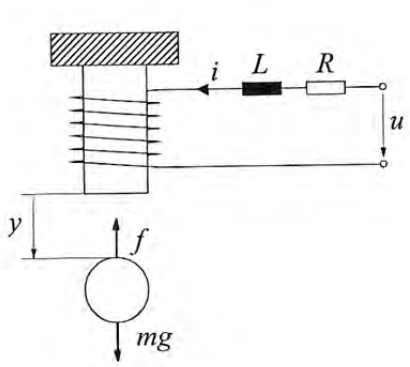


Abbildung 8: Hubmagnet

Mit $\mathbf{x} := \left[y, \frac{dy}{dt}, i\right]^T$ als Zustandsvektor erhält man das nichtlineare mathematische Modell

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{c{x_3}^2}{m{x_1}^2} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Rx_3}{L} + \frac{2cx_2x_3}{Lx_1} + \frac{u}{L} \end{aligned} \tag{28}$$

mit $c = \frac{L_R y_R}{2}$. Für die Ruhelage gilt $\mathbf{x}_R = \left[x_{1,R}, 0, x_{1,R}\sqrt{\frac{mg}{c}}\right]^T$ und $u_R = Rx_{1,R}\sqrt{\frac{mg}{c}}$. Durch Linearsierung um einen Arbeitspunkt erhält man analog wie im vorigen Beispiel die Systemmatrizen

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{y_R} & 0 & -\frac{2}{y_R}\sqrt{\frac{cg}{m}} \\ 0 & \frac{2}{Ly_R}\sqrt{cmg} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Im Folgenden wird die Änderung der Steuerbarkeit durch die Variation der Kugelmasse vom 0,01 bis 0,1 kg betrachtet.

Intuitiv kann man sich leicht vorstellen, dass bei größer werdender Masse der Kugel die Steuerbarkeit abnimmt, was auch von allen modalen Maßen angezeigt wird. Im untersuchten Intervall hat die Matrix $\Delta\mathbf{A}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2} \approx \pm 38$ und $\lambda_3 \approx -17,5$. Die Steuerbarkeitsmaße a nach Konno und κ nach Litz zeigen, dass das zum Eigenwert λ_3 gehörende Maß am besten steuerbar ist. Auch die Domianz-, Regelbarkeitsmaße und Polempfindlichkeitsmaße liefern für diesen Eigenwert die größten Werte. Betrachtet man κ_s so ist das zu $\lambda_2 = -38,8$ gehörige Maß am besten steuerbar, was auch hier wieder an der Verkopplung zwischen Steuerbarkeit und Stabilität liegt. Für dieses Beispiel ist es nicht möglich die auf die Eigenwerte bezogenen Modalmaße einer physikalischen Zustandsvariable zuzuordnen.
Erst mit Hilfe des Steuerbarkeitsmaßes m nach Benninger kann festgestellt werden, dass die Zustandsvariable $x_3 = i$ am besten steuerbar ist. Diese kann dadurch erklärt werden, dass i direkt über u beeinflußt werden kann, während die Änderung von y und $\dot{y}$ indirekt über den Spulenstrom steuerbar ist. Als Beispiel für die Ergebnisse sind in Abbildung 9 das Steuerbarkeitsmaß a nach Konno und das Steuerbarkeitsmaß m nach Benniger dargestellt.

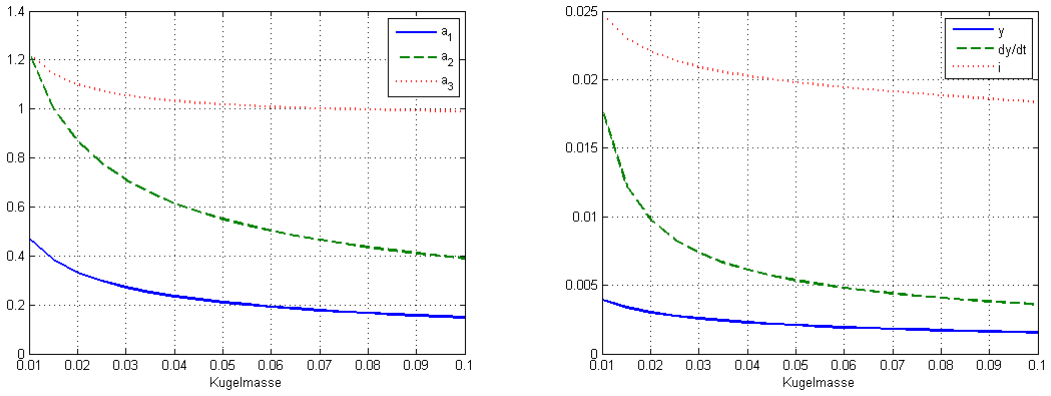


Abbildung 9: Steuerbarkeitsmaße a nach Konno und m nach Benninger für unterschiedliche Kugelpositionen

4.3 Doppelpendel

Zwei Stäbe sind gemäß Abbildung 10 gelenkig und reibungsfrei auf der Masse m_3 gelagert, welche durch eine horizontale Kraft bewegt werden kann. Die Bewegung wird durch eine Feder, deren Kraft proportional zur Längenänderung wirkt, und durch viskose Reibung beeinflußt. Die Bewegungsgleichungen wurden mit Hilfe der Langrange Gleichungen zweiter Art ermittelt.

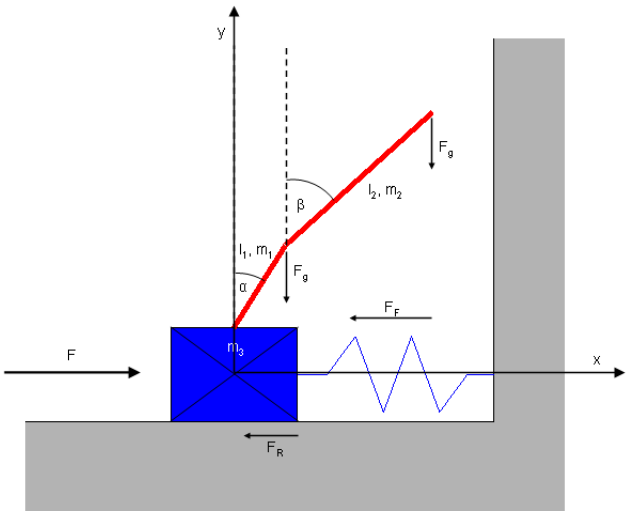


Abbildung 10: Doppelpendel

Durch Linearisierung um die instabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}^T$ und durch Einführen der Konstanten
$K_1 = (3m_2m_3 + m_1m_2 + 4{m_1}^2 + 16m_1m_3)$,
$K_2 = 5m_1m_2 + 4{m_1}^2 + {m_2}^2$,
$K_3 = 3m_2m_3 + 4m_1m_3 + m_1m_2 + {m_1}^2$ und
$K_4 = -3\,m_2\,m_3 - m_1\,m_2 - 4\,{m_1}^2 - 16\,m_1\,m_3$
können die Systemmatrizen wie folgt angeschrieben werden:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3g(K_2+4m_2m_3+4m_1m_3)}{l_1K_1} & -\frac{9m_3m_2g}{l_1K_1} & \frac{3c(4m_1+m_2)}{l_1K_1} & 0 & 0 & -\frac{3k(4m_1+m_2)}{l_1K_1} \\ -\frac{9m_3g(m_2+m_1)}{l_2K_1} & \frac{3gK_3}{l_2K_1} & -\frac{3m_1c}{l_2K_1} & 0 & 0 & -\frac{3m_1k}{l_2K_1} \\ \frac{3gK_2}{K_1} & \frac{3m_1m_2g}{K_1} & -\frac{c(16m_1+3m_2)}{K_1} & 0 & 0 & -\frac{k(16m_1+3m_2)}{K_1} \end{bmatrix} \tag{30a}$$

$$\Delta\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3(-m_2-4m_1)}{l_1K_4} \\ -\frac{3m_1}{l_2K_4} \\ -\frac{16m_1+3m_2}{K_4} \end{bmatrix} \tag{30b}$$

mit der Federkonstante c und dem Reibungskoeffizienten k.

Für dieses Beispiel werden im folgenden die Beobachtbarkeitsmaße für verschiedene „Sensorpositionen“ berechnet.
Für diesen Versuch ist die Ausgangsmatrix $\mathbf{C}$ gleich dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ der Sensorposition

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} q_3 - l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_2) \end{bmatrix}, \tag{31}$$

der um die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ linearisiert wird. Somit erhält man

$$\Delta\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos(q_1) & -l_2 \cos(q_2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin(q_1) & -l_2 \sin(q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Die Variablen l_1 und l_2 werden nun so verändert, dass sich die Position des Sensors entlang der beiden Stäbe nach oben bewegt. Aussagen über die Beobachtbarkeit liefern auf Grund der Dualität die Steuerbarkeitsmaße von $(\Delta\mathbf{A}', \Delta\mathbf{C}')$.

Die modalen Beobachtbarkeitsmaße liefern für jeden der 3 konjugiert komplexen Eigenwerte je ein Maß. Für dieses Beispiel sind die Ergebnisse des Maßes κ und Σ nach Litz dargestellt. Auf Grund der Ergebnisse kann angenommen werden, dass die Ma-

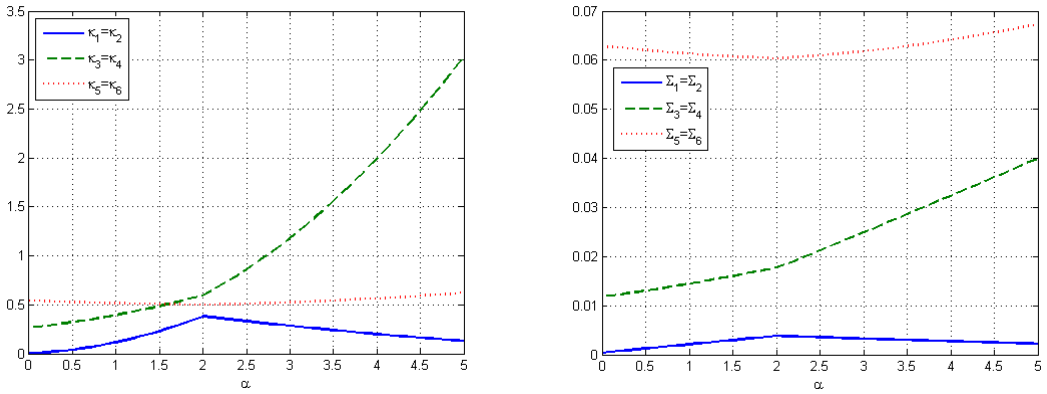


Abbildung 11: Beobachtbarkeitsmaße κ und Σ für unterschiedliche Sensorpositionen

ße $\kappa_{1,2}$ bzw. $\Sigma_{1,2}$ die Beobachtbarkeit des Stabes 1 mit der Länge $l_1 = 2$ beschreiben. Das Maß nimmt bis zur Spitze des Stabes bei $\alpha = 2$ zu und nimmt dann wieder ab je weiter sich der „Sensor“ von Stab 1 entfernt. Die Maße $\kappa_{3,4}$ bzw. $\Sigma_{3,4}$ messen die Beobachtbarkeit des 2. Stabes. Die Steigung des Maßes ist ab der Stelle $\alpha > 2$ d.h. ab der Stelle ab der sich der Sensor auf Stab 2 befindet, größer als für $\alpha \in [0, 2]$.
Das Steuerbarkeitsmaß m nach Benninger liefert für dieses Beispiel keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Der Grund dafür sind numerische Probleme bei der Invertierung der Gramschen Matrix $\mathbf{Q}$, da diese nahe der Singulärität ist. Diese ist durch den kleinsten Singulärwert der Matrix $\mathbf{Q}$ erkennbar der für unterschiedliche Sensorpositionen im Bereich von 10^{-14} liegt.

5 Zusammenfasung und Ausblick

Die in dieser Arbeit überprüften Eigenschaften der Maße sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1: Vergleich der Modalmaße

	Invariant gegenüber			
	Mehrd. der EV	Koordinatentrans.	Konsistenz	Stetigkeit
Konno a (Gl. 4)	x	orthogonal	x	x
Lückel, Müller κ_s (Gl. 5)	✓	orthogonal	x	x
Litz κ (Gl. 6)	✓	orthogonal	x	x
Hippe ϱ (Gl. 9)	✓	regulär	x	x
Benninger m (Gl. 18)	x	–	✓	✓*
Benninger v (Gl. 19)	x	–	–	✓*
Litz:				
abs. Polempf. S (Gl. 10)	✓	regulär	x	x
rel. Polempf. s (Gl. 11)	✓	regulär	x	x
Maximalmaß M (Gl. 13)	✓	regulär	x	x
Summenmaß Σ (Gl. 13)	✓	regulär	x	x

* für linear unabhängige Eigenvektoren

Im Allgemeinen ist zu sagen, dass alle Maße Vor- und Nachteile besitzen und dass sie bei bestimmten Systemen Schwierigkeiten haben oder falsche Ergebnisse liefern können.
Die Modalmaße sollten nur im Fall von einfachen Eigenwerten angewendet werden, da sie bei einem Steuerbarkeitsverlust auf Grund von inneren Verkopplungen hervorgerufen durch einen mehrfachen Eigenwert keine konsistenten Ergebnisse liefern. Die fehlende Konsistenz macht sich jedoch auch bei nahe aneinander liegenden Eigenwerten bemerkbar, da in diesem Fall hohe Maßzahlen eine gute Steuerbarkeit vortäuschen. Es lässt sich leider keine generelle Aussage über den notwendigen Abstand der Eigenwerte treffen, ab dem die Inkonsistenz der Maße keinen Einfluß mehr hat (vgl. Abschnitt 3 Beispiel 1).
Das Maß κ_s nach Lückel und Müller erweist sich auf Grund der Kopplung zwischen Steuerbarkeit und Stabilität als nicht sinnvoll.
Die Polempfindlichkeitsmaße S, s nach Litz und das Regelbarkeitsmaß ρ nach Hippe liefern pro Eigenwert für jedes Eingangs-Ausgangspaar einen Wert, dadurch erhält man mn Maßzahlen. Dies kann vor allem bei Mehrgrößensystemen höherer Ordnung schnell sehr unübersichtlich werden.
Das Steuerbarkeitsmaß nach Benninger ist von den hier vorgestellten Maßen das Einzige, welches konsistent zu den KALMANschen Begriffen ist. Der Nachteil dieses Maßes ist, die im Vergleich zu den Modalmaßen aufwendige Berechnung, da die Gramsche Matrix bestimmt und invertiert werden muss. Da diese mit Hilfe der Modalform

berechnet wird, sind die Maßzahlen nicht unabhängig von der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren der Systemmatrix **A** und die Matrix kann nur im Fall linear unabhängiger Eigenvektoren berechnet werden. Das Invertieren der Gramschen Matrix **Q** ist vor allem für Systeme höherer Ordnung aufwendig und die Maßzahlen liefern keine zufriedenstellenden Ergebnisse, wenn die Matrix „nahezu singulär“ ist. Der Vorteil dieses Maßes ist, dass direkt die Steuerbarkeit der physikalischen Zustandsvariablen bewertet wird. Die übrigen Maße treffen Aussagen im Modalraum, wodurch aus den erhaltenen Ergebnissen nicht immer auf die Steuerbarkeit der physikalischen Größen geschlossen werden kann. Diese Maße können jedoch wie am Beispiel Doppelpendel zu sehen einen guten Einblick in die einzelnen Systemteile liefern.

5.1 Distanzmaße

An dieser Stelle soll eine weitere interessante und wichtige Klasse von Maßzahlen kurz erläutert werden. Für eine zuverlässige Beurteilung der Steuerbarkeit würde 1981 von Paige die Maßzahl μ eingeführt, da die vorhandenen, einfachen Kriterien (z.B. KALMAN, HAUTUS) auf Grund der numerischen Auswertung in manchen Fällen falsche Aussagen liefern. Dieses Maß liefert eine Aussage über die „Größe“ der Störung, die notwendig ist damit ein steuerbares System nicht steuerbar wird. Ist μ größer als ein bestimmter Wert μ_0, dann ist das System mit Sicherheit steuerbar. Der Wert μ_0 kann aus den Unsicherheiten der Systemmatrizen und den numerischen Fehlern bei der Bestimmung von μ berechnet werden (siehe [17]).
Das Maß μ kann als der kleinste Abstand zu einem nicht steuerbaren System interpretiert werden und wird aus diesem Grund als Distanzmaß bezeichnet. Die Bestimmung von μ erfordert das Lösen einer nichtlinearen, nicht glatten und nicht konvexen Optimierungsaufgabe [6, 7]. Im Laufe der vergangenen Jahre wurden verschiedene Algorithmen zur Lösung dieser Aufgabe entwickelt [4, 10, 19]. Um das Optimierungsproblem zu umgehen wurden eine Vielzahl unterschiedlichster Ansätze vorgestellt, die obere und untere Schranken für die zu bestimmende Größe μ liefern [2, 3, 5, 8, 9, 11].
Durch die Bestimmung von μ kann, im Gegensatz zu den Modalmaßen, kein Einblick ins innere des Systems erfolgen, dafür liefert dieses Maß einen Eindruck über das Steuerbarkeitsverhalten des Gesamtsystems. Trotz des hohen rechnerischen Aufwands liefern diese Maßzahl eine vielversprechende Möglichkeit der Steuerbarkeitsbeurteilung. Auch hier ist einer eingehende Untersuchung der verschiedenen Ansätze nötig, um die Effizienz und Anwendbarkeit der Methoden zu prüfen.

Literatur

[1] N. Benninger and J. Rivoir. Ein neues konsistentes Maß zur Beurteilung der Steuerbarkeit in linearen, zeitinvarianten Systemen. *Automatisierungstechnik*, 34, 1986.

[2] D. L. Boley. Estimating distance to uncontrollability - upper and lower bounds. *Signal Processing, Scattering and Operator Theory, and Numerical Methods, MTNS-89*, pages 373–380, 1990.

[3] D. L. Boley and W.S. Lu. Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31:249–251, 1986.

[4] J. V. Burke, A. S. Lewis, and M. L. Overton. Pseudospectral components and the distance to uncontrollability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 26(2):350 – 361, 2005.

[5] B. N. Datta. *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Elsevier Academic Press, 2004.

[6] R. Eising. Between controllable and uncontrollable. *System and Control Letters*, 4: 263–264, 1984.

[7] R. Eising. The distance between a system and the set of uncontrollable systems. In ed. Beer-Sheva, P. A. Fuhrmann, editor, *Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 303–314, London, 1984. Springer-Verlag.

[8] P. Gahinet. Distance to the nearest uncontrollable pair and algebraic riccati equation. In *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, pages 273–278, 1990.

[9] M. Goa and M. Neumann. A global minimum search algorithm for estimating the distance to uncontrollability. *Linear Algebra Appl.*, 188/189:305–350, 1993.

[10] M. Gu. New methods for estimating the distance to uncontrollability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21(3):989–1003, 2000.

[11] C. He. Estimating the distance to uncontrollability: A fast method and a slow one. *Syst. Control Lett.*, 26(4):275–281, 1995.

[12] P. Hippe. Ein modales Regelbarkeitsmaß für lineare, zeitinvariante dynamische Systeme. *Regelungstechnik*, 30(3):96 – 101, 1982.

[13] R. E. Kalman, Y.C. Ho, and K. S. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to Differential Equations*, 1(2):189 – 213, 1963.

[14] J. Lückel and P. C. Müller. Analyse von Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Störbarkeitsstrukturen linearer, zeitinvarianter Systeme. *Regelungstechnik*, 23:163 – 171, 1975.

[15] L. Litz. Berechnung stabilisierender Ausgangsvektorrückführungen über Polempfindlichkeiten. *Regelungstechnik*, 29(12):434 – 440, 1981.

[16] L. Litz. Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz - Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege. *Regelungstechnik*, 31(5): 148 – 158, 1983.

[17] C.C. Paige. Properties of numerical algorithms related to computing controllability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26(1):130 – 138, 1981.

[18] B. Riege. Strukturmaße für dynamische Systeme. Technical Report 1, Uni Duisburg, 1998.

[19] M. Wicks and R. DeCarlo. Computing the distance to an uncontrollable system. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36:39–49, 1991.

Ein Multimodellansatz zur mengenbasierten Zustandsschätzung von dynamischen Systemen

Sylvia Horn, Klaus Janschek
Lehrstuhl für Automatisierungstechnik
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Technische Universität Dresden
sylvia.horn@tu-dresden.de, klaus.janschek@tu-dresden.de

Kurzfassung – Dieser Beitrag stellt ein neuartiges Filter zur Schätzung eines zeitvarianten, dynamischen Systems für den Fall vor, dass von den systemimmanenten Unsicherheiten (z.B. Eingangs- und Messstörungen, Modell- oder Anfangsfehler) einzig die amplitudenbegrenzten Schranken bekannt sind und damit als konvexe Mengen beschrieben werden können. Das vorgestellte Filter kombiniert verschiedene mengenbasierte Schätzalgorithmen in einem Multimodellansatz und erreicht dadurch eine Minimierung des Schätzgebietes sowie eine höhere Robustheit gegenüber Änderungen in den System- oder Betriebsparametern. Die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Filters wird anhand eines Problems aus dem Bereich der mobilen Robotik erläutert und anhand von Simulations- und Labortestläufen demonstriert.

1 Einleitung

Die Bestimmung von internen, nicht messbaren Zuständen eines nur unvollkommen bekannten, dynamischen Systems aus unsicheren Beobachtungen ist ein Standardproblem in vielen Bereichen. Im Allgemeinen wird eine stochastische Beschreibung der auftretenden systemimmanenten Unsicherheiten gewählt und ein (erweitertes oder *unscented*) Kalmanfilter zur Zustandsschätzung verwendet. Allerdings ist dieser Ansatz nur dann sinnvoll, wenn die auftretenden Unsicherheiten als hinreichend normalverteilt angenommen werden können.

In anderen Fällen, z.B. bei Modellierungs- und Quantisierungsfehlern oder bei der Angabe von geometrischen Toleranzen, bietet sich ein allgemeingültiger mengentheoretischer Ansatz an. Hier werden unter der Voraussetzung, dass die den Unsicherheiten zu Grunde liegenden Verteilungen unbekannt aber begrenzt sind, geometrische Eigenschaften der Unsicherheiten verwendet und diese als (nicht)konvexe Mengen beschrieben. In diesem Sinne kann auch von einem Einschlussgebiet gesprochen werden, das heißt der wahre Zustandsvektor liegt garantiert innerhalb der aus den fehlerbehafteten Systemgrößen geschätzten Zustandsmenge. Zur Beschreibung dieser Einschlussgebiete existieren bekannte Verfahren basierend auf konvexen, geometrischen Strukturen mit kompakten Beschreibungsmöglichkeiten, wie zum Beispiel Hyperquader, Parallelepipede – auch als Parallelotop bezeichnet – und Ellipsoide.

Die Hyperquaderbeschreibung [1] ist vor allem dann zweckmäßig, wenn anstatt der genauen Parameter der Unsicherheit nur eine obere und untere Schranke bekannt sind. Ein Beispiel hierfür sind Toleranzangaben von Sensorsystemen, deren Wirkprinzip nur unvollkommen bekannt ist. Einer der wesentlichen Nachteile der Hyperquaderbeschreibung ist jedoch der sogenannte „wrapping“ – Effekt, d.h., Aufblähen der Zustandsschätzung durch eine Drehung des Zustandsgebietes. Dieser Effekt kann mit Hilfe der Parallelepipedbeschreibung [2-4]

umgangen werden. Im Bereiche der mobilen Robotik wird das Verfahren zum Beispiel für einen Lokalisierungsalgorithmus basierend auf Winkelmessungen zu Landmarken benutzt [5]. Die Beschreibung der Zustandsmenge mittels Ellipsoiden [6, 7] umgeht ebenfalls den „wrapping“ – Effekt, verschiedene Anwendungen finden sich in [8, 9].

Es ist offensichtlich, dass mit Hilfe der verschiedenen Ansätze mehr oder minder gute Überschätzungen des realen Einschlussgebietes abhängig von der gegebenen Systemstruktur oder von veränderlichen, spezifischen Betriebsparametern gewonnen werden können. Zur Lösung dieses Problems wird in [10] ein neuer Multimodellansatz für ein mengenbasiertes Schätzfilter vorgestellt. Durch die Kombination der benannten mengenbasierten Verfahren kann in jedem Simulationsschritt ein Schätzgebiet mit minimalem Volumen berechnet werden. Ein wichtiger Schritt ist hierbei die Umschreibung von im Allgemeinen nichtkonvexen Mengen mit einfachen geometrischen Strukturen. Aktuelle Veröffentlichungen [11, 12] lösen dies mit der Umschreibung eines Hyperquaders um nichtkonvexe Mengen. Das neue Multimodellschätzfilter erweitert diesen Ansatz.

Die Eigenschaften des eingeführten Filters werden anhand einer praktischen Fragestellung aus dem Bereich der mobilen Robotik erläutert und mittels Simulations- und Labortestläufen demonstriert.

2 Problembeschreibung

Gegeben sei ein n-dimensionales nichtlineares zeitdiskretes System

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k\right) \tag{1}$$

die dazugehörige Messgleichung des Ausgangssignals

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{g}_m\left(\mathbf{x}_m\right) + \mathbf{v}_m \tag{2}$$

und die Messgleichung des Eingangssignals

$$\mathbf{u}_k^M = \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k . \tag{3}$$

Hier stellt $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ den nicht messbaren Zustandsvektor zum Zeitschritt k, $\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^m$ den Messvektor zum Zeitschritt m und $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ das fehlerbehaftet messbare Eingangssignal zum Zeitschritt k mit $\mathbf{f}_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dar. Der gemessene Eingangsvektor wird mit $\mathbf{u}_k^M \in \mathbb{R}^p$ bezeichnet. Die Abweichung zur sonst üblichen Darstellung des Eingangssignals wurde in Bezug zum betrachteten Anwendungsbeispiel – der Lokalisierung einer autonomen, mobilen Plattform – gewählt und repräsentiert die Messwerte der Odometrie.

Weiterhin wird angenommen, dass die Messwerte des Eingangs- (3) und Ausgangssignals (2) durch eine überlagerte Eingangsmessunsicherheit $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$ bzw. eine Ausgangsmess-unsicherheit $\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$ gestört sind. Der genaue Verlauf der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\mathbf{w}_k$ und $\mathbf{v}_m$ wird als unbekannt aber begrenzt angenommen. Die Grenzen können mit

$$^i\underline{\mathbf{e}}_k = \left[{}^i\mathbf{e}_k^-, {}^i\mathbf{e}_k^+\right], \quad i \in \{w, v\} \tag{4}$$

angegeben werden, wobei $^i\underline{\mathbf{e}}_k$ einen Intervallvektor zum Zeitschritt k mit der unteren Grenze $^i\mathbf{e}_k^-$ und der oberen Grenze $^i\underline{\mathbf{e}}_k^+$ darstellt.

Da der hier vorgestellte mengenbasierte Schätzalgorithmus ein lineares Systemmodell benötigt, wird das in (1) gegebene System unter zu Hilfenahme von (3) linearisiert. Es ergibt sich dabei das lineare, zeitvariante Zustandsmodell des Filters

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \underbrace{\left(\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k\right)}_{\mathbf{u}_k^M} \tag{5}$$

mit der zeitvarianten Zustandsmatrix $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der gleichfalls zeitvarianten Eingangsmatrix $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Gesucht ist nun eine Schätzung $\hat{\mathbf{x}}$ des wahren Zustandes $\mathbf{x}$ für jeden Zeitpunkt k anhand der aufgenommenen unsicheren Messungen ohne jedoch genauere Kenntnisse über die zugehörigen Störungen zu besitzen.

3 Mengenbasierte Zustandsbeschreibung

Konvexe Mengen können auf vielfältige Art und Weise beschrieben werden. Ausgewählte Verfahren zeichnen sich allerdings durch ihre kompakte Schreibweise und einfache Handhabung besonders aus. Dazu gehören zum einen die Beschreibungen mittels Hyperquadern und Parallelepipeden sowie mit Ellipsoiden.

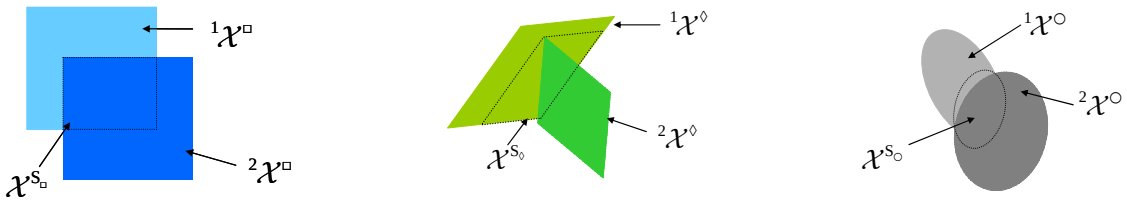
Hyperquaderbeschreibung. Ein Hyperquader (Bild 1a) ist ein n-dimensionaler Quader $\mathcal{X}^{\square} := \underline{\mathbf{x}}^{\square} = \left[\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+\right]$, dessen Kanten parallel zu den Achsen des orthogonalen Koordinatensystems des Zustandsraumes $\mathbb{R}^n$ liegen. Er wird mittels eines Intervallvektors $\underline{\mathbf{x}}^{\square}$ definiert. Das Volumen $V^{\square}$ des Hyperquaders berechnet sich zu

$$V^{\square}\left(\mathcal{X}^{\square}\right) := \prod_{j=1}^{n} \left| x_j^+ - x_j^- \right|,$$

wobei x_j^* hier das i-te Element des Vektors $\mathbf{x}^*$ bezeichnet.

Die Schnittmenge $\mathcal{X}^{S_{\square}}$ zweier überlappender Hyperquader ${}^1\mathcal{X}^{\square}$ und ${}^2\mathcal{X}^{\square}$ berechnet sich zu

$$\mathcal{X}^{S_{\square}} = \left[\max\left({}^1\mathbf{x}^-, {}^2\mathbf{x}^-\right), \min\left({}^1\mathbf{x}^+, {}^2\mathbf{x}^+\right)\right].$$



a) Hyperquaderbeschreibung b) Parallelepipedbeschreibung c) Ellipsoidbeschreibung

Bild 1 Darstellung der verschiedenen mengenbasierten Beschreibungsformen im 2-dimensionalen Raum inklusive der resultierenden Schnittmengen $\mathcal{X}^{S_{\times}}$ mit $\times \in [\square, \Diamond, \bigcirc]$

Parallelepipedbeschreibung. Ein Parallelepiped (Bild 1b) $\mathcal{X}^{\Diamond}$ wird durch einen Intervallvektor $\underline{\mathbf{x}}^{\Diamond}$ sowie eine reguläre $n\times n$ Matrix $\mathbf{T}$ mit $\mathcal{X}^{\Diamond} := \mathbf{T} \Diamond \underline{\mathbf{x}}^{\Diamond}$ beschrieben. Der Operator $\Diamond$ verdeutlicht hierbei keine klassische Vektor-Matrix-Multiplikation, sondern die Multiplikation der aus $n+1$ Eckpunkten des Intervallvektors $\underline{\mathbf{x}}^{\Diamond}$ gebildeten Matrix

$\mathbf{X}_{\square} = [\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_{n+1}]$ mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ des Parallelepipedes, so dass $\mathbf{X}_{\diamond} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}_{\square} \triangleq \mathcal{X}^{\diamond}$ gilt.

Das Volumen $V^{\diamond}$ von $\mathcal{X}^{\diamond}$ berechnet sich zu

$$V^{\diamond}\left(\mathcal{X}^{\diamond}\right) = |\det \mathbf{T}| V^{\square}\left(\underline{\mathbf{x}}^{\diamond}\right).$$

Als *Schnittparallelepiped* wird das Parallelepiped bezeichnet, welches die reale Schnittmenge von zwei sich überlappenden Parallelepipeden ${}^{1}\mathcal{X}^{\diamond}$ und ${}^{2}\mathcal{X}^{\diamond}$ mit minimalem Volumen umschreibt und dieselben Richtungsvektoren wie ${}^{1}\mathcal{X}^{\diamond}$ bzw. ${}^{2}\mathcal{X}^{\diamond}$ besitzt. Geometrisch ist dies einfach mit einer Kantenverschiebung zu lösen. Mathematisch kann dies mit

$${}^{1}\mathcal{X}^{S_{\diamond}} = {}^{1}\mathbf{T} \diamondsuit \left({}^{1}\underline{\mathbf{x}}^{\diamond} \cap \left({}^{1}\mathbf{T} \right)^{-1} {}^{2}\mathbf{T} \; {}^{2}\underline{\mathbf{x}}^{\diamond} \right)$$

beziehungsweise mit

$${}^{2}\mathcal{X}^{S_{\diamond}} = {}^{2}\mathbf{T} \diamondsuit \left({}^{2}\underline{\mathbf{x}}^{\diamond} \cap \left({}^{2}\mathbf{T} \right)^{-1} {}^{1}\mathbf{T} \; {}^{1}\underline{\mathbf{x}}^{\diamond} \right)$$

beschrieben werden.

Ellipsoidbeschreibung. Ein reales n-dimensionales Ellipsoid (Bild 1c) wird unter Verwendung seines Mittelpunktes $\breve{\mathbf{x}}$ und einer symmetrischen, positiv semidefiniten $n \times n$ Matrix $\mathbf{X}$ mit

$$\mathcal{X}^{\circ} := \left\{ \mathbf{x}^{\circ} : \left(\mathbf{x}^{\circ} - \breve{\mathbf{x}} \right)^{T} \mathbf{X} \left(\mathbf{x}^{\circ} - \breve{\mathbf{x}} \right) \leq 1 \right\}$$

beschrieben. Setzt man V_n als das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ergibt sich das Volumen von $\mathcal{X}^{\circ}$ zu

$$V^{\circ}\left(\mathcal{X}^{\circ}\right) = V_n \Big/ \sqrt{\det(\mathbf{X})}$$

Die Menge der Ellipsoide, welche die Schnittmenge von zwei sich überlappenden Ellipsoiden ${}^{1}\mathcal{X}^{\circ}$ und ${}^{2}\mathcal{X}^{\circ}$ umschreibt, kann mit

$$\mathcal{X}^{S_{\circ}} = \left\{ \mathbf{x}^{\circ} : (0.5 - \lambda) \left(\mathbf{x}^{\circ} - {}^{1}\breve{\mathbf{x}} \right)^{T} {}^{1}\mathbf{X} \left(\mathbf{x}^{\circ} - {}^{1}\breve{\mathbf{x}} \right) + (0.5 + \lambda) \left(\mathbf{x}^{\circ} - {}^{2}\breve{\mathbf{x}} \right)^{T} {}^{2}\mathbf{X} \left(\mathbf{x}^{\circ} - {}^{2}\breve{\mathbf{x}} \right) \leq 1 \right\}$$

angegeben werden [13], wobei $\lambda \in [-0.5, 0.5]$. Um eine möglichst enge Umschreibung zu erreichen, sollte λ so gewählt werden, dass $V^{\circ}\left(\mathcal{X}^{S_{\circ}}\right)$ minimiert wird. Zur Berechnung von λ können verschiedene Methoden in [7, 13] gefunden werden.

4 Ein Multimodellansatz zur mengenbasierte Zustandsschätzung

Ein wesentlicher Vorteil der mengenbasierten Zustandsschätzung im Gegensatz zur probabilistischen Ansätzen ist die so genannte *Einschlusssicherheit*, d.h. der wahre Wert gehört der geschätzten Menge garantiert an (unter den gemachten Voraussetzungen). Somit gibt das Volumen des geschätzten Gebietes Auskunft über die Schätzgüte eines Verfahrens. Ziel ist es deshalb, dieses Volumen möglichst minimal zu halten.

Bekannte Schwachstellen konventioneller mengenbasierter Ansätze sind die häufig *konservative Überschätzung* sowie die Abhängigkeit der *Schätzgüte* von gegebenen System- oder Betriebsparametern. Um diese Nachteile zu umgehen, wurde in [10] ein neues

mengenbasiertes Multimodellschätzfilter vorgestellt. Durch die Kombination der unterschiedlichen Eigenschaften der benannten mengenbasierten Schätzverfahren erlaubt dieser Ansatz eine exaktere Schätzung und eine höhere Robustheit gegenüber variierenden Parametern. Das eingeführte Schätzfilter – dargestellt in Bild 2 – lässt sich in zwei sequenzielle Teilschritte mit *Fusionsalgorithmen* aufspalten– in den *Vorhersage-* und den *Aktualisierungsschritt*.

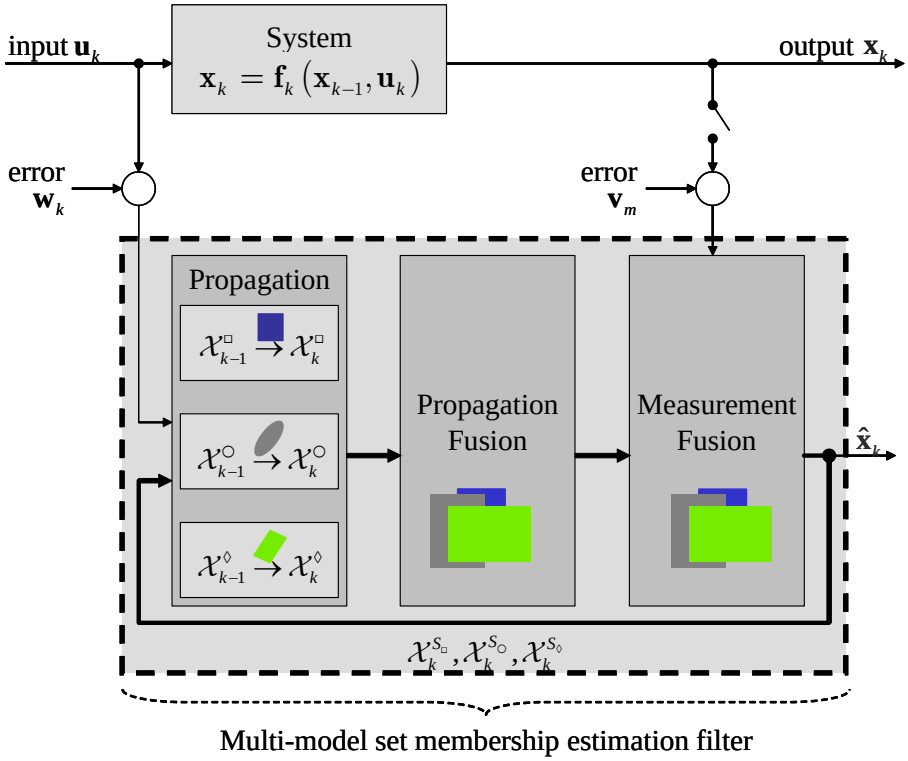


Bild 2 Blockdiagramm des mengenbasierten Multimodellschätzfilters

Vorhersageschritt. Im Vorhersageschritt wird für jedes der benannten mengenbasierten Verfahren (Hyperquader, Parallelepiped, Ellipsoid) und zu jedem Zeitpunkt kT_A, mit der Abtastzeit T_A und $k = 1, 2, \ldots$, ein neuer Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_k$ ausgehend von dem vorhergehenden Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ und dem gemessenen Systemeingang $\mathbf{u}_k^M$ berechnet. In Bild 2 ist dies mit $\mathcal{X}^i_{k-1} \to \mathcal{X}^i_k \quad i \in \{\square, \diamond, \bigcirc\}$ verdeutlicht. Jedes Verfahren nutzt hierbei für die Vorhersage das linearisierte Zustandsmodell (5), das gemessene Eingangssignal (3) und die Eingangsstörung $\mathbf{w}_k$ mit den gegebenen Grenzen ${}^{w}\underline{\mathbf{e}}_k$. Die Propagation erfolgt in den einzelnen Verfahren auf unterschiedliche Art wie folgt:

Hyperquaderverfahren: Unter Verwendung der aus (3) und (4) resultierenden Eingangsmenge $\mathcal{U}_k^{\square} := \underline{\mathbf{u}}_k^{\square} = \mathbf{u}_k^M + {}^{w}\underline{\mathbf{e}}_k$ ergibt sich der neue geschätzte Hyperquader zum Zeitpunkt k $\underline{\mathbf{x}}_k^{\square}$ aus $\mathcal{X}_k^{\square} := \underline{\mathbf{x}}_k^{\square} = \mathbf{A}_k \underline{\mathbf{x}}_{k-1}^{\square} + \mathbf{B}_k \underline{\mathbf{u}}_k^{\square}$.

Parallelepipedverfahren: Um die Zustandsmenge mit Hilfe dieses Verfahrens zu propagieren, kann die bereits gebildete Eingangsmenge $\mathcal{U}_k^{\Diamond} = \mathcal{U}_k^{\square}$ verwendet werden. Die neue Zustandsmenge $\mathcal{X}_k^{\Diamond} := \mathbf{T}_k \Diamond \hat{\mathbf{x}}_k^{\Diamond}$ kann somit aus $\underline{\mathbf{x}}_k^{\Diamond} = \left(\mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{T}_{k-1}\right)\underline{\mathbf{x}}_{k-1}^{\Diamond} + \mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{B}_k\underline{\mathbf{u}}_k^{\Diamond}$ und $\mathbf{T}_k = \mathbf{A}_k\,\mathbf{T}_{k-1}$ berechnet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass $\mathbf{T}_k$ stets regulär und gut konditioniert ist. Sollte diese Annahme nicht zutreffen, kann ein anderes Verfahren zur Berechnung der Transformationsmatrix – vorgestellt in [2]– verwendet werden.

Ellipsoidverfahren: Zur Berechnung der neuen Ellipsoidzustandsmenge $\mathcal{X}_k^{\bigcirc} := \left\{\mathbf{x}_k^{\bigcirc} : \left(\mathbf{x}_k^{\bigcirc} - \breve{\mathbf{x}}_k^{\bigcirc}\right)^T \mathbf{X}_k \left(\mathbf{x}_k^{\bigcirc} - \breve{\mathbf{x}}_k^{\bigcirc}\right)^T \le 1\right\}$ muss die Eingangsmenge $\mathcal{U}_k^{\square}$ mit einem Ellipsoid $\mathcal{U}_k^{\bigcirc} := \left\{\mathbf{u}_k^{\bigcirc} : \left(\mathbf{u}_k^{\bigcirc} - \breve{\mathbf{u}}_k^{\bigcirc}\right)^T \mathbf{U}_k \left(\mathbf{u}_k^{\bigcirc} - \breve{\mathbf{u}}_k^{\bigcirc}\right) \le 1\right\}$ umschrieben werden. Dann berechnet sich der neue Mittelpunkt von $\mathcal{X}_k^{\bigcirc}$ zu $\breve{\mathbf{x}}_k^{\bigcirc} = \mathbf{A}_k\breve{\mathbf{x}}_{k-1}^{\bigcirc} + \mathbf{B}_k\breve{\mathbf{u}}_k^{\bigcirc}$. Zur Berechnung der neuen Definitionsmatrix $\mathbf{X}_k$ wird ein in [13] vorgeschlagener Algorithmus genutzt.

Im Anschluss an die Berechung der jeweiligen Zustandsmengen wird eine *Propagationsfusion* mit dem Ziel der Volumenminimierung des Einschlussgebietes durchgeführt. Mit der Annahme, dass der wahre Wert $\mathbf{x}_k$ garantiert innerhalb aller propagierter Zustandsmengen liegt, gilt für die Schnittmenge $\mathcal{X}_k^S$ somit $\mathcal{X}_k^S = \mathcal{X}_k^{\square} \cap \mathcal{X}_k^{\Diamond} \cap \mathcal{X}_k^{\bigcirc} \neq \varnothing$. Allerdings wird für den weiteren Verlauf aus verfahrenstechnischen Gründen nicht die exakte, im allgemeinen *nichtkonvexe Zustandsschnittmenge* weiter verwendet, sondern stattdessen eine *konvexe Hüllmenge* mit minimalem Volumen

$$\mathcal{X}_k^{S_i} = \min Volume\left(\mathcal{X}_k^i\left(\mathcal{X}_k^S\right)\right), \quad i \in \{\square, \Diamond, \bigcirc\}.$$

Hier repräsentiert $\mathcal{X}_k^i\left(\mathcal{X}_k^S\right)$ die Umschreibung der Schnittmenge $\mathcal{X}_k^S$ mit der konvexen Menge $\mathcal{X}_k^i$. Eine vereinfachte Prinzipskizze ist in Bild 3 dargestellt.

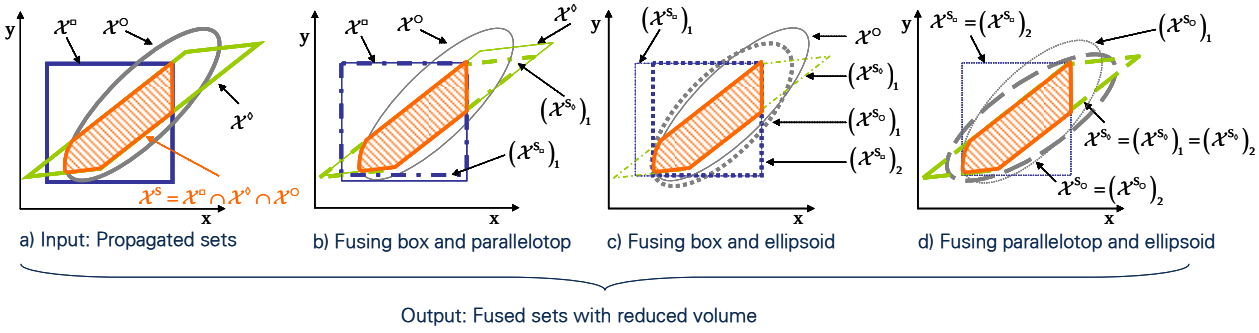


Bild 3 Prinzip der Propagationsfusion

Aktualisierungsschritt. Für jeden Zeitpunkt mT_M (Messintervall T_M mit $m = 1, 2, \ldots$) wird anschließend an die Propagationsfusion unter Zuhilfenahme der Sensormesswerte (2) eine weitere Multimodellfusion, die so genannte *Messwertfusion*, durchgeführt. Hierbei werden äquivalent zur Propagationsfusion zusätzlich zu den propagierten Zustandsmengen die

Umschreibungen des Messwertes, also $\mathcal{X}_k^{M_\square}$, $\mathcal{X}_k^{M_\diamond}$ und $\mathcal{X}_k^{M_\bigcirc}$ zur Fusion mit herangezogen. Der Aktualisierungsschritt mittels Messwertfusion sichert vor allem während längerer Schätzperioden eine akzeptable Stützung der Zustandsschätzung.

Am Ausgang des Schätzfilters stehen nun zu jedem Zeitschritt k die geschätzten Zustandsmengen, zur Verfügung, welche im vorliegenden Anwendungsfall zum Beispiel zur Berechnung von kollisionsfreien Pfaden verwendet werden können. Des Weiteren kann auch ein Schätzwert für den Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_k$ angegeben werden. Hier kann im Grunde genommen ein jeder Vektor der Zustandsmenge herausgegriffen werden. In praktischen Anwendungen wird man jedoch den *Mittelpunkt* einer der propagierten Zustandsmengen wählen, z.B. der Mittelpunkt der kleinsten Zustandsmenge.

5 Anwendungsbeispiel – Lokalisierung eines autonomen, mobilen Roboters

Zur Evaluierung der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Schätzfilters wurden Simulations- und Labortests zur Lokalisierung eines autonomen, mobilen Roboters durchgeführt. Hierfür stand eine in der Robotikgruppe am Institut für Automatisierungstechnik der TU Dresden aufgebaute mobile Plattform zur Verfügung.

Der differential angetriebene Roboter ist mit zwei Radencodern (12 bit Auflösung) zur Messung der Geschwindigkeiten des rechten (v_k^R) bzw. linken (v_k^L) Rades ausgestattet. Somit kann die Lage des Roboters im Raum – bestehend aus seiner Position x_k, y_k und seiner Orientierung ϕ_k – inkrementell für jeden Abtastschritt T_A mit

$$\mathbf{x}_k = \left(x_k, y_k, \phi_k\right)^T = \mathbf{x}_{k-1} + T_A \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\phi_k & \frac{1}{2}\cos\phi_k \\ \frac{1}{2}\sin\phi_k & \frac{1}{2}\sin\phi_k \\ \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^R \\ v_k^L \end{pmatrix}$$

bestimmt werden, wobei l den Abstand der zwei Antriebsräder bezeichnet. Um ein lineares Systemmodell zu erhalten, wird eine zeitvariante Linearisierung um die aktuellen Mittelpunkte $\breve{\mathbf{x}}_k, \breve{\mathbf{x}}_{k-1}, \breve{\mathbf{u}}_k = \left(\breve{v}_k^R, \breve{v}_k^L\right)^T$ durchgeführt. Das sich ergebende Zustandsgleichungssystem lautet

$$\left(\mathbf{x}_k - \breve{\mathbf{x}}_k\right) = \mathbf{A}_k \left(\mathbf{x}_{k-1} - \breve{\mathbf{x}}_{k-1}\right) + \mathbf{B}_k \left(\mathbf{u}_k - \breve{\mathbf{u}}_k\right)$$

mit der Zustandsmatrix $\mathbf{A}_k$ und der Eingangsmatrix $\mathbf{B}_k$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\left(\breve{y}_k - \breve{y}_{k-1}\right) \\ 0 & 1 & \breve{x}_k - \breve{x}_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \frac{T_A}{2} \begin{pmatrix} \cos\breve{\phi}_k & \cos\breve{\phi}_k \\ \sin\breve{\phi}_k & \sin\breve{\phi}_k \\ \frac{2}{l} & -\frac{2}{l} \end{pmatrix}.$$

Die Position der Plattform kann mit Hilfe eines auf Infrarot- und Ultraschallsensoren basierendes *Entfernungsmesssystems* – genannt IRUS [14] – in Bezug zu einer Bake gemessen werden. Dies setzt allerdings einen Sichtkontakt zwischen Bake und Roboter voraus. In stark belegten strukturierten Umgebungen kann somit eine Positionsmessung aufgrund von Abschattungen durch Raumobjekte nicht zu jedem Messzeitpunkt erfolgen. Der

prinzipielle Aufbau des IRUS Sensorsystems ermöglicht ausserdem *keine Messung* der *Orientierung* ϕ_k. Hier steht nur der Initialwert ϕ_0 zur Verfügung. Als *Referenzmesssystem* (*ground truth*) wurde ein Kamerasystem, bestehend aus einer Kamera und drei auf dem Roboter montierten LEDs benutzt. Unter Verwendung von photogrammetrischen Methoden erlaubt dies die Berechnung der Position sowie der Orientierung des Roboters mit einer Genauigkeit von 1 cm. Bild 4 verdeutlicht den verwendeten Experimentaufbau. Die aufgenommen Daten werden während der Experimente mittels einer Bluetooth-Verbindung online an einen PC gesendet und gespeichert. Die Auswertung erfolgt anschließend offline.

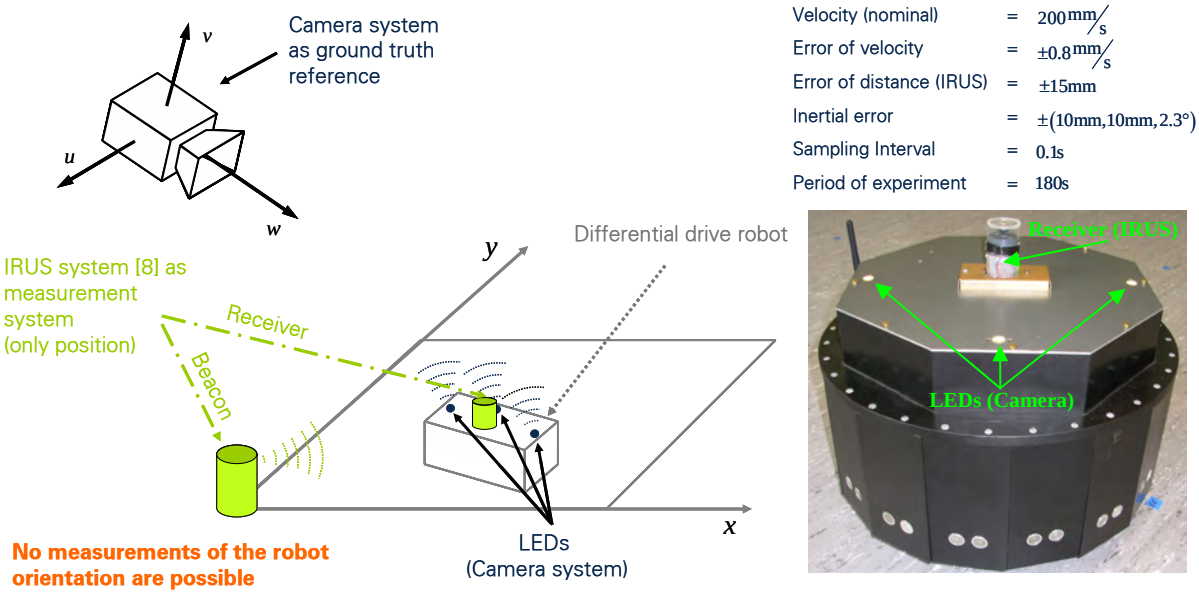


Bild 4 Experimentaufbau. Ausgestattet mit einem IRUS Messsystem bestimmt der differential angetriebene, mobile Roboter seine Position anhand von Entfernungsmessungen zwischen einer festen Bake und einem integrierten Empfänger. Das Kamerasystem – inklusive der drei auf dem Robotergehäuse montierten LEDs – wird als Referenzmesssystem verwendet.

5.1 Simulationsergebnisse

Erste Untersuchungen zur Leistungsfähigkeit des eingesetzten Filters wurden in Form von Simulationsläufen mit folgenden Trajektorien durchgeführt:

- KREIS mit einem Durchmesser von 10m
- VIERECK mit einer Kantenlänge von 10m
- DREHEN am Platz

Beim Vergleich der Simulationsläufe mit den durchgeführten Experimenten (siehe Abschnitt 5.2) muss allerdings beachtet werden, dass sich die angenommenen Simulationsparameter leicht von denen der realen Plattform unterscheiden. Außerdem wurde von einem Messsystem

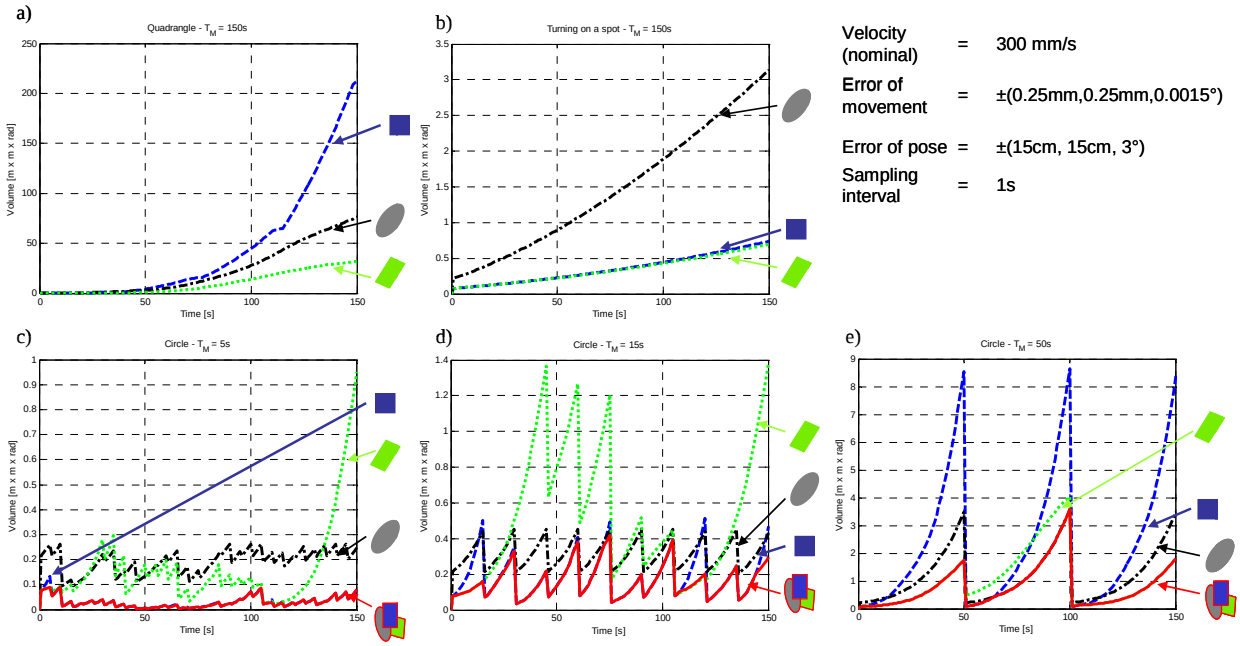


Bild 5 Verlauf von V der verschiedenen mengenbasierten Schätzverfahren (blau – Hyperquader, grün – Parallelepiped, schwarz – Ellipsoid, rot – Multimodell) für unterschiedliche Messintervalle bzw. verschiedene Trajektorien

ausgegangen, dass die Messung der Roboterorientierung ermöglicht. Aus diesem Grunde sind voneinander abweichende Ergebnisse zu erwarten.

Es ist ersichtlich, dass die verschiedenen Schätzverfahren eine variierende Schätzgüte in Abhängigkeit von den eingestellten Betriebsparametern aufweisen. In Bild 5a und Bild 5b ist dies für zwei verschiedene Trajektorien bei reiner Propagation und in Bild 5c, Bild 5d und Bild 5e für die Trajektorie KREIS bei unterschiedlichen Messintervallen dargestellt. Das Multimodellfilter (siehe Bild 5c-e) erreicht dabei immer das Zustandsgebiet mit dem kleinsten Volumen.

5.2 Experimentelle Ergebnisse

Um die praktische Relevanz des Multimodellfilters zu untersuchen, wurden weiterhin folgende Experimente mit der bereits beschriebenen Konfiguration durchgeführt:

- KREIS mit einem Durchmesser von 2m (8 Experimente)
- DREHEN am Platz (5 Experimente)

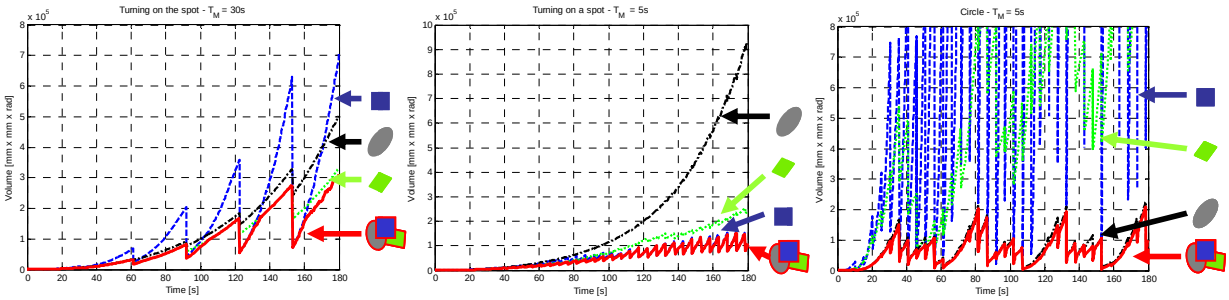


Bild 6 Verlauf von V für die verschiedenen Verfahren (blau – Hyperquader, Grün – Parallelepiped, Schwarz – Ellipsoid, Rot – Multimodell) – a) DREHEN mit T_M = 30s, b) DREHEN mit T_M = 5s, c) KREIS mit T_M = 5s

Bild 6 stellt hier für spezielle Konfigurationen die Verläufe des Volumens der Schätzgebiete für die verschiedenen mengenbasierten Schätzfilter (Hyperquader, Parallelepiped, Ellipsoid und Multimodell) dar. Wie erwartet, variiert die Performanz der herkömmlichen mengenbasierten Verfahren abhängig von den aktuellen Betriebsparametern.

In Bild 6a sind die Ergebnisse eines Experimentes DREHEN für eine lange (30s) und in Bild 6b für eine kurze (5s) Messperiode aufgezeichnet. Vergleicht man die drei bekannten mengenbasierten Verfahren, erreicht im ersteren Fall das Parallelepipedverfahren auf Grund seiner Fähigkeit sich an Rotationen anzupassen die höchste Schätzgüte, während im zweiten Fall das Hyperquaderverfahren am meisten von den häufigen Messwerten profitieren kann und das Einschlussgebiet mit dem geringsten Volumen berechnet. Auffällig ist außerdem die extrem schlechte Performanz des Ellipsoidverfahrens. Die Fusion mit den aufgenommen Messwerten zwingt die Ellipsoidmenge in eine achsenparallele Lage. Weiterhin verkleinert die Messwertfusion zwar die x, y-Ausdehnung des Ellipsoids, vergrößert aber strukturbedingt geringfügig die Unsicherheit in ϕ. Betrachtet man allerdings für die Ergebnisse eines Experimentes KREIS mit $T_M = 5\mathrm{s}$, ergibt sich ein anderes Bild. Hier profitiert das Ellipsoidverfahren am meisten von den Positionsmessungen und reduziert somit implizit die Unsicherheit in der Roboterorientierung. Das Parallelepipedverfahren verkleinert ebenfalls die Unsicherheiten in ϕ - allerdings mit geringerem Erfolg. Bezogen auf das vorgestellte *Multimodellschätzfilter* lässt sich für alle durchgeführten Experimente feststellen, dass durch die Kombination der drei verschiedenen Verfahren eine robuste Schätzung *unabhängig* von *Parameteränderungen* erreicht werden kann und immer das *kleinste Einschlussgebiet* der Zustandsmenge berechnet werden kann.

Für praktische Anwendung ist vor allem die *Wiederholgenauigkeit* der Schätzung über mehrere Experimentläufe interessant. Diese lässt sich mittels des Gütemaßes

$q_k = \sigma_k^{V^{\min}} \Big/ \mu_k^{V^{\min}}$ mit $\mu_k^{V^{\min}} = 1/N \sum_{i=1}^{N} V_{i,k}^{\min}$ und $\left(\sigma_k^{V^{\min}}\right)^2 = 1/N-1 \sum_{i=1}^{N} \left(V_{i,k}^{\min} - \mu_k^{V_{\min}}\right)^2$ ermitteln. Je geringer das Gütemaß q_k ist, desto höher ist die Wiederholgenauigkeit. Für die $N = 8$ durchgeführten Experimente KREIS ergibt sich ein durchschnittlicher Wert von 3.4% und ein maximaler Wert von 18,8%.

6 Zusammenfassung

Um Systemzustände aus unsicherheitsbehafteten Messgrößen zu schätzen, wird meist und ohne näher die zugrunde liegende Fehlercharakteristik zu hinterfragen, auf stochastische Fehlermodelle und Filteralgorithmen zurückgegriffen. In vielen Fällen erweist sich eine mengenbasierte Fehlerbeschreibung jedoch als angemessener. Klassische mengenbasierte Schätzalgorithmen leiden wiederum an einer mehr oder minder großen Überschätzung abhängig von den jeweiligen System- und Betriebsparametern.

Das hier vorgestellte Multimodellfilter verbindet die Stärken der bekannten mengenbasierten Schätzverfahren und liefert garantierte Einschlussgebiete der Zustandsmenge mit minimiertem Volumen. Dabei konnte eine hohe Robustheit und Wiederholgenauigkeit für die durchgeführten Simulations- und Experimentläufe nachgewiesen werden. Weitere Schritte sind nun nachfolgende theoretische Untersuchungen zum Konvergenzverhalten des Multimodellfilters sowie eine konsequente Nutzung der mengenbasierten Schätzwerte für anwendungsbezogene Steuerungsstrategien. Bezogen auf das vorliegende

Anwendungsbeispiel wird derzeit an einem robusten mengenbasierten Pfadplanungsalgorithmus gearbeitet.

Literaturverzeichnis

[1] G. Alefeld and J. Herzberger, Introduction to Interval Computations, New York: Academic Press Inc., 1983, .

[2] R. Lohner, "Einschliessung der Lösung gewöhnlicher Anfangs- und Randwertaufgaben und Anwendungen," Dissertation, Technische Universität Karlsruhe, 1988.

[3] A. Vicino and G. Zappa, "Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, pp. 774-785, 1996.

[4] L. Chisci, A. Garulli and G. Zappa, "Recursive state bounding by parallelotopes," Automatica, vol. 32, pp. 1049-1055, 1996.

[5] A. Garulli and A. Vicino, "Set membership localization of mobile robots via angle measurements," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 17, pp. 450-463, 2001.

[6] F.C. Schweppe, "Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-13, pp. 22-28, 1968.

[7] L. Ros, A. Sabater and F. Thomas, "An Ellipsoidal Calculus Based on Propagation and Fusion," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics -- Part B: Cybernetics, vol. 32, pp. 430-442, 2002.

[8] U.D. Hanebeck and G. Schmidt, "Set theoretic localization of fast mobile robots using an angle measurement technique," in Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1387-1394, Minneapolis, USA, 1996.

[9] G. Calafiore, "Reliable Localization using set-valued nonlinear filters," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics -- Part A: Systems and Humans, vol. 35, pp. 189-197, 2005.

[10] S. Horn, "Anwendung mengenbasierter Schätzverfahren zur Lokalisierung von mobilen Plattformen in ebenen Umgebungen," Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2003.

[11] N. Ceccarelli, M. Marco, A. Garulli and A. Giannitrapani, "A set theoretic approach to path planning for mobile robots," in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pp. 147-152, 2004.

[12] A. Caiti, A. Garulli, F. Livide and D. Prattichizzo, "Localization of autonomous underwater vehicles by floating acoustic buoys: a set-membership approach," IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 30, pp. 140-152, 2005.

[13] U.D. Hanebeck, "Lokalisierung eines mobilen Roboters mittels effizienter Auswertung von Sensordaten und mengenbasierter Zustandsschätzung," , Dissertation, Technische Universität München, 1997.

[14] H. Kirmse, M. Hennig and K. Janschek, "Global localization system of an indoor mobile robot with a single base station," in Proceedings of the 4th IFAC-Symposium on Mechatronic Systems – Mechatronics 2006, paper no. 232, Heidelberg, Germany, 2006.

Discontinuous and Continuous Sliding Mode

Karel Jezernik
University of Maribor, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science
Smetanova 17, SI-2000 Maribor, Slovenia
e-mail: karel.jezernik@uni-mb.si

Abstract

This paper deals with basic concepts, design aspects and application to power electronics switching control systems via Lyapunov design approach. The salient features of the switching control systems with sliding mode are order reduction, decoupling in the design procedure, insensitivity in plant parameter changes and disturbances rejection. Simple implementation makes concepts of switching control very attractive in power electronics systems like control of dc or ac converters. The control algorithm designed by proposed approach can be easily implemented on modern DSP / FPGA platforms.

1 Introduction

Traditionally, power electronics circuits and systems have been controlled in industry using linear controllers combined with non-linear procedures like pulse width modulation (PWM). The models used for controller design are results of simplifications that include averaging the behavior of the system over time (to avoid modeling the switching) and linearizing around a specific operating point disregarding all constraints. To make the system operate in a reliable way for the whole operating range, the control circuits is subsequently augmented by a number of heuristic patterns. This procedure requires large development times and lacks theoretically backed guarantees for the operation of the system.

Recent theoretical advances in the field of hybrid and discrete event-systems [1],[2], and significant increase of the computational power available for the control of the power electronic systems are inviting both the control and the power electronics communities to adopt traditional control schemes associated with power electronics applications. In order to raise the performance and efficiency of the power electronic applications, faster and more sophisticated current control schemes are required.

Switch mode dc-dc converters are switched circuits that transfer power from a dc input to a board. They are used in a large variety of applications due to their light weight, compact size, high efficiency and reliability. Since the dc voltage at the input is unregulated and the output power demand changes significantly over time (resulting in time – varying load), the control objective is to achieve output voltage regulation in the presence of input voltage and output load variation [3].

A sliding mode switching controller via Lyapunov design presented in this paper has been implemented on a SPARTAN 3 for a prototype buck converter. The high computation

power of FPGA allows digital implementation of more advanced control algorithms such as sliding mode controller.

2 Control Design

The main purpose of this work is to present application of switching strategy combined with Lyapunov design approach to the power electronic systems. Sliding mode control is originally defined for dynamic systems described by ordinary differential equation with discontinuous right hand side. In such a system so-called sliding mode motion can result. This motion is represented by the state trajectories in the sliding mode manifold and high frequency changes in the control. The fact that motion belongs to certain manifolds in state space, dimension of which is lower than that of the system, results in the reduction of the motion equation order. This enables simplification and decoupling design procedure. For sliding mode application the equations of motion and the existence conditions are two basic questions to be defined.

The design of sliding mode system consists generally of two-step procedure: design of the switching manifold and design of the sliding mode control algorithm [4],[5]. The switching manifold shall be selected in such a way to guaranty desired system performance while the control shall be selected to ensure that system's motion is forced to stay in sliding mode manifold. Mathematically above procedure may be presented as follows:

1) From the system specification select the vector valued function $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{x}\right)$ where $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}$ represent desired changes of the controlled vector variable $\boldsymbol{x}$ so that the design specifications are met if the closed loop system is constrained to belong to the manifold (1)

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}\right\}. \tag{1}$$

This way the fulfillment of the control system design specifications is reduced selection of control that will guaranty the stability of the system as defined by (1).

2) The control input shall be selected so that the stability of the solution $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}$ is guarantied. The simplest approach is to use Lyapunov based design in such a way that the control is determined from the Lyapunov stability conditions. Since fulfillment of the design requirements is reduced to the stability of (1) natural selection of the Lyapunov function candidate is in the following form

$$V = -\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} / 2 \quad \text{and} \quad \dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{2}$$

This selection guaranty that $V\big|_{\forall \sigma \neq 0} > 0$ and $V\big|_{\sigma=0} = 0$.

The Lyapunov stability requirement will be fulfilled if control can be selected such that $\dot{V}\big|_{\forall \sigma \neq 0} > 0$ and $\dot{V}\big|_{\sigma=0} = 0$. This can be achieved if the following is satisfied (a) the derivative $\dot{V}$ of the Lyapunov function is function of control (what means that derivative of function $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}$ should be function of control) and (b) there is such a function $\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)$ so that $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\Big|_{\forall \sigma \neq 0} < 0$ and (c) if there is unique solution for control for the following equality

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) < 0. \quad (3)$$

There can be many different ways of selecting function $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma})$. For the application in power electronic control two particular forms as given in (3) may be of interest:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\Gamma} sign(\boldsymbol{\sigma}), \quad (4)$$

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{D} > \boldsymbol{0}, \quad (5)$$

where $\boldsymbol{\Gamma}$ is diagonal or matrix with predominant diagonal, $sign(\boldsymbol{\sigma}) = \left[sign(\sigma)_1, \cdots, sign(\sigma_m) \right]^T$ and $\boldsymbol{D}$ is positive definite matrix.

If vector function $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma})$ is selected to be $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\Gamma} sign(\boldsymbol{\sigma})$ then resulting control will be discontinuous and manifold (1) will be reached in finite time. If $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma})$ is selected as $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{D} > \boldsymbol{0}$ then resulting control is expected to be continuous and sliding mode manifold will be reached in infinite time. The asymptotic stability of the solution $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x^r}, \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0}$ will be guarantied in this case. Both solutions may be applied to the power electronic system control. The discontinuous control will be used in inductor current control. The continuous control is designed for voltage control in Sections 3 and 4.

Assuming that the time derivative of the function $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x^r}, \boldsymbol{x}\right)$ may be expressed in the form $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x^r, x)}{\partial x^r}\frac{dx^r}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(x^r, x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}_\sigma + \boldsymbol{GBu}$ and fact that one can write $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{GB}(-\boldsymbol{u_{eq}} + \boldsymbol{u})$ then control input (6) if $\boldsymbol{GB}$ is regular matrix will satisfy the Lyapunov stability requirements (5)

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_{eq} + (\boldsymbol{GB})^{-1} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\sigma}. \quad (6)$$

Using the fact that $\boldsymbol{u}_{eq}$ is a continuous function, the approximation of function $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{x^r}, \boldsymbol{x}\right)$ can be written in discrete-time form after applying Euler's approximation,

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}((k+1)T_s) - \boldsymbol{\sigma}(kT_s)}{T_s} = \boldsymbol{GB}\left(\boldsymbol{u}_{eq}(kT_s) - \boldsymbol{u}(kT_s)\right). \quad (7)$$

Here T_s is the sampling time and $k = Z^+$. By discretizing (6) and combining it with (7) one can eliminate the $\boldsymbol{u}_{eq}(kT_s)$ from (6) and arrive to the following discrete time version of the control (6)

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}_{k-1} + (\boldsymbol{GB}T_s)^{-1}\left((\boldsymbol{D}T_s + \boldsymbol{I})\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_{k-1}\right). \quad (8)$$

Proposed algorithm ensures the sliding mode existence in manifold (1) and thus ensures the robustness of the closed loop system behavior against external disturbance and the parameters' changes. The control algorithm (8) has a feedforward term expressed by $\boldsymbol{u}_{k-1}$ and feedback term determined with control error dynamics.

Switching control (sometimes referred to as bang-bang control) is a simple strategy that switches the actuation only between full on/off, based on the observation of the system states relative to a reduced-order switching surface [5]. The benefits of this controller (simplicity, efficiency, performance) make it well suited to driving the power electronic systems.

For a first order system, switching control implies turning the actuation full positive if the error is negative, or full negative if the error is positive. In general, switching control performs well, even for nonlinear systems with uncertainty. However, it suffers from chattering as the actuation is continually reversed. Most systems do not support such operation well, with the exception of electrical systems where vibrations do not fatigue the system. In our application, the inductance will filter out this chattering behavior before it reaches output variable.

Continual switching will induce some ripple in the inductor current. Using a simplified linear model as a lumped inductor and resistor, the current response is given by

$$L\frac{d\,i}{dt} + R\,i = v\ . \tag{9}$$

For this analysis we will assume that steady-state switching will occur in a repeating pattern, i.e. a regular square wave input voltage of amplitude $v_{\max}$ and on/off durations T_{on}, T_{off}.

The theoretical magnitude of the current ripple will be

$$\triangle i = \frac{v_{\max}}{R}\frac{\left(1-e^{-\lambda T_{on}}\right)\left(1-e^{-\lambda T_{on}}\right)}{\left(1-e^{-\lambda (T_{on}+T_{off})}\right)}, \tag{10}$$

where $\lambda = R/L$. This is largest at a 50% duty cycle, i.e. for $T_{on} = T/2$ and $T_{off} = T/2$

$$\triangle i = \frac{v_{\max}}{R}\frac{\left(1-e^{-\lambda T/2}\right)^2}{\left(1-e^{-\lambda T}\right)} \approx \frac{1}{4}\frac{v_{\max}}{R}\lambda T \tag{11}$$

So the final current ripple due to input switching decreases as the frequency of the switching rises and switching times drop below the electrical time constant of the inductor ($1/\lambda$). For typical electrical time constant on the order of 100 μs, switching rates above 1 MHz leave a negligible ripple and therefore do not induce any unnecessary heating or chattering. Additionally, continual improvements in semiconductor technology over the past decade have made this switching feasible with relatively standard components.

3 Control of dc-dc Buck Converter

Fig. 1 shows the reference example used along the paper. The power stage is a buck converter. The buck converter parameters are the following: input voltage *Vg* = 12 V, output voltage *Vout* = 5 V, *L* = 47 μH, *C* = 47 μF, load resistance is between R_{min} = 10 Ω and R_{max} = 300 Ω, and switching frequency *fs* = 1 MHz.

The control objective for dc-dc converters is to regulate the dc component of the output voltage to its reference. This objective has to be achieved subject to the constraints that are present, resulting from the converter topology. In particular, the manipulated variable (duty cycle) is bounded between zero one, and in the discontinuous current mode a state (inductor

current) is constrained to be non-negative. Additional constraints are imposed as safety measures, such as current limiting or soft-starting, where the latter constitutes a constraint on the maximal derivative of the current during start-up. Moreover, the regulation has to be maintained despite gross changes in the load and the input voltage. We aim at developing novel control schemes that account for the hybrid properties of these systems and address the aforementioned control objectives.

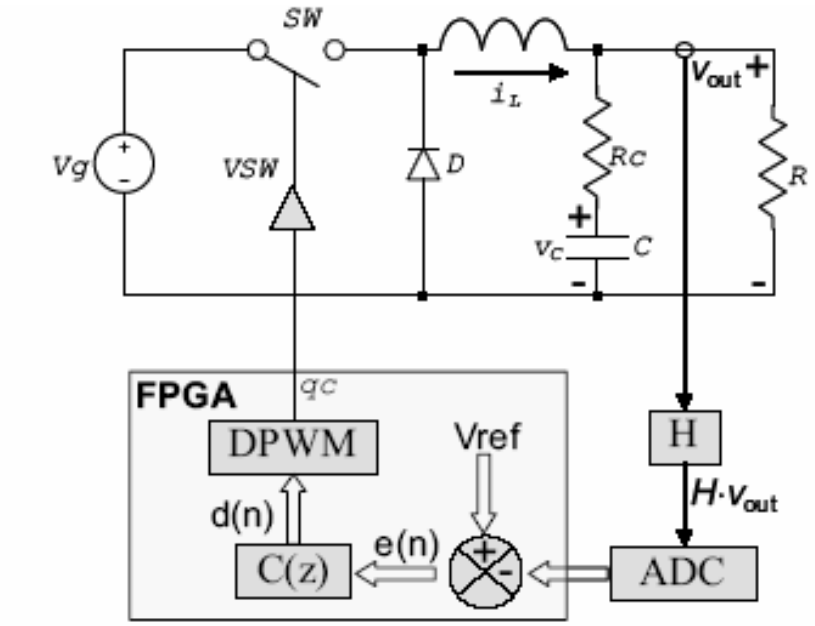


Fig. 1. Buck converter controlled by a digital controller.

Let us apply above procedures for buck dc-to-dc converter. First selection of switching function (4)

$$\begin{aligned} &\sigma_u = V_{ref} - V_{out} \to 0, \quad V_{out} = v_0, V_{ref} = v_0^{ref} \\ &\sigma_i = i_L^{ref} - i_L \to 0 \end{aligned} \tag{12}$$

give discontinuous control input:

$$u(t) = \begin{cases} 1; \sigma > 0 \\ 0; \sigma < 0 \end{cases}. \tag{13}$$

Switching among the available output voltage are determined by the conditions originate from the derivative of Lyapunov function [4]. For Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2}\left(i_L^{ref} - i_L\right)^2 + \frac{1}{2}\left(v_0^{ref} - v_0\right)^2 \tag{14}$$

the derivative of the Lyapunov function must be negative

$$\dot{V} = \left(i_L^{ref} - i_L -\right)\frac{v_0}{L} - \left(v_0^{ref} - v_0\right)\frac{i_C}{C} - \left(i_L^{ref} - i_L\right)\frac{u(t)}{L} < 0. \tag{15}$$

When V_g has enough magnitude that $\dot{V} \le 0$, therefore $V \to 0$ and $i_L \to i_L^{ref}$ and $v_0 \to v_0^{ref}$.

Closed loop behavior in sliding mode will be reduced to first order system.

Second, for continuous control (5), assume current reference as continuous function i_L^{ref} then, for tracking error $\sigma_i = i_L^{ref}(t) - i_L$ and control selected as $u = (1 - sign\sigma)/2$ sliding mode exists and equivalent control could be calculated as:

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{d\left(i_L^{ref} - i_L\right)}{dt} = \frac{d\, i_L^{ref}}{dt} + \frac{v_0}{L} - \frac{V_g}{L} u_{eq} = 0 \quad \Rightarrow u_{eq} = \frac{1}{V_g}\left(L\frac{d\, i_L^{ref}}{dt} + v_0\right) \tag{16}$$

satisfies condition $0 \le u_{eq} \le 1$. Substituting equivalent control to the original equations of the system one can obtain:

$$i_L(t) = i_L^{ref}(t); \qquad \frac{dv_o}{dt} = \frac{i_L^{ref}}{C} - \frac{v_o}{RC} \tag{17}$$

As expected, in sliding mode behavior is reduced to linear first order system with reference current as input and capacitance voltage as output. Reference current could be selected using any of well-established design procedures for linear systems. One way of doing it is, for example, to require first order response of closed loop system

$$\sigma_v = \tau\left(v_o^{ref} - v_o\right) + \frac{d\left(v_o^{ref} - v_o\right)}{dt} = 0 \tag{18}$$

defined by design parameter τ. Then reference current could be easily determined as

$$i_L^{ref} = sat\left(\frac{v_o}{R} + \mu C\left(v_o^{ref} - v_o\right) + C\frac{dv_o^{ref}}{dt}\right) \Rightarrow i_L^{ref} = sat\left(i_L + C\sigma_v\right), \tag{19}$$

where $sat(\bullet)$ is saturation function. Introduction of saturation is natural since it reflects commutation capabilities of the switching element. Another structure of the control system may be determined from the required closed loop dynamics (18). By inserting (17) into (18) one can easily calculate

$$\sigma_v = \tau\left(v_o^{ref} - v_o\right) + \frac{dv_o^{ref}}{dt} + \frac{v_o}{RC} - \frac{i_L}{C} = \frac{1}{C}\left(i_L^{ref} - i_L\right). \tag{20}$$

Last expression shows that by selecting control as $u = (1 - sign(C\sigma_v))/2$ sliding mode motion is established in manifold $\sigma_v = 0$ and the same result is obtained as in algorithm (19).

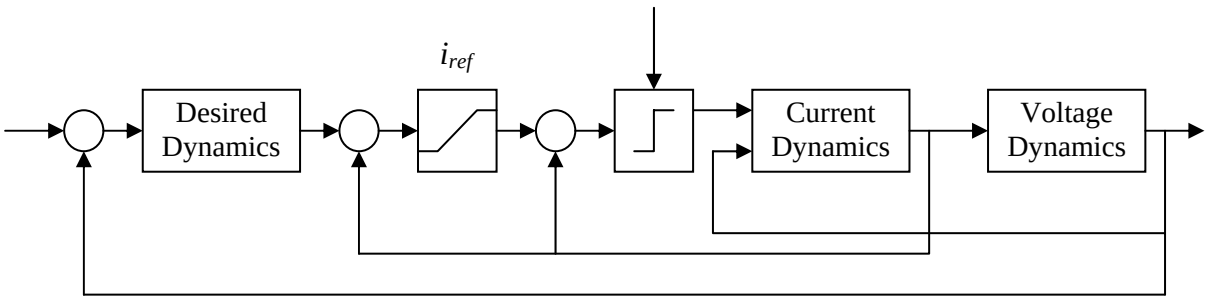


Fig. 2. Structure of the converter control system.

Structure presented in Fig.2. is suitable for implementation of different control algorithm in designing the reference current, thus it leaves more room for merging other control techniques with sliding mode approach especially in systems containing switching element in which sliding mode design is a natural approach.

4 Results

4.1 Simulation Results

The dc-dc buck converter with sliding mode control was simulated in Matlab/Simulink environment. Some transients of inductor current i_L output dc voltage v_0 , transistor-switch current i_{tr} and diode current i_d are presented in Fig. 3a and Fig. 3b. The difference between discontinuous and continuous control input function is recognized in higher switching effort in discontinuous control. The open loop output voltage transient exhibits high oscillation due resonance effect of LC elements in circuits by sudden output load change from high to low value, but closed loop behavior of it is asymptotic stable.

4.2 Experimental Results

An experimental system was built in order to verify the efficiency of the developed control algorithm. The measurements of inductor current i_L and dc output voltage and switching procedure run on FPGA SPARTAN 3A development board. FPGA is suitable to experimental system because it is easy to reprogram its internal logic. Fig. 4 shows the state diagram of discontinuous control (13), (14), (15) of buck converter. StateCAD is a graphical entry tool that allows engineers to express their ideas in a natural manner, as state diagrams. This allows for embedded systems designs without cumbersome, text oriented and error prone rules. After validating a diagram, StateCAD automatically generates simulatable and synthesizable HDL code directly from the state diagram. Fig. 5 shows some transients of inductor current and control input function.

5 Conclusion

The sliding mode discontinuous and continuous controller has been designed and implemented to control a buck converter. The distinguish feature of discontinuous control is higher chattering of control input function and due this effect lower efficiency. There are presented simulation results in Matlab/Simulink programming environment. The sliding mode controller was implemented using a SPARTAN 3 FPGA board from Xilings. FPGA systems are excellent candidates for execution of switching control like sliding mode in power electronic systems.

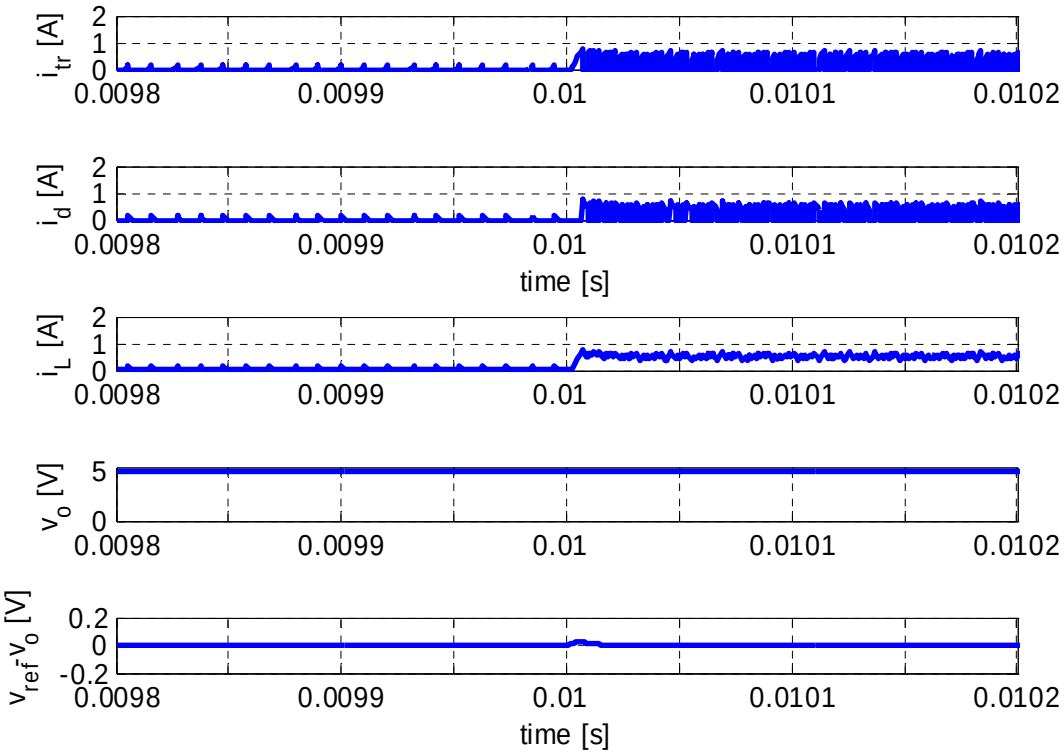


Fig. 3a. Simulation results: discontinuous control.

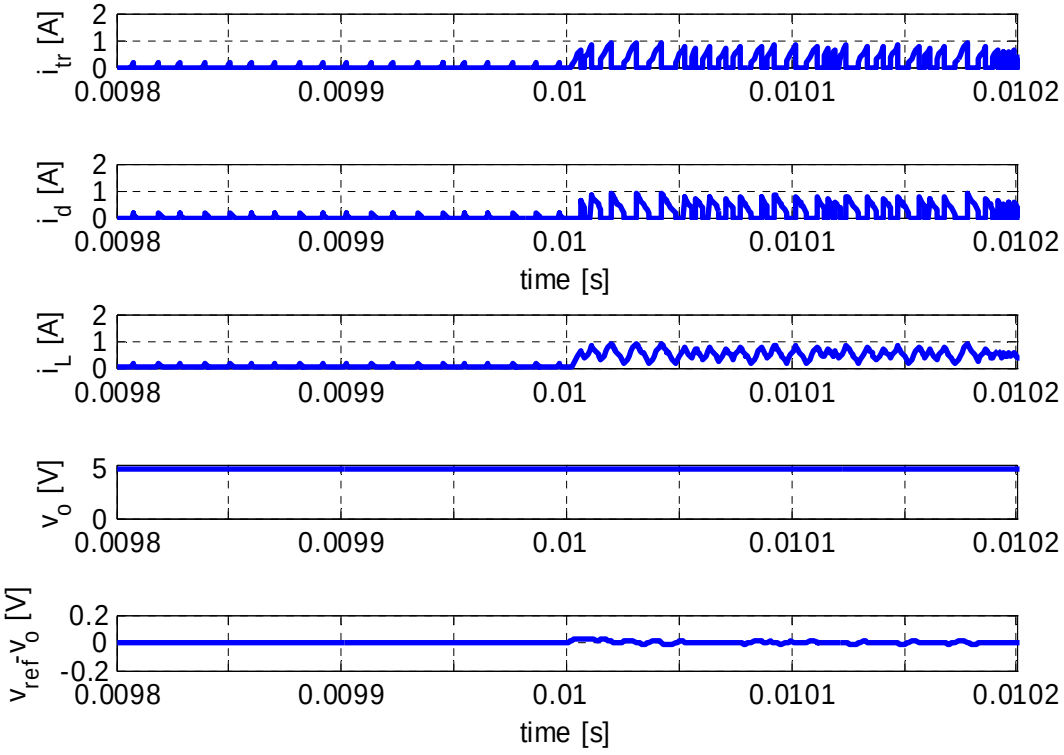


Fig. 3b. Simulation results: continuous control.

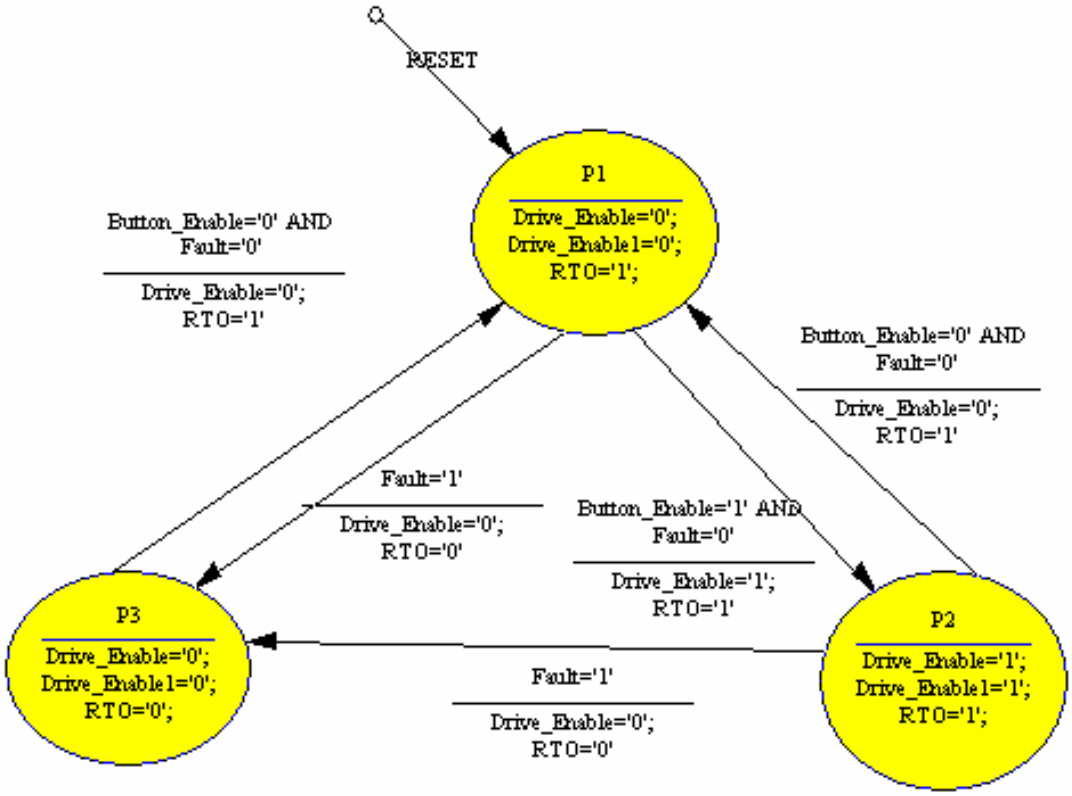
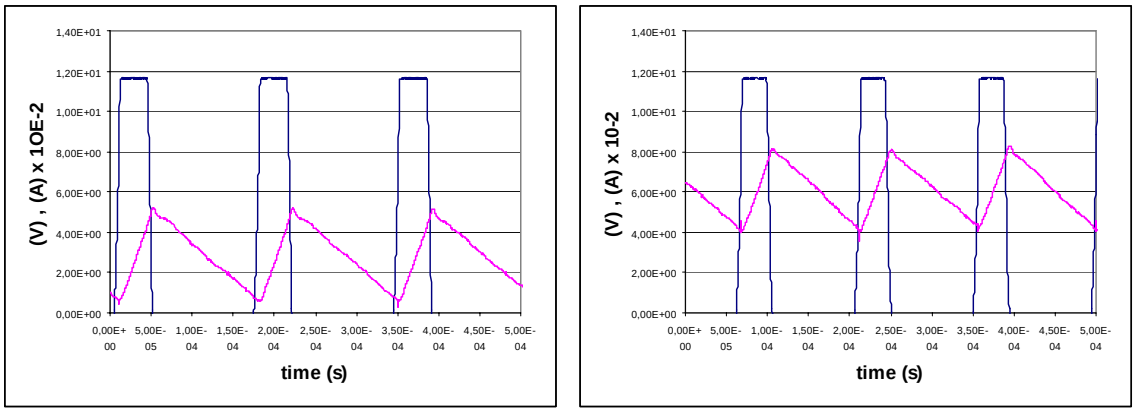


Fig. 4. State diagram of discontinuous control.



a) load R = 15 Ω b) load R = 7 Ω

Fig. 5. Experimental results: discontinuous control, current i_{L}, output voltage on transistor.

Acknowledgment

The authors gratefully acknowledge the contributions of ARRS-Slovenian Research Agency, and Tübitak, The Scientific and Technical Research Council of Turkey, which partly financially supported the joint research project "Sliding Modes in Motion Control Systems" of Institute of Robotics, University of Maribor, and Faculty of Engineering and Natural Science, Sabanci University, Istanbul-Turkey.

References:

[1] A. Polič and K. Jezernik, "Closed-loop Matrix based Model of discrete Event Systems for Machine Logic Control Design", *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 1, no. 1, pp. 39-46, February 2005.

[2] A. Polič and K. Jezernik, "Event-driven Current Control Structure for a Three Phase Inverter", *International Review of Electrical Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 28-35, jan.-Feb. 2007.

[3] M. Milanovič and D. Gleich, "Buck Converter Digitally Controlled by a Fuzzy State-space Controlled", *Journal of Science and Engineering. Series B, Applied Sciences and Engineering*, vol. 2, iss. 5-6, pp. 638-654, 2005.

[4] V.I. Utkin, "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23-36, February 1993.

[5] J.J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.

Modellbasiertes Eingangssignalverarbeitungskonzept für integrierte Fahrdynamikregelungssysteme

Werner Kober, Andreas Kresitschnig
Magna Steyr Fahrzeugtechnik AG und Co KG
Liebenauer Hauptstraße 317, A-8041 Graz
werner.kober@magnasteyr.com, andreas.kresitschnig@magnasteyr.com

Kurzfassung

Moderne integrierte Fahrdynamikregelsysteme benötigen effiziente und robuste Eingangssignalverarbeitungskonzepte um eine solide Basis an Signaldaten für die eigentlichen Reglerfunktionen bereitstellen zu können. Im Rahmen des vorliegenden Beitrages wird zunächst das Konzept eines integrierten Fahrdynamikregelsystems am Beispiel des Magna Steyr Global Chassis Controllers vorgestellt, bevor im Folgenden näher auf die umgesetzte Eingangsignalverarbeitungsstrategie mit den Komponenten Signalplausibilisierung, Fahrzustandsbeobachtung und Sensordatenfusion eingegangen wird. Die implementierten Funktionskomponenten werden abschließend mittels Simulationsuntersuchungen auf Basis von Fahrversuchsmessungen verifiziert.

1 Einleitung

Die steigenden Kundenanforderungen hinsichtlich Fahrsicherheit, Verbesserung des Fahrkomforts und Erhöhung der Fahrfreude, erfordern einen zunehmenden Einsatz von mechatronischen Fahrwerkskomponenten und Fahrdynamikreglerfunktionen in modernen Personenkraftfahrzeugen. Eine Funktionstopologie von mehreren parallel im Fahrzeug arbeitenden Fahrdynamikreglerfunktionen führt dabei schnell zu immer komplexeren, unübersichtlicheren und damit letztendlich auch zu schwer verifizierbaren Fahrdynamikreglerstrukturen im Fahrzeug. Im Rahmen von integrierten Softwarearchitekturansätzen für Fahrdynamikregler wird nun versucht eine hierarchisch geordnete Reglerstruktur für alle mechatronischen Fahrdynamikaktuatoren einzuführen, um damit z.B. negative gegenseitige Beeinflussungen von einzelnen Fahrdynamikregelfunktionen untereinander in den verschiedensten Fahrsituationen wirksam verhindern zu können, Synergieeffekte zwischen mehreren Fahrdynamikaktuatoren zu nutzen, sowie System- bzw. Softwareredundanzen zu vermeiden. Im Folgenden wird zunächst die Funktionsarchitektur eines derartigen integrierten Gesamtkonzeptes am Beispiel des Magna Steyr Global Chassis Controllers vorgestellt, bevor daran anschließend auf die grundsätzliche Funktionalität und die Verifikation eines wesentlichen Bestandteiles jedes integrierten Regelungskonzeptes, der Eingangssignalverarbeitung, näher eingegangen wird.

2 Der Magna Steyr Global Chassis Controller

Abbildung 1 zeigt die grundsätzliche Softwarearchitektur des Fahrdynamikreglers von Magna Steyr entsprechend dem in [6] dargestelltem integrierten Regelungskonzept. Als mechatronische Fahrwerksaktuatoren werden ein aktiver elektromechanischer Hinterachslenkungsaktuator und ein quermomentenverteilendes Torque Vectoring Differentialgetriebe an der Hinterachse im Rahmen des integrierten Fahrdynamikregleransatzes kombiniert. Die Funktionsentwicklung und Auslegung dieses integrierten Regelungskonzeptes wurde dabei über einen in [7] dargestellten simulationsgestützten Entwicklungsprozess durchgeführt. Detailliertere Angaben zur verwendeten Fahrwerksaktuatorik und einen Vergleich von verschiedenen Regelungskonzepten im Rahmen von Fahrversuchsuntersuchungen mit einem entsprechenden Prototypenfahrzeug können aus [8] entnommen werden.

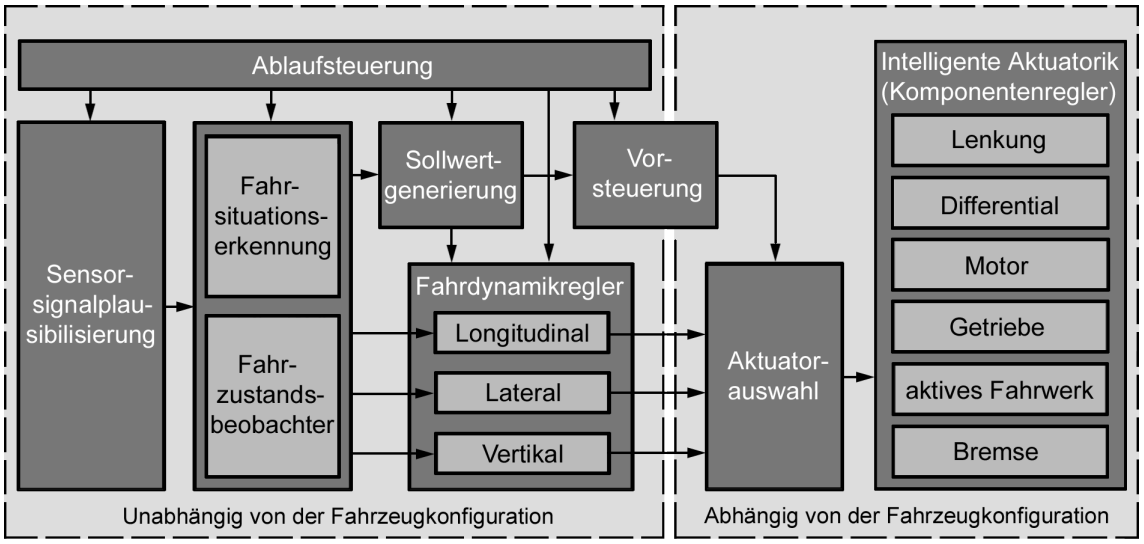


Abbildung 1: Funktionsarchitektur des integrierten Fahrdynamikreglers von Magna Steyr

Die wesentlichen Komponenten des integrierten Fahrdynamikregelungssystems sind aus Abbildung 1 ersichtlich. Zunächst werden die gemessenen Sensordaten im Rahmen der Eingangssignalverarbeitung plausibilisiert und mittels eines Fahrzustandsbeobachters um weitere wichtige Fahrdynamikgrößen ergänzt. Die Ergebnisse dieser ersten Stufe des integrierten Regelkonzeptes bilden die Basis für alle nachfolgenden Softwaremodule. Die Ermittlung der Führungsgrößen des Fahrdynamikreglers erfolgt im Modul der Sollwertgenerierung. Im Zuge der Generierung des Sollwertes wird der aktuelle Fahrerwunsch über die im Fahrzeug verbaute Sensorik ermittelt und interpretiert. Der in dieser Form ausgewertete Fahrerwunsch findet als Führungsgrößenvorgabe für das Reglermodul und das Vorsteuermodul Verwendung. Die Vorsteuerung übernimmt dabei die Aufgaben über schnelle Eingriffe in die Fahrdyanmik den eigentlichen Fahrdyanmikregler in seiner Arbeit zu unterstützen. Auf Basis der Sollwertvorgaben führt das Softwaremodul des Reglers die

eigentlichen Regelungsaufgaben zur Erreichung der Funktionsziele hinsichtlich Fahrkomfort, Handling und Fahrstabilität durch. Dies wird über entsprechende Stelleingriffe des Reglers in die Längs- Quer- und Vertikaldynamik des Fahrzeuges umgesetzt. Im Gegensatz zu parallelen Einzelreglerstrukturen sind die einzelnen Reglerfunktionen im Rahmen des betrachteten integrierten Ansatzes entsprechend vernetzt, um im Sinne der angestrebten Fahrdynamikziele möglichst optimal aufeinander abgestimmte Regelungseingriffe durch die verbaute Fahrzeugaktuatorik zu erreichen. Mittels intelligenter Fahrzeug- und Fahrwerksaktuatoren sind in modernen Fahrzeugen alle wesentlichen Fahrzeugkomponenten wie Lenkung, Bremse, Fahrwerk und Antriebsstrang elektronisch ansteuerbar. Über das Konzept des Aktuatorauswahlmoduls in der Funktionsarchitektur des Magna Steyr Global Chassis Controllers ist eine einfache Adaption des intergierten Fahrdynamikreglers auf die jeweils im Fahrzeug verbaute Aktuatorausstattung ohne Änderung des grundsätzlichen Regleraufbaues möglich. Das Aktuatorauswahlmodul kommuniziert dabei mit den Komponentensteuergeräten der intelligenten Fahrzeugaktuatoren und übersetzt die vom Fahrdynamikregler kommenden Stellgrößen in die jeweiligen Sollstellgrößen für die verbauten Aktuatoren.

3 Modellbasierte Eingangssignalverarbeitung

In integrierten Fahrdynamikregelungskonzepten wird eine zentrale Eingangssignalverarbeitung der über die Sensorik erfassten Sensorsignalmesswerte durchgeführt. Als Ergebnis dieser ersten Stufe der Fahrdynamikreglerarchitektur können den nachfolgenden Reglerkomponenten plausibilisierte und somit verlässliche Eingangsdaten als Basisgrößen der Regelung zur Verfügung gestellt werden. Die zentrale Eingangssignalverarbeitung stellt daher einen wesentlichen Bestandteil jedes integrierten Fahrdynamikreglers dar. Im Rahmen der Eingangssignalverarbeitung des Magna Steyr Global Chassis Controllers werden entsprechend Abbildung 2 die drei Eingangssignalverarbeitungsstufen Signalplausibilisierung, Fahrzustandsbeobachtung und Sensordatenfusion durchgeführt. Als Eingangsmessgrößen der Eingangssignalverarbeitung finden die Sensorsignalmesswerte der Querbeschleunigung a_y, der Gierrate $\dot{\psi}$, des Lenkwinkels δ und der vier Raddrehzahlen ω_i Verwendung. Diese werden zunächst im Signalplausibilisierungsmodul in Abhängigkeit von der aktuellen Fahrsituation (FSE) einer modellbasierten Fehlerdiagnose (FD) und Fehleridentifikation (FI) unterzogen, um fehlerhafte Sensorsignale zu erkennen. Die plausibilisierten Sensorsignaldaten werden in einem zweiten Schritt als Eingangsgrößen für den nichtlinearen Fahrzustandsbeobachter verwendet. Dieser ermittelt modellbasiert die mit dem in modernen Fahrzeugen verbauten Standardsensorsatz nicht direkt messbaren zusätzlichen fahrdynamischen Signalgrößen wie Längsgeschwindigkeit $\hat{v}_x$, Quergeschwindigkeit $\hat{v}_y$, Schwimmwinkel $\hat{\beta}$ und die Reifenschräglaufwinkel an den Rädern $\hat{\alpha}_i$. Im Sensordatenfusionsmodul schließlich werden die plausibilisierten Daten aus den Sensorsignalmesswerten mit den über den Fahrzustandsbeobachter ermittelten geschätzten Daten der virtuellen Sensorsignale zusammengeführt. Über diese Fusionierung von Schätzwerten und Sensormesswerten ist es im Zuge der sog. Ersatzwerteberechnung (EW) in bestimmten Fehlerfällen möglich, bei Ausfall eines einzelnen Sensorsorsignals modellbasierte Schätzwerte als Ersatzwerte für das fehlerhafte Signal zu berechnen und den nachfolgen-

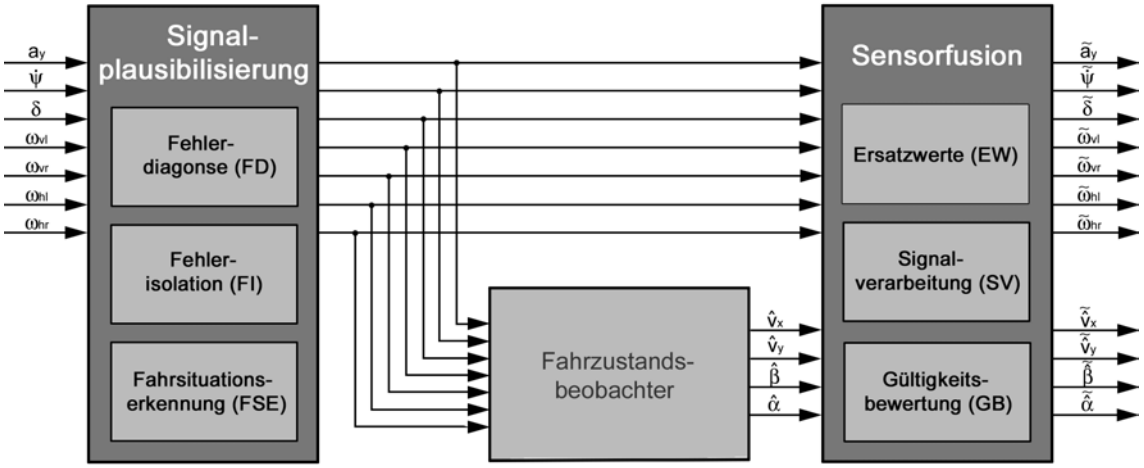


Abbildung 2: Struktur der Eingangsignalverarbeitung des Magna Steyr Global Chassis Controllers

den Fahrdyanmikreglermodulen zu Verfügung stellen zu können. In dieser letzten Stufe der Eingangssignalverarbeitung werden weiters noch spezielle Signalverarbeitungsroutinen (SV) und eine abschließende Signalgültigkeitsbewertung (GB) durchgeführt. Im Folgenden werden die Anforderungen und Eigenschaften dieser komplexen Eingangssignalverarbeitungsmodule näher dargestellt und diskutiert.

3.1 Signalplausibilisierung

Für den Einsatz in integrierten Reglerkonzepten sind grundsätzlich Plausibilisierungsansätze über die Verwendung von redundanter Sensorik, wie z.B. in [4, 9], als auch modellbasierte Plausibilisierungsansätze, wie z.B. in [2, 5, 10] im Fokus der Entwicklungen. Im Rahmen der redundanten Konzepte wird dabei versucht, die ausschließlich auf Hardware-Redundanz basierenden Lösungen von Fly-by-Wire Systemen der Luftfahrzeugtechnik, für die automotiven Lösungen aus Platz-, Kosten- und Gewichtsgründen möglichst zu vermeiden. Stattdessen wird z.B. in [4, 9] auf analytische bzw. funktionale Redundanzen zurückgegriffen, um wenn möglich mit einem kostengünstig verfügbaren bzw. einem für weitere mechatronische Fahrzeugkomponenten ohnehin erforderlichen Zusatzsensor, über bekannte physikalische Zusammenhänge im Fahrzeug eine Überwachung der für die Fahrdyanmikregelung wichtigen Signalgrößen zu ermöglichen. Dadurch kann redundante Mehrfachsensorik eingespart werden. Im Rahmen des modellbasierten Plausibilisierungsansatzes des Magna Steyr Global Chassis Controllers werden mathematischen Fahrzeugmodelle, welche geometrische Modelle, stationäre bzw. quasistationäre Modelle und nichtlineare Modellen mit Berücksichtigung von dynamischen Effekten umfassen, verwendet. Die Vorteile dieses Ansatzes liegen vor allem darin, dass keine zusätzliche Sensorik am Fahrzeug verbaut werden muss. Demgegenüber steht als Nachteil ein höherer benötigter Rechenaufwand für die Modellberechnungen. Als Ausgangsgröße der Sensorfehlererkennung wird ein Residuumvektor generiert. Die Residuen geben dabei jeweils

die Differenz zwischen Messung und den zugehörigen berechneten Werten aus dem mathematischen Modell an und haben im idealen fehlerfreien Fall den Wert Null. In realen Fahrsituation treten z.B. durch Rauschen und Störeinflüsse Abweichungen im Messignal und aufgrund der begrenzten Modellierungstiefe auch Abweichungen in den Modellrechenergebnissen auf, wodurch letztlich die Residuen auch im fehlerfreien Fall mehr oder weniger stark von diesem Idealwert abweichen. Ein Fehlerfall ist durch eine genügend große Abweichung des Residuums, in der Regel durch Überschreitung einer entsprechenden Fehlerschranke, erkennbar. Die Fehlerschrankenwerte selbst werden zudem in Abhängigkeit von der Fahrsituation variabel angepasst, da z.B. bei stark nichtlinearen Fahrzuständen die Modellgültigkeiten und -genauigkeiten abnehmen. Im Rahmen der Signalfehlererkennung wird allgemein zwischen Fehlererkennung (Fault Detection, FD) und Fehlerisolierung (Fault Isolation, FI) unterschieden [3]. Das Fehlerisolierungsmodul (FI) übernimmt dabei vom Fehlererkennungsmodul (FD) den aktuellen Residuenvektor und führt im Fehlerfall über statistische und logische Auswertungen die Isolierung des Residuenvektorfehlerbildes auf einen speziellen fehlerhaften Sensorsignalwert zurück. Im Allgemeinen beschränkt man sich im Rahmen der Signalplausibilisierung auf die Erkennung von Einfachfehlern in der Fahrzeugsensorik.

Eingagnsignalplausibilisierung: max. Fehlererkennungszeiten		
Sensor	Längsdynamik	Querdynamik bis 6 $\frac{m}{s^2}$
Gierratensensor	$\approx$ 100 ms	$\approx$ 200 ms
Querbeschleunigungssensor	$\approx$ 100 ms	$\approx$ 200 ms
Lenkwinkelsensor	$\approx$ 200 ms	$\approx$ 300 ms
Raddrehzahlen	$\approx$ 100 ms	$\approx$ 200 ms

Tabelle 1: Anforderungen an die Fehlererkennungszeit

Da moderne Fahrdynamikregelsysteme hohen Sicherheitsanforderungen genügen und in kritischen Fahrsituationen sehr schnell reagieren müssen, ist eine entsprechend rasche Erkennung von Sensorfehlern erforderlich. Um falsche Regeleingriffe aufgrund von fehlerhaften Sensorsignalwerten zu verhindern, ist eine Erkennung des Sensorfehlers vor einem etwaigen Reglereingriff notwendig. Die Eingriffszeit eines Regelsystems in die Fahrdynamik von Fahrzeugen wird dabei hauptsächlich von der Dynamik der verwendeten mechatronischen Aktuatoren bestimmt. Für Bremseingriffe sind dies z.B. die Dauer des Druckaufbaues im Bremszylinder, also ca. 200 ms [10]. Torque Vectoring- und Hinterachslenkungseingriffe haben wesentlich kürzere Eingriffszeiten von ca. 100 ms. Auf dieser Basis sind in Abhängigkeit von der Fahrsituation in Tabelle 1 die Anforderungen an die maximale Fehlererkennungszeit der Signalplausibilisierung des Magna Steyr Global Chassis Controllers dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass neben der Abhängigkeit von der Querbeschleunigung die Fehlererkennungszeiten auch von der Fahrgeschwindigkeit abhängig sind. Für hochdynamische Fahrzustände daher auch längere Erkennungszeiten von ca. 300 ms notwendig.

3.2 Fahrzustandsbeobachter

Der Fahrzustandsbeobachter ermittelt aus den plausibilisierten Sensorsignalmesswerten weitere, nicht direkt über Sensoren gemessene Fahrzustandsgrößen, wie die Fahrzeuglängsgeschwindigkeit $\hat{v}_x$ und die Fahrzeugquergeschwindigkeit $\hat{v}_y$ im Schwerpunkt des Fahrzeuges. Aus diesen Informationen werden weitere Fahrzustandsgrößen ermittelt, wie z.B. der Schwimmwinkel $\hat{\beta}$ im Fahrzeugschwerpunkt über

$$\hat{\beta} = \arctan\left(\frac{\hat{v}_y}{\hat{v}_x}\right).$$

Im Fahrzustandsbeobachter des Magna Steyr Global Chassis Controllers wird dazu ein Fahrzeugzweispurmodell mit nichtlinearer Reifencharakteristik und adaptiver Anpassung der Reifenschräglaufsteifigkeit eingesetzt. Aufgrund des stark nichtlinearen Fahrzeugverhaltens bei dynamischen Fahrmanövern ist die Schätzgüte des Fahrzustandsbeobachters stark abhängig von der Fahrsituation und den Umgebungsbedingungen wie z.B. dem aktuell vorhandenen Fahrbahnreibwert.

3.3 Sensordatenfusion

Das Sensorfusionsmodul versieht die fehlerfreien Sensorsignalmesswerte nach dem Durchlaufen einer abschließenden Signalverarbeitungsstufe mit einem positiven Signalgültigkeitswert und stellt die Signale in der Folge den weiteren Softwaremodulen des Fahrdynamikreglers zur Verfügung. Ist ein Signal von der Signalplausibilisierungsstufe als fehlerbehaftet erkannt worden, wird im Rahmen der Ersatzwertgenerierung versucht über eine Fusionierung der fehlerfreien Messdaten und der geschätzten Fahrdynamikgrößen aus dem Fahrzustandsbeobachter, einen möglichst guten Ersatzwert für das fehlerbehaftete Signal zu generieren. Dazu werden analytische Redundanzen zwischen fehlerfrei erhaltenen Sensorsignalen und den Schätzergebnissen aus dem nichtlinearen Fahrzeugzweispurmodell des Fahrzustandsbeobachters ausgenützt.

Für den Fall der stationären Kreisfahrt bei konstanter Quergeschwindigkeit a_y, konstanter Fahrgeschwindigkeit v und konstantem Krümmungsradius ρ kann zur Ersatzwertgenerierung beispielsweise der einfache Zusammenhang

$$a_y = \frac{v^2}{\rho} = v \cdot \left(\dot{\beta} + \dot{\psi}\right) \approx v \cdot \dot{\psi}$$

verwendet werden. Wird ein konstanter Schwimmwinkel β angenommen (d.h. $\dot{\beta} = 0$), kann für die angeführte Fahrsituation der Zusammenhang $a_y \approx v \cdot \dot{\psi}$ z.B. zur Rekonstruktion der Querbeschleunigung a_y oder der Gierrate $\dot{\psi}$ herangezogen werden. Dabei kann jeweils die fehlerfreie Signalgröße direkt vom Sensorsignalwert, und die aktuelle Fahrgeschwindigkeit vom Fahrzustandsbeobachter verwendet werden. Da nicht in allen Fahrsituationen eine Ersatzwertgenerierung mit ausreichend hoher Genauigkeit möglich ist, wird über die Ablaufsteuerung des Fahrdyanmikreglers bei nichtkorrigierbaren Signalfehlern entsprechend in den Regelungsablauf eingegriffen. Die Eingriffe reichen dabei vom Aufweiten von Regelschwellen bis hin zur Ausblendung von Regleingriffen.

4 Simulationsergebnisse auf Basis von Fahrversuchsmessungen

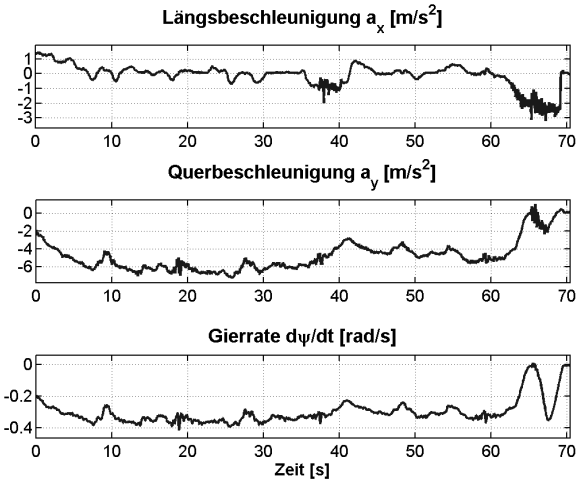
Die Ergebnisse der dargestellten Eingangssignalverarbeitungsmodule werden im Folgenden beispielhaft für quasistationäre und dynamische Fahrmanöver dargestellt und diskutiert. Als Standardmanöver für quasistationäres Fahrzeugverhalten hat sich im Rahmen von Fahrdynamikmessungen das Fahrmanöver Stationäre Kreisfahrt nach [1] etabliert. Als realitätsnahes dynamisches Fahrmanöver wird eine allgemeinen Landstraßenmessfahrt betrachtet. Im Rahmen von beiden Fahrmanövern wird dabei jeweils ein Fehlerbild mit Gierratenfehler und ein Fehlerbild mit Querbeschleunigungsfehler betrachtet.

4.1 Simulationsergebnisse stationäre Kreisfahrt

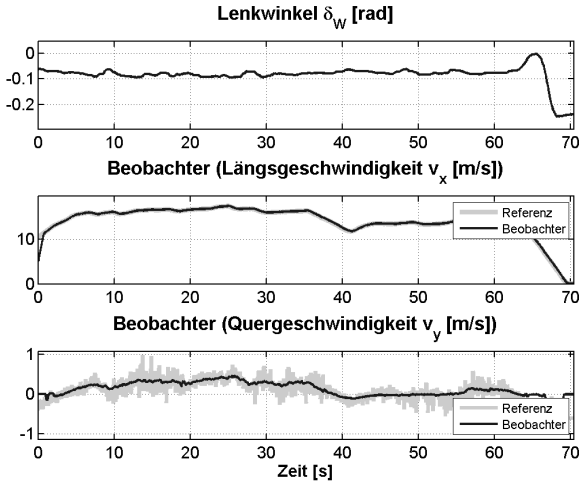
Die Abbildungen 3 und 4 zeigen ein stationäres Kreisfahrtsmanöver mit konstantem Lenkwinkeleinschlag und konstanter Geschwindigkeit bei einer durchschnittlichen Querbeschleunigung von ca. $6\frac{m}{s^2}$. Die wesentlichsten Sensorsignale der Fahrmanövermessungen sowie die Ergebnisse für die aktuelle Fahrzeuglängs- und -quergeschwindigkeit aus dem nichtlinearen Fahrzustandsbeobachter sind dabei jeweils in den Abbildungen 3.1 und 3.2 bzw. 4.1 und 4.2 dargestellt. In weiterer Folge werden dem gemessenen Sensorsignal in einer Offline-Simulation zum einen ein Querbeschleunigungsfehler und zum anderen ein Gierratenfehler überlagert.

In Abbildung 3.3 werden dem gemessenen Querbeschleunigungssignal zunächst mehrere trapezförmige Querbeschleunigungsfehler überlagert. Die Signalgültigkeitsbewertung zeigt als Ergebnis des Sensorsignalplausibilisierungsmodules, dass die aufgeschalteten Fehler mit geringen Verzögerungszeiten erkannt werden (Signalgültigkeitswert 0). Entsprechend umgekehrt wird auch das Querbeschleunigungssignal im Signalgültigkeitswert wiederrum als fehlerfrei (Signalgültigkeitswert 1) gekennzeichnet, sobald der aufgeschaltete Signalfehler verschwindet. Zur Verifikation des Signalplausibilisierungsmoduls hinsichtlich Gierratenfehler wird in analoger Weise in Abbildung 4.3 ein Gierratenfehler den gemessenen Signalwerten aus dem Fahrversuch überlagert. Auch in diesem Fehlerfall ist im Rahmen des untersuchten quasistationären Fahrzustandes eine Signalplausibilisierung mit geringen Verzögerungszeiten darstellbar.

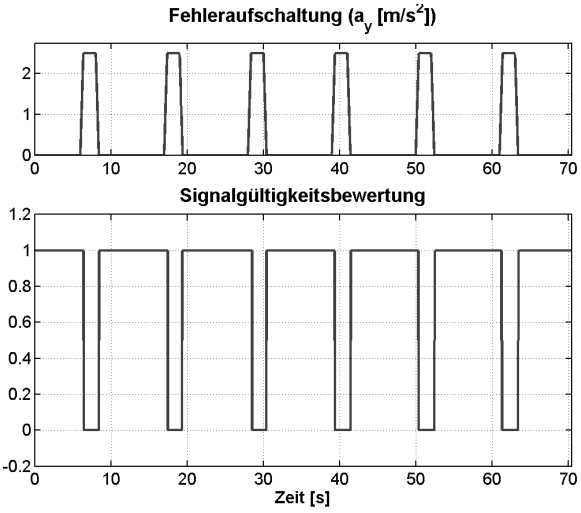
Zur Verifikation des Sensorfusionsmodules ist in Abbildung 3.4 für Querbeschleunigungsfehler bzw. in Abbildung 4.4 für Gierratenfehler schließlich das Ergebnis der Ersatzwerteberechnung dargestellt. Tritt ein entsprechender Signalfehler auf, wird nach der Fehlererkennung durch das Signalplausibilisierungsmodul auf die modellbasiert ermittelten Ersatzwerte des betroffenen Signales umgeschaltet. Das in dieser Form plausibilisierte und bei Bedarf korrigierte Sensorsignal findet dann in weiterer Folge als Eingangssignal für die weiteren Softwaremodule des integrierten Fahrdyanmikreglers Verwendung. In den Abbildungen 3.4 und 4.4 ist zur Verifikation des ermittelten Ersatzwertsignals jeweils auch das fehlerfreie Referenzsignal mit dargestellt.



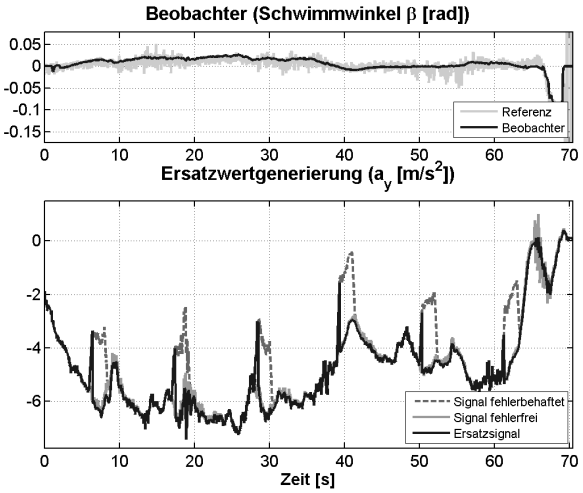
(3.1) Fahrmanövermessungen



(3.2) Fahrmanövermessungen, Beobachterergebnisse

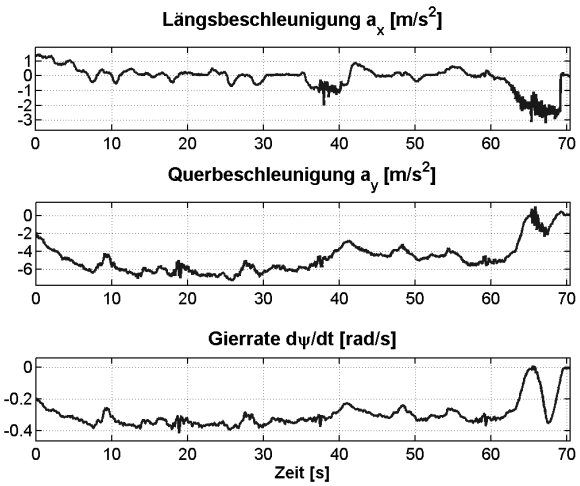


(3.3) Fehleraufschaltung und Fehlererkennung

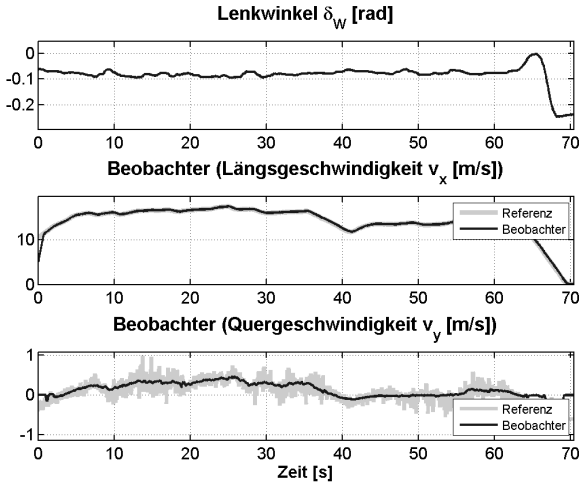


(3.4) Beobachterergebnis und Ersatzwertberechnung

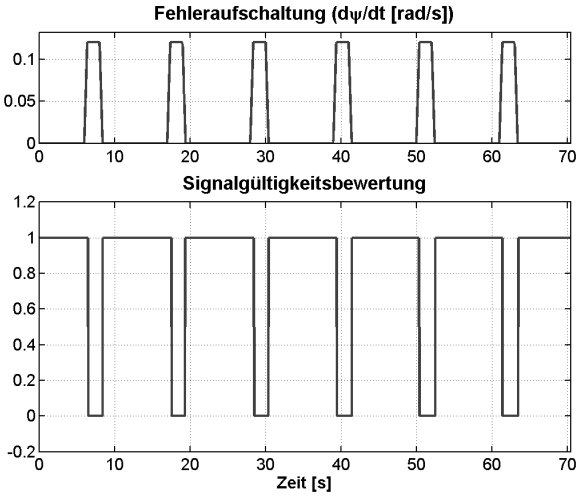
Abbildung 3: Messfahrt Stationäre Kreisfahrt, Querbeschleunigungsfehleraufschaltung



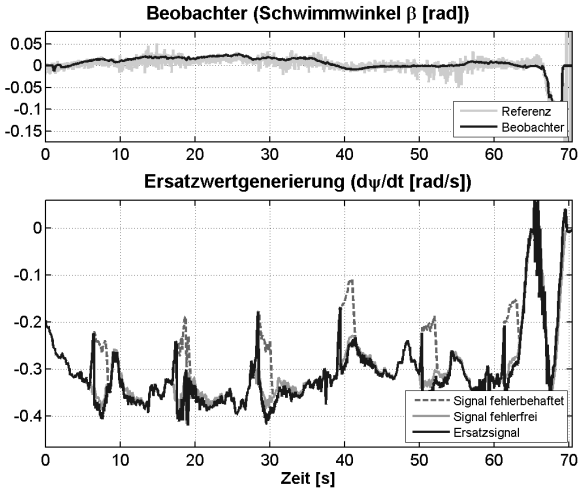
(4.1) Fahrmanövermessungen



(4.2) Fahrmanövermessungen, Beobachterergebnisse



(4.3) Fehleraufschaltung und Fehlererkennung



(4.4) Beobachterergebnis und Ersatzwertberechnung

Abbildung 4: Messfahrt Stationäre Kreisfahrt, Gierratenfehleraufschaltung

4.2 Simulationsergebnisse dynamische Landstraßenfahrt

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 sowie 6.1 und 6.2 zeigen eine typische Landstraßenmessfahrt mit relativ hohem Querdynamikanteil. Die Ergebnisse des nichtlinearen Fahrzustandsbeobachters für die Fahrzeuglängs- und -quergeschwindigkeit sind zusammen mit den entsprechenden Referenzmessgrößen in den Abbildungen 5.2 und 6.2 dargestellt. Die Fehleraufschaltung auf die gemessenen Sensorsignale aus dem Fahrversuch erfolgt in Abbildung 5.3 und 6.3 in der Form, dass die einzelnen Fehlersignalaufschaltungen sowohl im nichtlinearen Fahrzustandsbereich bei ca. $5,5\frac{m}{s^2}$, im linearen Fahrzustandsbereich bei ca. $2,5\frac{m}{s^2}$ als auch bei vernachlässigbar kleiner Querbeschleunigung erfolgen. Wie zu erkennen ist werden alle Einzelfehler sowohl im Querbeschleunigungsfehlerfall Abbildung 5.3 als auch im Gierratenfehlerfall Abbildung 6.3 erkannt. Im nichtlinearen Fahrzustandsbereich ist die Verzögerungszeit bis zur Bewertung des Signals als fehlerhaft jedoch deutlich größer als im linearen Fahrzustandsbereich. Dies ist auf die aufgeweiteten Fehlererkennungsgrenzen für nichtlineare dynamische Fahrzustände zurückzuführen. Da die Modellgenauigkeit mit zunehmender Nichtlinearität des Fahrzustandes abnimmt, müssen die Fehlererkennungschranken in Abhängigkeit von der Fahrsituation entsprechend aufgeweitet werden, um Fehlalarme mit hoher Sicherheit vermeiden zu können. Die Festlegung dieser Parametrierungseinstellungen im Signalplausibilisierungsmodul bedarf daher eines umfangreichen Abstimmungsaufwandes um einerseits hohe Fehlererkennungsraten zu ermöglichen und dabei andererseits etwaige Fehlalarme in den verschiedensten Fahrsituationen trotzdem mit hoher Sicherheit ausschließen zu können.

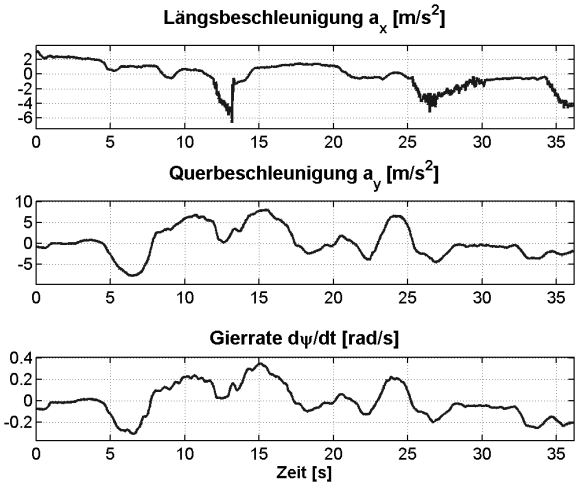
4.3 Übersicht Simulationsergebnisse

Im Rahmen der Entwicklung und Validierung der Eingangssignalverarbeitungsmodule wurde das dargestellte Konzept umfangreichen Simulationsuntersuchungen bei unterschiedlichen Fahrsituationen mit Einzelfehleraufschaltung unterzogen. Tabelle 2 zeigt

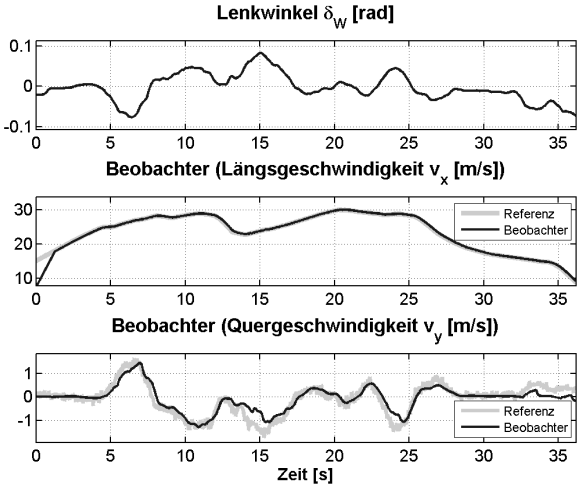
Mindestgröße des erkennbaren Signalfehlers bei Einfachfehlerauswertung	
Sensor	Fehlermindenstgröße
Gierratensensor	$\approx$ 7,0 Grad/s
Querbeschleunigungssensor	$\approx$ 2,5 m/s^2
Lenkwinkelsensor	$\approx$ 7,0 Grad
Raddrehzahlen	$\approx$ 4,0 rad/s

Tabelle 2: Signalmindestfehlergrößen der Eingangsignalplausibilisierung

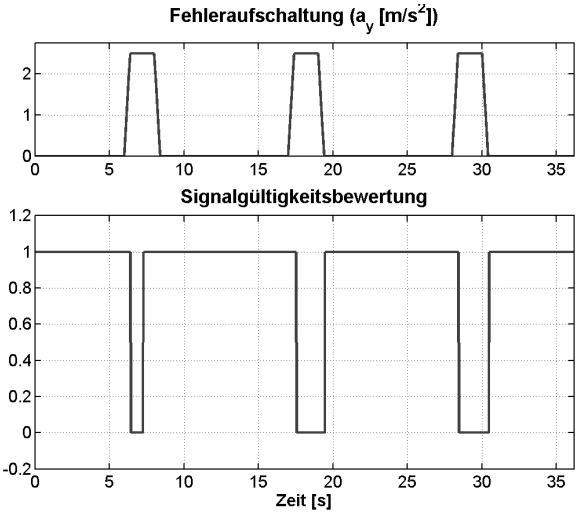
zusammengefasst die Ergebisse hinsichtlich der Fehlermindestgrößen der plausibilisierten Sensorsignale, welche im Rahmen der Eingangsignalverarbeitung des Magna Steyr Global Chassis Controllers in weiten Fahrsituationsbereichen dargestellt werden können.



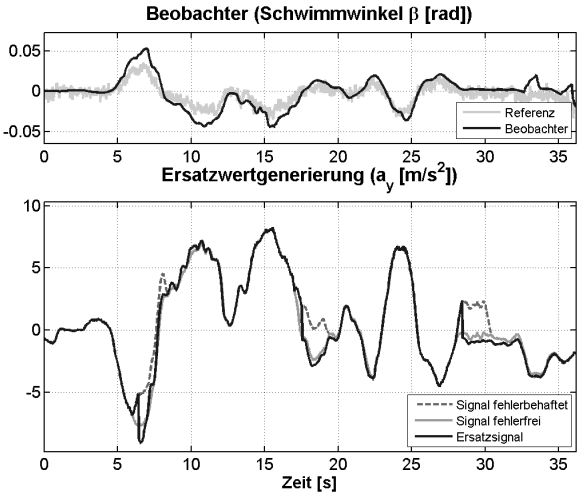
(5.1) Fahrmanövermessungen



(5.2) Fahrmanövermessungen, Beobachterergebnisse

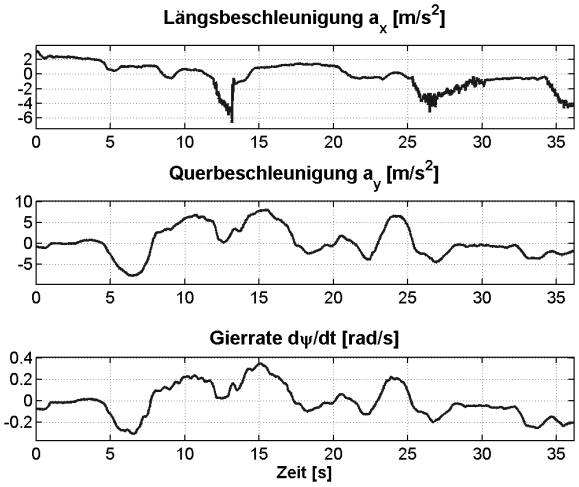


(5.3) Fehleraufschaltung und Fehlererkennung

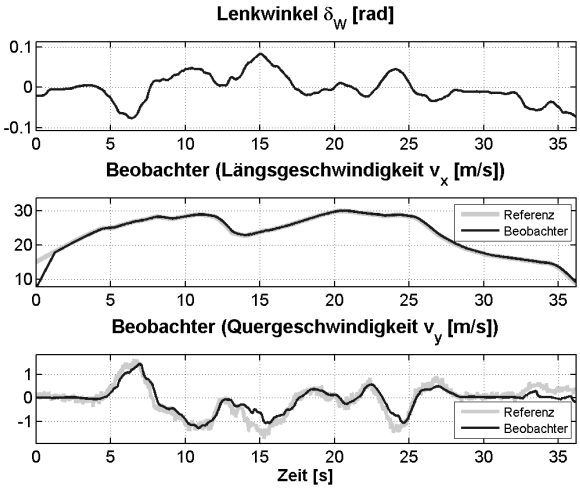


(5.4) Beobachterergebnis und Ersatzwertberechnung

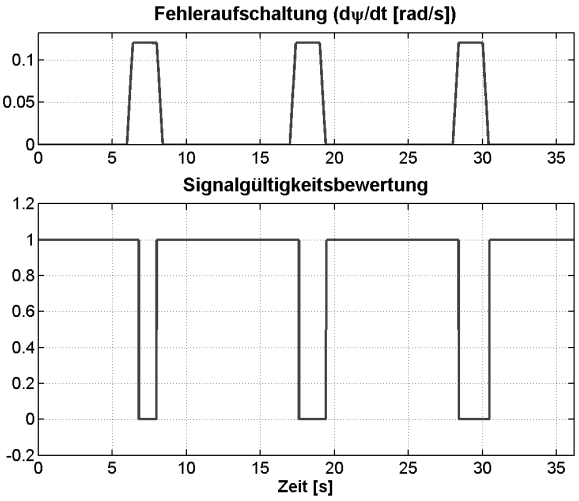
Abbildung 5: Messfahrt Landstraße, Querbeschleunigungsfehleraufschaltung



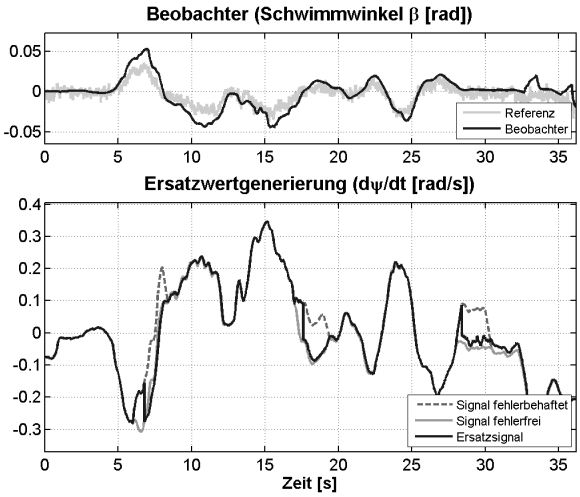
(6.1) Fahrmanövermessungen



(6.2) Fahrmanövermessungen, Beobachterergebnisse



(6.3) Fehleraufschaltung und Fehlererkennung



(6.4) Beobachterergebnis und Ersatzwertberechnung

Abbildung 6: Messfahrt Landstraße, Gierratenfehleraufschaltung

5 Zusammenfassung

Die steigenden Kundenanforderungen an fahrdynamische Qualitäten wie größtmögliche Fahrsicherheit, Verbesserung des Fahrkomforts und Erhöhung der Fahrfreude, sowie die zunehmende Erweiterung der Funktionspalette an Fahrerassistenzfunktionen weisen für die Zukunft auf eine stark steigende Anzahl an Fahrdynamikregelfunktionen im Fahrzeug hin. Die derzeitige Funktionstopologie von mehreren parallel im Fahrzeug arbeitenden Fahrdynamikregelfunktionen ist daher hinsichtlich dieser neuen Anforderungen zunehmend in Frage zu stellen. Neuere Ansätze in der Softwarearchitektur von Fahrdynamikregelfunktionen zielen auf ein integriertes Gesamtkonzept ab, um Hardware- und Softwareredundanzen zu reduzieren und Synergieeffekte gezielt nutzen zu können. Diese Konzepte bieten zudem die Möglichkeit unbeabsichtigte gegenseitige Beeinflussungen von einzelnen Fahrdynamikregelfunktionen in verschiedenen Fahrzuständen wirksam zu verhindern. Im Rahmen des vorliegenden Beitrages wurde zunächst die Funktionsarchitektur eines derartigen integrierten Gesamtkonzeptes am Beispiel des Magna Steyr Global Chassis Controllers vorgestellt, bevor nachfolgend näher auf die grundsätzliche Funktion und die Verifikation der Eingangssignalverarbeitung eingegangen wurde. Das zentrale Eingangssignalverarbeitungsmodul stellt einen wesentlichen Bestandteil eines integrierten Fahrdynamikreglers dar. Dabei werden alle durch Sensoren erfasste fahrdynamisch relevanten Bewegungsgrößen über einen modellbasierten Plausibilisierungsansatz überprüft, um sie den nachfolgenden Fahrdynamikregelfunktionen als verlässliche Sensorsignalmesswerte zur Verfügung stellen zu können. Da die gemessenen Sensorgrößen für alle nachfolgenden Steuer- und Regelfunktionen der aktiven Fahrsicherheit des Fahrzeuges zentral an einer Stelle auf Plausibilität überprüft werden, fällt diesem Modul im Rahmen eines integrierten Regleransatzes eine besondere Bedeutung zu. Sensorausfälle bzw. Sensorfehlfunktionen können, wenn nicht rechtzeitig erkannt, die Funktionen der nachfolgenden Fahrdynamikregelung erheblich negativ beeinflussen. Im Rahmen der Eingangssignalverarbeitung des Magna Steyr Global Chassis Controllers wird eine Signalplausibilisierung, eine Fahrzustandsbeobachtung und eine Sensordatenfusion durchgeführt. Wie die beispielhaft dargestellten Simulationsergebnisse zeigen, ist es durch dieses dreistufige Konzept möglich für weite Fahrsituationsbereiche plausibilisierte Sensor- und Fahrzustandsbeobachterdaten als solide Basis für Fahrdyanmikreglerfunktionen bereitstellen zu können.

Literatur

[1] *DIN ISO 4138 Strassenfahrzeuge, Stationäre Kreisfahrt.* Juli 1984

[2] Börner, M.: Adaptive Querdynamikmodelle für Personenkraftfahrzeuge - Fahrzustandserkennung und Sensorfehlertoleranz. In: *VDI-Fortschritt Berichte, Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik* 563 (2004)

[3] Chen, J. ; Patton, R. J.: *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems.* Kluwer Academic Publishers, 1999

[4] Ding, E.: Neues Konzept zur redundanten Überwachung von Querbeschleunigungssensoren. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 107 (2005), Nr. 4

[5] Isermann, R.: Diagnosis Methods for Electronic Controlled Vehicles. In: *Vehicle System Dynamics* 36 (2001), S. 77–117. – Swets & Zeitlinger

[6] Kober, W. ; Baier, S. ; Angeringer, U. ; Doczy, S. ; John, M. ; Schaffernak, R.: Softwarearchitektur integrierter Fahrdynamikregler am Beispiel des Magna Steyr Global Chassis Controllers. In: *Elektrotechnik und Informationstechnik, H. 10: Das Auto wird elektrisch* 123 (2006), Oktober, Nr. 10, S. 437–440

[7] Kober, W. ; Ehmann, M. ; Butz, T.: Simulationsgestützte Entwicklung der integrierten Fahrdynamikregelung von Magna Steyr. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 109 (2007), Nr. 10

[8] Kober, W. ; Ramusch, F.: Fahrdynamikbeeinflussung durch kombinierten Einsatz von Hinterachsregelungssystemen. In: *11. Internationale Tagung Reifen-Fahrwerk-Fahrbahn, Hannover*, VDI, Oktober 2007

[9] Munnix, P.: Entwicklung einer robusten Sensorüberwachung für den integrierten Fahrwerksregler. In: *11. Aachener Kolloquium Fahrzeug und Motorentechnik* (2002), S. 1111–1125

[10] Schulz, H. G.: *Modellgestützte Fehlerdiagnose der Sensoren für die Fahrzeug-Querdynamik*, Universität Duisburg-Essen, Diss., 2005

Echtzeitableitungsschätzung am Beispiel automotiver Anwendungen

Josef Zehetner, Martin Horn
Technische Universität Graz
Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik
Kopernikusgasse 24/II, 8010 Graz
josef.zehetner@gmail.com, martin.horn@tugraz.at

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt die am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik entwickelte *Derivative Estimation Toolbox* (DET) an Hand von zwei Anwendungen aus dem automotiven Bereich vor. Hierbei handelt es sich um ein auf Matlab/Simulink basierendes Werkzeug zur Schätzung zeitlicher Ableitungen beliebiger Ordnung von Messsignalen in Echtzeit. Die Herleitung des mathematischen Verfahrens, welches im Wesentlichen auf einer Taylorreihendarstellung des Messsignals, der Anwendung der Laplace-Transformation sowie auf Methoden der Operatorenrechnung basiert, wird an einem einfachen Beispiel demonstriert. Die korrekte Implementation des Verfahrens mittels einer Simulink S-Function wird an Hand zweier automotiver Anwendungen, der Positionsregelung einer Drosselklappe sowie der Ableitungsschätzung an einem ABS-Prüfstand, gezeigt.

1 Einleitung

Die numerische Ermittlung der zeitlichen Ableitungen von abgetasteten Messgrößen in Echtzeit ist eine wichtige und oft schwierige Aufgabenstellung. Die Zeitableitungen werden für zahlreiche Anwendungen, wie z.B. die Umsetzung von Regelgesetzen, Zustandsbeobachtung oder Parameterschätzung, benötigt. Ein Hauptproblem stellt hierbei das Mess- bzw. Quantisierungsrauschen dar, eine Vorfilterung des Messsignals ist daher meist unumgänglich. Zahlreiche Verfahren zur Schätzung von zeitlichen Ableitungen sind in der Literatur zu finden. Ein Überblick über einige Ansätze wird etwa in [2] gegeben.

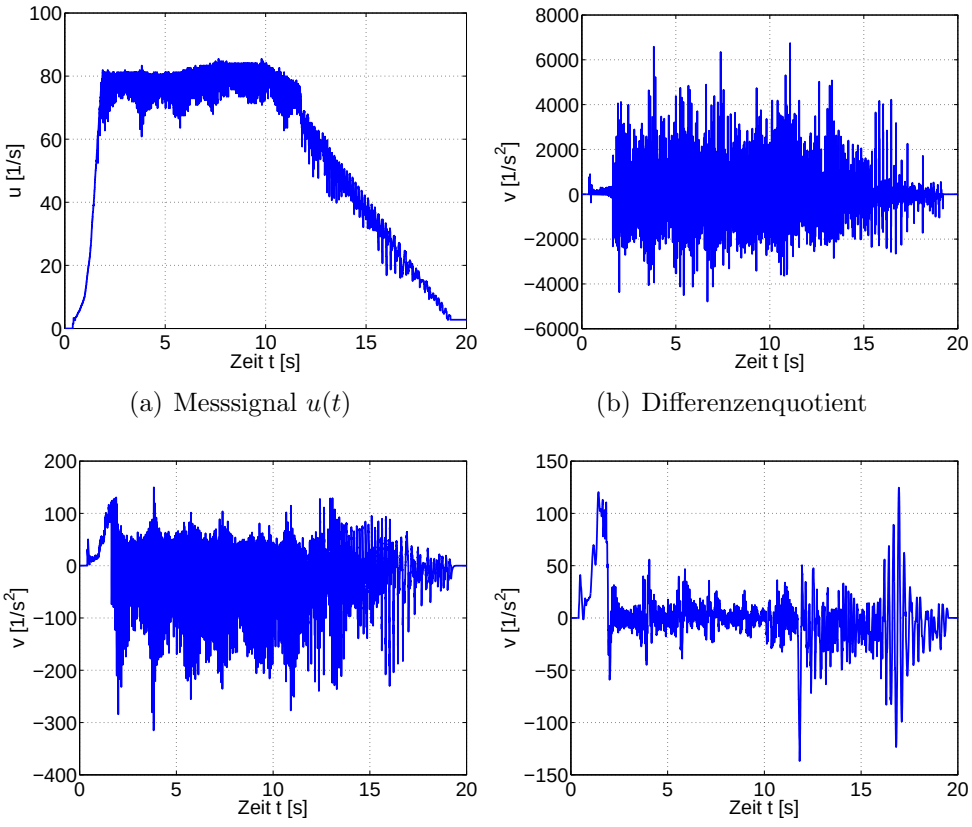
An Hand eines einleitenden Beispiels sollen die Probleme bei der Ermittlung von Zeitableitungen von Messsignalen aufgezeigt werden. Zu diesem Zweck wurden an einem am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik entworfenen und aufgebauten ABS-Prüfstand Messungen durchgeführt. In Abbildung 1(a) ist der Verlauf eines mit der Abtastzeit $T_s = 0.002\,\text{sec}$ abgetasteten Messsignals $u(t)$ dargestellt. Es handelt sich somit um die Zahlenfolge $(u_i) = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ mit $u_i = u(i\,T_s), i = 0, 1, 2, \ldots$. Gesucht sei die

erste Ableitung von $u(t)$ bezüglich der Zeit t, repräsentiert durch die Zahlenfolge (v_i), wobei $v_i = du(t)/dt|_{t=i\,T_s}$ gilt. Es werden drei verschiedene Verfahren zur Ermittlung der Ableitung verwendet:

1. Differenzenquotient
$$v_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{T_s}$$

2. Linearer Filter
$$v_i \approx \frac{1}{\tau}(u_i - u_{i-1}) + v_{i-1}e^{-T_s/\tau} \text{ mit } \tau = 0.05\,\text{sec}$$

3. Die in diesem Artikel vorgestellte *Derivative Estimation Toolbox* (DET), mit den später detailliert erläuterten Parametern
$$j = 1,\ N = 2,\ T = 0.4$$



(a) Messsignal $u(t)$ (b) Differenzenquotient

(c) Linearer Filter (d) Derivative Estimation Toolbox

Abbildung 1: Ein einführendes Beispiel

Die durch Anwendung des entsprechenden Verfahrens generierten Ergebnisse sind in den Abbildungen 1(b)-1(d) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass bei der mit der DET ermittelten Ableitung, das Rauschen gegenüber Variante 1 und 2 deutlich reduziert werden konnte.

Erste Anwendungen der Methode dieses Beitrags sowie eine Echtzeitimplementierung, die so genannte *Derivative Estimation Toolbox*, wurden bereits in [15, 16] vorgestellt. Ausgehend von einer Taylorreihendarstellung der Messgröße wird unter Anwendung der Laplace-Transformation und der Operatorenrechnung ein Verfahren zur Berechnung von zeitlichen Ableitungen entworfen und in einem Echtzeitsystem implementiert. Die vorliegende Arbeit zeigt die grundlegende Idee des Verfahrens an Hand eines einfachen Beispiels. Weiters werden zwei Anwendungen aus dem automotiven Bereich vorgestellt, bei denen die DET zum Einsatz gelangt: Die Positionsregelung einer Drosselklappe mittels Sliding Mode Control und, wie bereits gezeigt, eine Ableitungsschätzung an einem ABS-Prüfstand.

Die mathematischen Grundlagen des Verfahrens wurden unter dem Namen *algebraische Ableitungsschätzung* auf mehreren internationalen Sommerschulen [10, 11, 12] vorgestellt und basieren auf den Ideen der *Differentiellen Algebra* [3, 4, 5].

Dieser Artikel ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 werden die mathematischen Grundlagen des Verfahrens an Hand eines einfachen Beispiels wiedergegeben. Die *Derivative Estimation Toolbox* wird in Abschnitt 3 vorgestellt, in Abschnitt 4 werden die Ergebnisse einer Echtzeitanwendung präsentiert. Abschnitt 5 enthält eine Zusammenfassung der Arbeit.

2 Grundlagen

2.1 Verfahren zur Schätzung von Zeitableitungen

Gegeben sei der *bekannte* Verlauf der Messgröße $y(t)$, deren zeitliche Ableitungen

$$y^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} y(t) \text{ mit } j = 0, 1, 2, \ldots$$

beliebiger Ordnung ermittelt werden sollen. Ausgangsbasis des Verfahrens ist die Darstellung von $y(t)$ für $t \geq 0$ als Taylorreihe der Ordnung N. Der Ansatz im Zeitbereich lautet

$$y(t) \approx y_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \frac{t^j}{j!}. \tag{1}$$

$y_N(t)$ sei die Approximation der Ordnung N für $y(t)$. Die *konstanten* Koeffizienten α_j entsprechen den j-ten Ableitungen von $y(t)$ an der Stelle $t = 0$, d.h. es gilt

$$\alpha_j = y^{(j)}\big|_{t=0} \quad \text{mit } j = 0, \ldots, N. \tag{2}$$

Es soll nun eine Berechnungsvorschrift entworfen werden, um diese *unbekannten* Koeffizienten α_j des Polynoms $y_N(t)$ mit Hilfe der bekannten Messgröße $y(t)$ zu ermitteln.

Das Grundprinzip des Verfahrens soll an Hand eines Beispiels gezeigt werden. Ein Schätzwert für die erste Ableitung $y^{(1)}$ der Messgröße $y(t)$ soll ermittelt werden, d.h. der Parameter α_1 der Taylorreihe ist gesucht. Die Ordnung der Taylor-Approximation wird der Einfachheit halber mit $N = 2$ festgelegt. Somit folgt

$$y(t) \approx y_2(t) = \alpha_0 + \alpha_1\, t + \alpha_2\, \frac{t^2}{2} \tag{3}$$

mit

$$\alpha_0 \approx y^{(0)}\big|_{t=0}\,,\ \alpha_1 \approx y^{(1)}\big|_{t=0}\,,\ \alpha_2 \approx y^{(2)}\big|_{t=0}\,.$$

Mit Hilfe der *Laplace-Transformation*

$$y_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y_2(s) = \int_0^\infty y_2(t) e^{-st} dt$$

folgt für (3) die Darstellung

$$Y_2(s) = \alpha_0 \frac{1}{s} + \alpha_1 \frac{1}{s^2} + \alpha_2 \frac{1}{s^3} \tag{4}$$

im Bildbereich. Um einen expliziten Ausdruck für α_1 zu erhalten, sind nun einige Umformungen nötig. Zunächst werden alle in (4) auftretenden Divisionen durch s über eine Multiplikation der gesamten Gleichung mit s^3 eliminiert:

$$s^3 Y_2(s) = \alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2. \tag{5}$$

Durch einmaliges Ableiten dieser Gleichung nach s, also

$$3s^2 Y_2(s) + s^3 \frac{d}{ds} Y_2(s) = 2\alpha_0 s + \alpha_1, \tag{6}$$

wird der Parameter α_2 zum Verschwinden gebracht. Eine Multiplikation von (6) mit $1/s$ führt zu

$$3s Y_2(s) + s^2 \frac{d}{ds} Y_2(s) = 2\alpha_0 + \frac{1}{s}\alpha_1 \tag{7}$$

und die anschließende Ableitung nach s ergibt schließlich

$$3 Y_2(s) + 5s \frac{d}{ds} Y_2(s) + s^2 \frac{d^2}{ds^2} Y_2(s) = -\frac{1}{s^2}\alpha_1, \tag{8}$$

wodurch auch der Parameter α_0 eliminiert wurde. (8) liefert einen Ausdruck für α_1 im Bildbereich. Auf der linken Seite von (8) ist s^2 die höchste auftretende Potenz von s, was einer zweifachen zeitlichen Ableitung von $y(t)$ im Zeitbereich entspricht. Um dies

zu verhindern, wird (8) mit $1/s^3$ multipliziert. Dies hat zur Folge, dass alle auftretenden Ausdrücke in $y_2(t)$ nach erfolgter Rücktransformation in den Zeitbereich mindestens einmal integriert werden. Somit folgt

$$\frac{1}{s^5}\alpha_1 = -\frac{3}{s^3}Y_2(s) - \frac{5}{s^2}\frac{d}{ds}Y_2(s) - \frac{1}{s}\frac{d^2}{ds^2}Y_2(s). \tag{9}$$

Die Anwendung der inversen Laplace-Transformation liefert für die linke Seite von (9) mit

$$\frac{1}{s^n} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{s^5}\alpha_1 \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{t^4}{24}\alpha_1$$

im Zeitbereich. Die Rücktransformation der rechten Seite erfolgt durch Anwendung des Zusammenhangs

$$\frac{1}{s^n}\frac{d^m}{ds^m}Y(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{(-1)^m}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}\tau^m\, y(\tau)d\tau,\ m \geq 0,\ n \geq 1.$$

Diese Korrespondenz resultiert aus der Kombination des *Differentiationssatzes*

$$F(s) := \frac{d^m}{ds^m}Y(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (-1)^m\, t^m\, y(t) =: f(t)$$

und des *Integrationssatzes*

$$\frac{1}{s^n}F(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau,\ n \geq 1$$

der Laplace-Transformation [6].

Angewandt auf die Glieder der rechten Seite von (9) folgt somit ein Ausdruck für (9) im Zeitbereich

$$\frac{t^4}{24}\alpha_1 = -\frac{3}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 y_2(\tau)\, d\tau + 5\int_0^t (t-\tau)\tau\, y_2(\tau)\, d\tau - \int_0^t \tau^2\, y_2(\tau)\, d\tau,$$

bzw. umgeformt und zusammengefasst die einfache Berechnungsvorschrift

$$\alpha_1 = \int_0^t \frac{1}{t^4}\left[-36(t-\tau)^2 + 120(t-\tau)\tau\ - 24\tau^2\right] y_2(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

zur Ermittlung von α_1 im Zeitbereich.

In (10) ist $y_2(t)$ ein (unbekannter) Schätzwert für die bekannte Messgröße $y(t)$. Für die tatsächliche Berechnung von $y^{(1)}$ wird daher naheliegenderweise $y(t)$ an Stelle von $y_2(t)$ verwendet. Somit folgt mit

$$\Pi_{1,2}(t,\tau) := \frac{1}{t^4}\left[-36(t-\tau)^2 + 120(t-\tau)\tau\ - 24\tau^2\right]$$

die Beziehung

$$y^{(1)}\big|_{t=0} \approx \int_0^t \Pi_{1,2}(t,\tau)\cdot y(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

die einen Schätzwert für die gesuchte erste Ableitung von $y(t)$ liefert.

Eine allgemeine Vorschrift zur Ermittlung der Funktion $\Pi_{j,N}$, wobei N die Ordnung der Taylor-Approximation und j die gesuchte Ableitung bezeichnen, ist in [15, 16] zu finden.

2.2 Weitere Überlegungen

Zur Ermittlung eines Schätzwertes für $y^{(1)}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit (11) wird der Verlauf von $y(t)$ im Intervall $[0, T]$ benötigt, wobei die so genannte *Zeitfensterbreite* $T > 0$ theoretisch beliebig klein gewählt werden kann. Eine Vergrößerung von T führt bei einem verrauschten Messsignal zu einer Verbesserung der Qualität der Schätzung (die Integration von $y(t)$ entspricht einer Tiefpassfilterung), hat jedoch eine Verschlechterung der Taylor-Approximation für kleine Werte von N zur Folge. In der Praxis hat eine große Zeitfensterbreite T einen erhöhten Rechenzeitaufwand zur Folge, da die Berechnung des Integrals mittels eines Näherungsverfahrens durchgeführt werden muss. Es muss daher ein Kompromiss zwischen ausreichender Qualität der Schätzung und vertretbarem Rechenaufwand gefunden werden.

Gleichung (11) berechnet $y^{(1)}$ für $t = 0$. Ein Schätzwert der gesuchten Ableitung für einen beliebigen Zeitpunkt $t_0 \geq 0$ kann mit

$$y^{(1)}\big|_{t=t_0} \approx \int_0^T \Pi_{1,2}(T,\tau)\cdot y(t_0+\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

berechnet werden. Das Berechnungsfenster „gleitet“ über die Messgröße, wie in Abbildung 2 zu sehen ist.

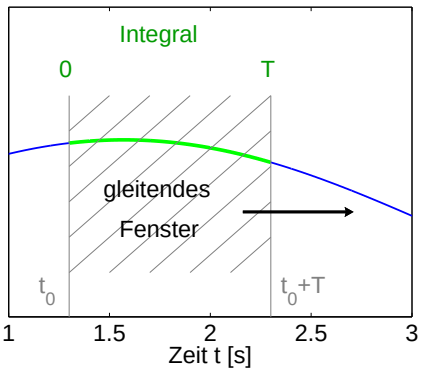


Abbildung 2: „Gleitendes“ Berechnungsfenster

Die Berechnung eines Schätzwertes für $y^{(1)}$ an der Stelle $t = t_0$ kann zunächst erst zum Zeitpunkt $t = t_0 + T$ erfolgen, da hierfür die Werte von $y(t)$ im Intervall $[t_0,\, t_0 + T]$

benötigt werden. Durch eine „Spiegelung“ des Messsignals an der y-Achse zum Zeitpunkt $t = t_0$ (siehe Abbildung 3) kann jedoch ein Schätzwert bereits zum Zeitpunkt t_0 berech-

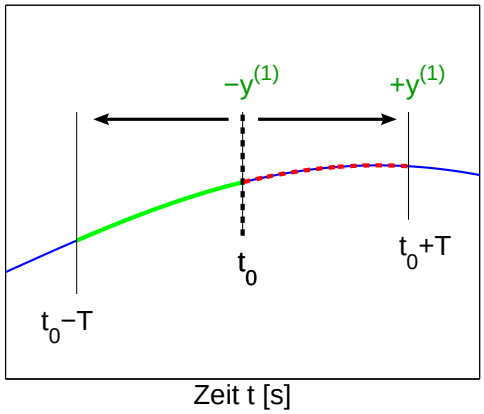


Abbildung 3: „Gespiegeltes“ Integrationsintervall

net werden. Die Taylorreihe wird also in die „umgekehrte“ Richtung entwickelt und es werden die vergangenen Werte von $y(t)$ im Intervall $[t_0,\, t_0 - T]$ zur Berechnung herangezogen, wobei die „mathematisch falsche“ Schreibweise des Intervalls die Umkehrung der Zeitachse zum Zeitpunkt t_0 symbolisiert. Es ist dabei lediglich eine Umkehrung des Vorzeichens für ungeradzahlige Ableitungen zu berücksichtigen. Somit folgt

$$y^{(1)}\big|_{t=t_0} \approx -\int_0^T \Pi_{1,2}(T,\tau)\cdot y(t_0-\tau)\,d\tau,\;\; t_0 \geq T. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck liefert einen Schätzwert für $y^{(1)}\big|_{t=t_0}$ tatsächlich zum Zeitpunkt $t = t_0 \geq T$, basierend auf einer Taylorreihen-Approximation der Ordnung 2. Für $t_0 < T$ kann mit (13) kein Schätzwert für $y^{(1)}$ berechnet werden und es wird $y^{(1)} = 0$ für $t_0 < T$ festgelegt. Alternativ kann für $t_0 < T$ die Zeitfensterbreite auf $\tilde{T} = t_0$ beschränkt werden.

2.3 Zeitdiskrete Darstellung

Für praktische Anwendungen erfolgt die Erfassung der Messgröße $y(t)$ zu äquidistanten Zeitpunkten $t = i\,T_s$ mit T_s als Abtastzeit (*sample time*). $y(t)$ liegt somit als Zahlenfolge

$$(y_i) = (y_0,\, y_1,\, y_2,\, \ldots) \text{ mit } y_i = y(i\,T_s),\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

vor. Die Fensterbreite T wird nun als ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit gewählt, d.h.

$$T = MT_s \text{ mit } M = 1, 2, 3, \ldots.$$

Somit kann (13) unter Anwendung der Trapezformel mit

$$y_i^{(1)} = \frac{T_s}{2}\sum_{k=1}^{M-1}\left(\Pi_{k-1}\,y_{i-k+1} + \Pi_k\,y_{i-k}\right) \tag{14}$$

näherungsweise berechnet werden, wobei gilt:

$$\Pi_k = \frac{1}{M^4\,T_s^2}\left[36(M-k)^2 - 120(M-k)k + 24k^2\right] \text{ mit } k = 0, 1, 2, \ldots$$

3 Echtzeitimplementierung

3.1 Anforderungen

Echtzeitsysteme müssen Berechnungen innerhalb genau definierter Zeitgrenzen ausführen. Dies bedeutet, dass im Allgemeinen nur eine beschränkte Anzahl an Befehlen pro Abtastzeitschritt ausgeführt werden kann. Die Berechnung der Summe in (14) muss für *jeden* Abtastzeitschritt erfolgen. Somit beeinflusst die gewählte Fensterbreite $T = M\,T_s$ direkt die Laufzeit (pro Abtastzeitschritt) des Verfahrens.

In (14) werden die M Messwerte $y_{i-M+1}, \ldots, y_i$ im Zeitintervall $[t_0, t_0 - T]$ (siehe Abschnitt 2.2) zur Berechnung des Schätzwertes benötigt, d.h. sie müssen im Arbeitsspeicher des Systems zur Verfügung stehen. Diese Anforderung kann sehr effizient durch Einsatz eines *Ringspeichers* erfüllt werden. Ein Ringspeicher ist ein linearer Speicherbereich konstanter Größe (in unserem Fall mit M Elementen), wobei die Schreib- bzw. Lesezugriffe mittels einer so genannten *modulo*-Operation erfolgen. Dadurch wird eine virtuelle Ringstruktur erzeugt [8].

Um eine einfache Anpassung der Parameter des Verfahrens an den jeweiligen Einsatzzweck zu ermöglichen, ist es notwendig, dass diese während der Laufzeit des Echtzeitsystems vom Benutzer verändert werden können. Dies kann etwa durch eine Neuberechnung der Koeffizienten von Π_k zur Laufzeit, oder für zeitkritische Echtzeitanwendungen, im vorhinein für verschiedene Kombinationen der Parameter N und j, erfolgen. In unserem Fall sind etwa fünfzig Sätze von Koeffizienten für unterschiedliche Parameter N und j, welche den Benutzereingaben entsprechend umgeschaltet werden, im Speicher des Echtzeitsystems hinterlegt.

Weiters soll die Implementation des Verfahrens sowohl für Simulations- als auch für Echtzeitanwendungen gleichermaßen eingesetzt werden können. Dadurch ist eine semantische Verifikation der Implementierung in der Simulation möglich. Weiters kann eine Vorauswahl der Parameter bereits an Hand von Simulationsstudien erfolgen.

3.2 Algorithmus

Der verwendete Algorithmus ist in Abbildung 4 als Pseudocode dargestellt. In der Variable `MessRing` ist der Ringspeicher abgelegt, `MessPos` ist jene Position im Ringspeicher, an welcher der aktuelle Messwert abgelegt wird. `M` ist die Anzahl der Elemente im Ringspeicher, `Ts` die Abtastzeit. In `Param` sind die Benutzerparameter N, j und T abgelegt. Diese werden in Zeile 2 eingelesen, auf Gültigkeit überprüft und bei Bedarf auf Maximalwerte beschränkt. Dies geschieht zu *jedem* Zeitschritt, d.h. nicht nur während der Initialisierung. In 7 und 9 werden Werte aus dem Ringspeicher mittels `modulo`-Operationen ausgelesen.

```
 1: get Eingang
 2: get und check Param
 3: increment MessPos
 4: save Eingang to MessRing
 5: if AktuelleZeit>Fensterbreite
 6:   for k = 1 to M
 7:     y1  = MessRing((MessPos-k+1) modulo M)
 8:     pi1 = evalPi(k-1,Param)
 9:     y2 = MessRing((MessPos-k) modulo M)
10:     pi2 = evalPi(k,Param)
11:     Ausgang ++= 0.5*Ts*( pi1*y1 + pi2*y2 )
12:   endfor
13: else
14:   Ausgang = 0
15: endif
16: write Ausgang
```

Abbildung 4: Pseudocode

In 8 und 10 die Funktion Π_k an der entsprechenden Stelle unter Berücksichtigung der Benutzerparameter ausgewertet. In Zeile 11 erfolgt die Integration mittels Trapezformel.

3.3 Derivative Estimation Toolbox

Die hier vorgestellte Derivative Estimation Toolbox eignet sich für die Ermittlung beliebiger zeitlicher Ableitungen von verrauschten Messsignalen in Echtzeit. Als Entwicklungswerkzeug wird Matlab/Simulink der Firma Mathworks[1] eingesetzt. Diese Kombination ist sowohl im universitären als auch im industriellen Bereich weit verbreitet. Bei Simulink handelt es sich um ein numerisches Simulationswerkzeug, welches zur Generierung von Echtzeitanwendungen eingesetzt werden kann. Simulink kann mittels spezieller Funktionsblöcke, so genannter *S-Functions*, erweitert werden. Eine S-Function ist die Beschreibung eines Simulink-Blocks mittels einer Programmiersprache, wobei etwa C, C++, MATLAB oder Ada verwendet werden können [13]. In unserem Fall kommt die Programmiersprache C zum Einsatz. Der entworfene Simulink-Block wird mittels einer eigenen Toolbox, der *Derivative Estimation Toolbox* in die Entwicklungsumgebung von Simulink integriert. In Abbildung 5 ist die Toolbox sowie die Oberfläche zur Eingabe der Parameter zu sehen.

3.4 Quanser MultiQ

Das in Abschnitt 4 eingesetzte Echtzeitsystem ist das MultiQ-System von Quanser[2]. Hierbei handelt es sich um die Kombination aus der PCI-Steckkarte *PC104 MultiQ Data*

[1] Internetadresse der Firma Mathworks: `http://www.mathworks.com`
[2] Internetadresse der Firma Quanser: `http://www.quanser.com`

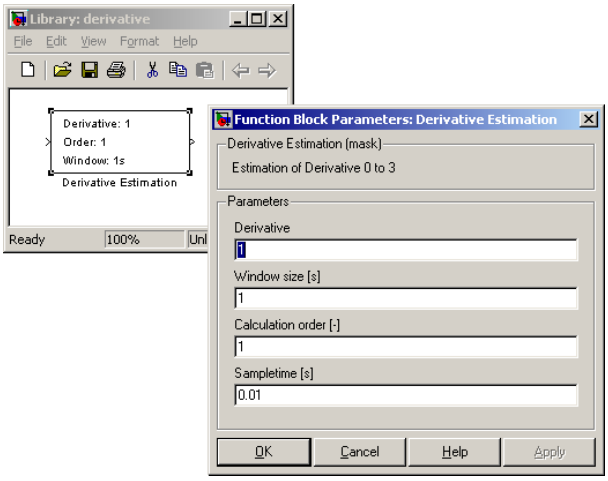


Abbildung 5: Derivative Estimation Toolbox

Acquisition Board für den Einbau in einen PC sowie dem *PC104 MultiQ Terminal Board*, welches über ein Flachbandkabel mit dem *Data Acquisition Board* verbunden wird und als Schnittstelle zu externen Systemen dient. Das MultiQ-System besitzt keinen eigenen Prozessor, sondern nutzt die Rechenhardware des PCs. Um die Echtzeitfähigkeit des Systems zu gewährleisten kommt die Betriebsystemerweiterung RTX der Firma Ardence[3] für Windows 2000/XP zum Einsatz [1]. Das eigentliche Echtzeitmodell läuft in der virtuellen Umgebung WinCon 5.0 von Quanser. Die erstellte S-Function konnte ohne Probleme auf dem Quanser-System integriert werden. Ergebnisse der Positionsregelung einer Drosselklappe sind im Abschnitt 4 zu finden.

4 Lageregelung einer elektrischen Drosselklappe

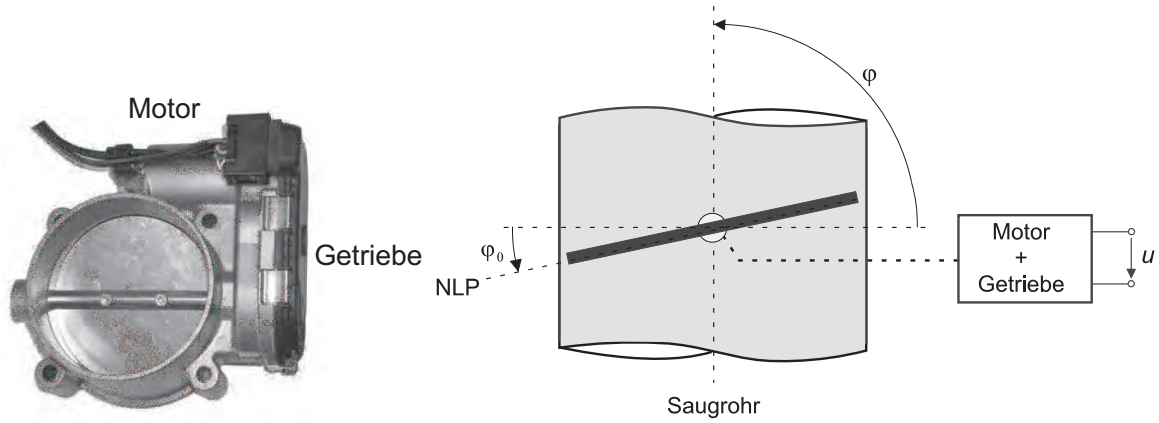
Als praktisches Anwendungsbeispiel der DET dient die Lageregelung einer elektrischen Drosselklappe für Ottomotoren wie sie in Bild 6(a) abgebildet ist. In Bild 6(b) ist der Aufbau der betrachteten Drosselklappe schematisch dargestellt.

Demnach kann durch Anlegen einer elektrischen Spannung u an den Elektromotor mit Getriebe der Klappenöffnungswinkel φ verstellt werden. Die Klappe wird im stromlosen Zustand durch einen Federmechanismus in die so genannte Notluftposition (NLP) $\varphi = \varphi_0$ gebracht. Dieser Mechanismus garantiert auch im Fehlerfall den eingeschränkten Betrieb der Verbrennungskraftmaschine.

Ein stark vereinfachtes mathematisches Modell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Drosselklappe wurde in [7] abgeleitet. Mit den Zustandsvariablen

$$x_1 = \varphi, \qquad x_2 = \frac{d\varphi}{dt} \tag{15}$$

[3]Internetadresse der Firma Ardence: `http://www.ardence.com`



(a) Foto (b) Schematische Darstellung

Abbildung 6: Drosselklappe

ergibt sich – unter Vernachlässigung *aller* Reibungsphänomene – folgendes System zweiter Ordnung für die Regelstrecke mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 + b_1 (u - u_0) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{16}$$

Die positiven Konstanten a_0, a_1, b_1 und u_0 errechnen sich dabei aus elektrischen bzw. mechanischen Kenngrößen der Regelstrecke. Das Ziel der Regelung besteht darin, den Winkel φ einem vorgegebenen Wunschverlauf r möglichst gut nachzuführen. Auf Grund der stark vereinfachten mathematischen Beschreibung der Regelstrecke werden Methoden der nichtlinearen robusten Regelung eingesetzt. Als zielführend erwies sich dabei die Anwendung von Ideen der klassischen Sliding-Mode-Theorie [14], die im folgenden Abschnitt überblicksmäßig dargestellt wird.

4.1 Klassischer Sliding-Mode-Regler

Die zu lösende Nachführungsaufgabe kann mit Hilfe des Regelfehlers

$$e_1 = y - r = x_1 - r$$

und seiner zeitlichen Ableitung

$$e_2 = \frac{de_1}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dr}{dt} = x_2 - \frac{dr}{dt}$$

besonders einfach formuliert werden. Setzt man die Variablen e_1 und e_2 in das Streckenmodell ein, so ergibt sich folgende Beschreibung:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= e_2 \\ \frac{de_2}{dt} &= -a_0\left(e_1 + r\right) - a_1\left(e_2 + \frac{dr}{dt}\right) - \frac{d^2r}{dt^2} + b_1\left(u - u_0\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Nun wird die *skalare* Hilfsgröße s gemäß

$$s := e_2 + \lambda e_1, \qquad \lambda > 0$$

eingeführt. Im Falle $s = 0$ lautet somit die Differentialgleichung für den Regelfehler

$$\frac{de_1}{dt} = -\lambda e_1, \qquad \lambda > 0$$

d.h. die Ausgangsgröße y wird der Referenzgröße r wie gewünscht *asymptotisch* nachgeführt. Zur Ermittlung des Stellgrößenverlaufes, mit dessen Hilfe $s = 0$ erreicht werden kann, wird die zeitliche Ableitung von s betrachtet, d.h.

$$\frac{ds}{dt} = -a_0\left(e_1 + r\right) - a_1\left(e_2 + \frac{dr}{dt}\right) - \frac{d^2r}{dt^2} + b_1u - b_1u_0 + \lambda e_2.$$

Mit dem Ansatz

$$u = \frac{1}{b_1}\left[\frac{d^2r}{dt^2} + a_0\left(e_1 + r\right) + a_1\left(e_2 + \frac{dr}{dt}\right) + b_1u_0 - \lambda e_2\right] - \frac{\kappa}{b_1}\mathrm{sign}(s), \qquad \kappa > 0 \tag{18}$$

vereinfacht sich die zeitliche Ableitung von s zu

$$\frac{ds}{dt} = -\kappa\mathrm{sign}(s), \qquad \kappa > 0 \tag{19}$$

Wie leicht zu erkennen ist, wird mit dem vorgeschlagenen Regelgesetz, ausgehend von einem Anfangswert $s_0 = s(t = 0)$, die Erreichung von $s = 0$ in *endlicher* Zeit gewährleistet.

4.1.1 Berücksichtigung von Unsicherheiten

Man beachte, dass die angegebene Relation (19) nur im Falle *exakt bekannter* Streckenparameter gültig ist. Dies trifft im vorliegenden Fall allerdings nicht zu, die Modellparameter sind unsicher. Um dennoch zu erreichen, dass s garantiert in endlicher Zeit verschwindet und damit eine asymptotische Nachführung erzielt wird, muss der Entwurfsparameter κ entsprechend groß gewählt werden. Die Herleitung hinreichender Bedingungen zur Gewährleistung der asymptotischen Nachführung sind beispielsweise in [9] zu finden. Bei der Implementierung werden in das Regelgesetz (19) die Parameter $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$ und $\hat{u}_0$ eines *nominellen Streckenmodells* eingesetzt.

4.1.2 Approximation des unstetigen Regelgesetzes

Der Einsatz des vorgeschlagenen unstetigen Regelgesetzes (19) führt auf Grund der Modellierungsunsicherheiten und der endlichen Schaltgeschwindigkeiten realer Stellglieder zum unerwünschten „Rattern“ (engl. *chattering*), d.h. durch die „Aktivität“ der Signum-Funktion wird der Stellgröße ein hochfrequenter Anteil überlagert. Üblicherweise wird das Rattern durch den Einsatz einer Sättigungsfunktion an Stelle der Signum-Funktion bekämpft, d.h.

$$\text{sign}(s) \quad \rightarrow \quad \text{sat}(\frac{s}{\phi}) = \begin{cases} \text{sign}(s) & \text{für } |s| > \phi \\ \dfrac{s}{\phi} & \text{sonst} \end{cases} . \tag{20}$$

Hierbei ist die positive Konstante ϕ ein Maß für die "Breite" der Sättigungsfunktion und damit ein Maß für den Approximationsgrad der Signum-Funktion.

4.2 Anwendung auf eine reale Drosselklappe

Das vorgestellte Regelgesetz (19) mit der Modifikation (20) wird nun zur Regelung der elektrischen Drosselklappe aus Bild 6(a) eingesetzt. Angeschrieben in den Zustandsvariablen der Regelstrecke lautet das Regelgesetz

$$u = \frac{1}{\hat{b}_1}\left[\hat{a}_0 x_1 + (\hat{a}_1 + \lambda)\, x_2 + \hat{b}_1 \hat{u}_0 - \lambda \frac{dr}{dt} + \frac{d^2 r}{dt^2}\right] - \frac{\kappa}{\hat{b}_1} \text{sat}\left[\frac{1}{\phi}\left(\lambda x_1 + x_2 - \lambda r - \frac{dr}{dt}\right)\right].$$

Zur Ermittlung von u werden also die vorgegebene (hinreichend glatte) Führungsgröße r, ihre zeitlichen Ableitungen sowie die Zustandsvariablen $x_1 = \varphi$ und $x_2 = \dfrac{d\varphi}{dt}$ benötigt. Da nur der Klappenöffnungswinkel φ messtechnisch erfasst wird, muss die zugehörige Winkelgeschwindigkeit durch numerische Differentiation ermittelt werden.

Die nominellen Parameter der Regelstrecke

$$\begin{array}{ll} \hat{a}_0 = 62.83 & \hat{a}_1 = 88.07 \\ \hat{b}_1 = 134.61 & \hat{u}_0 = 1.2 \end{array}$$

wurden experimentell identifiziert, die Stellgröße ist betragsmäßig auf einen Wert von $5V$ beschränkt, d.h.

$$|u(t)| \leq 5V \qquad \forall t \geq 0$$

Als Reglerparameter wurden die Konstanten $\lambda = 50$ und $\phi = 4$ gewählt. Die numerische Ableitung des Klappenöffnungswinkels φ wurde mit Hilfe der DET bewerkstelligt, wobei sich bei einer Diskretisierungzeit $T_s = 0.001s$ die iterativ ermittelten Einstellungen

$$j = 1,\ N = 2,\ T = 0.4$$

als besonders günstig herausgestellt haben. Es kommt die in Abschnitt 2.3 ermittelte, zeitdiskrete Schätzerformel zum Einsatz.

4.2.1 Ergebnisse

In Bild 7 ist der vorgegebene (glatte) Verlauf der Führungsgröße r dargestellt, wobei die Klappe zunächst rasch auf einen Winkel von etwa 70° geöffnet wird, danach wird ein konstanter Öffnungswinkel von 30° angefahren.

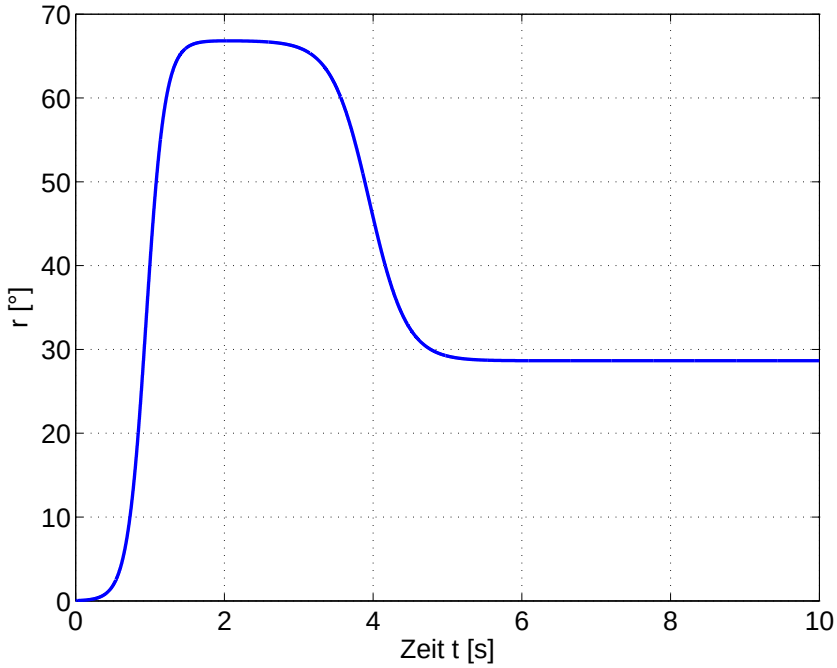


Abbildung 7: Verlauf der Führungsgröße r

Bild 8 zeigt den sehr zufriedenstellenden Verlauf des Regelfehlers $e_1 = r - \varphi$. Der Fehler bleibt betragsmäßig immer kleiner als 0.8°, der stationäre Fehler von etwa 0.1° macht den Einsatz eines integrierenden Sliding-Mode-Reglers unnötig [9]. Der entsprechende Verlauf der Stellgröße u, der in Bild 9 dargestellt ist, zeigt vor allem im Bereich großer Winkelgeschwindigkeiten besonders „unruhiges“ Verhalten. Dieses wirkt sich jedoch nicht negativ auf das dynamische Verhalten der realen Drosselklappe aus. Im Gegensatz zur Reglerrealisierung, die auf der Ermittlung von x_2 mittels Differenzenquotientenbildung basiert, bewegt sich die Klappe hier ohne sicht- oder hörbares Rattern ruhig in die gewünschte Lage. Der Einsatz der DET erweist sich im vorliegenden Fall somit als sinnvoll und effizient. Dies manifestiert sich auch in Bild 10, in dem neben dem Verlauf der Zustandsvariable x_1 in Radiant auch die zugehörige Ableitung x_2 dargestellt ist, deren Verlauf sehr gut mit der zeitlichen Ableitung der Referenzgröße r übereinstimmt.

5 Zusammenfassung

Diese Arbeit zeigt, dass die *Derivative Estimation Toolbox* ausgezeichnet für einen Einsatz in automotiven Echtzeitsystemen geeignet ist. Mit Hilfe der DET können beliebige

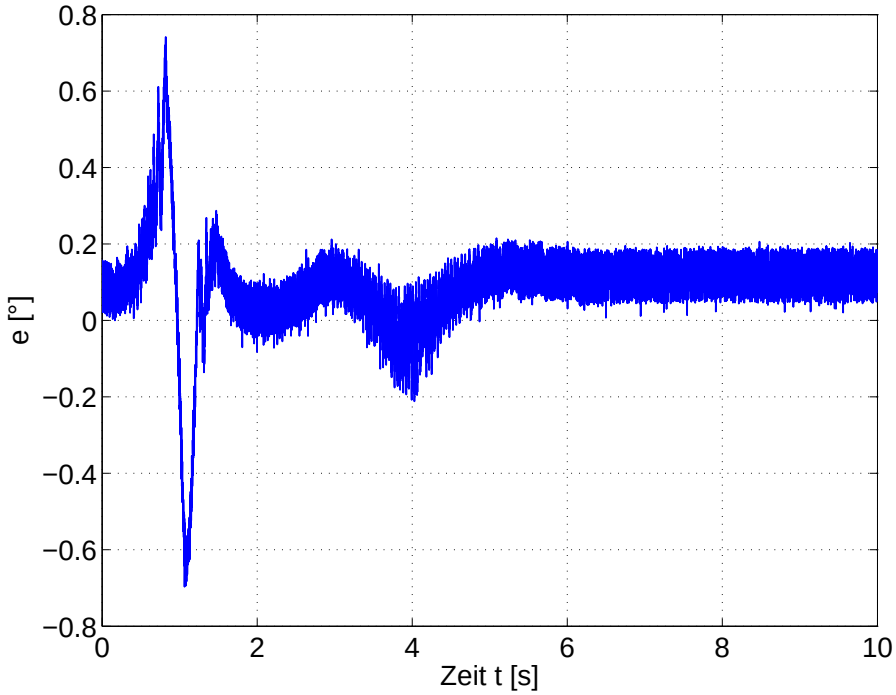


Abbildung 8: Verlauf des Regelfehlers e

Ableitungen von verrauschten Messsignalen in Echtzeit ermittelt werden. Die Herleitung des Verfahrens wird an Hand eines einfachen Beispiels gezeigt. Weiters wird ein Überblick über die Implementierung der Methode mittels einer Simulink S-Function für den Einsatz mit Echtzeitsystemen gegeben. Die Ergebnisse von zwei automotiven Anwendungen, der Positionsregelung einer Drosselklappe sowie der Ableitungsschätzung an einem ABS-Prüfstand, demonstrieren die Leistungsfähigkeit der DET.

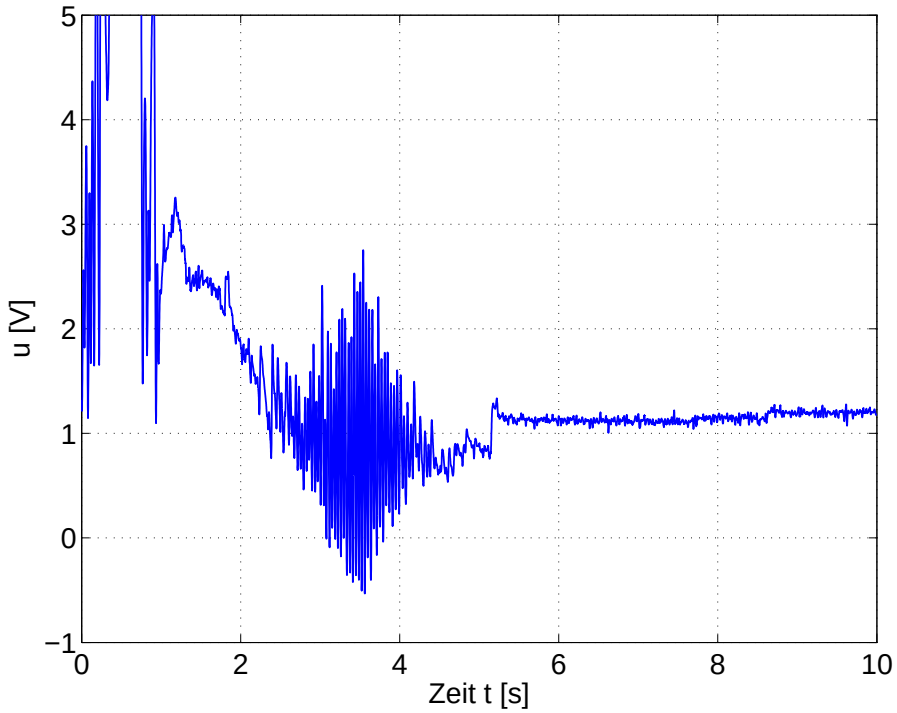


Abbildung 9: Verlauf der Stellgröße u

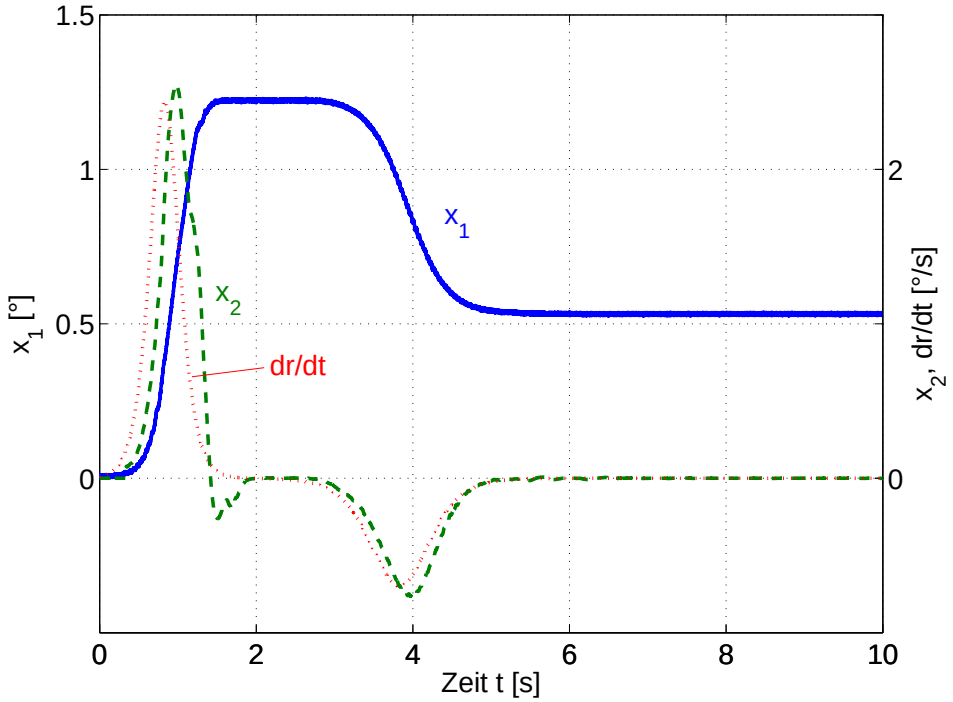


Abbildung 10: Verlauf von x_1 und x_2 sowie der abgeleiteten Führungsgröße dr/dt

Literatur

[1] Ardence, Inc.: *RTX - Real-time Extension for Control of Windows*. Published online. http://www.ardence.com/embedded/products.aspx?ID=70. Version: August 2007

[2] Diop, S. ; Grizzle, J. W. ; Chaplais, F. : On Numerical Differentiation Algorithms for Nonlinear Estimation. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control*. Syndney, Australia, 2000

[3] Fliess, M. ; Join, C. ; Mboup, M. ; Sira-Ramírez, H. : Analyse et représentation de signaux transitoires: application à la compression, au débruitage, et à la détection de ruptures. In: *GRETSI 2005*. Louvain-la-Neuve, Belgium, 2005

[4] Fliess, M. ; Join, C. ; Mboup, M. ; Sira-Ramírez, H. : Vers une commande multivariable sans modèle. In: *Proc. Intern. Summer School in Autom. Contr. of Grenoble*, 2006

[5] Fliess, M. ; Sira-Ramírez, H. : Control via state estimation of some nonlinear systems. In: *IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*. Stuttgart, Germany, 2004

[6] Föllinger, O. : *Laplace- und Fourier-Transformation*. Berlin : Elitera-Verlag, 1977

[7] Horn, M. ; Schriebl, M. ; Unger, E. ; Dourdoumas, N. : Konzept zur digitalen Lageregelung von Drosselklappen bei Ottomotoren. In: *International Journal Automation Austria* Bd. 2. IFAC - Beirat Österreich, 2003, S. 90–103

[8] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming*. Bd. 1. 3. Edition. Addison-Wesley, 1997

[9] Slotine, J.-J. E. ; Li, W. : *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1991

[10] *Workshop on Identification, State Reconstruction and Generalized PI-Control*. München : Sommerschule, 4.-8. Juli 2005. – http://www.unibw.de/campus/ET8/et81/Mitarbeiter/reger/workshop/index.htm

[11] *Fast Estimation Methods in Automatic Control and Signal Processing*. Paris : Sommerschule, 18.-20. Juli 2005. – http://www-futurs.inria.fr/activites/colloques/mne05.htm

[12] *Fast Estimation and Identification Methods in Control and Signal*. Grenoble : Sommerschule, 11.-15. September 2006. – http://www.lag.ensieg.inpg.fr/ecole-eteauto/session/s 27.php

[13] The MathWorks, Inc.: *Simulink Help: Writing S-Functions*. 2004-2006

[14] Utkin, V. I.: *Sliding Modes in control and optimization*. Springer, 1992

[15] Zehetner, J. ; Reger, J. ; Horn, M. : A Derivative Estimation Toolbox based on Algebraic Methods - Theory and Practice. In: *Proceedings CCA2007* IEEE Conference on Control Applications, 2007

[16] Zehetner, J. ; Reger, J. ; Horn, M. : *Echtzeit-Implementierung eines algebraischen Ableitungsschätzsverfahrens.* 2007. – akzeptiert bei at - Automatisierungstechnik

Optimale Fahrzeugführung für Rennsportsimulationen

Christian Prettenthaler, Martin Rudigier, Martin Horn
Kompetenzzentrum Das Virtuelle Fahrzeug Forschungsgesellschaft mbH
Inffeldgasse 21a, 8010 Graz
christian.prettenthaler@v2c2.at, martin.rudigier@v2c2.at,
martin.horn@tugraz.at

Kurzfassung:

Der vorliegende Aufsatz befasst sich mit der numerischen Ermittlung von Spur- und Geschwindigkeitsvorgaben für Rennsportsimulationen. Der vorgestellte Ansatz basiert auf Methoden der optimalen Steuerungstheorie. Die Herleitung der dafür benötigten mathematischen Modelle wird ausführlich beschrieben. Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des Ansatzes werden Ergebnisse präsentiert.

1 Einleitung

Ähnlich wie im Serienfahrzeugbau gewinnt auch im Rennsport der Einsatz anspruchsvoller Simulationswerkzeuge immer mehr an Bedeutung. Die zunehmende Komplexität der Fahrzeuge einerseits und immer restriktivere Reglements der Rennsportorganisationen hinsichtlich der Anzahl der Testfahrten andererseits, erfordern abseits von ökonomischen Überlegungen auch im Rennsport die sich bereits im Serienfahrzeugbau allgemein abzeichnende Verschiebung von Entwicklungsarbeit vom Prototypenbau zur computerunterstützten, numerischen Simulation. Bedingt durch die, mit der Komplexität einhergehende, unüberschaubare Variantenvielfalt, ist man daran interessiert, eine virtuelle Vorabstimmung („Setup“) eines Fahrzeugs bereits vor der ersten realen Testfahrt durchzuführen. Zu diesem Zweck kommen spezielle Fahrzeugdynamik-Simulationen zum Einsatz, die durch geschickte Variation von relevanten Fahrzeugparametern das gesuchte „Ausgangssetup“ für die reale Testfahrt ermitteln. Die dazu verwendeten Simulationspakete ermöglichen eine ganzheitliche Betrachtung nahezu aller das

Fahrzeug betreffenden Kategorien und Disziplinen: Motor, Antriebstrang, Fahrwerk, Aerodynamik, Reifen, …

Eine derartige Simulation benötigt jedoch nicht nur eine detaillierte Beschreibung des Fahrzeugs, sondern, wie man aus den einleitenden Zeilen folgern kann, vor allem auch eine gute Beschreibung des Fahrzeugbedieners, also des menschlichen Fahrers. Ist die Bedeutung des Fahrermodells in der Serie bei Standardfahrmanövern wie der stationären Kreisfahrt, J-Turn oder ähnlichem noch relativ gering, so ist sie im Falle einer Rennsportsimulation enorm hoch. Ein reales Rennfahrzeug bewegt sich, um konkurrenzfähig zu sein, ständig im fahrdynamischen Grenzbereich. Daher muss das Fahrermodell das Simulationsfahrzeug sowohl gezielt in diesen führen, als auch Strategien bereithalten, die es beim Verlassen des Grenzbereichs in Richtung virtueller Graben, bzw. virtuelles Kiesbett stabilisieren und retour führen können. Dazu bedarf es nicht nur leistungsfähiger Regelungskonzepte, die die grundsätzlichen, menschlichen Stelleingriffe wie Lenkradbetätigung, Pedaleingriff und Gangschaltvorgänge übernehmen, sondern vor allem eines Moduls, welches Fahrzeug- und Rennstreckenabhängig geeignete Sollvorgaben hinsichtlich Fahrspur und Geschwindigkeit liefert. Dieses Modul wird „Manöverplanung“ genannt und bildet das Herzstück dieses Aufsatzes. Die eben kurz erwähnten Regler bilden die so genannte „Manöverausführung“ – sie exekutieren die Vorgaben der Manöverplanung und bedienen das Simulationsfahrzeug. Die Aufteilung der Fahreraktivitäten auf die Blöcke „Manöverplanung“ und „Manöverausführung“ findet man in der Literatur (mit anderen Bezeichnungen) häufig unter dem Begriff 2-Ebenen Fahrermodell (Donges [1], Butz [2]) wieder. Hinter der simplen Aufzählung der Aufgaben der Manöverplanung – Ermittlung von Sollvorgaben für Fahrspur und Fahrzeuggeschwindigkeit – verbirgt sich jedoch enorme Komplexität. Die grundlegende Idee hinter der gewünschten Simulation ist die Ermittlung des rennstreckenabhängigen Fahrzeugsetup, welches primär bestmögliche Rundenzeiten ermöglichen soll. Die Qualität dieser Ergebnisse steht und fällt jedoch mit den Vorgaben, die die Manöverplanung liefern sollte. Es gibt prinzipiell für jede Fahrzeugkonfiguration eine zugehörige „ideale“ Fahrspur samt Geschwindigkeitsverlauf. Dass sich der Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit des

Fahrzeugsetup stark verändert, ist, besonders mit dem Extrembeispiel des Vergleichs zweier Fahrzeugklassen (z.B. Tourenwagen und Formelauto) vor Augen, noch einleuchtend. Dass sich jedoch auch die so genannte Ideallinie merkbar ändert ist, ohne intensivere Überlegung, nicht mehr so plausibel. Dies würde bedeuten, dass es zur Erlangung der gewünschten Simulationsergebnisse notwendig ist, für jedes veränderte Fahrzeugsetup die Ideallinie und Sollgeschwindigkeit separat zu ermitteln. Mit diesen Vorgaben würde das Simulationssystem für jede Variation ein Ergebnis in Form einer Rundenzeit oder ähnlichem liefern. Über Suche nach der besten Rundenzeit könnte man dann das optimale Fahrzeugsetup bestimmen. Die Praxis sieht jedoch anders aus. Kommerziell verfügbare Simulationssysteme, welche die benötigte Modellierungstiefe des Fahrzeugs bieten, gibt es einige. Die Problematik der Manöverplanung wird dort jedoch meist vernachlässigt. Der mit AdamsCar verfügbare IPG-Driver [3] (von der Firma IPG entwickelte Fahrermodellierung) versucht über die Variation so genannter „Corner-Cutting-Factors“ und vieler Einzelsimulationen mit dem AdamsCar-Vollmodell die gewünschten Daten zu ermitteln. Die Corner-Cutting-Factors sind ein Maß dafür, wie weit die Spur von der Fahrbahnmittellinie in Richtung Kurvenscheitel verlegt wird. Der Vorteil dieser Methode ist die Verwendung sehr komplexer und detaillierter Fahrzeug- und Streckenmodelle. Nachteilig sind der Zeitbedarf, die große Anzahl an Einstellmöglichkeiten und der Charme des „Probierens“ der diesem Verfahren anhaftet. Einige Simulationssysteme behelfen sich daher derart, dass sie aus einer verfügbaren Ideallinie (Solllinie bzw. Sollkrümmung) in Abhängigkeit des Fahrzeugsetup die Sollgeschwindigkeit ermitteln. Der Vorteil ist, dass der Geschwindigkeitsverlauf, bedingt durch die exakte Kenntnis der Fahrzeugeigenschaften, sehr gut auf das Leistungsvermögen des Fahrzeugs abgestimmt ist. Die Bestimmung der Sollkrümmung verbleibt jedoch als Nachteil. Häufig wird diese aus Telemetriedaten sensorbestückter Rennfahrzeuge errechnet. Aus den während einer „schnellen“ Runde gemessenen Verläufen von Geschwindigkeit und Querbeschleunigung kann relativ simpel der gefahrene Krümmungsverlauf berechnet werden. Dabei treten jedoch folgende Probleme auf:

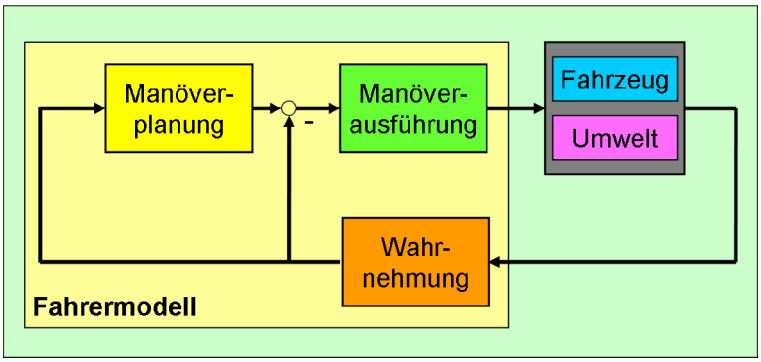
- Gemessene Verläufe weisen zwangsläufig ein Messrauschen auf, welches über Filter- bzw. Glättoperationen beseitigt werden muss – dadurch gehen zwangsläufig Informationen verloren. Das Resultat sind häufig zu große Kurvenradien, welche zu fehlerhaften Simulationsergebnissen führen.
- Mit welchem Fahrzeug(setup) wurde die Runde gefahren – unterschiedliche Fahrzeugabstimmungen ziehen unterschiedliche Ideallinien nach sich.
- Die gemessenen Beschleunigungen werden auf Rennstrecken mit Längs- und Querneigungen (Steilkurven, „Bergauf“-, bzw. „Bergab“-Passagen) verfälscht. Daraus resultieren wiederum fehlerhafte Krümmungen und damit fehlerhafte Kurvenradien.

Würde man Krümmung und Koordinaten mittels eines Differential-GPS bestimmen, könnte man neben den tatsächlichen xy-Koordinaten auch die korrekten Höheninformationen (Längs- und Querneigung) bestimmen. Man wäre jedoch nach wie vor an das während der gemessenen Runde verwendete Fahrzeugsetup gebunden. In der Literatur findet man außerdem noch einige Ansätze, die eine ähnliche Methode (siehe Kapitel 3) wie die in dieser Arbeit vorgestellte, verwenden. Aus verschiedenen Gründen wird jedoch keiner davon für die Problematik des Rennsports eingesetzt, bzw. ist keiner davon in einem rennsporttauglichen Simulationssystem implementiert. In diesem Aufsatz wird eine Fahrermodellierung vorgestellt, die sich der eingangs dargestellten Problematik annimmt. Der Fokus wird dabei auf die Manöverplanung gelegt.

2 Der Virtuelle Fahrer – Gesamtsystem

Im Zuge zweier am Kompetenzzentrum Das Virtuelle Fahrzeug Forschungsgesellschaft mbH (vif) durchgeführter Projekte wurde eine Fahrermodellierung entwickelt, welche sich der zuvor dargestellten Problematik annimmt. Die folgende Abbildung zeigt das Gesamtsystem bestehend aus dem Simulationssystem welches Fahrzeug und Umgebung simuliert und dem angedockten Fahrermodell.

Abbildung 2-1: Gesamtsystem



Um eine Simulation durchzuführen, welche für das gegebene Setup des Simulationsfahrzeugs die optimalen Spur- und Geschwindigkeitsvorgaben liefert, sind aus der Sicht des Fahrermodells dabei folgende Schritte notwendig:

1. Aufbereitung der Fahrzeug- und Umweltdaten für die Manöverplanung.
2. Ermittlung von Sollspur und Sollgeschwindigkeit durch die Manöverplanung.
3. Simulation: Die Manöverausführung führt das Fahrzeug der Simulationsumgebung den Vorgaben nach.
4. Nachbereitung und Auswertung der Daten

Die dabei ermittelte Sollspur könnte einem Simulationssystem auch als Sollkrümmung zur Ermittlung der Geschwindigkeitsvorgaben dienen. Welche Methode man wählt, ob Koordinaten und Geschwindigkeit von der Manöverplanung oder nur die Koordinaten (und damit die Krümmung) bleibt dem Anwender überlassen. Die einzelnen Blöcke der Fahrermodellierung gliedern sich wie folgt:

2.1 Wahrnehmung

Das Modul Wahrnehmung bereitet die Umwelt- und Fahrzeugdaten für die übrigen Module auf. Vor dem Beginn der Manöverplanung werden die benötigten Start- und Randwerte aus der Strecken- und Fahrzeugdefinition ermittelt. Aus den verfügbaren Zustandsgrößen werden die für den Fahrer relevanten Daten ausgewählt und nicht direkt zugängliche Größen errechnet. Im gewissen Sinn ist die Wahrnehmung eine Schnittstelle, die die Manöverausführung mit den von ihr benötigten Fahrzeug- und Umweltdaten versorgt.

2.2 Manöverplanung

Das Ziel der Manöverplanung ist die Bestimmung von Spur-Trajektorie und zugehöriger Fahrgeschwindigkeit, mit denen ein vorgegebenes Fahrzeug mit spezifischen Eigenschaften, auf einer Fahrbahn mit räumlicher Breite, gewisse Optimierkriterien erfüllt. Sie ist das Kernthema dieser Arbeit und wird daher in Kapitel 3 detailliert behandelt.

2.3 Manöverausführung

Dieses Modul besteht aus zwei Blöcken, dem Längsdynamikregler und dem Querdynamikregler. Sie haben die Aufgabe, die von der Manöverplanung bzw. extern vorgegebenen Verläufe von Sollgeschwindigkeit und Sollkurs über Betätigung der typischen Bedienelemente des Simulationsfahrzeugs zu exekutieren. Dabei handelt es sich um die Regelung des Lenkwinkels sowie des Gas- und Bremspedals. Darüber hinaus muss das Fahrzeug beim Auftreten instabiler Fahrzustände stabilisiert werden. Da sich das Fahrzeug meistens im fahrdynamischen Grenzbereich bewegt, werden große Anforderungen an diese Funktion, die primär vom Querdynamikregler ausgeführt wird, gestellt.

2.3.1 Längsdynamikregler

Für den Reglerentwurf wurde die so genannte exakte Linearisierung verwendet. Unter Beachtung von fahrzeugtechnischem Wissen wurde die theoretische Struktur der exakten Linearisierung etwas modifiziert um deren Elementen physikalische Bedeutung zu geben. Diese Elemente stellen Kenngrößen eines Fahrzeugs dar, wie zum Beispiel das inverse Motorkennfeld, die Masse des Fahrzeugs oder Übersetzungen der verschiedenen Gänge. Diese Elemente stellen somit auch die Anpassung des Reglers an unterschiedliche Fahrzeuge dar. Die Methodik an sich ermöglicht es, einen gemeinsamen Regler für Fahr- und Bremspedal zu implementieren und abhängig von der benötigten Antriebskraft zwischen Gas und Bremse umzuschalten. Zusätzlich ermöglicht die gewählte Struktur fahrdynamische Begrenzungen direkt in den Regler einzubauen, z.B. die maximal über die Reifen auf die Straße übertragbare Kraft.

2.3.2 Querdynamikregler

Das definierte Ziel ist, mit dem simulierten Fahrzeug einer vorgegebenen Bahn zu folgen und dabei instabile Fahrzustände zu vermeiden. Diese beiden Aufgaben benötigen teilweise gegenläufige Regleransätze. Darum besteht der Regler aus zwei Teilen: Einem Reglerteil zur Spureinhaltung und einem Reglerteil zur Stabilisierung. Der Lenkwinkel wird als Summe der Lenkwinkel aus beiden Teilreglern bestimmt
Die Spurhaltung wird in erster Linie über eine vorausschauende Regelung realisiert. Dabei wird nicht versucht den aktuellen Positionsfehler gegen Null gehen zu lassen, sondern das Fahrzeug so zu lenken dass es einen Punkt, der auf der vorgegebenen Sollspur eine einstellbare Vorschaudistanz vor der aktuellen Position liegt, erreicht. Die Stabilisierung wird über einen simplen, dem linearen Einspurmodell entnommenen Ansatz bewerkstelligt.

3 Manöverplanung

Das Ziel der Manöverplanung allgemein ist die Bestimmung von Spur-Trajektorie und zugehöriger Fahrgeschwindigkeit, mit denen ein vorgegebenes Fahrzeug mit spezifischen Eigenschaften, auf einer Fahrbahn mit räumlicher Breite, gewisse Optimierkriterien erfüllt. Die wichtigsten Beispiele für derartige Kriterien sind Zeit-, Energie- und Komfortoptimalität. Beim Kriterium Energieoptimalität ist eine treibstoffsparende Fahrweise das Ziel, etwa durch möglichst gleich bleibende Fahrgeschwindigkeit und die Vermeidung großer Längsbeschleunigungen infolge Anfahren und Bremsen. Komfortoptimalität wiederum versucht durch Minimierung von Längs- und Querbeschleunigungen den Komfort der Fahrzeuginsassen zu maximieren. Natürlich müssen beide Kriterien die Nebenbedingung erfüllen, in akzeptabler Zeit von A nach B zu kommen. Mehrere Autoren wie Prokop [4], Cossalter [5], Butz [2] oder Casanova [6] haben sich bereits diesem Thema gewidmet, wobei man anmerken kann, dass sich deren Definitionen für sinngemäß idente Kriterien leicht unterscheiden. In diesem Aufsatz, dessen Fokus der Rennsport ist, wird ausschließlich das Kriterium Zeitoptimalität untersucht, wobei die eben kurz angedeutete Nebenbedingung in den Vordergrund rückt. Das nahezu einzige Gütekriterium im Rennsport ist die Rundenzeit, womit deren Minimierung

oberste Maxime wird. Es wurde jedoch nicht die in der Literatur übliche Definition von Zeitoptimalität, welche besagt, dass ein vorgegebener, fixer Wegabschnitt in kürzestmöglicher Zeit durchfahren werden soll, verwendet. Aufgrund einer wesentlich einfacheren mathematischen Formulierung der Optimierungsaufgabe wurde die folgende Definition gewählt, und wird im Folgenden, trotz der bekannten Diskrepanz, als „zeitoptimal“ bezeichnet werden.

Das Kriterium Zeitoptimalität wurde somit folgendermaßen definiert:

- Maximiere die in vorgegebener, fixer Zeit zurückgelegte Distanz.

Außerdem muss gelten:

- Die vorgegebene Fahrbahn darf nicht verlassen werden.
- Die physikalischen Limits des Fahrzeuges (Reifen, Motor, ...) dürfen nicht verletzt werden.

Um diese Vorgaben erfüllen zu können, wurde ähnlich den Arbeiten von Butz und Cossalter eine Methode aus dem Gebiet der Regelungstechnik, die Theorie Optimaler Steuerungen gewählt.

3.1 Theorie optimaler Steuerungen

Die Theorie der optimalen Steuerungen liefert Ansätze und Methoden zur Optimierung des Verhaltens von gegebenen dynamischen Systemen. Das mathematische Modell des Systems ist gegeben durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x},\mathbf{u},t\right),$$

Formel 3-1

wobei **x** der Zustandsvektor und **u** der Vektor der Eingangsgrößen („Steuergrößen“) ist. Der Anfangszustand ist gegeben als

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0).$$

Formel 3-2

Es ist beabsichtigt, den Wert eines (Güte-)Funktionals

$$J = \int_0^T L(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

Formel 3-3

durch geeignete Wahl der Steuergrößen zu minimieren. Die Endzeit T kann dabei prinzipiell fest oder frei angenommen werden. Im vorliegenden Fall wurde T fest vorgegeben. Das Funktional (Formel 3-3) soll unter Berücksichtigung von Formel 3-1 sowie zusätzlichen algebraischen Ungleichungsnebenbedingungen der Form

$$d_i(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \le 0, \quad t \in [0,T] \qquad i = 1,...m$$

Formel 3-4

minimiert werden. Um Formel 3-1 und Formel 3-3 in eine unbeschränkte Optimierungsaufgabe zu integrieren, werden zusätzliche Gewichtungsterme zum Gütefunktional hinzugefügt (und somit ein erweitertes Gütefunktional formuliert), die Systemgleichungen (Formel 3-1) mittels Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}(t)$ berücksichtigt (Fletcher [7]), d.h.:

$$\bar{J} = \int_0^T \left\{ L(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}} \right] + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \right\} dt \,.$$

Formel 3-5

Wenn die Beschränkungen (Formel 3-4) verletzt werden, nehmen die Gewichtungsterme („Penalties“) sehr große Werte an, ansonsten sind sie vernachlässigbar klein. Durch Einführung der skalaren Hamilton-Funktion

$$H = L(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

Formel 3-6

kann die Schreibweise vereinfacht werden. Unter Anwendung der Variationsrechnung (Bryson [8]) können notwendige Bedingungen für eine optimale Lösung angegeben werden. Um den Vektor der optimalen Steuergrößen **u** zu berechnen, müssen nämlich die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$$

Formel 3-7

und

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Formel 3-8

gelöst werden, wobei sich **u** aus

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Formel 3-9

ermitteln lässt. Die Randwerte für Formel 3-7 und Formel 3-8 sind jeweils für $t = 0$ und $t = T$ bekannt. Für den Anfangszustand (Formel 3-2) und einen freien Endzustand $\mathbf{x}(T)$ lauten sie:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ und } \boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}.$$

Formel 3-10

Dies führt zu einem so genannten 2-Punkt-Randwertproblem, welches im Falle der vorliegenden Arbeit mit der Matlab-Routine bvp4c gelöst wird.

3.2 Manöverplanung als angewandte Optimale Steuerung

Der reale, menschliche Fahrer benutzt seine Erfahrung – sein Wissen wie sein Fahrzeug auf seine Eingaben reagiert – um die Vorstellungen, die er von seiner Interaktion mit dem Fahrzeug hat (z.B. zeitoptimales, sportliches oder komfortables Fahren) zu verwirklichen. Das bedeutet, er kann mit seiner Erfahrung „vorhersehen“, wie sich das Fahrzeug als Reaktion auf seine Eingaben verhalten wird. Man könnte daraus folgern, dass der menschliche Fahrer ein Modell von Fahrzeug und Umgebung besitzt, mit dessen Hilfe er die Interaktionen mit seinem realen Fahrzeug „voraussimuliert“. Oder aber man mutmaßt, dass der Menschliche Fahrer die Theorie Optimaler Steuerungen verinnerlicht hat, und mit seiner modellierung des Systems (Formel 3-1) und seiner ins erweiterte Gütefunktional (Formel 3-5) gepressten Vorstellung, was er erreichen möchte, solange optimiert, bis er weiß wie die Eingangsgrößen seines Fahrzeugs (regelungstechnisch **u**, real Lenkwinkel- und Pedalvorgaben) zu stellen sind. Diese Vorstellung kann man bis Ernst Fiala [9] zurückverfolgen, welcher lang vor den ersten numerischen Simulationen schrieb: „Ein Mensch muss während seiner Laufbahn als Fahrer lernen, die Bewegungsgleichungen des Fahrzeuges zu lösen, ohne die Gleichungen zu kennen“. Die Qualität dieses Modells, welches etwa Cossalter [5] als „mentales Fahrzeugmodell“ bezeichnet hat, entscheidet ob der Benutzer ein guter oder ein ungeübter Autofahrer ist. Das mentale Fahrzeugmodell des geübten Fahrers bildet infolge seiner Erfahrung die Eigenschaften seines realen Fahrzeuges gut ab,

dementsprechend wird das vorhergesagte Verhalten weitestgehend dem tatsächlichen entsprechen und unvorhergesehene Nachkorrekturen werden entfallen. Beim Fahranfänger oder ungeübten Lenker wird es infolge einer größeren Qualitätsdiskrepanz zwischen seiner (Voraus-)Planung und der Wirklichkeit vermehrt nachträglicher Korrekturen bedürfen. Als Beispiele hierfür können hektische Lenkwinkeleingaben bzw. Bremsbetätigung dienen. Die Rennfahrer wiederum, deren Modellierung in dieser Arbeit behandelt wird, kann man, nach den bisher beschriebenen Maßstäben, als die perfekten Fahrer ansehen. Deren Erfahrung und Wissen über ihr Fahrzeug ist so ausgeprägt, dass sie sich auch im fahrdynamischen Grenzbereich noch ausreichend sicher bewegen können, bzw. sich kontrolliert an die physikalischen Grenzen herantasten. Um auf die Modellvorstellung des mentalen Fahrzeugmodells zurückzukommen – dieses muss im Fall des Rennfahrers eine außergewöhnliche Detaillierungstiefe besitzen. Der tatsächliche Weg zu besten Rundenzeiten führt zwar auch für diese perfekten Fahrer über rundenweise wiederholtes Probieren und Herantasten an die Limits, deren außergewöhnliches Verständnis für ihr Fahrzeug dürfte aber außer Frage stehen. Dieses Wissen des Fahrers muss nun für die Anwendung in einer Optimalen Steuerung abgebildet werden. Dazu muss, da die Manöverplanung Eingangsdaten für eine Simulation liefern soll, das Fahrzeugmodell der Simulationsumgebung und dessen Umgebung in geeigneter Form abgebildet werden. Zugleich muss jedoch auch das erweiterte Gütefunktional so definiert sein, dass die optimale Steuerung die geforderten Kriterien erfüllt.

3.3 Modellierung des Gesamtsystems

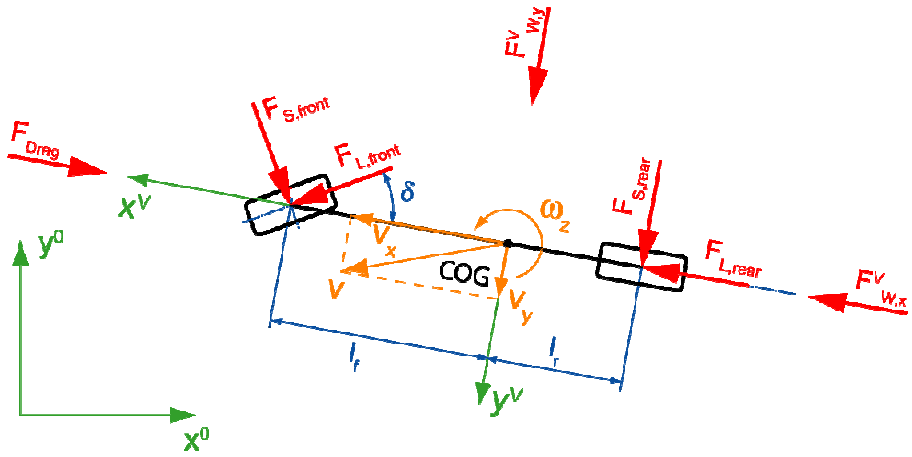
Das Modell des Systems beinhaltet nicht nur das Fahrzeug, sondern auch Informationen über dessen Umgebung, insbesondere die Beschreibung der Fahrbahn. Dabei sollen die Eigenschaften des komplexen Fahrzeuges des Simulationssystems so exakt wie möglich dargestellt werden. Um die zu lösende Aufgabe in die in Kapitel 3.1 angegebene Form zu bringen, müssen *alle* benötigten Kennwerte von Fahrzeug und Fahrbahn durch mathematische Ausdrücke beschrieben werden. Eine Verwendung von Kennfeldern o.ä. ist *nicht* möglich.

Außerdem müssen Steuereingänge vorgesehen werden, die es ermöglichen das Fahrzeug „zu bedienen“ – der Vektor der Eingangsgrößen **u** (siehe Formel 3-1) muss sich auch im mathematischen Modell des Systems finden. Die zusätzliche Notwendigkeit Rechenzeit zu sparen, sowie den gesamten Prozess numerisch stabil und ausfallsicher zu gestalten, beeinflusst darüber hinaus den Aufbau der Modellierung des Systems.

3.3.1 Das erweiterte, nichtlineare Einspurmodell

Das Einspurmodell von Rieckert and Schunck [10] erwies sich als geeignet diese Anforderungen zu erfüllen, wurde jedoch für die Anwendung adaptiert. Die bedeutendste Änderung ist, dass während sich Rieckert und Schunck mit einem linearen Einspurmodell befasst haben, in dieser Arbeit ein nichtlineares Einspurmodell als Gerüst der Fahrzeugbeschreibung verwendet wird.

Abbildung 3-1: Nichtlineares Einspurmodell



Das nichtlineare Einspurmodell geht von folgenden Annahmen aus:

- Drei Freiheitsgrade: Längs-, Quer(Schwimm)- und Gierbewegung
- Keine dynamische Nick- und Wankbewegung
- Die Front- und Heckräder sind jeweils zu einem Rad in Fahrzeugmitte zusammengefasst
- Linearisierte Seitenkraftkennlinien an den Rädern
- Keine Reifennachläufe, bzw. Rückstellmomente infolge der Schräglaufwinkel

- Rotation und Schlupf der Reifen werden nicht modelliert

Die Dynamik des Systems wird durch folgendes Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x^V \\ \dot{v}_y^V \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y^V \, \omega_z + \dfrac{\sum F_x^V}{m} \\ -v_x^V \, \omega_z + \dfrac{\sum F_y^V}{m} \\ \dfrac{\sum M_z}{I_z} \end{bmatrix}.$$

Formel 3-11

Dabei ist m die Fahrzeugmasse, I_z das Massenträgheitsmoment um die Fahrzeughochachse und F_x, F_y und M_z sind die äußeren Kräfte bzw. Momente.

Zur Evaluierung der auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte und Momente, wird das Modell, entgegen der obigen Annahmen, an einigen Stellen erweitert, ohne jedoch neue Zustandsgrößen einzuführen. Zusammenfassend kann man von einen erweiterten, nichtlinearen Einspurmodell sprechen, welches im Folgenden im Detail betrachtet wird.

Die äußeren, auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte und Momente, sind in den Σ-Termen von Formel 3-11 zusammengefasst. Darin sind die Antriebs-, Brems- und Seitenkräfte, die mittels Reifen übertragen werden, sowie Luftwiderstands- und Gewichtskräfte enthalten. Die Reifenkräfte sind dabei dominant, und teilweise direkt abhängig von den Steuereingängen des Fahrers. Die Eingaben mit denen der reale, menschliche Fahrer auf sein Fahrzeug wirkt, sind der über das Lenkrad eingestellte Lenkwinkel an den Vorderrädern, sowie die Stellung von Gas- und Bremspedal. Gas- und Bremspedal wurde zu einer Eingangsgröße - Pedal ρ - zusammengefasst, welche über dem Intervall

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Formel 3-12

definiert ist, wobei

$\rho =$ -1 für Bremsen mit der maximal zur Verfügung stehenden Bremskraft,
0 für weder Beschleunigen noch Verzögern und
1 für Volllastbeschleunigung steht.

Die weitere Eingangsgröße – der Lenkwinkel δ - beaufschlagt die Vorderräder – siehe Abbildung 3-1. Somit wird der Vektor der Eingangsgrößen **u** (siehe Formel 3-1) mit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \delta \end{bmatrix}$$

Formel 3-13

definiert.

Die von einem Rad übertragene Längskraft kann nun mit

$$F^{Wf}_{L,front,left} = F^{Wf}_{L,front,right} = 0.5\left[Dist_{acc,front}\, k_{acc}\, \rho_{acc} - Dist_{brk,front}\, k_{brk}\, \rho_{brk}\right]$$

Formel 3-14

bzw.

$$F^{Wr}_{L,rear,left} = F^{Wr}_{L,rear,right} = 0.5\left[Dist_{acc,rear}\, k_{acc}\, \rho_{acc} - Dist_{brk,rear}\, k_{brk}\, \rho_{brk}\right]$$

Formel 3-15

angeschrieben werden. Man bedient sich dabei der Modellvorstellung, dass das Fahrzeug zum Beschleunigen, bzw. Verzögern ein Beschleunigungsvermögen k_{acc}, bzw. Bremsvermögen k_{brk} zur Verfügung hat, welches je nach Pedalstellung mehr oder weniger ausgeschöpft wird. Die Ermittelung von k_{acc}, bzw. k_{brk} wird in Kapitel 3.3.2.1 noch ausführlich gezeigt werden. $Dist_{acc,front}$ und $Dist_{brk,rear}$ entsprechen den Verteilungen der Antriebs- bzw. Bremskraft auf Vorder- und Hinterachse, welche sich

$$Dist_{front} + Dist_{rear} = 1$$

Formel 3-16

auf 1, bzw. auf 100 % ergänzen. Somit können nicht nur jegliche Bremskraftverteilungen, sondern auch unterschiedliche Antriebskonzepte (Front-, Heck- und Allradantrieb) modelliert werden. Dazu muss das Pedal ρ in die Komponenten ρ_{acc} und ρ_{brk} separiert werden. Die an den Rädern angreifenden Querkräfte werden vereinfacht über lineare Seitensteifigkeiten - linearisierte Schräglaufwinkel-Seitenkraft Kennlinien (exemplarisch für das linke Vorderrad) - $cs_{front,left}$ über

$$F^{Wf}_{S,front,left} = cs_{front,left}\, \alpha_{front}\,,$$

Formel 3-17

berechnet. Die gesonderte Betrachtung der Seitensteifigkeiten jedes einzelnen Rades erwies sich infolge der großen dynamischen Radlastschwankungen im Rennsport als notwendig. Bei den Schräglaufwinkeln wird infolge der Annahmen des Einspurmodells nur zwischen α_{front} und α_{rear} unterschieden. Außer den Reifenkräften wirken, wie man Abbildung 3-1 entnehmen kann, außerdem folgende Kräfte auf das Fahrzeug:

- Die Luftwiderstandskraft F_{Drag}, welche der dominante Fahrwiderstand ist. Ihre Modellierung wird in Kapitel 3.3.2.2 ausführlich betrachtet.
- Die im Schwerpunkt des Fahrzeugs angreifenden Komponenten von dessen Gewichtskraft $F_{W,x}^{V}$ und $F_{W,y}^{V}$, welche von der Längs- und Querneigung der Fahrbahn sowie dem Winkel τ (siehe Abbildung 3-10) zwischen Fahrzeuglängsachse und Fahrbahnmittellinie abhängen. Damit kann der Einfluss von Fahrbahnsteigungen, sowie erhöhten, bzw. abfallenden Steilkurven in der Manöverplanung berücksichtigt werden. Die Berechnung von $F_{W,x}^{V}$ und $F_{W,y}^{V}$ wird zusammen mit der generellen Streckendefinition in Kapitel 3.3.4 erläutert.
- Die Rollwiderstandskraft der Reifen wurde vernachlässigt.

Damit ist der prinzipielle Aufbau der Modellierung des Fahrzeugs abgeschlossen und es können im Folgenden die dabei benötigten Abstraktionen und Vereinfachungen bearbeitet werden.

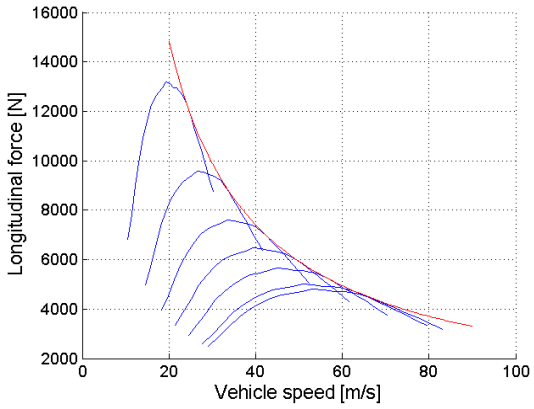
3.3.2 Modellierung relevanter Fahrzeugsubsysteme

Die relevanten Fahrzeugsubsysteme, deren Modellierung hier beschrieben werden soll, sind der Antrieb, die Aerodynamik, die Radaufhängungen und die Reifen. Der sinngemäße Inhalt der einführenden Worte von Kapitel 3.3 lautet: „So genau wie nötig, so simpel wie möglich“. Dieser Doktrin folgend musste bei der Modellierung jedes Subsystems überdacht werden, welche Information man unbedingt benötigt und welche man vernachlässigen kann.

3.3.2.1 Motor, Antriebstrang und Bremssystem

Der Inhalt dieses Abschnitts, also Motor, Antriebsstrang und Bremssystem wurde in Kapitel 3.3.1 zu einem Beschleunigungsvermögen k_{acc}, bzw. Bremsvermögen k_{brk} abstrahiert und zur Berechnung der beschleunigenden, bzw. verzögernden Reifenlängskräfte verwendet. Beim Bremsvermögen k_{brk} ist eine derartige Abstraktion noch relativ einfach vorstellbar – es wird unter Vernachlässigung von Motorschleppmoment, Bremsenalterung und sonstige Defekte, aus dem maximal zur Verfügung stehenden Bremsmoment bzw. –druck ermittelt . Bei Motor und Antriebstrang, welche sich hinter k_{acc} verbergen, verhält es sich nicht so einfach. Der verwendete Ansatz für die Manöverplanung ermöglicht keine diskreten Umschaltpunkte, somit können keine separaten Gangübersetzungen berücksichtigt werden. Ohne Schaltgetriebe kann und muss auch auf ein dreidimensionales Motorkennfeld (Drehzahl, Pedal und Moment) verzichtet werden. Die Lösung kann im Zugkraftdiagramm gefunden werden.

Abbildung 3-2: Zugkraftdiagramm



Die blauen Linien des Diagramms zeigen für jeden einzelnen Gang, die maximal zur Verfügung stehende Zugkraft, extrahiert aus der Volllastlinie des Drehmomentkennfeldes des Motors. Der Bereich unter den einzelnen durchgezogenen Linien stellt den Teillastbereich dar. Die rote Linie zeigt die ideale Zugkrafthyperbel, welche die Zugkraftkurven der einzelnen Gänge im jeweiligen P_{max}-Punkt tangiert. Die klassische Getriebeauslegung versucht die gewandelten Motorkennfelder möglichst gut an die Zugkrafthyperbel zu approximieren. Daher – im Umkehrschluss – sind die Informationen dieser idealen Zugkrafthyperbel für die

Manöverplanung ausreichend. Durch das Fehlen von Motordrehzahl und Schaltpunkten kann die Form der einzelnen gewandelten Momentenkennlinien nicht modelliert werden. Der daraus resultierende Fehler erscheint angesichts Schaltzeiten im ms-Bereich und dem Umstand, dass das Anwendungsgebiet der Manöverplanung weniger in der Modellierung des exakten Beschleunigungsverlaufes auf Geraden, sondern vielmehr in querdynamisch idealen Kurvenfahrten liegt, akzeptabel. Teillast - $\rho_{acc} < 1$ - ist der Bereich unter der Zugkrafthyperbel. Teillastbereiche treten im Rennsport nur auf, wenn die Reibungsgrenzen der Reifen es erfordern. Diese Limitierung ist es auch, die den Anstieg der Zugkrafthyperbel gegen unendlich bei kleinen Geschwindigkeiten vernachlässigbar erscheinen lässt. Innerhalb der Reibungsgrenzen kann der gesuchte Wert k_{acc} somit mit

$$k_{acc} = \frac{P_{max}}{v}$$

Formel 3-18

berechnet werden, was der idealen Zugkrafthyperbel entspricht. Man kann damit feststellen, dass die verfügbare Zugkraft nach oben durch die Zugkrafthyperbel und nach unten (Teillast) durch die Reibungsgrenzen der Reifen limitiert ist. Wie dies geschieht, wird in Kapitel 3.4 gezeigt werden.

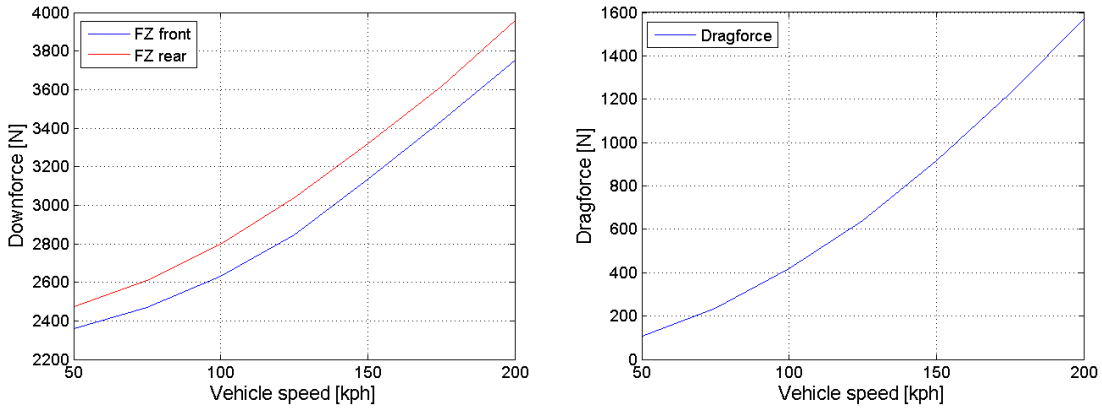
3.3.2.2 Aerodynamik

Die Aerodynamik ist eines der wichtigsten Kriterien eines modernen Rennfahrzeuges. Man kann sie jedoch grob auf 2 Aufgaben minimieren:

- Bereitstellung von Abtrieb („Downforce“) an den Rädern
- Minimierung des Luftwiderstandes

Die für die Manöverplanung relevanten Informationen, betreffend die Aerodynamik des Fahrzeugs, sind die Luftwiderstandskraft F_{Drag} und die Abtriebskraft an den Rädern F_{z_front} und F_{z_rear}.

Abbildung 3-3: Downforce und Luftwiderstand



Um die Eigenschaften des Fahrzeuges der Simulationsumgebung bestmöglich abzubilden, werden die stark geschwindigkeitsabhängigen Verläufe von Luftwiderstandskraft, sowie Abtriebskraft pro Achse und Rad dem Simulationsfahrzeug entnommen und mittels geschwindigkeitsabhängiger Polynome F_{z_front}, F_{z_rear} und F_{Drag} in die gesuchte Form gebracht.

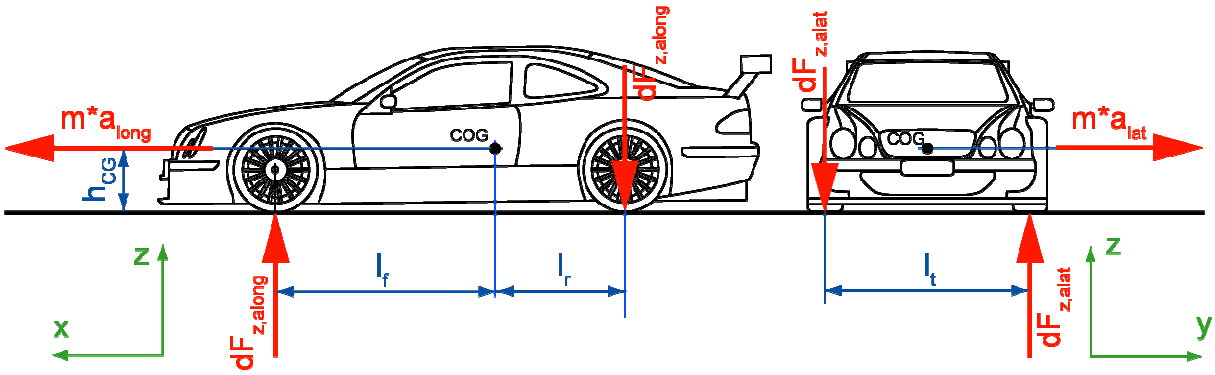
3.3.2.3 Radaufhängungen

Die Radaufhängungen, welche zusammen mit Rädern und Bremsen das Fahrwerk bilden, haben folgende Aufgaben:

- Übertragung der Kräfte und Momente zwischen Rädern und Aufbau
- Gewährleistung der gewünschten Radführung
- Größtmögliche Fahrsicherheit, bei weitgehender Vernachlässigung von Fahrkomfort (Rennsport)

Der Doktrin von Kapitel 3.3 folgend verbleiben hierbei die dynamischen Radlasten aufgrund longitudinaler und lateraler Beschleunigung als unbedingt benötigte Informationen. Die im Rennsport auftretenden großen Längsbeschleunigungen beim Bremsen, bzw. Querbeschleunigungen bei Kurvenfahrt führen zu großen, fahrdynamisch bedeutenden Radlastschwankungen. Um diese zu modellieren, wird ein einfaches, ungefedertes und ungedämpftes Fahrwerksmodell verwendet.

Abbildung 3-4: Fahrzeuggeometrie



Die aufgrund der auf das Fahrzeug wirkenden Längsbeschleunigung auftretende Radlastdifferenz an einer Achse wird mit

$$dF_{z,along} = \frac{m\,a_{long}\,h_{cg}}{l_f + l_r}$$

Formel 3-19

ermittelt. Da die Radlasten infolge der angreifenden Querbeschleunigung ein statisch unbestimmtes System bilden, werden sie näherungsweise über

$$dF_{z,alat,front} = mb_{front}\,\frac{m\,a_{lat}\,h_{cg}}{l_t},$$

Formel 3-20

bzw.

$$dF_{z,alat,rear} = mb_{rear}\,\frac{m\,a_{lat}\,h_{cg}}{l_t}$$

Formel 3-21

ermittelt. Der Ausdruck

$$mb_{front} + mb_{rear} = 1$$

Formel 3-22

beschreibt wie sich das Wankmoment an Vorder- und Hinterachse abstützt. Die Faktoren mb_{front} und mb_{rear} nennt man mechanische Balance und beschreiben neben dem Einfluss anderer Elemente auch näherungsweise jene des Stabilisators. Die mechanische Balance kann nur entweder geschätzt, oder ähnlich den „F_z-Polynomen“ der Aerodynamikmodellierung aus dem Simulationsfahrzeug ausgelesen werden. Die Modellierung der dynamischen Radlastschwankungen ist somit

abgeschlossen und die gesamten Radaufstandslasten können damit (exemplarisch für das linke Vorderrad) mit

$$F_{z_front,left} = F_{z_front} + dF_{z_along} + dF_{z_alat,front} + 0.5\,dF^{V}_{W,z,front},$$

Formel 3-23

angeschrieben werden. Die Radaufstandslasten setzen sich somit aus identifizierten aerodynamischen Downforces, welche auch die statischen Gewichtsanteile enthalten, einfach modellierten dynamischen Radlastschwankungen und den Faktoren $dF^{V}_{W,z,front}$ und $dF^{V}_{W,z,rear}$, welche die Minderung der Radaufstandskraft infolge longitudinaler und lateraler Neigung der Fahrbahn berücksichtigen (mehr dazu in Kapitel 3.3.4.3), zusammen.

3.3.2.4 Reifen

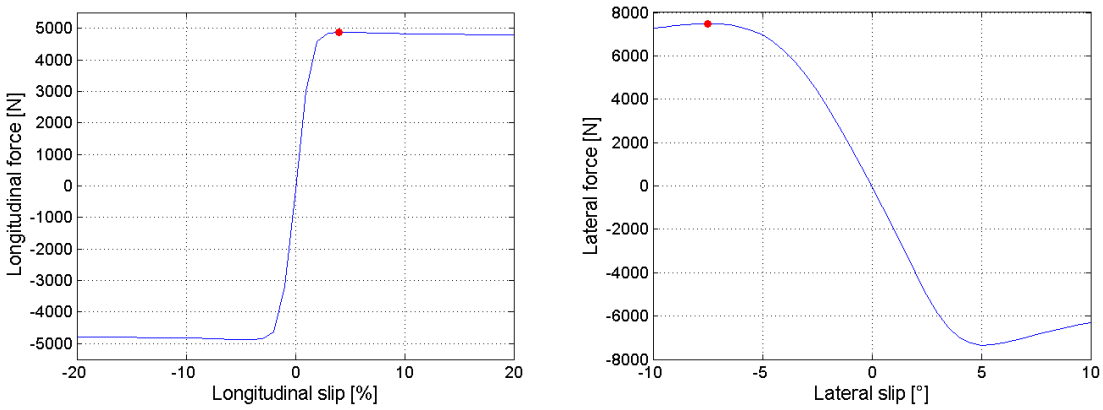
Der Reifen nimmt im System Fahrzeug – Fahrbahn eine wichtige Rolle ein. Er stellt den Kontakt zwischen Fahrzeug und Fahrbahn her, überträgt alle Kräfte und Momente und hat wesentlichen Einfluss auf die fahrdynamischen Eigenschaften des Fahrzeugs. Die Aufgabe des Reifens kann man folgendermaßen umreißen:

- Bereitstellung der für einen stabilen Fahrzustand erforderlichen Kontaktkräfte zwischen Fahrzeug (Rad) und Fahrbahn in longitudinaler und lateraler Richtung bei unterschiedlichen Bedingungen (trocken, feucht, nass).

Die in diesem Kapitel präsentierte Reifenbeschreibung hat nichts mit der Reifenmodellierung des Simulationssystems gemein. In der Manöverplanung wird der Reifen nicht als dynamisches System betrachtet - Drehzahlen, Gleitgeschwindigkeiten (in Längsrichtung), Antriebs- bzw. Bremsmomente finden also keine Berücksichtigung. Von Interesse sind lediglich die in lateraler und longitudinaler Richtung übertragenen sowie maximal übertragbaren Kräfte, sowie das Verhalten des Reifens bei kombinierter Längs- und Querkraftbelastung. Die vom Reifen übertragenen Längskräfte wurden bereits in Formel 3-14 und Formel 3-15 beschrieben. Die Seitenkräfte werden gemäß Formel 3-17 über radlastabhängige Seitensteifigkeiten $cs(F_z)$ modelliert, deren Ermittelung im Folgenden gezeigt werden soll. Die übertragenen Kräfte werden also im Grunde genommen vom Fahrzeug vorgegeben, wobei die $cs(F_z)$ das einzige Indiz einer Reifenmodellierung sind. Wie

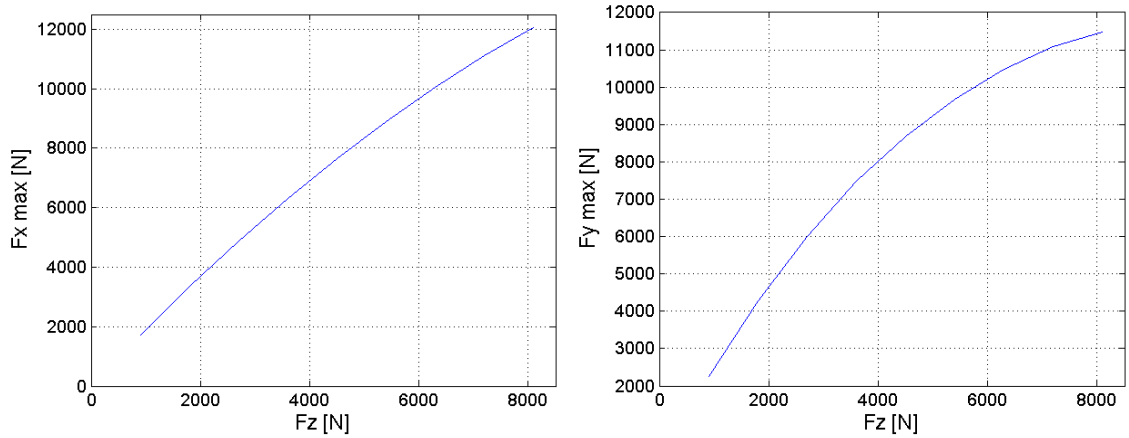
es, trotz der starken Abstraktion, mit den vorhandenen Informationen möglich ist, fahrdynamisch plausibles Verhalten zu liefern, wird in Kapitel 3.4 verdeutlicht. Dazu müssen aus der Reifenmodellierung der Simulationsumgebung die radaufstandskraftabhängigen Verläufe der Seitensteifigkeit, sowie der maximal übertragbaren Kräfte in longitudinaler und lateraler Richtung ausgelesen werden. Die folgenden Abbildungen zeigen exemplarisch die für eine Aufstandskraft F_z ausgelesenen Verläufe für F_x und F_y.

Abbildung 3-5: Längs- und Querkraftcharakteristik



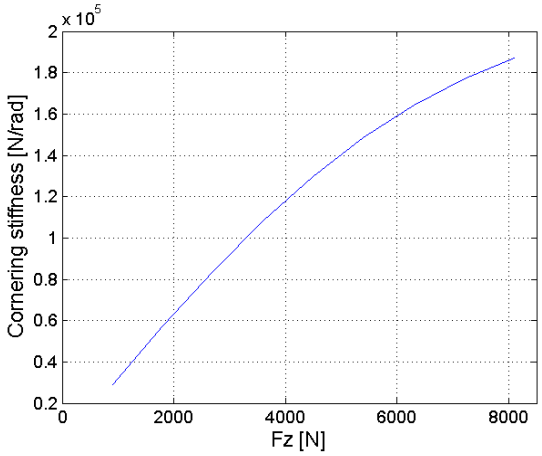
Die roten Punkte markieren die maximal übertragbare Längs- bzw. Querkraft. Dabei wird zwischen positiven und negativen Schlupf bzw. Schlupfwinkel (Antriebs- bzw. Bremsschlupf bei der Längskraftcharakteristik) nicht unterschieden. Dies geschieht für mehrere Radaufstandslasten und man erhält somit die $F_{x_max}(F_z)$ und die $F_{y_max}(F_z)$.

Abbildung 3-6: $F_{x_max}(F_z)$ und $F_{y_max}(F_z)$



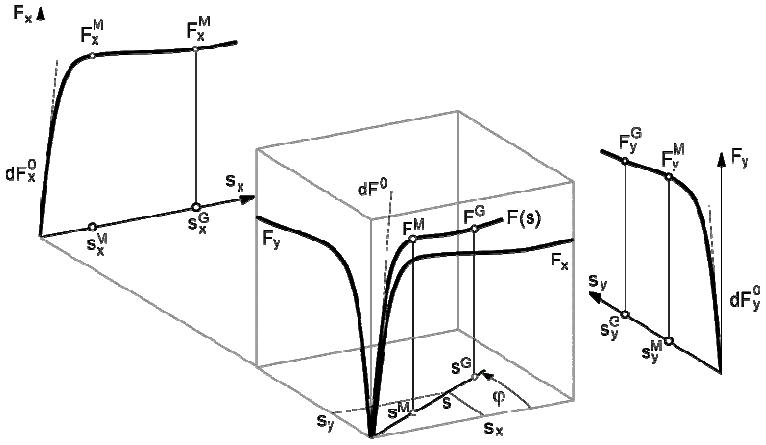
In der Querkraftcharakteristik (Abbildung 3-5) wird die Steigung im Nullpunkt abgelesen und als linear approximierte Seitensteifigkeit *cs(F_z)* verwendet.

Abbildung 3-7: Seitensteifigkeit cs(F_z)



Die Verläufe von $F_{x_max}(F_z)$, $F_{y_max}(F_z)$ und $cs(F_z)$ zeigen sehr deutlich den großen Einfluss der Radaufstandslast F_z. Die in Abbildung 3-6 und Abbildung 3-7 dargestellten Verläufe werden ähnlich der Aerodynamikmodellierung durch Polynome nachgebildet. Der beschriebene Prozess wird natürlich für die bei einem Rennfahrzeug verschiedenen Vorder- und Hinterreifen separat durchgeführt. Die Frage der kombinierten Längs- und Querkraftbeanspruchung wurde unter Benutzung des Ähnlichkeitsprinzips

Abbildung 3-8: Kombinierte Reifenkräfte (Quelle TMeasy, Hirschberg, Rill)



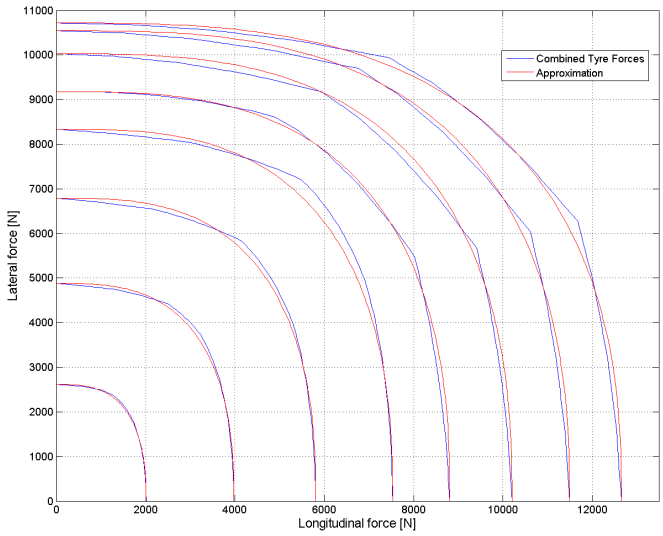
und der modifizierten Ellipsenformel

$$\left(\frac{F_x}{F_{x_max}}\right)^{x_exp} + \left(\frac{F_y}{F_{y_max}}\right)^{y_exp} = 1$$

Formel 3-24

verwendet, wobei x_exp und y_exp Modellierungsexponenten sind, mit deren Hilfe der Verlauf der kombinierten Kräfte zwischen den Maxima entsprechend den Anforderungen geformt werden kann. Die folgende Abbildung zeigt die damit erreichbare Modellierungsgüte.

Abbildung 3-9: Kombinierte Reifenkräfte in der Manöverplanung



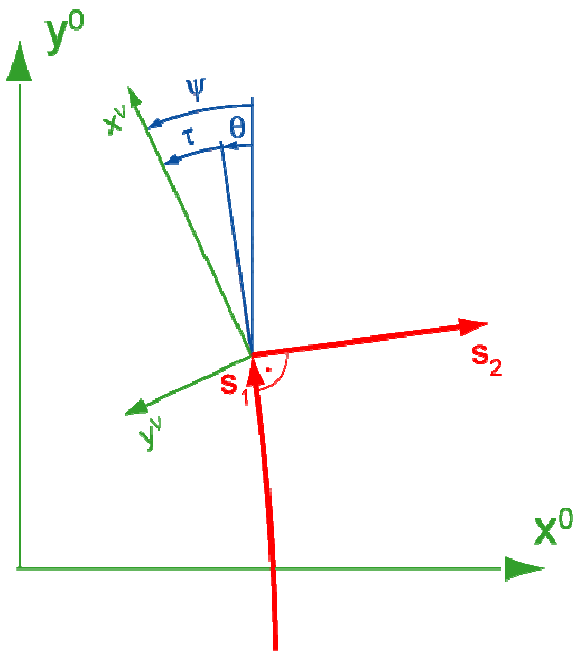
Die blauen Verläufe sind die aus der Reifenmodellierung für unterschiedliche F_z extrahierten Verläufe maximal übertragbarer Längs- und Querkraft. Die roten Kurven sind die mit Hilfe der polynomisierten Maxima approximierten Verläufe. Die Verwendung dieser Daten wird in Kapitel 3.4 verdeutlicht werden.

3.3.3 Das krummlinige Koordinatensystem

Um die am Anfang von Kapitel 3 definierten Anforderungen erfüllen zu können, muss das Modell neben der Beschreibung des Fahrzeugs auch um eine Beschreibung von dessen Position und Ausrichtung erweitert werden. Anstelle des absoluten Weltkoordinatensystems x^0 y^0 wird ein krummliniges Koordinatensystem (Cossalter [5]) verwendet – siehe Abbildung 3-10. Dieses ist hinsichtlich der geforderten Kriterien besonders komfortabel anzuwenden. Speziell die Forderung, die Fahrbahn

nicht zu verlassen, ist damit, wie sich in Kapitel 3.4 noch zeigen wird, sehr einfach umzusetzen.

Abbildung 3-10: Krummliniges Koordinatensystem



Wie in Abbildung 3-10 ersichtlich, ist die Position des Fahrzeugs bestimmt durch die verallgemeinerten, krummlinigen Koordinaten s_1 and s_2, wobei s_1 die auf der Mittellinie zurückgelegte Distanz ist und s_2 der Normalabstand dazu. Die Orientierung des Fahrzeugs wird angegeben durch den von der Tangente an die Mittellinie aus gemessenen Winkel τ, anstelle des absoluten Gierwinkels ψ. Der Verlauf der Mittellinie ist beschrieben durch ihre Krümmung $\Theta(s_1)$. Der Modellierung der Krümmung wird in Kapitel 3.3.4.1 besonderes Augenmerk geschenkt. Zweifache Integration der Krümmung liefert die absoluten Koordinaten der Mittellinie im Weltkoordinatensystem $xc^0(s_1)$ and $yc^0(s_1)$

$$\begin{aligned} -dx_c^0 &= \sin\theta(s_1)\cdot ds_1 \\ dy_c^0 &= \cos\theta(s_1)\cdot ds_1 \end{aligned},$$

Formel 3-25

einfache den Steigungswinkel $\theta(s_1)$

$$\Theta(s_1) = \frac{d\theta(s_1)}{ds_1}.$$

Formel 3-26

Die Position und Orientierung des Fahrzeugs im Weltkoordinatensystem ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {x_c}^0(s_1) + s_2 \cos\theta(s_1) \\ {y_c}^0(s_1) + s_2 \sin\theta(s_1) \\ \theta(s_1) + \tau \end{bmatrix}.$$

Formel 3-27

Über die Geschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{y}^0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x \sin\psi - v_y \cos\psi \\ v_x \cos\psi - v_y \sin\psi \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Formel 3-28

erhält man die Beschreibung von Fahrzeugposition- und Orientierung in verallgemeinerten, krummlinigen Koordinaten als System von Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_x \cos\tau - v_y \sin\tau}{1 + s_2\,\Theta(s_1)} \\ -v_x \sin\tau - v_y \cos\tau \\ \omega_z - \Theta(s_1)\dfrac{v_x \cos\tau - v_y \sin\tau}{1 + s_2\,\Theta(s_1)} \end{bmatrix}.$$

Formel 3-29

Somit beschreibt Formel 3-11 die Dynamik des Fahrzeugs, während Formel 3-29 die Kinematik abbildet. Das komplette System kann damit durch die Koordinaten des Zustandsvektors

$$\mathbf{x} = \left[s_1 \; s_2 \; \tau \; v_x \; v_y \; \omega_z \right]^T$$

Formel 3-30

angegeben werden.

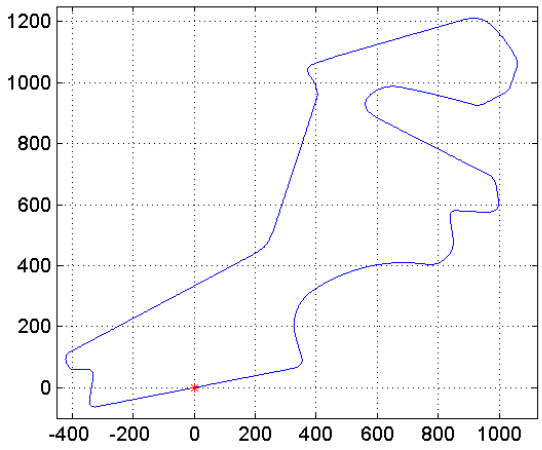
3.3.4 Streckenmodellierung

3.3.4.1 Modellierung der Krümmung

In diesem Kapitel wird die für die Manöverplanung verwendete Modellierung der Fahrbahn behandelt. Dies beinhaltet die Ermittlung der Krümmung der Mittellinie

Θ(s1), der variablen Streckenbreite, deren Verwendung noch in Kapitel 3.4 erläutert werden wird sowie die Modellierung und Anwendung der longitudinalen – σ(s1) – und lateralen – κ(s1) – Neigung der Fahrbahn. Wie man Kapitel 3.3.3 entnehmen kann, benötigt man für das Differentialgleichungssystem Formel 3-29, welches die Kinematik des Systems Fahrzeug / Umwelt abbildet, die Krümmung der Mittellinie $\Theta(s_1)$ der Fahrbahn in Abhängigkeit von s_1. Ähnlich anderen bereits behandelten Größen, wird auch die Krümmung „polynomisiert“ und damit in die für die Manöverplanung verwendbare Form gebracht. Im Gegensatz zu den bereits eingeführten Polynomen, wie etwa den maximal übertragbaren Reifenkräften - siehe 3.3.2.4 – haben sich bei der Krümmungsmodellierung Probleme gezeigt, welche vorher nicht aufgetreten sind. Dies rührt insbesondere daher, dass der Verlauf der Krümmung über dem Weg wesentlich „unruhiger und ungleichförmiger“ ist, als die bisher behandelten Größen. Bei den bisher behandelten, in Polynomform dargestellten Größen war die Approximation jeweils so gut, dass es bei den Grafiken – z.B.: Abbildung 3-3 nicht notwendig war, den Originalverlauf und die Approximation gesondert darzustellen, da sie de facto deckungsgleich waren. Bei der Krümmung hat sich ein anderes Verhalten, welches viele Kompromisse erforderlich machte, zeigt. Als Beispiel wird die neue Rennstrecke von Istanbul angeführt.

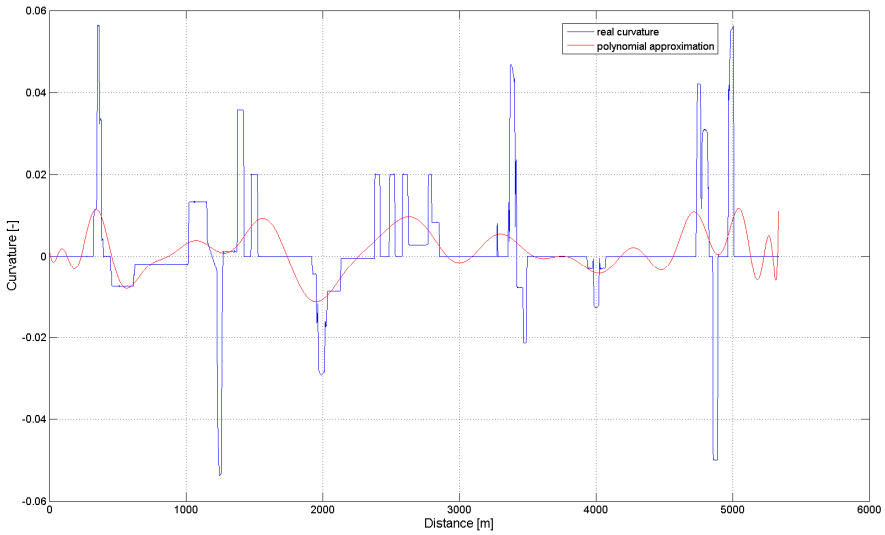
Abbildung 3-11: Istanbul Racetrack



Ihre Mittellinie hat eine Länge von ungefähr 5338 m. Versucht man nun den Krümmungsverlauf über ein Polynom zu approximieren, erkennt man, wie aus

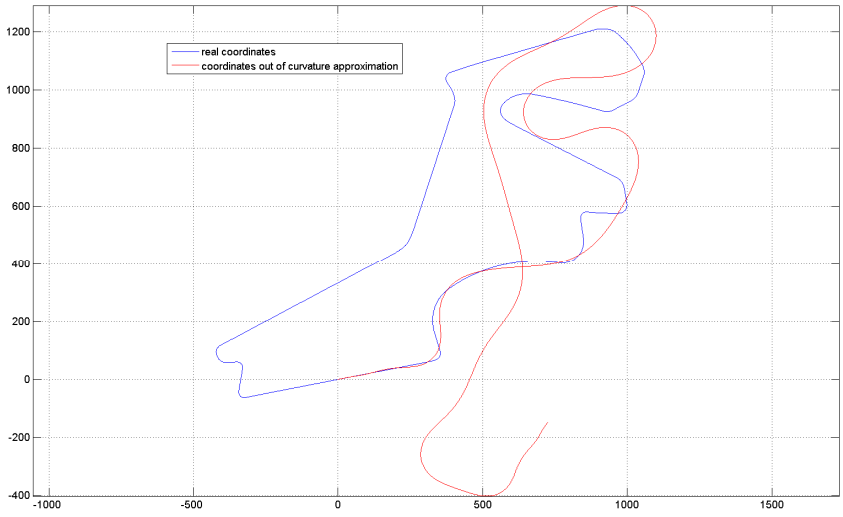
folgender Abbildung ersichtlich, dass dies mit akzeptabler Genauigkeit nicht möglich ist.

Abbildung 3-12: Krümmungsverlauf Istanbul gesamt



Würde man aus dem approximierten Krümmungsverlauf durch zweimalige numerische Integration die Koordinaten ermitteln, zeigen sich die Auswirkungen der mangelhaften Krümmungsmodellierung noch deutlicher.

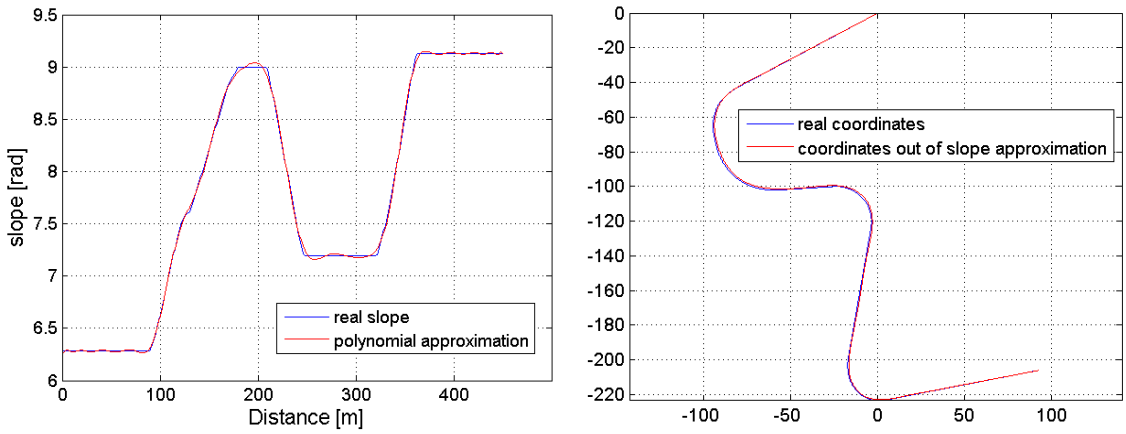
Abbildung 3-13: Vergleich echte / approximierte Koordinaten



Der rote Kurs ist nicht nur verständlicherweise nicht geschlossen, es wurde auch keine einzige Kurve richtig getroffen. Es erscheint offensichtlich, dass man auf Basis einer derart fehlerhaften Krümmung keine Sollspur rechnen kann. Da eine höhere

Polynom-Ordnung numerische Probleme nach sich gezogen hätte, fiel die Wahl auf kürzere Teilstücke – anstelle der Gesamtlänge musste somit eine sinnvolle „Polynomlänge“ gewählt werden. Dies zieht selbstverständlich Änderungen im Gesamtprozess nach sich, wie in Kapitel 3.5 noch ausführlich erläutert werden wird. Die Wahl fiel dabei auf s_{max}=450 m, da man vor dem Zielkonflikt stand, das Polynom zum einen ausreichend lang zu machen, um mehrere Kurvenkombinationen zu überblicken, zum anderen so kurz zu sein, um die Krümmung ausreichend genau zu modellieren. Das damit erreichbare Ergebnis war besser, als das vorherige, jedoch auch noch nicht ausreichend. Es stellte sich daher die Frage, ob es nicht ratsamer sei, anstelle der Krümmung eine Ebene vorher die Steigung zu approximieren – zumal die Steigung aus den Koordinaten nach nur einmaliger Differentiation ergeht. Der Verlauf der Steigung müsste somit deutlich weniger „sprunghaft“ sein, als der der Krümmung. Dass man eigentlich ein Krümmungspolynom benötigt, ist kein Widerspruch, da man aus dem Steigungspolynom, welches $\theta(s_1)$ beschreibt durch einmalige Differentiation gemäß Formel 3-26 das gewünschte Krümmungspolynom $\Theta(s_1)$ erhält. Die damit erzielbare Modellierungsgüte ist, wie man der folgenden Abbildung entnehmen kann, deutlich besser als die vorangegangenen Ansätze.

Abbildung 3-14: Approximierung der Steigung und daraus errechnete Koordinaten

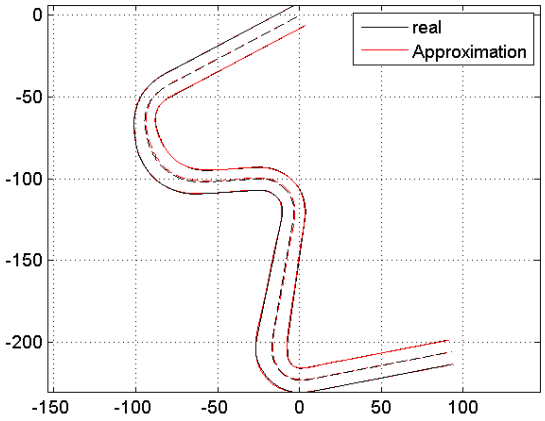


3.3.4.2 Modellierung der Streckenbreite

Die Breite der Fahrbahn, wird benötigt wird um die Position der Fahrbahnränder zu kennen und damit den verfügbaren Raum zu begrenzen. Die ermittelte Ideallinie darf verständlicherweise nicht außerhalb der Grenzen der Fahrbahn verlaufen. Die Breite

einer Rennstrecke ist im Allgemeinen nicht konstant, womit auch hier die Ermittlung einer $b(s_1)$ notwendig ist. Man entschied sich, bedingt durch die nicht immer gute Modellierung der Mittellinie sogar dazu, den Abstand der Mittellinie zum linken und rechten Fahrbahnrand $b_l(s_1)$ und $b_r(s_1)$ separat zu „polynomisieren“. Die damit erzielten Ergebnisse sind in folgender Abbildung ersichtlich.

Abbildung 3-15: Modellierung der Fahrbahnränder

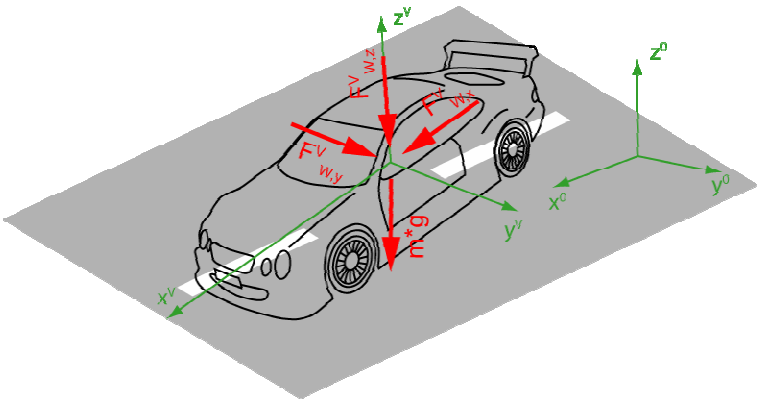


Damit konnte für die gewählten Teilstücke eine Modellierung in akzeptabler Qualität gewährleistet werden.

3.3.4.3 Modellierung der longitudinalen und lateralen Neigung der Fahrbahn

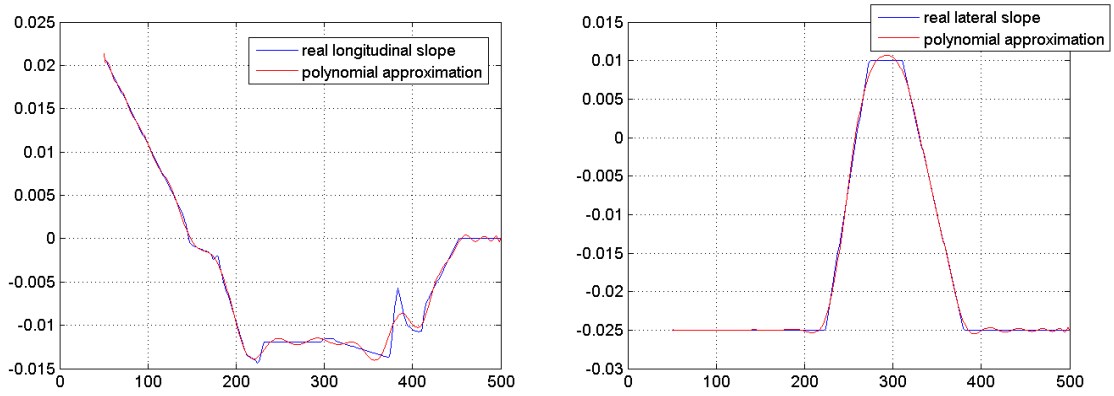
Die im Schwerpunkt des Fahrzeugs angreifenden Komponenten von dessen Gewichtskraft $F^V_{W,x}$, $F^V_{W,y}$ und $F^V_{W,z}$ hängen von der Längs- und Querneigung der Fahrbahn sowie dem Winkel τ zwischen Fahrzeuglängsachse und Fahrbahnmittellinie (siehe Abbildung 3-10) ab.

Abbildung 3-16: Fahrbahn 3D



Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die aus longitudinaler und lateraler Neigung der Fahrbahn resultierenden Komponenten des Fahrzeuggewichts $F_{W,x}^{V}$, $F_{W,y}^{V}$ und $dF_{W,z}^{V}$ (die Minderung des Eigengewichts) grossen Einfluss auf die Fahrdynamik sowie die gewählte Linie und die Geschwindigkeit haben. Als einfachstes Beispiel seien hier klassische, überhöhte Steilkurven genannt (laterale Neigung der Fahrbahn - κ), bei denen $F_{W,y}^{V}$ einen Teil der am Fahrzeug angreifenden Fliehkraft kompensiert und somit höhere Kurvengeschwindigkeiten ermöglicht. Die Modellierung von Längs- und Querneigung führt über die bereits bekannten Polynome. Für die longitudinale Neigung $\sigma(s_1)$ und laterale Neigung $\kappa(s_1)$ konnte die in folgender Abbildung erkennbare Modellierungsgüte erreicht werden.

Abbildung 3-17: Longitudinale und Laterale Neigung



Diese Ergebnisse wurden trotz kleiner Abweichungen akzeptiert – verglichen mit der Modellierung der Krümmung sind die Ansprüche hier nicht vergleichbar hoch. Somit ist nicht nur die die Streckenmodellierung sondern auch die Modellierung des Gesamtsystems (Kapitel 3.3) abgeschlossen.

3.4 Das Gütefunktional

Die Forderungen, die man an eine Optimale Steuerung im Allgemeinen, bzw. an die Manöverplanung im Speziellen stellt, müssen in der Formulierung des Gütefunktionals Formel 3-3 bzw. des erweiterten Gütefunktionals Formel 3-5 eingearbeitet werden. In dieser Arbeit handelt es sich dabei um die Umsetzung des Kriteriums der Zeitoptimalität, welches in Kapitel 3 definiert wurde. Das Ziel des

Prozesses ist es, die Steuergrössen ρ und δ so zu wählen, dass das Gütefunktional minimiert wird. Die unten stehende Formel zeigt die wichtigsten Terme des Gütefunktionals.

$$\bar{J} = \int_0^T \left\{ \underbrace{-\frac{\dot{s}_1}{S_0}}_{a} + \underbrace{\frac{v_x}{W_1}\left(\frac{s_{2_left}}{b_l(s_1) - \frac{l_t}{2}} + \frac{s_{2_right}}{b_r(s_1) - \frac{l_t}{2}} \right)^{2n_1}}_{b} + \underbrace{\frac{v_x}{W_2}\rho^{2n_2}}_{c} + \underbrace{\frac{v_x}{W_3}\left(\frac{\delta}{\delta_{\max}} \right)^{2n_3}}_{d} + \ldots \right.$$

$$\left. + \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \frac{v_x}{W_4}\left[\left(\frac{F_{x_i}}{F_{x_\max_i}} \right)^{x_\exp_i} + \left(\frac{F_{y_i}}{F_{y_\max_i}} \right)^{y_\exp_i} \right]^{2n_4}}_{e} \right\} dt$$

Formel 3-31

Term a ist das Herzstück des Gütefunktionals, wobei S_0 einen konstanten Skalierfaktor darstellt. Es bewirkt, dass die projizierte, auf der Mittellinie zurückgelegte Distanz innerhalb der fixen Zeit T maximiert wird, womit der Forderung nach Zeitoptimalität entsprochen wird. Das negative Vorzeichen resultiert aus der geforderten Minimierung des Gütefunktionals (Formel 3-3). Die folgenden Terme sind zusätzliche Gewichtungsterme („Penalties“), wobei die Konstruktion $\frac{v_x}{W_i}$ über die konstanten Gewichtungsterme W_i eine geschwindigkeitsabhängige Gewichtung darstellt und darüber hinaus eine unterschiedliche Bewertung der Penalties ermöglicht.

Term b ist der Penalty-Term, der verhindert, dass der Fahrer die zur Verfügung stehende Fahrbahn verlässt. Die Variablen s_{2_left} bzw. s_{2_right} sind von s_2 abgeleitet und bezeichnen, wie weit sich das Fahrzeug links bzw. rechts der Mittellinie befindet. Steht das Fahrzeug rechts der Mittellinie ist $s_{2_left}=0$. Die Variablen $b_l(s_1)$ und $b_r(s_1)$ sind die in Kapitel 3.3.4.2 beschriebenen linken und rechten Fahrbahnbreiten und l_t ist die Spurweite des Fahrzeugs (siehe Abbildung 3-4). Wählt man den Exponenten n_1 ausreichend groß, wächst der Ausdruck zu sehr großen Werten an, wenn $s_{2_left}>[b_l(s_1)/2-l_t/2]$ bzw. $s_{2_right}>[b_r(s_1)/2-l_t/2]$, also das Fahrzeug mit den Rädern über

den Fahrbahnrand fährt. Ansonsten bleibt der Wert von Term b vernachlässigbar klein. Generell kann man anmerken, dass die Penalty-Exponenten einen sehr großen Einfluss auf die numerische Stabilität des Optimierungsprozesses haben und ihre passende Wahl schwierig ist.

Term c und d sind Penalties, die sicherstellen, dass $|\rho|$ nicht größere Werte annimmt als 1, bzw. δ größere als δ_{max}. Wäre $|\rho| > 1$ – siehe Formel 3-14 und Formel 3-15 – würde der Fahrer zum Beschleunigen oder Verzögern eine größere Kraft einsetzen als das Fahrzeug zur Verfügung stellen kann.

Term e stellt sicher, dass die physikalischen Grenzen der Reifen nicht verletzt werden. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist die Formulierung der kombinierten Reifenkräfte unter Benutzung der modifizierten Ellipse Formel 3-24. Die Kräfte F_x und F_y sind dabei die von den Rädern übertragenen Längs- und Querkräfte (Formel 3-14, Formel 3-15 und Formel 3-17). Wird dieser Term größer als 1, sind die aktuellen Reifenkräfte außerhalb des erlaubten Bereichs, also außerhalb der jeweiligen F_z-abhängigen Kennlinie – siehe Abbildung 3-9- und der Wert von Term e wächst infolge n_4 zu sehr großen Werten an.

Generell gilt, dass jeder Gewichtungsterm Werte kleiner gleich 1 annehmen kann und soll. Die Gewichtungsexponenten müssen so gewählt werden, dass sich bei Verletzung eines Penalties der Wert des Gütefunktionals inakzeptabel verschlechtert, und folglich ρ und δ so gewählt werden, dass der Wert des Funktionals minimiert werden kann. Der hiermit beschriebene Prozess stellt sicher, dass die Anforderungen an die Manöverplanung erfüllt werden können.

3.5 Ablauf der Manöverplanung

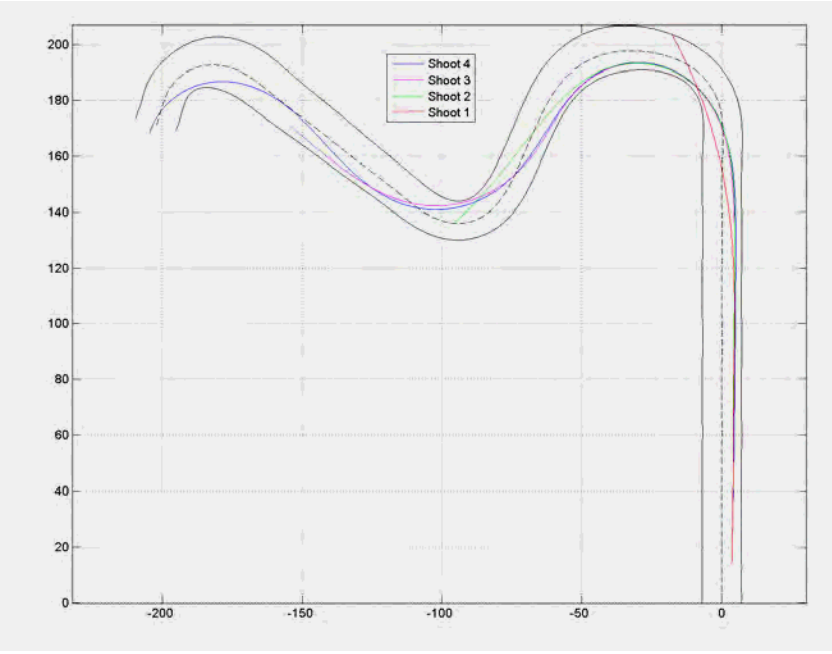
Gemäß den in Kapitel 3.1 präsentierten Grundlagen wurde eine optimale Steuerung entwickelt, die dem in Kapitel 3.3 formulierten Modell ein Verhalten, entsprechend dem in Kapitel 3.4 definierten Gütefunktional, aufprägen soll. Im Gegensatz zur klassischen optimalen S teuerung ist man jedoch bei dieser Anwendung nicht am Verlauf der Eingangssignale **u** interessiert, sondern an den Zustandsgrössen **x**, aus denen man die gewünschten Fahrspur- und Geschwindigkeitsvorgaben ermitteln kann. Programmiert wurde der gesamte Prozess in Matlab, wobei die Routine bvp4c

zur Lösung des Zweipunktrandwertproblems der optimalen Steuerung herangezogen wurde. Da die Streckenbeschreibung, wie in Kapitel 3.3.4.1 erläutert, auf Teilstücke der Länge s_{max}>=450 aufgeteilt werden musste, wurde ein sequentieller Optimierungsprozess definiert. Dabei muss zwischen den Einzeloptimierungen und dem Gesamtprozess unterschieden werden.

3.5.1 Die Einzeloptimierung

Bei der Einzeloptimierung wird in Abhängigkeit der Startwerte $\mathbf{x}_0$ (Formel 3-2) und damit der Position des Fahrzeugs auf der Strecke, ein zugeordnetes Streckenpolynom ausgewählt und mittels bvp4c die optimale Steuerung innerhalb der Grenzen des Polynoms berechnet. Dabei „durchfährt“ das Fahrzeug die Strecke von der in $\mathbf{x}_0$ definierten Startdistanz bis zum Polynomende. Da jedoch die dafür benötigte Endzeit T im Vorhinein nicht bekannt ist, und und bvp4c aufwändigere Gleichungssysteme wie dieses nur mit guten Startwerten lösen kann, wurde eine „quasi Shooting-Methode“ ausgewählt. Dabei wird zunächst ein kleines T gewählt, das 2-Punkt-Randwertproblem mit allgemeinen Startwerten mittels bvp4c gelöst, die Ergebnisse ausgewertet und als neue Startwerte definiert. Mit diesen Startwerten wird T erhöht und der Prozess beginnt von neuem.

Abbildung 3-18: Shooting Methode

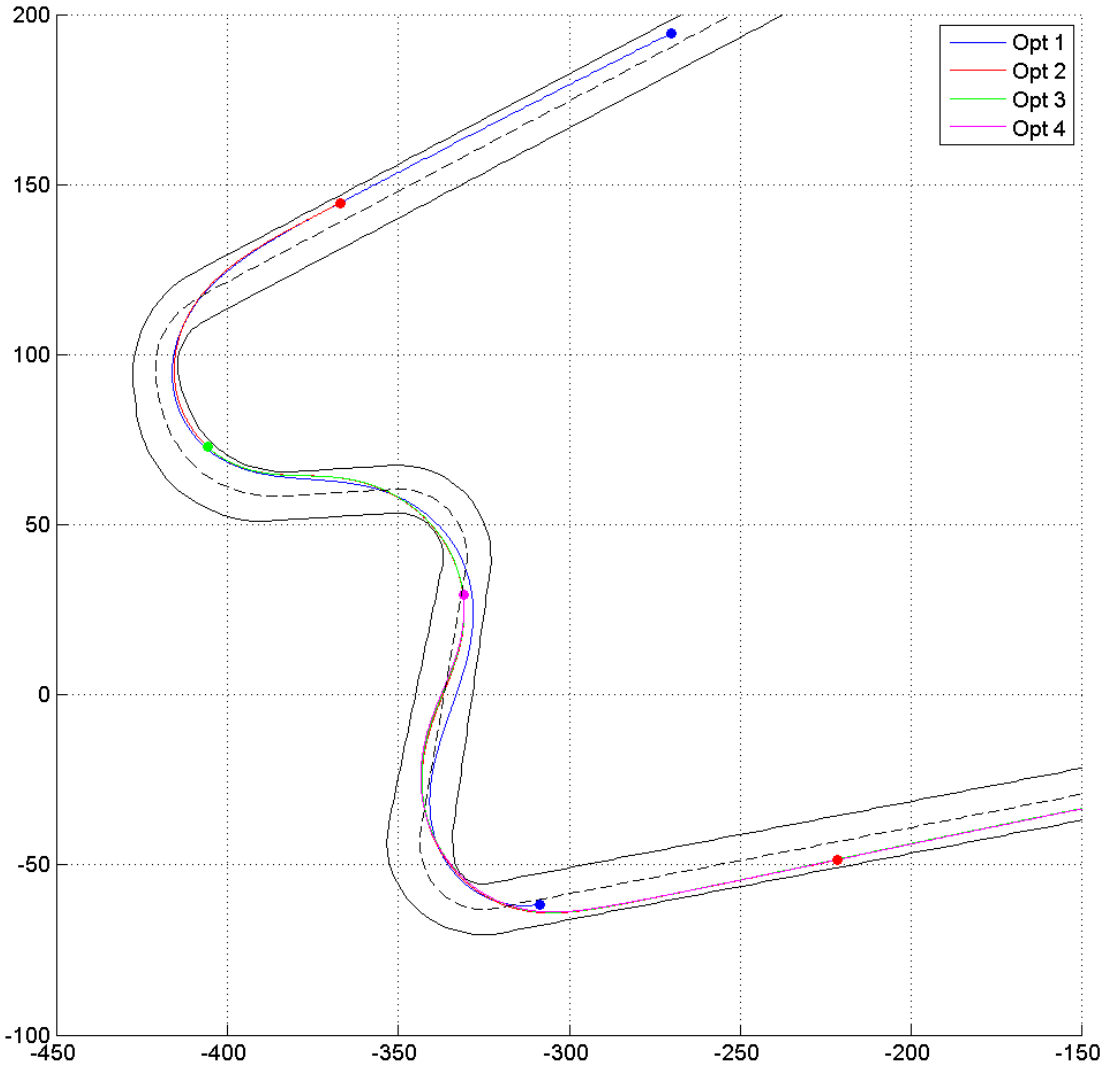


Obige Abbildung verdeutlicht diese Vorgehensweise. Somit gelingt es durch sequentielles Hochzählen von T die Einzeloptimierung für die gesamte Polynomdistanz zu lösen.

3.5.2 Der Gesamtprozess

Mit der Lösung der Einzeloptimierung steht das Ergebnis der Manöverplanung für ein Streckenpolynom zur Verfügung. Benötigt wird jedoch das Ergebnis für die gesamte Rennstrecke, wobei dieses natürlich gesamt gesehen das Optimum darstellen soll. Es ist daher nicht möglich das Endergebnis der Einzeloptimierung (in obiger Abbildung den Endpunkt von Shoot 4) zu einem neuen $\mathbf{x}_0$ auszuwerten und eine neue Einzeloptimierung zu starten. Der weitere Streckenverlauf ist an diesem Punkt nicht bekannt, daher würde die neue Einzeloptimierung mit suboptimalen Startwerten beginnen, womit das Gesamtergebnis gefährdet wäre. Um dieses Problem zu umgehen, wird daher nur ein Teil der Einzeloptimierung verwendet, die neuen $\mathbf{x}_0$ werden daher nicht am Ende von Shoot 4 ausgewertet, sondern davor. Wo dies geschieht, bestimmt wie gut die damit erzielbare Näherung ist. Verwendet man nur ein kurzes Teilstück, werden sich die Ergebnisse zweier aufeinander folgender Einzeloptimierungen nur geringfügig unterscheiden. Je näher man jedoch dem Ende der betrachtenden Strecke kommt, desto deutlicher werden die Abweichungen. Kurze Teilstücke wiederum ziehen viele Einzeloptimierungen nach sich, womit der Zeitaufwand steigt. Die folgende Abbildung verdeutlicht die grundsätzliche Problematik, wobei insbesondere der Unterschied zwischen der blauen Linie und den übrigen bemerkenswert ist.

Abbildung 3-19: Gesamtprozess



Dieser rührt daher, dass am Ende von Opt 1 die anschliessende Gerade noch unbekannt war, und sich die übrigen Linien deshalb signifikant von der blauen unterscheiden. Opt 2, Opt3 und Opt 4 hingegen kommen, bedingt durch die ähnliche Streckengeometrie von deren Abschnitten, zu nahezu identen Ergebnissen.

Es ergibt sich somit folgender Gesamtprozess:

- Einzeloptimierung Opt 1
- Definition Startpunkt Opt 2 und Auswertung der Ergebnisse von Opt 1 zu neuem $\mathbf{x}_0$

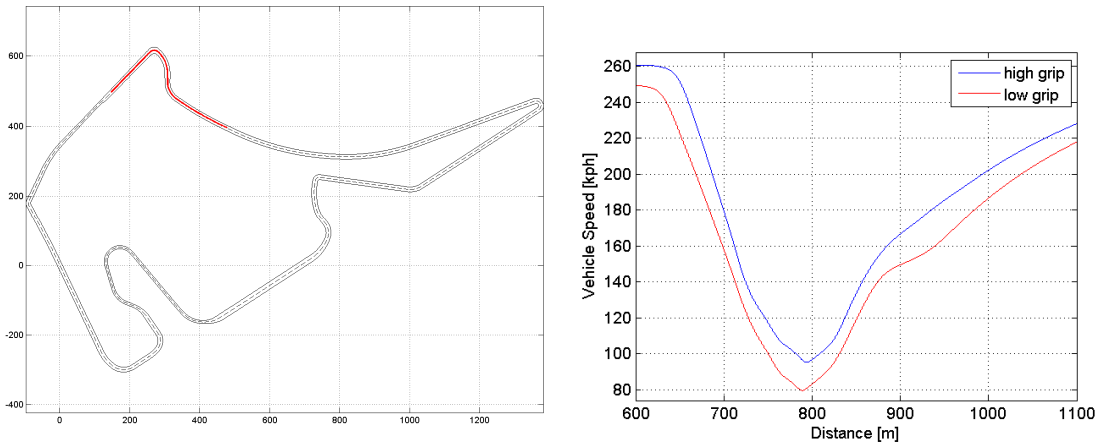
- Hinzufügen der Ergebnisse von Opt 1 bis zum neuen Startpunkt zum Gesamtergebnis
- Einzeloptimierung Opt 2
- Wiederholung der Schritte…

Diese Vorgehensweise ist ähnlich jener die Cossalter [5] als „Optimal Manoeuvre“ für das Zusammenwirken von Manöverplanung und Simulation beschrieb. Das Gesamtergebnis setzt sich somit aus den Resultaten sequentieller Einzeloptimierungen zusammen.

4 Ausgewählte Resultate

Zur Demonstration der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens wird ein Vergleich der ermittelten Spur- und Geschwindigkeitsvorgaben für zwei unterschiedliche Fahrzeuge präsentiert. Dabei werden zwei an sich idente Fahrzeuge verglichen, wobei jedoch die Reifenmodellierung bei einem Fahrzeug stark reduzierten Grip beinhaltet, wie er etwa bei regennasser Fahrbahn auftreten kann. Bei den Fahrzeugen handelt es sich um Vertreter einer Tourenwagenserie mit ungefähr 1000 kg Masse und etwa 400 kW Motorleistung. Der gewählte Streckenabschnitt ist der in folgender Abbildung rot markierte Bereich der Rennstrecke von Hockenheim.

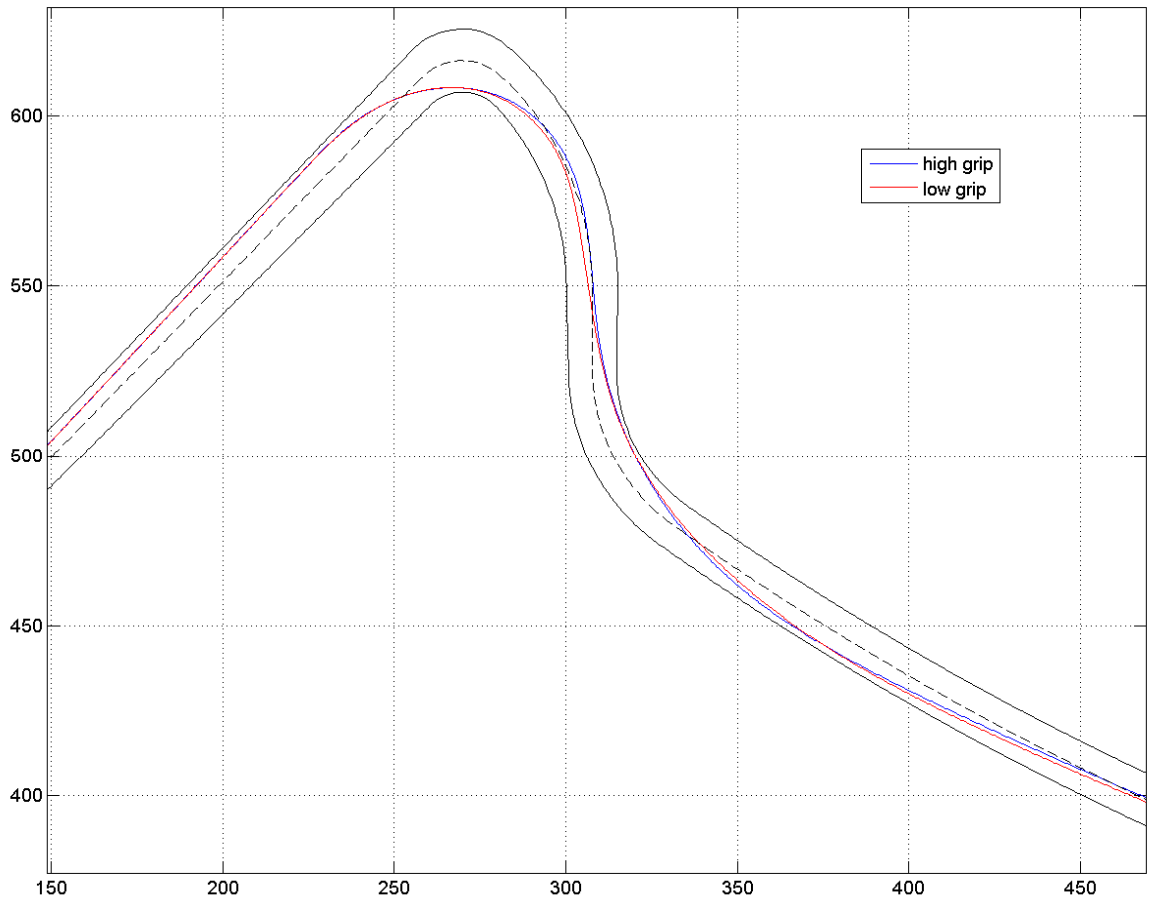
Abbildung 4-1: Streckengeometrie und Sollgeschwindigkeitsverlauf



Im Geschwindigkeitsverlauf ist zum einen erkennbar, dass das Fahrzeug im Regen vor dem betrachteten Bereich nicht die gleiche Höchstgeschwindigkeit wie auf

trockener Fahrbahn erreichen kann. Die erste Kurve wird dann auch früher und mit einem flacheren Geschwindigkeitsgradienten angebremst, dabei jedoch eine Linie gewählt, die es über einen engeren Radius ermöglicht, früher wieder zu beschleunigen.

Abbildung 4-2: Spurtrajektorien zweier Fahrzeugkonfigurationen



Infolge der reduzierten übertragbaren Reifenkräfte, soll über eine direktere, querkraftreduzierte Linie, zwischen den beiden Kurven, das volle Beschleunigungspotential des Fahrzeugs ausgenützt werden – zumindest soweit es die reduzierten Längskräfte zulassen. Selbiges zeigt sich auch am Ausgang der zweiten Kurve, wo wiederum zunächst eine größere Krümmung gefahren wird, um anschließend besser beschleunigen zu können. Die Simulation mit den Geschwindigkeits- und Spurvorgaben der Manöverplanung hat die Gültigkeit der ermittelten Kursverläufe bestätigt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Aufsatz wurde die Problematik der Fahrzeugdynamiksimulationen im Bereich des Rennsports aufgezeigt und eine Fahrermodellierung präsentiert, die die Ebene der Bahn- oder Manöverplanung mit Methoden der optimalen Steuerungstheorie löst. Die für dieses Verfahren benötigte vereinfachte und abstrahierte Modellierung von Fahrzeug und Fahrbahn wurde sehr detailliert beschrieben. Außerdem wurde der Ablauf des Optimierprozesses, der sich durch die Modellierung des Systems ergibt, schematisch dargestellt. Ausgewählte Resultate verdeutlichen den Einfluss, den unterschiedliche Fahrzeugabstimmungen auf die so genannte Ideallinie haben und demonstrieren, wie wichtig deren Berücksichtigung in der Rennsportsimulation ist.

Die vorgestellten Ergebnisse sind das Resultat von zwei Jahren Entwicklung, an deren Ende ein Zustand erreicht wurde, der es ermöglicht selbst geringfügige Änderungen am Simulationsfahrzeug in den Koordinaten der Sollspur wieder zu finden. Die Richtigkeit dieser Daten konnte durch die damit erzielten Ergebnisse des Simulationssystems untermauert werden. Das für die Optimierung benötigte Gleichungssystem wäre unbehandelt ungefähr 100 MB groß. Durch geschickte Substitution häufig wiederkehrender Ausdrücke konnte dieses auf etwa 75 kB reduziert werden – bei voller Übereinstimmung der Ergebnisse. Die nächsten Schritte bestehen darin, das System von der Entwicklungsebene zur Anwenderebene zu bringen. Auf diese Art soll es möglich werden, dass ein Simulationsingenieur, der um 18:00 das Büro verlässt und dabei eine Optimierung startet, bei Dienstantritt am nächsten Morgen bereits die Ergebnisse vorliegen hat.

6 Anhang

6.1 Literaturverzeichnis

[1] Donges, E. (1977) Experimentelle Untersuchung und regelungstechnische Modellierung des Lenkverhaltens von Kraftfahrern bei simulierter Straßenfahrt, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt

[2] Butz, T. (2004) Optimaltheoretische Optimierung und Identifizierung von Fahrereigenschaften, Dissertation, Technische Universitaet Darmstadt

[3] MSC.Software Corporation, (2002), User Manual 'Using ADAMS/Driver'

[4] Prokop, G. (2001), 'Modelling Human Vehicle Driving by Model Predictive Online Optimization', Vehicle System Dynamics, Vol. 35, No. 1. pp. 19-53

[5] Cossalter, V. et al. (1999) 'A general Method for the evaluation of vehicle manoeuvrability'

[6] Casanova, D. et al. (2000) 'Minimum Time Manoeuvring: The Significance of Yaw Inertia', Vehicle System Dynamics, 34 (2000), pp. 77-115

[7] Fletcher, R. (1987) Practical methods of optimization, 2nd Edition, John Wiley & Sons

[8] Bryson, A. E. (1975) Applied Optimum Control, Hemisphere Publishing Corporation

[9] Fiala E. (1966) ,Lenken von Kraftfahrzeugen als kybernetische Aufgabe', ATZ 68 (1966)

[10] Rieckert, P. and Schunck, T.E. (1940) 'Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs', Ingenieur Archiv, Nr. 11, 1940, pp. 210-224

Entwurf eines Sollwertgenerators für Fahrdynamikregelsysteme

W. Rosinger, S. Eitzinger, W. Hirschberg, S. Volkwein

walter.rosinger@tugraz.at*

stefan.eitzinger@magnasteyr.com

wolfgang.hirschberg@tugraz.at

stefan.volkwein@uni-graz.at

MAGNA STEYR
Fahrzeugtechnik
Vorentwicklung Fahrwerk
Liebenauer Hauptstr. 317
A-8041 Graz

Institut für
Fahrzeugtechnik
TU Graz
Inffeldgasse 11/1
A-8010 Graz

Institut für Mathematik
und Wissenschaftliches
Rechnen
Karl-Franzens-Universität
Heinrichstraße 36
A-8010 Graz

Zusammenfassung

Durch den zunehmenden Einsatz von aktiven Fahrwerkskomponenten und den Möglichkeiten moderner Sensorik können die fahrdynamischen Eigenschaften eines Kraftfahrzeuges in immer größerem Rahmen fahrzustandsabhängig vorgegeben werden. Eine der entscheidenden Herausforderungen besteht darin, die neuen Möglichkeiten der Technik optimal an die Bedürfnisse, Wünsche und Erwartungen des Fahrers anzupassen. Auf Systemebene geht es um die Bereitstellung von Führungsgrößen für die Fahrdynamikregelsysteme, deren Umsetzung einen für den Fahrer erlebbaren Zugewinn an Fahrsicherheit, Fahrkomfort und Fahrdynamik erwarten lässt. Dieser Beitrag stellt einen modellbasierten Ansatz zur Führungsgrößengenerierung für das geregelte querdynamische Fahrzeugverhalten vor. Das entworfene Modell wird als Sollwertgenerator und dessen Ausgangsgrößen als Sollwerte bezeichnet. Am Beispiel des MAGNA STEYR *Global Chassis Controllers* wird ein Sollwertgeneratorentwurf präsentiert. Es werden Methoden zur Realisierbarkeitsüberprüfung der Sollwertvorgabe sowie zum Entwurf optimaler Vorsteuerfunktionen für die aktiven Fahrwerkssysteme vorgestellt.

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

1 Einleitung

Die Fahrwerksentwicklung der letzten 20 Jahre kann grundsätzlich dadurch charakterisiert werden, dass sich durch den Entwicklungsfortschritt von elektronischen Komponenten eine Vielzahl von Systemen im Fahrzeug etabliert haben, welche die Funktionalität des ursprünglich rein mechanischen Fahrwerkes erweitern. Die bekanntesten Vertreter im Bereich der sicherheitsrelevanten Fahrdynamik sind das Anti-Blockier-System *ABS* und das Elektronische-Stabilitäts-Programm *ESP*, [1]. Heute will man die Möglichkeiten der modernen Fahrwerkstechnik nicht nur in sicherheitskritischen Fahrsituationen für den Fahrer erlebbar machen, sondern über den gesamten Fahrbereich einen aktiven Beitrag zur Steigerung von Fahrkomfort, Fahrdynamik und Verkehrssicherheit leisten. Es wird seitens der Automobilhersteller und der Zulieferindustrie verstärkt an der Weiterentwicklung von Fahrdynamikregel- und Fahrerassistenzsystemen gearbeitet (aktive Lenkungssysteme, Spurhalteassistenten und andere mehr). Da diese Systeme in der Regel weitgehend unabhängig voneinander entwickelt werden, kommt es im Fahrzeug zu einer komplexen Funktionsstruktur, deren Entwurf, Implementierung und Wartung einen enormen und weiterhin steigenden Aufwand erfordern. Um gegenseitige negative Beeinflussungen der verschiedenen, parallel arbeitenden, Systeme zu vermeiden, müssen die Funktionen und Eingriffe der Einzelsysteme streng definiert und abgegrenzt werden. Im Allgemeinen bedeutet das eine erhebliche Potentialeinschränkung und lässt den Mehrwert von zusätzlichen Systemen fraglich erscheinen. Erst eine Vernetzung der Einzelsysteme durch einen zentralen Fahrdynamikregler ermöglicht es, die Regelaktivitäten der Einzelsysteme so aufeinander abzustimmen, dass die Gesamtfunktionalität die Summe der Einzelfunktionalitäten übertrifft. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass der Definition der Regelziele zumindest die gleiche Bedeutung wie der Optimierung des Reglers zukommen muss. Alleine das Potential des Fahrdynamikreglers einer bestimmten Führungsgröße optimal zu folgen, kann nicht unmittelbar mit einer vom Fahrer empfundenen Verbesserung des Fahrzeugverhaltens gleichgesetzt werden. Die wichtigste und damit erste Leitfrage lautet, wie das mechatronische Potential hinsichtlich eines verbesserten Kundennutzens einzusetzen ist, oder anders ausgedrückt, wie eine hinsichtlich Fahrernutzen optimierte Definition der Regelziele für den globalen Regler lautet. Mit dieser Arbeit wird ein Beitrag zu einer Verbesserung des Fahrzeugverhaltens geleistet. Es wird nicht die Optimierung des Regelsystems, sondern die optimale Gestaltung der Führungsgrößen für den Regler behandelt. Im Folgenden wird das Softwaremodul, welches diese Größen berechnet, als Sollwertgenerator bezeichnet und dessen Ausgangsgrößen als Sollwerte. Anhand des MAGNA STEYR *Global Chassis Controllers* wird ein konkretes Beispiel eines Sollwertgeneratorentwurfes vorgestellt.

2 MAGNA STEYR Global Chassis Controller GCC

MAGNA STEYR arbeitet seit vielen Jahren an der Entwicklung und Fertigung von geregelten Antriebsstrang- und Fahrwerksregelsystemen, [2, 3, 4]. Mit der Entwicklung einer integrierten Softwarearchitektur für Regelsysteme zur intelligenten Vernetzung aller aktiven Fahrwerkselemente ist ein weiterer wichtiger Schritt in Richtung mehr Fahrsicherheit,

Komfort und natürlich auch Fahrdynamik getätigt worden. Im Rahmen der Entwicklungstätigkeiten wurde ein Versuchsträger aufgebaut, in dem eine Überlagerungslenkung an der Vorderachse, eine Hinterachslenkung und ein Torque-Vectoring-System an der angetriebenen Hinterachse über einen zentralen Fahrdynamikregler, den MAGNA STEYR *Global Chassis Controller GCC*, funktional miteinander vernetzt sind. In Abb. 1 wird innerhalb des übergeordneten Fahrer-Fahrzeug-Umwelt-Regelkreises die grundsätzliche Funktionsstruktur dargestellt. Über eine entsprechende Sensorik werden die Fahrereingangsgrößen **w** (Lenkradwinkel, Fahrpedalstellung, Bremsdruck und Gangwahl) sowie Fahrzustandgrößen **x** (z.B. Raddrehzahlen, Gierrate, Längs- und Querbeschleunigung) erfasst und anschließend plausibilisiert. Zusätzlich zu den Messgrößen werden weitere Fahrzustandsgrößen für eine effiziente Regelung benötigt (z.B. Reibwert, Schwimmwinkel). Diese werden in einem Modul zur Fahrzustandserkennung berechnet. In Abb. 1 sind die Sensorik, sowie die Funktionen zur Zustandsbeobachtung und Signalplausibilisierung im Modul **C** zusammengefasst. Das Modul **Sollwertgenerator** bestimmt die Führungsgrößen **r** für den Fahrdynamikregler. Über eine intelligente Regellogik werden diese Vorgaben in Aktuatorstellgrößen umgerechnet. Zusätzlich werden fahrzustandsabhängig Vorsteuergrößen berechnet. Die gewichtete Summe **u** wird über entsprechende Komponentensteuergeräte umgesetzt.

Die *integriert* geregelte Aktuatorik verspricht ein Größtmaß an Freiheitsgraden zur ak-

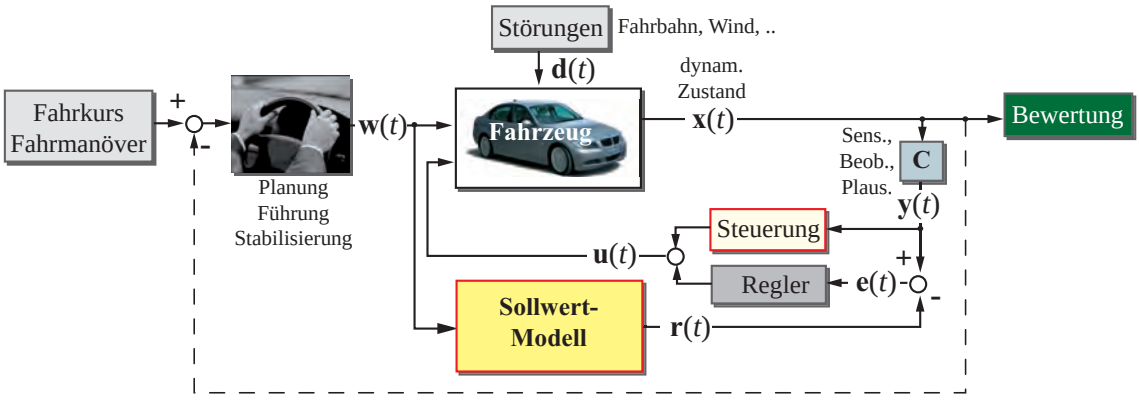


Abbildung 1: Fahrer-Fahrzeug-Umwelt-Regelkreis und grundsätzliche Funktionsstruktur eines Fahrdynamikregelsystems

tiven Beeinflussung des fahrdynamischen Fahrzeugverhaltens. Es bietet sich ein weites Spektrum an Einstellmöglichkeiten bezüglich der Fahrattribute an, aber auch das Risiko ein für den Fahrer ungewohntes und unerwünschtes Fahrverhalten zu generieren. Um das Potential des mechatronischen Fahrwerkes zur Optimierung des Fahrernutzens einzusetzen, wird zunächst die Aufgabe des Fahrers dargestellt, um daraus die Unterstützungsmöglichkeiten abzuleiten.

3 Fahraufgabe

Nach [5] kann die Fahraufgabe in drei Ebenen unterteilt werden. Es handelt sich um die Planungs-, Führungs- und Stabilisierungsebene. Abb. 2 zeigt diese Teilaufgaben. In der Planungsebene wird die Fahraufgabe hinsichtlich Zweck, Fahrzeit und Route (von A nach B) vorbereitet. In der Führungsebene wird festgelegt, wie die geplante Route umzusetzen ist. Dies ist stark vom Fahrertyp, aber natürlich auch vom Stimmungszustand des Fahrers abhängig und zeichnet sich vor allem durch die Geschwindigkeitswahl (rasant oder gemächlich) und durch die Wahl der Fahrlinie (z.B. Kurvenschneiden) aus. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Kursplanung. In Abb. 2 wird der geplante Kurs mit der durchgezogenen Verbindungslinie von A nach B angedeutet. In der Stabilisierungsebene wird der zuvor geplante Kursverlauf zum Sollkurs. Der Fahrer generiert für den ihm einsehbaren Bereich entsprechende Stellgrößen (Lenkrad, Fahrpedal, Bremse,..), einerseits basierend auf seiner Erfahrung, sowie andererseits durch einen ständigen Abgleich des prädizierten mit dem tatsächlichen Fahrzeugverhalten. In Abb. 2 sind der tatsächliche Kursverlauf durch die gestrichelte Linie und die Kursabweichung, also der menschliche Regelfehler, durch die Fläche zwischen Ist- und Sollkurs dargestellt.

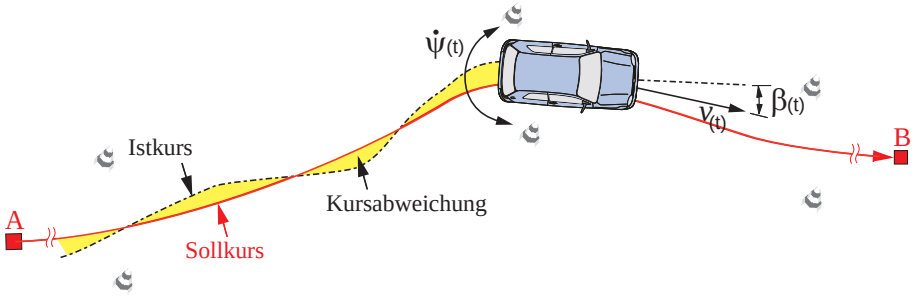


Abbildung 2: Darstellung der drei Ebenen der Fahraufgabe

4 GCC Unterstützungspotential

Da weder die Fahrerintentionen auf Planungsebene, noch die Abweichung des Ist-Kurses vom Soll-Kurs der *GCC*-Regellogik bekannt sind, erfolgt eine aktive Unterstützung auf der Stabilisierungsebene mit dem Ziel die Eigenschaften des Fahrzeuges so darzustellen, dass der Fahrer möglichst gut damit zurechtkommt. Diese Forderung muss in Form geeigneter Führungsgrößen an die Fahrdynamikregelsysteme kommuniziert werden. Die Anforderungen an den Sollwertgenerator können somit folgendermaßen formuliert werden:
Festlegung eines an die Erwartungen und Leistungsfähigkeiten des Menschen angepassten, intuitiven Übertragungsverhaltens von Fahrereingangsgrößen zu fahrdynamischen Zustandsgrößen, die für die Regelung geeignet sind und deren regelungstechnische Beeinflussung einen wahrnehmbaren Fahrernutzen bewirkt.
Der Fahrernutzen wird durch subjektiv bessere Bewertungen der Fahrer oder durch objektive Kriterien, wie z.B. einer Reduzierung des Lenkaufwandes, nachgewiesen. Unter „für

die Regelung geeignet“ wird verstanden, dass die vom Modul Sollwertgenerierung ermittelten Soll-Größen nur solche fahrdynamischen Zustandsgrößen beschreiben, welche auch unter Serienbedingungen ausreichend genau mit gemessenen bzw. geschätzten Ist-Größen verglichen und mit der im Fahrzeug verbauten Aktuatorik beeinflusst werden können.

5 Identifikation geeigneter Sollwerte

Für den Fahrdynamikregler des *GCC*-Versuchsfahrzeuges werden die Gierrate $\dot{\psi}$, welche die Fahrzeugbewegung um die Hochachse, und der Schwimmwinkel β, der den Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor v und Fahrzeuglängsachse beschreibt, als geeignete Größen bestimmt (Abb. 2), [6]. Insbesondere die regelungstechnische Optimierung der Gierübertragungsfunktion des Fahrzeuges soll dem Fahrer die Einhaltung des gewünschten Sollkurses erleichtern. Die Gierrate wird über einen Gierratensensor im Fahrzeug bestimmt. Der Schwimmwinkel β wird vom Fahrer als Stabilitätsindikator des Fahrzustandes verwendet. Er kann unter Serienbedingungen nicht unmittelbar gemessen werden, lässt sich jedoch über Fahrzustandsbeobachter schätzen, [7]. Bei den Ausgangsgrößen des *GCC*-Sollwertgenerators handelt es sich somit um eine Soll-Gierrate $\dot{\psi}^{soll}$ und einen Soll-Schwimmwinkel β^{soll}.

6 Sollwertgeneratorentwurf

Für die querdynamische Sollwertvorgabe muss eine geeignete, geschwindigkeitsabhängige, mathematische Beschreibung des Übertragungsverhaltens von der Fahrereingabe Lenkradwinkel δ_H zu den Ausgangsgrößen des Sollwertgenerators gefunden werden. Es werden ein empirischer Ansatz über rationale Übertragungsfunktionen und ein physikalischer Ansatz über ein entsprechendes Fahrzeugmodell untersucht.

6.1 Empirischer Ansatz

Im Rahmen von bereits veröffentlichten Voruntersuchungen wurde die Möglichkeit untersucht, den Zusammenhang zwischen Fahrereingabe und Fahrzustandsgrößen über rationale Übertragungsfunktionen (1) festzulegen (siehe Abb. 3). Es wurden entsprechende Ansatzfunktionen definiert, [8].

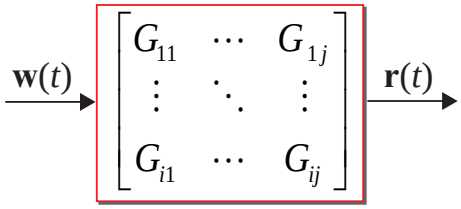


Abbildung 3: Empirischer Ansatz

$$G(s,v)_{kl} = \frac{b_{n,i}(v)\, s^n + b_{n-1,i}(v)\, s^{n-1} + \ldots + b_{1,i}(v)\, s + b_{0,i}(v)}{s^m + a_{m-1,i}(v)\, s^{m-1} + \ldots + a_{1,i}(v)\, s + a_{0,i}(v)} \tag{1}$$

k = 1, ..., i (i = Anzahl der Sollwertgrößen)
l = 1, ..., j (j= Anzahl der Eingangsgrößen)
n = Zählerordnung
m = Nennerordnung
s = Laplace-Variable
v = Fahrgeschwindigkeit

Obwohl anhand theoretischer Überlegungen die Anzahl an zu untersuchender Übertragungsfunktionen eingeschränkt werden kann, erweist sich die zustandsabhängige Bestimmung der Koeffizienten der Übertragungsfunktionen als schwierig. Es fehlt der intuitive Zugang zur Koeffizientenwahl für die gezielte Beeinflussung des Fahrzeugcharakters. Es muss auch berücksichtigt werden, dass die Optimierung der Übertragungsfunktionen nicht unabhängig voneinander erfolgen kann. Das Fahrzeug muss sich harmonisch anfühlen. Nach Meinung vieler Versuchsfahrer ist die konsistente Wechselwirkung der fahrdynamischen Zustandsgrößen von entscheidender Bedeutung, [9]. Ein weiterer entscheidender Nachteil ist, dass für die Realisierbarkeitsüberprüfung der entworfenen Übertragungsfunktionen zusätzliche Fahrzeugmodelle erforderlich sind. Es wird daher die Möglichkeit untersucht, direkt über geeignete Fahrzeugmodelle die Sollwerte zu generieren.

6.2 Modellbasierter Ansatz

Bei der Modellbildung werden drei wesentliche Anforderungen berücksichtigt.

1. Das Modell muss in Abhängigkeit der Fahrereingabe und des Fahrzustandes erwartungskonforme, realisierbare fahrdynamische Sollgrößen generieren.

2. Über entsprechende Modellparametrierungen müssen charakteristische Fahrzeugeigenschaften darstellbar sein, wie z.B. sportliches oder sicheres Fahrverhalten. Die Modellparameter sollen dabei weitgehend physikalische Bedeutung besitzen, ohne dabei auf detaillierte Bauteildaten angewiesen zu sein. Ein Satz von erforderlichen Parametern soll möglichst kompakt sein.

3. Die Funktionalitäten der aktiven Fahrwerkssysteme müssen in Hinblick auf die erforderliche Realisierbarkeitsüberprüfung im Modell abgebildet sein (Abschnitt 8).

Als ein den Anforderungen entsprechendes Modell wird ein nichtlineares Zweispurmodell entworfen. Das Fahrzeugmodell zur Sollwertgenerierung besitzt acht Zustandsgrößen, welche im Vektor $\mathbf{x}^{soll}(t) \in \mathbb{R}^8$ zusammengefasst sind.

$$\mathbf{x}^{soll}(t) = \left[\; v^{soll}(t) \quad \beta^{soll}(t) \quad \dot{\psi}^{soll}(t) \quad \varphi^{soll}(t) \quad \omega_{VL}^{soll}(t) \quad \omega_{VR}^{soll}(t) \quad \omega_{HL}^{soll}(t) \quad \omega_{HR}^{soll}(t) \;\right]^T \tag{2}$$

Vier Freiheitsgrade dienen der Beschreibung der Aufbaubewegung und jeweils ein Freiheitsgrad der Beschreibung der vier Raddrehzahlen $\omega^{soll}(t)$. Die Aufbaufreiheitsgrade

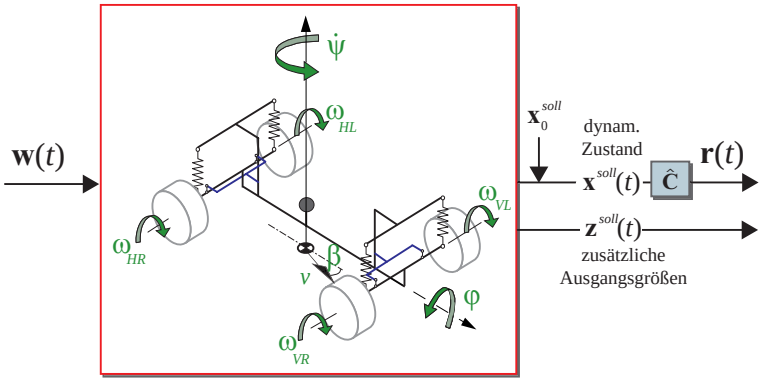


Abbildung 4: Modellbasierter Ansatz

sind die Fahrgeschwindigkeit $v^{soll}(t)$, der Schwimmwinkel $\beta^{soll}(t)$, die Gierrate $\dot{\psi}^{soll}(t)$ und der Wankwinkel $\varphi^{soll}(t)$ (siehe Abb. 4).

Als ein den Anforderungen entsprechendes Reifenmodell findet *TM_simple 4.0* [10] Anwendung. Es werden die degressive Abhängigkeit der Reifenlängskraft F_x und Reifenquerkraft F_y von der Radlast F_z, sowie die kombinierte $F_x - F_y$−Charakteristik abgebildet. In Abb. 5 werden exemplarisch Reifenkennlinien gezeigt.

Bei den aktiven Fahrwerkssystemen, die im Modell berücksichtigt werden, handelt es sich um eine aktive Vorderradlenkung *AFS*, eine Hinterachslenkung *RWS*, drei Torque-Vectoring-Systeme *TV*, sowie zwei aktive Stabilisatoren *ARS*. Die *AFS* ist als Überlagerungslenkung modelliert, die über einen Stellmotor und ein Getriebe zwischen dem Lenkrad und dem Lenkgetriebe einen Zusatzlenkwinkel u_{AFS} aufbringt. Bei *RWS* handelt es sich um einen elektromechanischen Aktuator, der über die Spurhebel einen Lenkwinkel an den Hinterrädern aufbringt. Die Stellgröße u_{RWS} ist direkt als Hinterradlenkwinkel abgebildet. Mit den *TV*-Systemen kann das Antriebsmoment des Motors bedarfsgerecht zwischen Vorder- und Hinterachse (TVl) und an der jeweiligen Achse zwischen linkem und rechtem Rad verteilt werden ($TVqV$, $TVqH$). Im Modell stellen u_{TVl}, u_{TVqV} und u_{TVqH} die Variablen dar, die das Verteilungsverhältnis bestimmen. Über eine entsprechende Parametrierung kann ein konventioneller Front-, Heck- oder Allradantriebsstrang konfiguriert werden. Bei den aktiven Wankstabilisatoren *ARS* handelt es sich um konventionelle Stabilisatoren, die in der Mitte geteilt sind und deren freie Enden wieder über einen Aktuator miteinander verbunden werden. Mit diesen Aktuatoren werden Momente, u_{ARSV} und u_{ARSH}, aufgebracht, die in einem entsprechenden Drehmoment um die Fahrzeuglängsachse resultieren. Es werden alle Stellgrößen als Vektor $\tilde{\mathbf{u}}$ zusammengefasst.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_{AFS} & u_{RWS} & u_{TVl} & u_{TVqV} & u_{TVqH} & u_{ARSV} & u_{ARSH} \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

Die Fahrereingangsgrößen werden als Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ zusammengefasst.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \delta_H & \rho_L \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

Es handelt sich um den Lenkradwinkel δ_H und um die Variable ρ_L, die die Fahrereingaben Fahr-, Brems-, Kupplungspedal und Gangwahl zusammenfasst. Physikalisch gesehen handelt es sich um ein Antriebs- bzw. Bremsmoment.

Die auf den Fahrzeugaufbau wirkenden Kräfte, welche bei der Modellierung berücksichtigt werden, sind die Reifenkräfte F_x und F_y, die Gewichtskraft G und die aerodynamischen Kräfte F_{air}. Über den Vektor $\mathbf{p}^{soll}$ bekommen die Parameter des Sollwertmodells (wie z.B. Radstand oder Spurweite) entsprechende Werte zugewiesen.

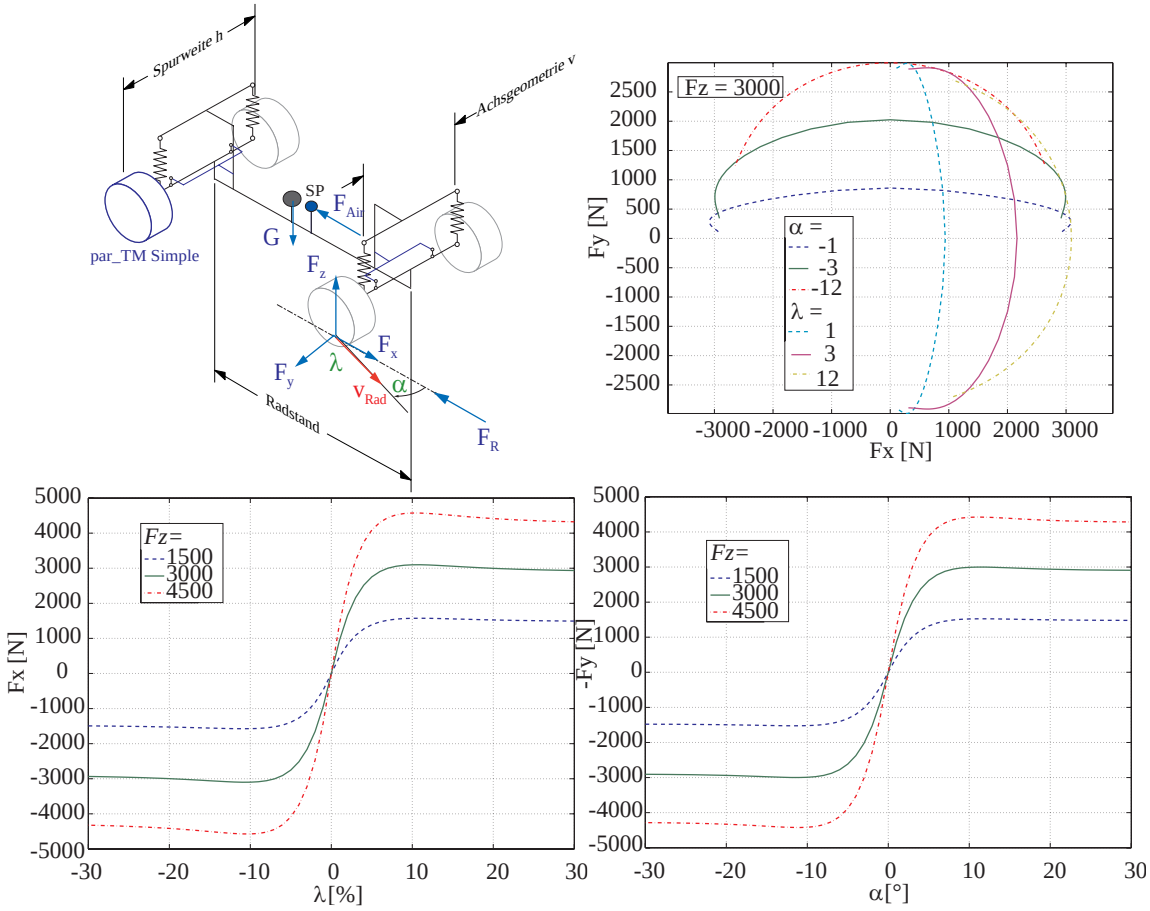


Abbildung 5: Kräfte am nichtlinearen Zweispurmodell und Reifencharakteristik

Für die Sollwertgenerierung muss dieses Fahrzeugmodell, das über das nichtlineare Differentialgleichungssystems (5) beschrieben wird, in Echtzeit auf einem entsprechenden Steuergerät simuliert werden. Die Zustandsgrößen β^{soll} und $\dot{\psi}^{soll}$ werden als Führungsgrößen $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ an den Fahrdynamikregler übergeben (5).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{soll}(t) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{soll}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{p}^{soll}\right) \\ \mathbf{r}(t) &= \hat{\mathbf{C}}\ \mathbf{x}^{soll}(t) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Neben möglicher Probleme betreffend der benötigten Rechenleistung und Rechenzeit zeigt sich als entscheidender Nachteil des modellbasierten Ansatzes, dass der Lösungsvektor $\mathbf{r}(t)$ „schwingt“. Das Fahrzeugmodell stellt ein dynamisches System dar, bei dem über die Parametrierung ein Kompromiss zwischen konkurrierenden Forderungen, wie

z.B. nach schnellem Ansprechen und minimalem Überschwingen, gefunden werden muss. Eben diesen Kompromiss gilt es mit aktiven Regelsystemen zumindest teilweise zu entschärfen. Berücksichtigt man bereits im Sollwertmodell aktive Regelsysteme, müssen auch entsprechende Sollwerte für die Regelsysteme des Sollwertmodells generiert werden. Man erkennt, dass man damit zu keiner zufriedenstellenden Antwort kommt. Eine Lösung dieses Problems stellt ein sehr einfacher und effizienter Ansatz dar. Es wird das transiente Übergangsverhalten des Sollwertgenerators ausgeblendet und nur die stationäre Antwort auf Fahrereingaben bzw. Fahrzustandsänderungen den realen Fahrdynamikregelsystemen übergeben (Abb. 6). Dieser Ansatz bringt gleichzeitig weitere Vorteile. Es vereinfacht sich damit das Gesamtsystemverhalten. Vereinfacht gesagt, wird der Ordnungsgrad des Fahrzeuges reduziert, was auch der Regelfähigkeit des Mensch entgegen kommt. Untersuchungen zur menschlichen Regelleistung belegen, dass der Mensch mit Regelstrecken nullter Ordnung, also mit rein proportionalem Verhalten, die besten Regelergebnisse erzielt, [11]. Ein weiterer Vorteil ist, dass das stationäre Fahrzeugverhalten bereits „offline“ berechnet werden kann. Anstelle von Differentialgleichungen müssen jetzt nichtlineare, algebraische Gleichungen nach $\mathbf{x}^{soll} \in \mathbb{R}^8$ gelöst werden, wobei $\mathbf{w}, \mathbf{p}^{soll}$ vorgegeben werden.

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{soll}, \mathbf{w}, \mathbf{p}^{soll}\right) \tag{6}$$

Es werden in Hinblick auf die geschwindigkeits- und lenkradwinkelabhängige Sollwertvorgabe ein diskreter Geschwindigkeitsvektor $V = (v_{min}, \ldots, v_{max})$ und ein diskreter Lenkradwinkelvektor $\Delta_H = (\delta_{Hmin}, \ldots, \delta_{Hmax})$ definiert und (6) für jede Geschwindigkeit-Lenkradwinkel-Kombination gelöst. (6) stellt ein System von acht Gleichungen und acht Variablen dar, (2). Da es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt, können mehrere mögliche Lösungen auftreten. Erfahrungsgemäß ist es jedoch leicht möglich, die physikalisch sinnvolle Lösung durch Wahl geeigneter Anfangsbedingungen zu identifizieren. Die Lösungen werden in Kennfeldern abgelegt. Für die querdynamischen *GCC*-Sollwertvorgaben, β^{soll} und $\dot{\psi}^{soll}$, werden die Kennfelder $\mathbf{R} = \left[B^{soll}, \dot{\Psi}^{soll}\right]^T$ generiert. Abhängig vom aktuellen Wert von v und δ_H werden die entsprechenden Werte $\mathbf{r}(v, \delta_H) = \left[\beta^{soll}(v, \delta_H), \dot{\psi}^{soll}(v, \delta_H)\right]^T$ ausgelesen und dem Fahrdynamikregler übergeben (Abb. 7).

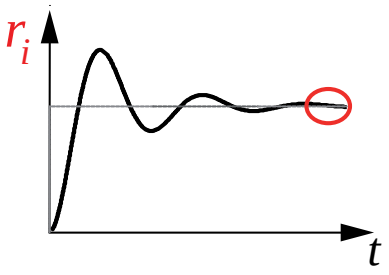


Abbildung 6: Schwingende Fahrzeugantwort für i = 1,2

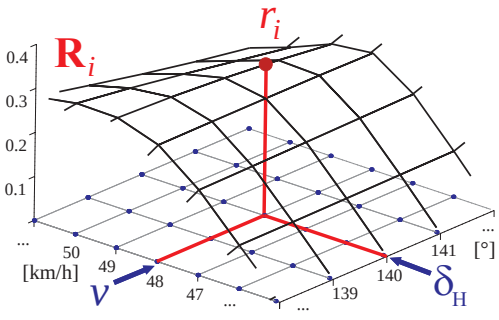


Abbildung 7: Sollwert-Kennfeld für i = 1,2

In Abschnitt 8 wird auf die Frage der Realisierbarkeit der Sollwert-Vorgabe $\mathbf{r}$ eingegangen und der Entwurf optimaler, stationärer Vorsteuerungen vorgestellt.

7 Modellparametrierung

Erst über die Parametrierung werden die Eigenschaften des Sollwertmodells festgelegt. Bei der Wahl geeigneter Parametersätze $\mathbf{p}$ macht man sich die Modellstruktur zu Nutze. Es handelt sich um ein Fahrzeugmodell, dessen Parameter sich an physikalischen Fahrzeuggrößen orientieren. Ein Parametersatz $\mathbf{p}$ enthält demnach Daten wie z.B. Radstand und Spurweite. Die Grundabstimmung des Sollwertmodells kann anhand vorhandener Fahrzeugdaten vorgenommen werden. Es existiert eine breite Palette an realen Fahrzeugen, die als Referenz für verschiedene Fahrattribute, wie z.B. sportlich oder komfortabel, herangezogen werden können. Durch die vereinfachte Modellstruktur ist anzunehmen, dass nicht alle Modellparameter direkt aus den entsprechenden Fahrzeugdaten übernommen werden können, um ein bestimmtes Fahrverhalten abzubilden. Es ist aber auch nicht das Ziel, ein bestimmtes Verhalten exakt zu kopieren. Es gilt nur entsprechende Basiskonfigurationen zu finden, die den Abstimmungsprozess erleichtern und beschleunigen.

Für eine intuitive Gestaltung des Parametervektors $\mathbf{p}^{soll}$ bzw. des Referenzverhaltens $\mathbf{R}$ werden zwei Methoden vorgestellt. Es handelt sich um die *Fahrzeugsynthese* und um die *Fahrverhaltenssynthese*. In Abschnitt 9 werden beide Methoden anhand eines Beispieles erläutert.

7.1 Fahrzeugsynthese

Ein entscheidender Vorteil des *GCC*-geregelten Fahrzeuges ist, dass ein Modellparametersatz $\mathbf{p}^{soll}$ nicht über den gesamten Fahrzustandsbereich konstant gehalten werden muss. Eine feste Modellparametrierung kann in der Regel nur für einen bestimmten Fahrzustand oder für einen bestimmten Fahrer optimal ausgelegt werden. Für alle andere Fahrsituationen existiert demnach eine abweichende Parametrierung, die als besser angesehen werden kann. Im Unterschied zu einem realen Fahrzeug bei dem die Bauteildaten und somit das passive Fahrzeugverhalten bei Produktionsstart festliegen, können die Parameter des Sollwertmodells und somit das aktiv geregelte Fahrzeugverhalten variabel gestaltet sein. Die zentrale Idee der Fahrzeugsynthese wird in Abb. 8 dargestellt. Ausgehend von Parametersätzen $\mathbf{p}^1, .., \mathbf{p}^n$, die konventionelle bzw. für unterschiedliche Fahrzustände optimierte Fahrzeuge abbilden, wird eine Auswahl von m-Parametersätzen (mit $1 \leq m \leq n$) getroffen, und über die Synthesevorschrift Γ zu einem variablen Parametervektor $\mathbf{p}^{soll}(\zeta)$ synthetisiert. Über die Eingangsgröße ζ werden Fahrereinstellungen (wie z.B. Komfort- oder Sport-Modus) und Fahrzustandsinformationen (z.B. Fahrgeschwindigkeit, Querbeschleunigung oder Fahrbahnzustandsschätzungen) berücksichtigt. Mit der *Fahrzeugsynthese* können Erfahrungen, die beim Entwurf konventioneller Fahrzeuge gesammelt worden sind, sehr intuitiv im Parametrierungsprozess berücksichtigt werden. Die Funktion *2spur* erstellt über das entsprechend parametrierte Sollwertmodell (5) die Kennflächen für die Führungsgrößen $\mathbf{R}$.

7.2 Fahrverhaltenssynthese

Bei der *Fahrverhaltenssynthese* werden zunächst aus den konstanten Parametersätzen $\mathbf{p}^1, .., \mathbf{p}^n$ über die Funktion *2spur* die entsprechenden Kennflächen $\mathbf{R}^1, .., \mathbf{R}^n$ erstellt. Zusätzlich können auch noch modellunabhängig Kennflächen erstellt werden $\mathbf{R}^{n+1}, .., \mathbf{R}^{n+s}$ (z.B. konstant Null). Aus diesen Kennflächen wird über eine Synthesevorschrift Λ eine resultierende Referenzkennfläche synthetisiert. Ähnlich der *Fahrzeugsynthese* werden über die Größe $\hat{\zeta}$ Fahrereinstellungen bzw. Fahrzustandsinformationen berücksichtigt. Der Syntheseprozess erfolgt modellunabhängig. Es werden direkt die Führungsgrößen $\mathbf{R}$, welche fahrdynamische Zustandsgrößen beschreiben, modifiziert. Somit können subjektive Aussagen aus dem Fahrversuch oder auch aus Fahrsimulatorexperimenten sehr intuitiv umgesetzt werden.

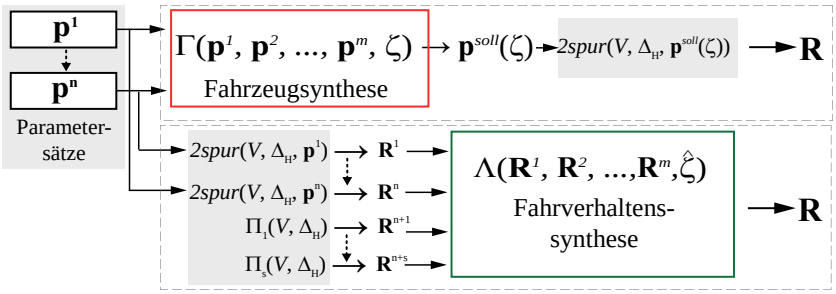


Abbildung 8: Gegenüberstellung der Fahrzeug- bzw. der Fahrverhaltenssynthese

8 Realisierbarkeitsüberprüfung

Ein wesentlicher Aspekt bei der Vorgabe eines Sollfahrverhaltens ist die Gewährleistung der Realisierbarkeit durch die aktiven Regelsysteme. Natürlich kann durch den Sollwertgenerator jedes beliebige Fahrzeugverhalten vorgegeben werden. Wenn es durch die Regelsysteme jedoch nicht umsetzbar ist, wird sich kein definiertes Fahrverhalten einstellen. Da eine der wichtigsten Fahrzeugeigenschaften deterministisches Verhalten ist, muss garantiert sein, dass das Fahrzeug auch einen definierten Sollzustand erreichen kann. Es wird daher im Folgenden untersucht, ob die Sollvorgabe durch das reale Fahrzeug stationär erfüllt werden kann. Beim Entwurf des Fahrzeugmodells für die Sollwertgenerierung wurde bereits darauf geachtet, das selbe Modell auch für die Realisierbarkeitsüberprüfung verwenden zu können. Das Fahrzeugmodell wird mit dem Parametersatz $\mathbf{p}^{passiv}$, der das ungeregelte Fahrzeug abbildet, parametriert. Zusätzliche Eingangsgröße ist der Vektor $\mathbf{u}$ gemäß (7), der die Eingriffsmöglichkeiten der aktiven Fahrwerkssysteme, wie sie im *GCC*-Versuchsfahrzeug vorhanden sind, abbildet. Er stellt somit eine reduzierte Version des allgemeinen Stellgrößenvektors $\tilde{\mathbf{u}}$ nach (3) dar.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{AFS} & u_{RWS} & u_{TVqH} \end{bmatrix}^T \tag{7}$$

Über den Vektor $\mathbf{d}$ können Störgrößen, wie z.B. Wind, Fahrzeugbeladung und unterschiedliche Fahrbahnzustände, berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{p}^{passiv}\right) \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\ \mathbf{x} \end{aligned} \tag{8}$$

Die Realisierbarkeitsüberprüfung wird als Optimierungsaufgabe formuliert. Ziel ist es, den Eingangsvektor $\mathbf{u}(v, \delta_H)$ so zu bestimmen, dass in einem stationären Punkt des betrachteten Zustandsraums $V \times \Delta_H$ der Lösungsvektor $\mathbf{y}(v, \delta_H)$ (8), möglichst nahe dem Sollwertvektor $\mathbf{r}(v, \delta_H)$ ist, (9).

$$\mathbf{u}(v, \delta_H) = \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{y}(v, \delta_H) - \mathbf{r}(v, \delta_H)\|_2 \tag{9}$$

In Abb. 9 ist die mathematische Aufgabenstellung grafisch dargestellt. Das Vorwärtsproblem wird durch ein nichtlineares Gleichungssystem dargestellt. Über eine Optimierungsaufgabe werden optimale Steuergrößen identifiziert.

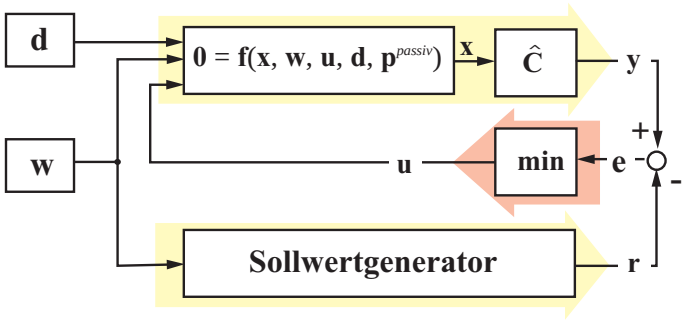


Abbildung 9: Vorwärts- und Optimierungsproblem

Die Optimierung wird für unterschiedliche Eingangsvektoren $\mathbf{w}$ durchgeführt. Die realisierbaren optimalen Lösungen $\mathbf{y}^*$ und $\mathbf{u}^*$ werden in Kennfeldern $\mathbf{R}$ und $\mathbf{U}$ abgelegt. Über diese Kennfelder werden in Abhängigkeit des aktuellen Vektors $\hat{\mathbf{w}} = [v, \delta_H]^T$ der entsprechende Vektor $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{w}})$ und $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{w}})$ ausgelesen und durch die Regelung bzw. Steuerung umgesetzt (siehe Abb. 7 und Abb. 10).

Die in der Optimierung verwendeten Zielfunktionale werden durch J_i, i=1,..,4, gebildet.

$$J_1(\mathbf{u}) = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \left|\beta(\mathbf{u}) - \beta^{soll}\right|^2 \tag{10}$$

$$J_2(\mathbf{u}) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left|\dot{\psi}(\mathbf{u}) - \dot{\psi}^{soll}\right|^2 \tag{11}$$

$$J_3(\mathbf{u}) = \frac{\alpha_3}{\gamma_3} \left|u_{AFS} - u_{AFS}^{nom}\right|^2 + \frac{\alpha_4}{\gamma_4} \left|u_{RWS} - u_{RWS}^{nom}\right|^2 + \frac{\alpha_5}{\gamma_5} \left|u_{TVqH} - u_{TVqH}^{nom}\right|^2 \tag{12}$$

$$J_4(\mathbf{u}) = \frac{\alpha_6}{\gamma_6} \left|\lambda_{HL}(\mathbf{u}) - \lambda_{HR}(\mathbf{u})\right|^2 \tag{13}$$

Die Gleichungen (10) und (11) beschreiben die Anpassung der Regelgrößen an die Sollwerte. Über (12) können die Aktuatoren unterschiedlich gewichtet bzw. auch Sollverläufe vorgegeben werden. Über die Gewichtung kann der Einsatz eines Aktuators z.B.

aus Komfort- oder aus energetischen Gründen favorisiert werden. Über das Funktional (13) können noch weitere Anforderungen berücksichtigt werden. Als Beispiel ist die Bedingung dargestellt, dass am linken bzw. rechten angetriebenen Rad ähnliche Schlupfwerte λ auftreten sollen. Damit wird eine gleichmäßige und damit optimale Ausnutzung der Reifenpotentiale bewirkt. Mit den Normierungsfunktionen γ_i werden die Gütefunktionale, welche sich unter Umständen in der Größenordnung stark unterscheiden, auf vergleichbare Größen normiert. Mit den nicht negativen Gewichtsfunktionen α_i wird die Relevanz einzelner Optimierungsziele festgelegt (i = 1,..,6). Aktuatorbeschränkungen können in Form von nichtlinearen Ungleichungsnebenbedingungen $\mathbf{g}$ berücksichtigt werden. Die Optimierungsaufgabe kann nun folgendermaßen angeschrieben werden.

$$\min_{\mathbf{u}} \left(J_1(\mathbf{u}) + J_2(\mathbf{u}) + J_3(\mathbf{u}) + J_4(\mathbf{u})\right)$$
$$\text{u.d.N.}^1 \quad g_i(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ für } i = 1, .., \mu$$
$$\text{mit } \mu = \text{Anzahl der Ungleichungsbeschränkungen}$$

Verschiedene Konstellationen von Zielfunktionalen und Nebenbedingungen werden in Abschnitt 9 dargestellt. Aus dem berechneten optimalen Stellgrößenvektor $\mathbf{u}$ erhält man zum einen stationär realisierbare Sollwertvorgaben und zum anderen optimale, stationäre Vorsteuerkennfelder für die aktiven Fahrwerkskomponenten.

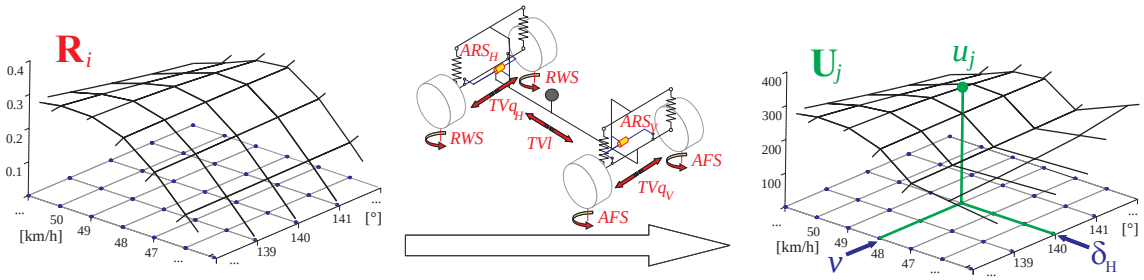


Abbildung 10: Modellbasierter Vorsteuerberechnung mit i=1, ..., Anzahl der Führungsgrößen und j = 1, ..., Anzahl der aktiven Fahrwerkssysteme

9 Anwendungsbeispiel

Es wird am Beispiel des MAGNA STEYR *GCC* die Methode der *Fahrzeugsynthese* zur Entschärfung eines Zielkonfliktes, wie er typischerweise bei der Auslegung eines passiven Fahrwerkes auftritt, gezeigt. Anschließend werden die Fahrzeugeigenschaften mittels *Fahrverhaltenssynthese* an bestimmte Fahrererwartungen angepasst. Die Simulationsergebnisse werden über dem Lenkradwinkel und der Fahrgeschwindigkeit abgebildet. Das

[1] u.d.N. ... unter den Nebenbedingungen

betrachtete Lenkintervall Δ_H reicht von 0 bis 180°, was dem Bereich entspricht, der ohne Umgreifen am Lenkrad erreicht wird und den Großteil aller Fahrsituation ausmacht. Es wird auf die Darstellung des negativen Lenkbereiches verzichtet, da die Ergebnisse um die Nulllage symmetrisch sind. Die Darstellung des Geschwindigkeitsbereiches V reicht von 1 bis 150 km/h und deckt somit die für den Normalfahrer relevanten Fahrbereich ab. Weil es der besseren Übersicht dient, wird in den Diagrammen auch die Nullebene dargestellt. Das Beispiel soll insbesondere das Potential der aktiven Lenksysteme (*AFS* und *RWS*) zur Darstellung der Soll-Fahreigenschaften, wie sie der Sollwertgenerator vorgibt, verdeutlichen. Die Funktionalität des aktiven Torque-Vectoring-Systems an der angetriebenen Hinterachse wird zur Optimierung der Reifenhaftung (13), und nicht zum aktiven Aufbringen von Giermomenten verwendet.

9.1 Zielkonflikt

Eine wesentliche Fahrzeugeigenschaft stellt die Gierverstärkung dar. Unter der Gierverstärkung wird das Verhältnis von Gierrate $\dot{\psi}$ zu Lenkradwinkel δ_H unter stationären Bedingungen verstanden. Die Gierverstärkung $\frac{\dot{\psi}}{\delta_H}$ stellt somit ein Maß für die Kurvenwilligkeit eines Fahrzeuges dar. Aus veröffentlichten Untersuchungsergebnissen zum bevorzugten Fahrzeugverhalten geht hervor, dass ein PKW im unteren und mittleren Fahrgeschwindigkeitsbereich mit einer hohen Gierverstärkung subjektiv als gut beurteilt wird, [12]. Der Fahrer kann eine gewünschte Fahrzeugbewegung mit geringem Lenkaufwand umsetzen. Im oberen Geschwindigkeitsbereich, wie z.B. bei Autobahnfahrten, kann eine hohe Gierverstärkung jedoch dazu führen, dass bereits kleine, teils unbewusst ausgeführte Lenkbewegungen zu starken Gierreaktionen führen. Eine hohe Gierverstärkung bedeutet auch, dass der Lenkwinkel sehr genau eingestellt werden muss. Bei konventionellen Fahrzeugen zeigt sich dieser Zielkonflikt in der Lenkübersetzungsauslegung. Die Lenkübersetzung i_L ist das Verhältnis der Änderung des Lenkradwinkels δ_H zur Änderung des mittleren Lenkwinkels δ_m eines Paares gelenkter Räder, [6].

$$i_L = \frac{\Delta\delta_H}{\Delta\delta_m} \tag{14}$$

Während eine direkte Lenkübersetzung (i_L<13) mit einer hohen Gierverstärkung korreliert, wird mit einer indirekten (i_L>20) eine niedrige Gierverstärkung erzielt. Die Auslegung und somit die Gewichtung zwischen geforderter Lenkpräzision und benötigtem Lenkaufwand hängt von der Markenphilosophie des Automobilherstellers ab. Es wird im Allgemeinen zur Verbesserung der Fahrsicherheit eine eher hohe mechanische Lenkübersetzung ($i_L \approx 20$) realisiert, auch wenn damit bei niedrigen Geschwindigkeiten der Lenkaufwand steigt und die Fahrzeugagilität abnimmt.

9.2 Fahrzeugsynthese

Das Sollwertmodell ist nicht an eine feste Lenkübersetzung gebunden. Es wird im Modell der Parameter i_L geschwindigkeitsabhängig implementiert. Bei niedrigen Geschwindigkeiten entspricht die Übersetzung einem sehr agilen Fahrzeug. Der Fahrer soll eine deutliche

Reduzierung des erforderlichen Lenkaufwandes z.B. beim Einparken oder beim Abbiegen im Stadtverkehr erleben. Zu höheren Geschwindigkeiten hin wird die Übersetzung eines auf Sicherheit und Komfort ausgelegten Fahrzeuges realisiert. Mit diesem variabel parametrierten Modell wird eine Referenzfläche für das Gierverhalten $\dot{\Psi}^{soll}$ erzeugt. Die entsprechenden Gierverstärkungen $\frac{\dot{\psi}}{\delta_H}$, wie sie beim Anlenken auftreten, sind in Abb. 11 dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung sind die Gierverstärkungen, welche aus konstanten Fahrzeugparametrierungen ($i_L = 11, 20, 22$) resultieren, ebenfalls dargestellt.

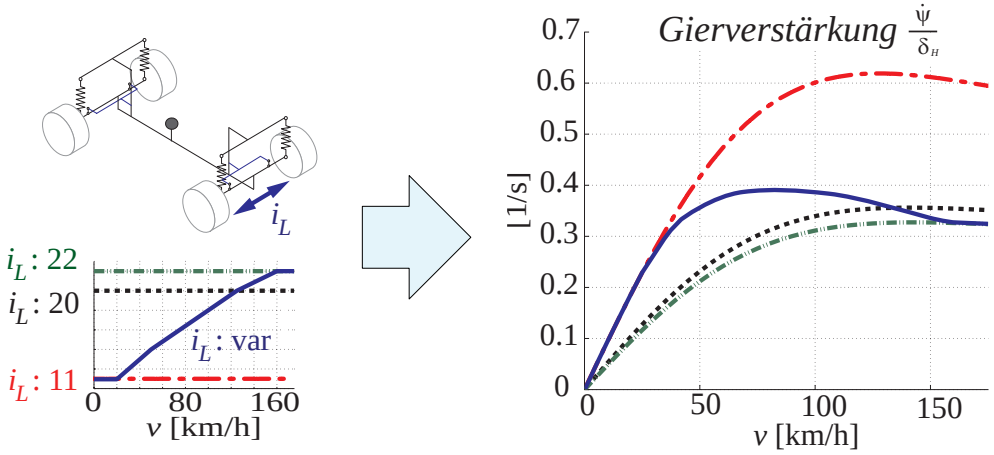


Abbildung 11: Variation der Lenkübersetzung i_L im Modell und entsprechende Gierverstärkungen $\frac{\dot{\psi}}{\delta_H}$

Da die mechanische Lenkübersetzung beim realen Fahrzeug konstant ist, muss die durch das Referenzmodell geforderte Variabilität über ein aktives System dargestellt werden. Mit der Überlagerungslenkung *AFS* kann dem Fahrerlenkwinkel δ_H ein zusätzlicher Lenkwinkel u_{AFS} überlagert werden. Diese Funktionalität wird im Folgenden zur Darstellung der variablen Lenkübersetzung genützt. Um das entsprechende Vorsteuerkennfeld für die *AFS* zu generieren, wird das Optimierungsproblem laut (15) formuliert.

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}} \left(J_2(\mathbf{u}) + J_4(\mathbf{u})\right) \\ &\text{u.d.N.} \quad a(\delta_H) \leq \quad u_{AFS} \quad \leq b(\delta_H) \\ &\qquad\qquad\quad u_{RWS} \quad = 0 \\ &\qquad -0.5 \leq \quad u_{TVqH} \quad \leq 0.5 \end{aligned} \tag{15}$$

Die Größe des Zusatzlenkwinkels u_{AFS} wird durch die maximalen Einschlagwinkel der gelenkten Vorderräder beschränkt. Obere und untere Stellgrößenbeschränkung, b und a, sind somit vom Lenkradwinkel δ_H abhängig. Die aktive Hinterachslenkung *RWS* wird für die Darstellung einer variablen Lenkübersetzung nicht benötigt. u_{RWS} wird auf Null gesetzt. Der Parameter u_{TVqH} ist zwischen -0.5 und +0.5 beschränkt. Über (16) kann somit das Gesamtantriebsmoment M_{AH}, das an der Hinterachse anliegt, wirkungsgradberichtigt

auf das linke (M_{AHL}) bzw. rechte Rad (M_{AHR}) verteilt werden.

$$\begin{aligned} M_{AHL} &= \mu_{TVH}(0.5 - u_{TVqH})M_{AH} \\ M_{AHR} &= \mu_{TVH}(0.5 + u_{TVqH})M_{AH} \end{aligned} \tag{16}$$

Zu beachten ist, dass der Wirkungsgradkoeffizient μ_{TVH} dabei eine Funktion von u_{TVqH} ist.
Der Wert des Gütefunktionals $J_2(\mathbf{u})$ (11) an der optimalen Lösung $\mathbf{u}^*$ ist über dem betrachteten Zustandsraum gleich Null. Somit kann dem realen Fahrzeug mittels *AFS* das Gierverhalten eines virtuellen Fahrzeuges mit variabler Lenkübersetzung aufgeregelt werden. Abb. 12 zeigt die dafür erforderlichen Überlagerungswinkel $\mathbf{U}_{AFS}$.

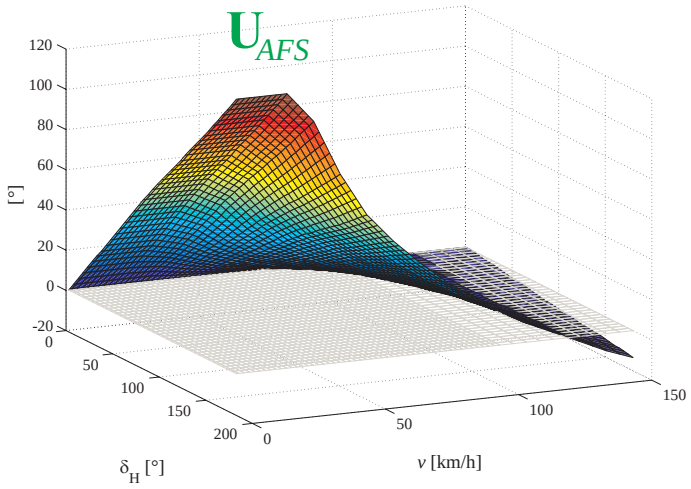


Abbildung 12: Optimiertes Vorsteuerkennfeld der Überlagerungslenkung *AFS*

In Abb. 13 ist neben der optimierten Gierrate auch der resultierende Schwimmwinkel dargestellt.

9.3 Fahrverhaltenssynthese

Anhand des Schwimmwinkels wird ein Beispiel für eine *Fahrverhaltenssynthese* vorgestellt. In der Literatur wird als Regelziel für aktive Fahrwerkskomponenten oft die Minimierung des Absolutwertes des Schwimmwinkels vorgeschlagen, [13]. Zur Berücksichtigung dieses Regelzieles in der Sollwertvorgabe werden nicht Modellparameter variiert, sondern direkt die Ausgangsgrößen $\mathbf{R}$ des Sollwertgenerators entsprechend modifiziert. In diesem Beispiel wird einfach die Schwimmwinkelvorgabe β^{soll} auf Null gesetzt. Die aktive Hinterachslenkung *RWS* bietet die Möglichkeit die Größe des Schwimmwinkels β unmittelbar zu beeinflussen. Unter der Vorgabe das optimierte Gierverhalten, das mittels *Fahrzeugsynthese* generiert worden ist, beizubehalten wird die Optimierungsaufgabe folgendermaßen formuliert:

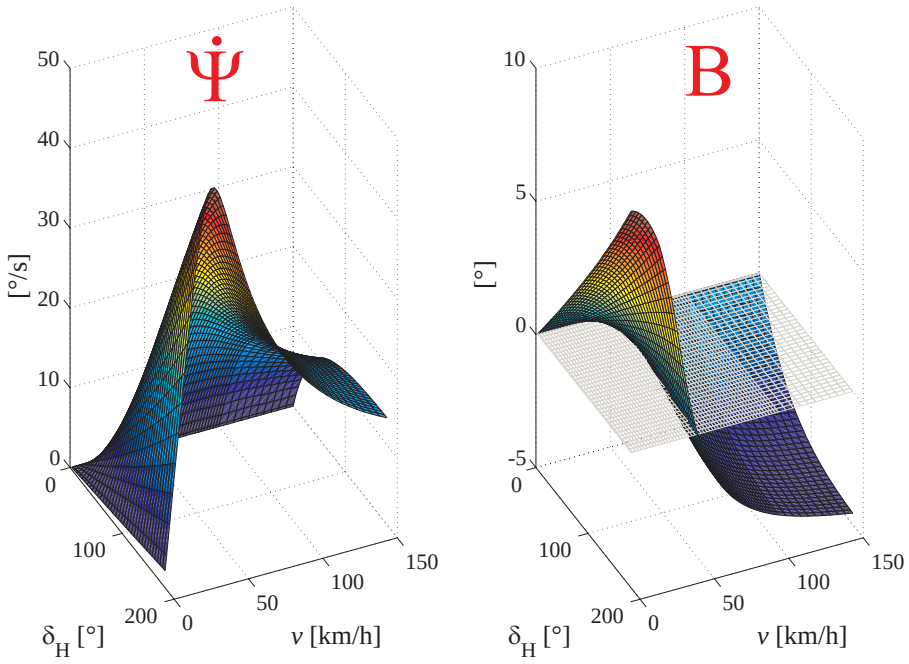


Abbildung 13: Gierratenkennfeld $\dot{\Psi}$ und Schwimmwinkelkennfeld B des AFS-geregelten Fahrzeuges

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \left(J_1(\mathbf{u}) + J_4(\mathbf{u})\right) & \qquad (17) \\ \text{u.d.N.} \quad J_2(\mathbf{u}) &= 0 \\ a(\delta_H) \leq \quad u_{AFS} &\leq b(\delta_H) \\ -5^\circ \leq \quad u_{RWS} &\leq 5^\circ \\ -0.5 \leq \quad u_{TVqH} &\leq 0.5 \end{aligned}$$

Die zu minimierende Größe stellt der Schwimmwinkel dar, wobei das gewünschte Gierverhalten eine feste Nebenbedingung darstellt. Unter Berücksichtigung der *RWS*-Aktuatorbegrenzung von 5° aktiver Hinterradlenkeinschlag wird die zusätzliche Optimierungsvariable u_{RWS} durch eine Ungleichungsrestriktion beschränkt. In Abb. 14 ist der Schwimmwinkel des *AFS*-Fahrzeuges B^{AFS} sowie der minimale Schwimmwinkel $B^{AFS+RWS}$ dargestellt. Man sieht, dass es nicht über dem gesamten Zustandsbereich $V \times \Delta_H$ möglich ist, den Schwimmwinkel unter Einhaltung aller Nebenbedingungen zu Null zu führen.

In Abb. 15 sind die *RWS*- und *AFS*-Lenkwinkel dargestellt. Durch die Beschränkung des *RWS*-Winkels kann der Wert von (10) nicht immer gleich Null werden.

In Fahrversuchen hat sich herausgestellt, dass die Forderung den Schwimmwinkel völlig zu minimieren, insbesondere bei niedrigen Fahrgeschwindigkeiten, zu einem sehr ungewohnten Fahrgefühl führt und von Versuchsfahrern subjektiv negativ beurteilt wird, [14]. Es wird im Zusammenhang mit dem durch die Hinterachslenkung ausschwenkenden

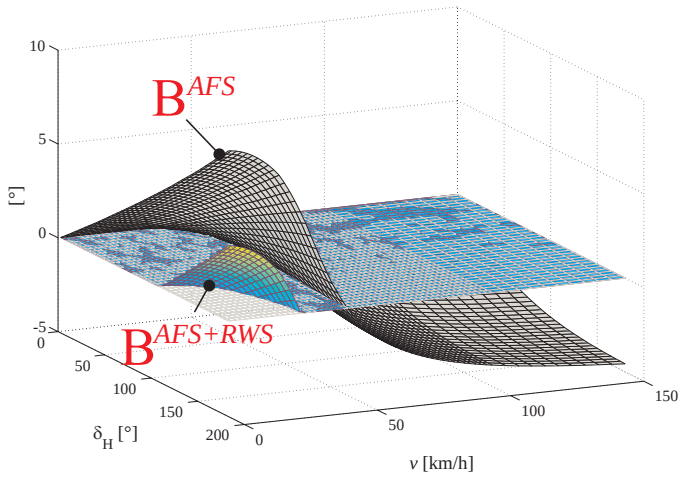


Abbildung 14: Schwimmwinkelkennfeld des AFS-Fahrzeuges B^{AFS} und minimal realisierbares Schwimmwinkelkennfeld $B^{AFS+RWS}$

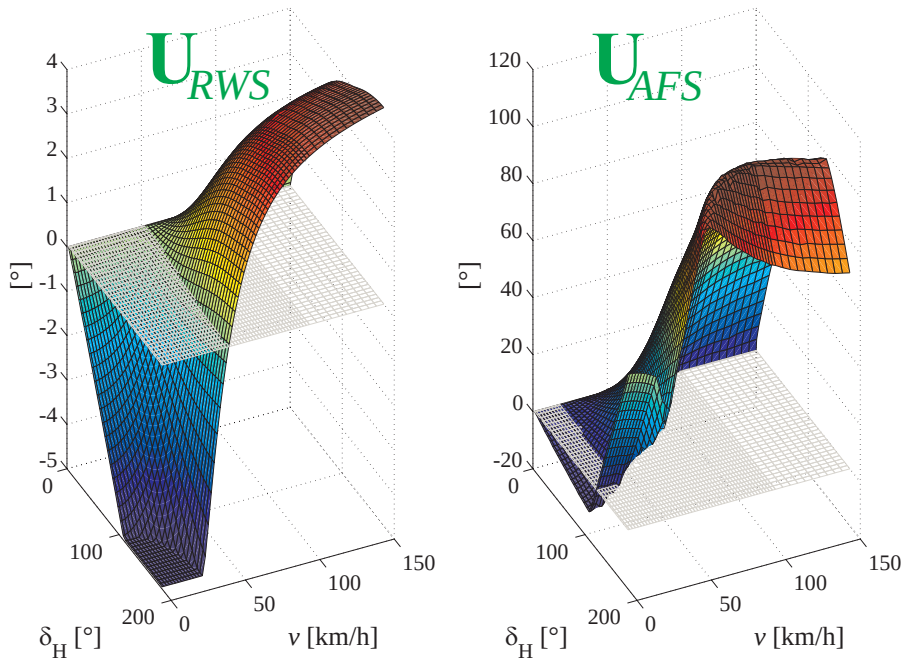


Abbildung 15: RWS- und AFS-Vorsteuerkennfelder zur Schwimmwinkelminimierung

Heck die negative Beurteilung „Gabelstaplercharakteristik “ verwendet. Des weiteren kann das ausschwenkende Heck beim Anfahren z.B. an nebenstehenden Fahrzeugen anstoßen. Ein technischer Grund warum die entworfene Lenkstrategie kritisch betrachtet werden muss, ist die Tatsache, dass der Stellmotor der Hinterachslenkung im Stand zu stark beansprucht werden würde. Es wird aus diesen Gründen vom Regelziel Schwimmwinkel Null abgegangen und die Möglichkeit einer freien Gestaltung des Schwimmwinkelverlaufes analysiert. Unter der Nebenbedingung, die Giercharakteristik beizubehalten, wird zunächst das theoretische Potential der aktiven Lenkungen zur Vorgabe beliebiger Schwimmwinkel untersucht. Es werden die minimal zulässige Schwimmwinkelvorgabe $\beta^{min}(v, \delta_H)$ (18), sowie die maximal zulässige Schwimmwinkelvorgabe $\beta^{max}(v, \delta_H)$ (19) bestimmt.

$$\min_{\mathbf{u}} \left(\beta(\mathbf{u}) + J_4(\mathbf{u})\right) \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N.} \quad & J_2(\mathbf{u}) && = 0 \\ a(\delta_H) \leq \quad & u_{AFS} && \leq b(\delta_H) \\ -5^\circ \leq \quad & u_{RWS} && \leq 5^\circ \\ -0.5 \leq \quad & u_{TVqH} && \leq 0.5 \end{aligned}$$

$$\min_{\mathbf{u}} \left(-\beta(\mathbf{u}) + J_4(\mathbf{u})\right) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N.} \quad & J_2(\mathbf{u}) && = 0 \\ a(\delta_H) \leq \quad & u_{AFS} && \leq b(\delta_H) \\ -5^\circ \leq \quad & u_{RWS} && \leq 5^\circ \\ -0.5 \leq \quad & u_{TVqH} && \leq 0.5 \end{aligned}$$

Die resultierenden Schwimmwinkel werden in Abb. 16 durch B^{min} und B^{max} dargestellt. Der Versuchsingenieur hat nun die Möglichkeit innerhalb der beiden Grenzflächen jede beliebige (stetige) Schwimmwinkelcharakteristik vorzugeben. Zur besseren Orientierung ist der Schwimmwinkel B^{AFS} des ausschließlich AFS-geregelten Fahrzeuges ebenfalls dargestellt. Unter den Randbedingungen, dass der RWS-Lenkwinkel im Stand gleich Null ist und dass bei Geradeausfahrt kein Schwimmwinkel auftritt, wird das Schwimmwinkelreferenzkennfeld B^{soll} erstellt. Die Optimierungsaufgabe zur Generierung entsprechender Vorsteuerkennfelder kann folgendermaßen formuliert werden.

$$\min_{\mathbf{u}} \left(J_4(\mathbf{u})\right) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N.} \quad & J_1(\mathbf{u}) && = 0 \\ & J_2(\mathbf{u}) && = 0 \\ a(\delta_H) \leq \quad & u_{AFS} && \leq b(\delta_H) \\ -5^\circ \leq \quad & u_{RWS} && \leq 5^\circ \\ -0.5 \leq \quad & u_{TVqH} && \leq 0.5 \end{aligned}$$

Abb. 17 zeigt die resultierenden Vorsteuerkennfelder für RWS und AFS.

10 Ergebnisse

In dieser Arbeit kann die prinzipielle Eignung des modellbasierten Ansatzes zur Führungsgrößengenerierung für Fahrdynamikregelsysteme gezeigt werden. Die physikalisch motivierte Modellstruktur ermöglicht eine Grundabstimmung des Sollwertmodells anhand vorhandener Fahrzeugdaten. Mit der *Fahrzeugsynthese* und der *Fahrverhaltenssynthese*

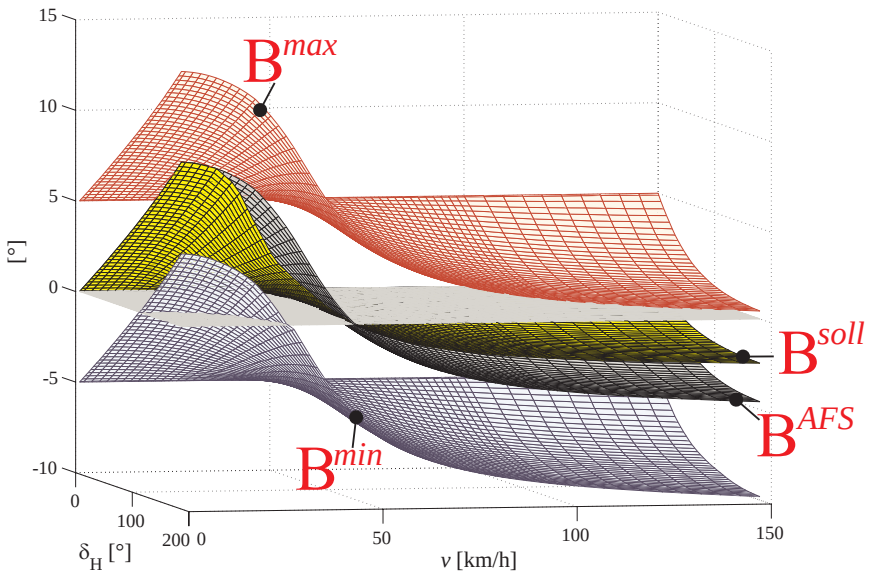


Abbildung 16: Abgrenzung der möglichen Schwimmwinkelverläufe durch B^{min} und B^{max}. Schwimmwinkelkennfeld des *AFS*-Fahrzeuges B^{AFS}. Synthese einer Referenzfläche B^{soll}

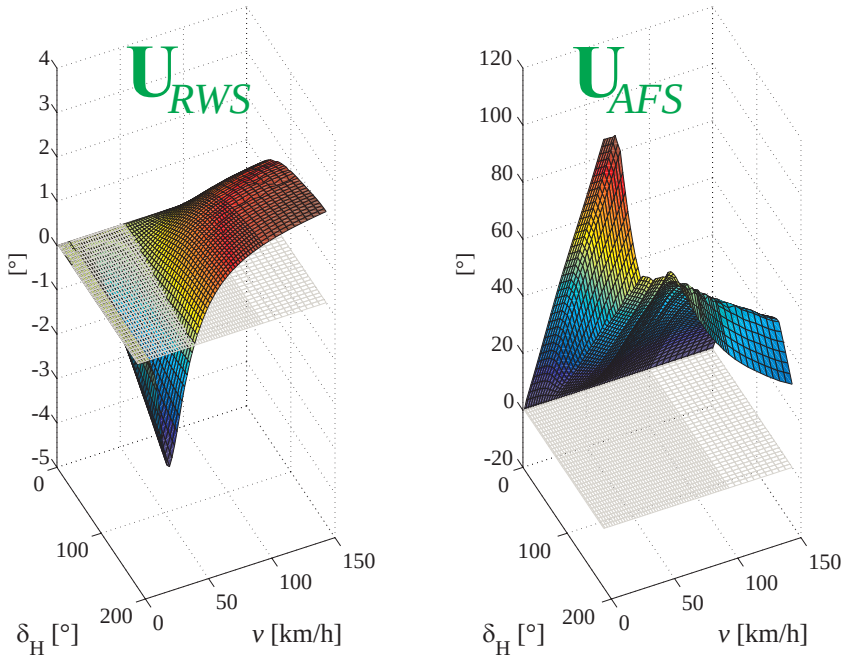


Abbildung 17: *RWS*- und *AFS*-Vorsteuerkennfelder für den Referenz-Schwimmwinkelverlauf

stehen zwei effiziente und intuitive Werkzeuge für die zustandsabhängige Optimierung der Sollwertvorgabe zur Verfügung. Die *Fahrzeugsynthese* erlaubt die Umsetzung von etablierten Fahrwerksentwurfsrichtlinien und die *Fahrverhaltenssynthese* die Berücksichtigung von subjektiven Fahrzustandsbewertungen ohne auf Modellparameter einzugehen. Der modellbasierte Ansatz erlaubt es, bereits im Entwurfprozess eine Aussage über die Realisierbarkeit der Sollwertvorgabe bzw. über die entsprechenden Aktuatoranforderungen zu treffen. Im Zuge dieser Untersuchung werden zugleich optimale stationäre Vorsteuerfunktionen für die aktiven Fahrwerkssysteme generiert. Eine wesentliche Herausforderung bei der auf Optimierung basierenden Vorsteuerberechnung, ist die Wahl geeigneter Gewichtsfunktionen α. Diese bestimmen, welche Optimierungsziele vorrangig erfüllt sein müssen und über welche Fahrwerksaktuatorik die Umsetzung zu erfolgen hat. Da es in der Regel mehrere, teils sich widersprechende, Optimierungskriterien gibt, müssen in einer geschickten Wahl auch Aktuatoreigenschaften, wie z.B. Energieeffizienz und Verfügbarkeit, und die Wahrnehmbarkeit der Eingriffe berücksichtigt werden. So sind z.B. Lenkeingriffe gegebüber Bremseingiffen, da weniger spürbar, vorzuziehen.
Die berechneten Sollwerte, sowie die Vorsteuerwerte, werden in Form von nichtparametrischen Kennflächen gespeichert. Es werden keine Ansatzfunktionen für die Flächen definiert, sondern für jeden Punkt im Zustandsraum $V \times \Delta_H$ die optimalen Lösungen bestimmt. Zwischen den Stützstellen wird linear interpoliert, was bei einem entsprechend feinen Raster ausreichend genau ist. Um einen glatten Verlauf zu gewährleisten, werden entsprechende Maßnahmen im Optimierungsprozess (z.B. Terme im Zielfunktional die Oszillationen bestrafen) getroffen.

11 Zusammenfassung und Ausblick

Mit jeder neuen Fahrzeuggeneration steigt die Anzahl an Fahrdynamikregel- und Fahrerassistenzsystemen. Mit der Entwicklung eines systemübergreifenden, zentralen Fahrdynamikreglers kann die Funktionalität der Einzelsysteme zur Realisierung optimaler Regelungsergebnisse voll genutzt werden. Die entscheidende Frage lautet, wie die neuen Möglichkeiten der Technik optimal an die Bedürfnisse, Wünsche und Erwartungen des Fahrers anzupassen sind. Auf Systemebene formuliert, geht es um die optimale Gestaltung der Führungsgrößen für den zentralen Fahrdynamikregler. In dieser Arbeit wird ein Ansatz zur Generierung dieser Führungsgrößen vorgestellt. Zentrales Element in der Sollwertermittlung stellt ein nichtlineares Fahrzeugmodell dar. Die Grundidee ist, die Eigenschaften dieses Referenzmodelles so darzustellen, dass der Regler Mensch gut damit zurecht kommt, bzw. dass bestimmte Erwartungen an Agilität, Fahrkomfort und Fahrsicherheit bestmöglich erfüllt werden. Die physikalisch motivierte Modellstruktur ermöglicht es, die Grundabstimmung des Sollwertmodells anhand realer Fahrzeuge vorzunehmen. Mit der *Fahrzeugsynthese* und der *Fahrverhaltenssynthese* werden zwei Methoden für die zustandsabhängige Optimierung der Sollwertvorgabe vorgestellt. Die Optimierung erfolgt dabei anhand von Fahrereinstellungen (z.B. Sport- oder Komfort-Modus) und anhand von Zustandsinformationen (z.B. der Fahrgeschwindigkeit). Es werden Methoden zur Realisierbarkeitsüberprüfung der Sollwertvorgabe sowie zum Entwurf optimaler stationärer Vorsteuerfunktionen für die aktiven Fahrwerkssysteme präsentiert.

Zukünftige Arbeiten konzentrieren sich auf eine umfassende Validierung der Eignung des Sollwertmodells zur Darstellung von charakteristischen Fahrattributen, wie z.B. sportlich oder komfortabel. Die Validierung erstreckt sich auch auf Fahrsituationen auf Niederreibwert (z.B. Schneefahrbahn). Im MAGNA STEYR *GCC* Versuchsfahrzeug (Abb. 18) können die entworfenen Sollwertstrategien realisiert werden. Durch die durchgängige Zusammenarbeit mit professionellen Versuchsfahrern und zusätzlichen Probandenversuchen soll ein weiterer Beitrag zur fahrergerechten Nutzung der Möglichkeiten des mechatronischen Fahrzeuges geleistet werden.

Abbildung 18: MAGNA STEYR *GCC Versuchsfahrzeug* (Kundenunabhängiger Funktionsträger)

Literatur

[1] Bosch: *Kraftfahrzeugtechnisches Taschenbuch*. Vieweg Verlag, 2003

[2] Eitzinger, Stefan: Simulation-based Development of an Active System to Improve Stability and Agility of Passenger Vehicles. In: *International Symposium on Advanced Vehicle Control*, 2004. – Arnheim

[3] Schmid, S. ; Eitzinger, S.: Analyse zweier aktiver mechatronischer Systeme zur Verbesserung von Agilität und Stabilität mittels Simulation. In: *6.Grazer Allradkongress*, 2005

[4] Remmel, M.: MAGNA - einzigartige Systemkompetenz in der Allrad-Technik. In: *6.Grazer Allradkongress*, 2005

[5] Wegscheider, M. ; Prokop, G.: Modellbasierte Komfortbewertung von Fahrassistenzsystemen VDI, 2005. – Würzburg

[6] Mitschke, M. ; Wallentowitz, H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. 4th. Springer VDI, 2004

[7] Pruckner, A.: *Nichtlineare Fahrzustandsbeobachtung und -regelung einer PKW-Hinterradlenkung*, Institut für Kraftfahrtwesen Aachen, Diss., 2001

[8] Rosinger, W. ; Eitzinger, S. ; Hirschberg, W.: Fahrerorientierte Sollwertgenerierung für Fahrdynamikregelsysteme. In: *Mechatronik 2007 - Innovative Produktentwicklung*, VDI-Berichte Nr.1971, 2007. – Tagung Wiesloch, 23. und 24. Mai 2007, S. 589–602

[9] Mimuro, T. ; Ohsaki, M. ; Yasunaga, H. ; Satoh, K.: Four parameter evaluation method of lateral transient response. In: *Passenger Car Meeting and Exposition* Society of Automotive Engineers, 1990

[10] Hirschberg, W.: *TM_simple 4.0: A Simple to Use Tyre Model*. 4. Technische Universität Graz: Institut für Fahrzeugtechnik, 2007. – User-Manual

[11] MacAdam, C.: Understanding and Modeling the Human Driver. In: *Vehicle System Dynamics* Vol.40 (2003), S. pp.101–134

[12] Stamer, N.: *Ermittlung optimaler PKW-Querdynamik und ihre Realisierung durch Allradlenkung*. VDI Verlag, 1997 (Reihe 12). – Nr.302

[13] Raksincharoensak, P. ; Mouri, H. ; Nagai, M.: Evaluation of four-wheeld-steering system from the viewpoint of lane-keeping control. In: *International Journal of Automotive Technology* Vol.5 (2004), Nr. No.2, S. pp.69–76

[14] Ahring, E.: *Fahrerorientierte Auslegung einer Allradlenkung*, TU Braunschweig, Diss., 1994

PERFORMANCE GRADIENTS UNDER SPHERICAL UNCERTAINTIES

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE
Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control
Gusshausstrasse 27-29/376, A-1040 Vienna / Austria
Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699
email: weinmann@acin.tuwien.ac.at

June 27, 2007

Abstract

The paper addresses several performance criteria used in automatic control. They are utilized to determine selected gradients of the controller implementations. Optimal design of controller systems is intended, keeping an eye on the norm-bounded uncertainties of the process.

The results are provided for several indices of performance: Stability radius, entirety of eigenvalues, integral criteria of squared structures as well as classical control setups and dynamic interaction of multiple-input multiple-output systems.

The controllers are investigated in many representations: Transfer function, state space, polynomial matrices, three-dimensional arrays and s-power-oriented coefficient matrices.

Both continuous-time and discrete-time representations are in use.

Keywords: Stability margin, transfer matrices, polynomial matrices, power-oriented matrices, three-dimensional arrays, square energy performance, per-unit square index of performance, interaction energy gradient, perturbed systems, robustness, robustification.

1 Gradient Methods

Disadvantages:

1. Referring to a single performance index
2. Stepsize unknown
3. Stopping condition vague
4. Local minimum problem
5. Side effects, sometimes disavantageous

Advantages:

1. Intuitive effect of step size required. Free selection of step size
2. Checking the effect on the intended performance index while including side effects, including hard limits, economic setups etc.
3. Select various performance indices and a combination of their gradients
4. Alternating progress upon various gradients, see Fig. 1
5. Process uncertainties can be included without difficulty.

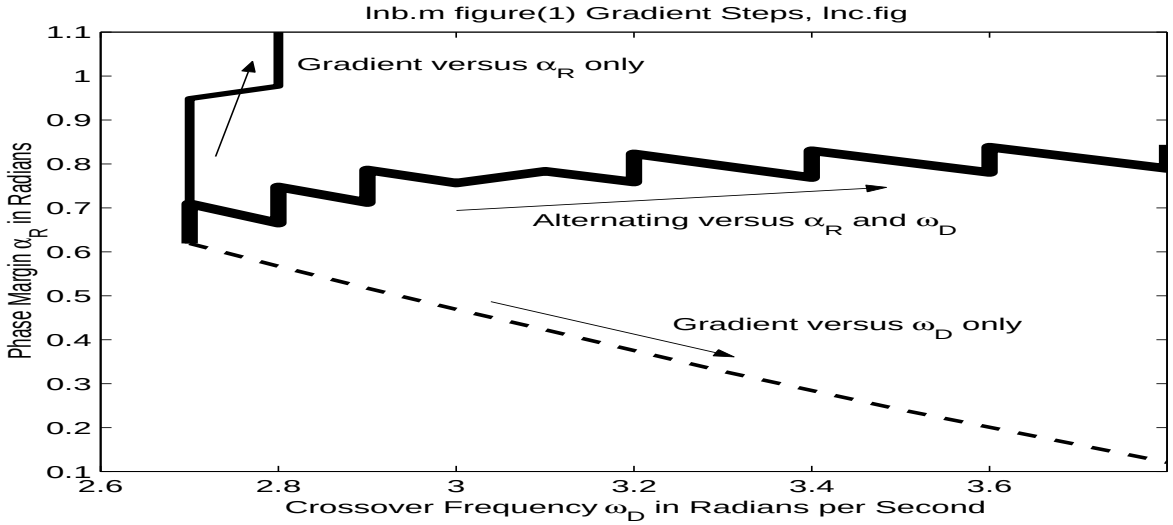


Figure 1: Gradient following various issues

Check various concise design methodes as pole assignment, linear-quadratic control or H_∞ controller, as far as the setup for weighting matrices or pole allocation (and their one-shot execution) is concerned.

Remember the problem of performance interest for the closed-loop control system in the presence of an unknown controller and an uncertain plant. Primarily, the plant is uncertain, not the closed-loop system.

In most cases in literature, the stability border of a control system is investigated. This paper addresses the gradients starting from a arbitrary nonoptimum controller assumption.

2 Worst Spherical Uncertainty. Gradient of the Controller

Frobenius (Euler) norm

$$\|\mathbf{x}\|_F \triangleq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots |x_n|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \,, \tag{1}$$

$\mathbf{x}$ to be replaced by parameter uncertainties $\Delta\mathbf{p}$, by weighted ones $\mathbf{W}\Delta\mathbf{p}$, or $\Delta\mathbf{P}$.

Spectral (induced) norm or Hilbert Norm

$$\|\mathbf{G}\|_s \triangleq \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{x}\|_F}{\|\mathbf{x}\|_F} \quad \text{where } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \,. \tag{2}$$

Singular value

$$\sigma[\mathbf{G}] \triangleq + \sqrt{\lambda[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \tag{3}$$

$$\sigma_{\max} = + \sqrt{\lambda_{\max}[\mathbf{G}^H \mathbf{G}]} \equiv \|\mathbf{G}\|_s \,. \tag{4}$$

The maximum singular value is a generalization of the absolute value.

According to $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{G}\|_F \leq \sigma_{\max}[\mathbf{G}] \leq \|\mathbf{G}\|_F$ where $\mathbf{G} \in \mathcal{C}^{n \times n}$, the extent of overbounding is assessed as $\|\mathbf{G}\|_F \leq \sqrt{n}\ \sigma_{\max}[\mathbf{G}]$. For $n = 3$ e.g., overbounding is less than 73%.

Overbounding the setup of a fixed structured uncertainty by a Frobenius bound should be kept small, see Fig. 2.

2.1 Worst Uncertainty

The index of performance I is a function of the unknown controller $\mathbf{K}$ and the uncertainty in the plant, i.e., $I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)$. Perturbations $\Delta\mathbf{P}_G$ of the plant are considered bounded by the Frobenius norm $\|\Delta\mathbf{P}_G\|_F \triangleq n_{Go}$ in most cases. The optimization aim is to find the worst uncertainty, i.e., to maximize the index of performance with respect to the uncertainty subject to n_{Go}. The inequality condition is replaced by an equality condition

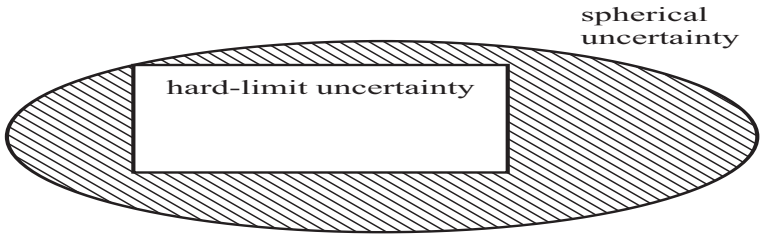


Figure 2: Overbounding two uncertainties with fixed bounds by a spherical bound

and the well-known Lagrange multiplier λ is used therefore. These issues are characterized by a zero differential quotient. Hence

$$I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G) + \lambda \|\Delta\mathbf{P}_G\|_F^2 \quad \rightarrow \quad \text{extremum}_{\Delta\mathbf{P}_G}. \tag{5}$$

Differentiating with respect to $\Delta\mathbf{P}_G$ yields

$$\frac{\partial I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)}{\partial \Delta\mathbf{P}_G} = \frac{\partial I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)}{\partial \mathbf{P}_G} = \ldots \; ! \; \ldots \triangleq 2\mathbf{H}_G \; . \tag{6}$$

Including the condition leads to

$$2\mathbf{H}_G + 2\lambda\Delta\mathbf{P}_G \;=\; \mathbf{0} \;\rightsquigarrow\; \Delta\mathbf{P}_G = -\frac{\mathbf{H}_G}{\lambda} \tag{7}$$

$$\|\Delta\mathbf{P}_G\|_F^2 \;=\; \frac{\text{tr}[\mathbf{H}_G^T\mathbf{H}_G]}{\lambda^2} = n_{Go}^2 \rightsquigarrow \quad \lambda \tag{8}$$

$$\text{and the worst uncertainty} \quad \Delta\mathbf{P}_G^\star \;=\; -\frac{n_{Go}}{\sqrt{\text{tr}[\mathbf{H}_G^T\mathbf{H}_G]}}\mathbf{H}_G \; . \tag{9}$$

2.2 Gradient of the Controller

The target is to increase (or decrease) the index of performace $I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)$ stepwise with respect to $\mathbf{P}_K$ subject to the condition of a chosen step size $\|\Delta\mathbf{P}_K\|_F = n_{Ko}$,

$$I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G) + \lambda \|\Delta\mathbf{P}_K\|_F^2 \quad \rightarrow \quad \text{extremum}_{\Delta\mathbf{P}_K} \; . \tag{10}$$

Differentiating with respect to $\Delta\mathbf{P}_K$ yields

$$\frac{\partial I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)}{\partial \Delta\mathbf{P}_K} = \frac{\partial I(\mathbf{K}, \Delta\mathbf{P}_G)}{\partial \mathbf{P}_K} = \ldots \; ! \; \ldots \triangleq 2\mathbf{H}_K \; . \tag{11}$$

Analogously to arriving at Eq.(9), one finds

$$\Delta\mathbf{P}_K^\star = -\frac{n_{Ko}}{\sqrt{\text{tr}[\mathbf{H}_K^T\mathbf{H}_K]}}\mathbf{H}_K \; . \tag{12}$$

3 Robust Stability Radius Gradient for High-Order Systems

Consider the design of a SISO control system. The plant is known either by a measured frequency response $G(j\omega)$ or given analytically. A controller $K(s)$ is usually given by its analytical transfer function, and might be in operation yet. Suppose the dynamic behavior does not comply with your expectations. The plant's setup is so complicated that standard design procedures (e.g., Bode plot, LQR) fail.

What is feasible is an approach of computing the stability radius d_R (or r) and increasing it by following the gradient with respect to the controller parameters. One has to cope both with the gradient with respect to the parameters of the controller and the uncertain parameters of the plant.

Maximizing the stability radius in transfer function representation for small structured uncertainties runs as follows.

For computational ease, we separate the coefficient vectors $\mathbf{p}_G$ of the plant into vectors $\mathbf{p}_{Gz}$ and $\mathbf{p}_{Gn}$ for numerator and denominator coefficients $\mathbf{p}_G \in \mathcal{R}^{2n+2}$; $\mathbf{p}_{Gz}, \mathbf{p}_{Gn} \in \mathcal{R}^{n+1}$,

$$r \triangleq |d_R| = \min_{\omega} |d(j\omega)|, \qquad d_R \triangleq d(j\omega_T) = 1 + \frac{\mathbf{p}_{Gz}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}} K(s)\Big|_{s=j\omega_T} \tag{13}$$

where

$$\mathbf{s} \triangleq (1 \;\; s \;\; s^2 \ldots s^n)^T \quad \in \mathcal{C}^{n+1}, \qquad \omega_T \triangleq \arg\min_{\omega} |d(j\omega)| \tag{14}$$

and n is the degree of the polynomial. We utilize

$$\frac{\partial |v|^2}{\partial \mathbf{p}} = 2\left[(\Re e\; v)\; \frac{\partial(\Re e\; v)}{\partial \mathbf{p}} + (\Im m\; v) \frac{\partial(\Im m\; v)}{\partial \mathbf{p}}\right] = 2\; \Re e\; [v^* \frac{\partial v}{\partial \mathbf{p}}]\; . \tag{15}$$

In the presence of small uncertainties given by $\Delta\mathbf{p}_{Gz}$ and $\Delta\mathbf{p}_{Gn}$, we find

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial \Delta \mathbf{p}}_G \overset{(15)}{=} (\Re e\; d_R) \begin{pmatrix} \Re e\; \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} \\ \Re e\; \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \end{pmatrix} + (\Im m\; d_R) \begin{pmatrix} \Im m\; \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} \\ \Im m\; \frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \end{pmatrix}\; . \tag{16}$$

For small uncertainties, and for $s = j\omega_T$,

$$d_R = 1 + (G + \Delta G)K(s) \tag{17}$$

$$d_R = 1 + (\mathbf{p}_{Gz} + \Delta\mathbf{p}_{Gz})^T \mathbf{s} \frac{1}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}} (1 - \frac{\Delta\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}) K(s) \tag{18}$$

$$d_R \doteq \underbrace{1 + \frac{R_{11}R_{12}}{R_{21}R_{22}}}_{\triangleq\, a} + \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{21}R_{22}}\mathbf{s}^T}_{\triangleq\, \mathbf{b}^T} \Delta\mathbf{p}_{Gz} \underbrace{- \frac{R_{11}R_{12}}{R_{21}^2 R_{22}}\mathbf{s}^T}_{\triangleq\, \mathbf{c}^T} \Delta\mathbf{p}_{Gn}\; , \tag{19}$$

where

$$\mathbf{R} \stackrel{\triangle}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_G^T \mathbf{P}_z^T \mathbf{s} & \mathbf{p}_K^T \mathbf{P}_z^T \mathbf{s} \\ \mathbf{p}_G^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{s} & \mathbf{p}_K^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Gz}^T \mathbf{s} & \mathbf{p}_{Kz}^T \mathbf{s} \\ \mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s} & \mathbf{p}_{Kn}^T \mathbf{s} \end{pmatrix} . \tag{20}$$

The dimension of $\mathbf{s}$ has to be adapted to the degree of K and G. For the sake of simplicity, no distinction is made in Eq.(20). In the derivation of what follows, $\mathbf{s}$ corresponds to the order of the plant G. Moreover, $\mathbf{S} = \mathbf{s}\mathbf{s}^T$ is defined.

The coefficients of the polynomials $p_{Kz}(s)$ in the numerator are collected in a vector $\mathbf{p}_{Kz}$, which is the first half of the parameter vector $\mathbf{p}_K$; the denominator polynomial is $p_{Kn}(s)$ corresponding to the second half of the parameter vector $\mathbf{p}_K$. Hence, one has

$$\mathbf{p}_K \stackrel{\triangle}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Kz} \\ \mathbf{p}_{Kn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{Kz} = \mathbf{P}_z \mathbf{p}_K, \quad \mathbf{p}_{Kn} = \mathbf{P}_n \mathbf{p}_K, \tag{21}$$

$$\mathbf{p}_G \stackrel{\triangle}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{Gz} \\ \mathbf{p}_{Gn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{Gz} = \mathbf{P}_z \mathbf{p}_G, \quad \mathbf{p}_{Gn} = \mathbf{P}_n \mathbf{p}_G, \tag{22}$$

$$\text{where } \mathbf{P}_z \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{I}_{n+1} \ \vdots \ \mathbf{0}_{n+1}), \qquad \mathbf{P}_n \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{0}_{n+1} \ \vdots \ \mathbf{I}_{n+1}) \in \mathcal{R}^{(n+1)\times 2(n+1)} . \tag{23}$$

For the gradient one has

$$d_R = 1 + G(s)K(s)\Big|_{s=j\omega_T} = 1 + G(s)\frac{(\mathbf{P}_z \mathbf{p}_K)^T \mathbf{s}}{(\mathbf{P}_n \mathbf{p}_K)^T \mathbf{s}}\Big|_{s=j\omega_T} \tag{24}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \mathbf{p}_K} = G(s)\left[\frac{\mathbf{P}_z^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_K^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{s}} - \frac{\mathbf{p}_K^T \mathbf{P}_z^T \mathbf{s}}{(\mathbf{p}_K^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{s})^2}\mathbf{P}_n^T \mathbf{s}\right]_{s=j\omega_T} . \tag{25}$$

Using Eq.(22), there is a unified approach for the uncertainties of the plant and the gradient of the controller

$$\frac{\partial d(j\omega)}{\partial \mathbf{p}_G} = \frac{1}{R_{21}R_{22}} R_{12}(\mathbf{P}_z^T - \frac{R_{11}}{R_{21}}\mathbf{P}_n^T)\mathbf{s} \tag{26}$$

$$\frac{\partial d(j\omega)}{\partial \mathbf{p}_K} = \frac{1}{R_{21}R_{22}} R_{11}(\mathbf{P}_z^T - \frac{R_{12}}{R_{22}}\mathbf{P}_n^T)\mathbf{s} . \tag{27}$$

Following Eq.(15),

$$r^2(\Delta \mathbf{p}_G) + \lambda \|\Delta \mathbf{p}_G\|_F^2 \quad \rightarrow \quad \min_{\Delta \mathbf{p}_G} . \tag{28}$$

Having equipped the plant with the worst uncertainty $\Delta \mathbf{p}_G^\star$, the gradient with respect to $\Delta \mathbf{p}_K$ is derived.

Replacing $\mathbf{p}_{Gz}$ by $\mathbf{p}_{Gz} + \Delta \mathbf{p}_{Gz}$ and $\mathbf{p}_{Gn}$ by $\mathbf{p}_{Gn} + \Delta \mathbf{p}_{Gn}$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} \stackrel{(18)}{=} \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{p}_{Gn} + \Delta \mathbf{p}_{Gn})^T \mathbf{s}} K(s) = \frac{K(s)\mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}\left(1 - \frac{\Delta \mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T \mathbf{s}}\right) \tag{29}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gz}} = \underbrace{\frac{R_{12}}{R_{21}R_{22}}}_{\stackrel{\triangle}{=} e}\mathbf{s} \ \underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2 R_{22}}\mathbf{S}}_{\stackrel{\triangle}{=} \mathbf{F}} \Delta \mathbf{p}_{Gn} \tag{30}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} \overset{(18)}{=} K(s)(\mathbf{p}_{Gz}+\Delta\mathbf{p}_{Gz})^T\mathbf{s}\ \frac{(-1)}{[(\mathbf{p}_{Gn}+\Delta\mathbf{p}_{Gn})^T\mathbf{s}]^2}\mathbf{s} \tag{31}$$

$$= K(s)\mathbf{s}^T(\mathbf{p}_{Gz}+\Delta\mathbf{p}_{Gz})\ \frac{(-1)}{(\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s})^2}\left(1-\frac{\Delta\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}{\mathbf{p}_{Gn}^T\mathbf{s}}\right)^2\mathbf{s} \tag{32}$$

$$\frac{\partial d_R}{\partial \Delta \mathbf{p}_{Gn}} = \underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2R_{22}}\mathbf{S}\mathbf{p}_{Gz}}_{\triangleq\ \mathbf{f}}\underbrace{-\frac{R_{12}}{R_{21}^2R_{22}}\mathbf{S}}_{\triangleq\ \mathbf{H}}\Delta\mathbf{p}_{Gz}+\underbrace{\frac{2R_{12}}{R_{21}^3R_{22}}\mathbf{S}\mathbf{p}_{Gz}\mathbf{s}^T}_{\triangleq\ \mathbf{J}}\Delta\mathbf{p}_{Gn}\ . \tag{33}$$

Referring to Eqs.(16), (19), (30) and (33) yields

$$(\Re e\ d_R)\frac{\partial \Re e\ d_R}{\partial \Delta\mathbf{p}_G}=\begin{pmatrix}\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2\Delta\mathbf{p}_{Gz}+\mathbf{h}_3\Delta\mathbf{p}_{Gn}\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\Delta\mathbf{p}_{Gz}+\mathbf{k}_3\Delta\mathbf{p}_{Gn}\end{pmatrix}\ , \tag{34}$$

where

$$\mathbf{h}_1 = (\Re e\ e\mathbf{s})(\Re e\ a)\quad \in\mathcal{C}^{n+1} \tag{35}$$

$$\mathbf{h}_2 = (\Re e\ e\mathbf{s})(\Re e\ \mathbf{b}^T)\quad \in\mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{36}$$

$$\mathbf{h}_3 = (\Re e\ e\mathbf{s})(\Re e\ \mathbf{c}^T)+(\Re e\ a)(\Re e\ \mathbf{F})\quad \in\mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{37}$$

$$\mathbf{k}_1 = (\Re e\ \mathbf{f})(\Re e\ a)\quad \in\mathcal{C}^{n+1} \tag{38}$$

$$\mathbf{k}_2 = (\Re e\ \mathbf{f})(\Re e\ \mathbf{b}^T)+(\Re e\ \mathbf{H})(\Re e\ a)\quad \in\mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{39}$$

$$\mathbf{k}_3 = (\Re e\ \mathbf{f})(\Re e\ \mathbf{c}^T)+(\Re e\ \mathbf{J})(\Re e\ a)\quad \in\mathcal{C}^{(n+1)\times(n+1)}\ . \tag{40}$$

For the expression $(\Im m\ d_R)\ \frac{\partial \Im m\ d_R}{\partial \Delta\mathbf{p}_G}$ replace $\Re e$ by $\Im m$ in Eqs.(34) through (40) and increase the indices of $\mathbf{h}$ and $\mathbf{k}$ by three.

Then, from Eq.(16)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial\Delta\mathbf{p}_G}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_4\end{pmatrix}}_{\triangleq\ \mathbf{h}_7}+\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_5 & \vdots & \mathbf{h}_3+\mathbf{h}_6\\ \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_5 & \vdots & \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_6\end{pmatrix}}_{\triangleq\ \mathbf{H}_7}\underbrace{\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{p}_{Gz}\\ \Delta\mathbf{p}_{Gn}\end{pmatrix}}_{\triangleq\ \Delta\mathbf{p}_{Gn}}\ . \tag{41}$$

Finally, optimization requires

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial\Delta\mathbf{p}_G}+\lambda\frac{\partial}{\partial\Delta\mathbf{p}_G}\|\Delta\mathbf{p}_G\|_F^2=\mathbf{0} \tag{42}$$

$$\mathbf{h}_7+\mathbf{H}_7\Delta\mathbf{p}_G+4\lambda\Delta\mathbf{p}_G=\mathbf{0} \tag{43}$$

$$\Delta\mathbf{p}_G^\star=-[\mathbf{H}_7+4\lambda\mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1}\mathbf{h}_7\ , \tag{44}$$

where λ results from (*Weinmann, A., 2007c*)

$$\mathbf{h}_7^T[\mathbf{H}_7+4\lambda\mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1,T}[\mathbf{H}_7+4\lambda\mathbf{I}_{2(n+1)}]^{-1}\mathbf{h}_7=p_0^2\ . \tag{45}$$

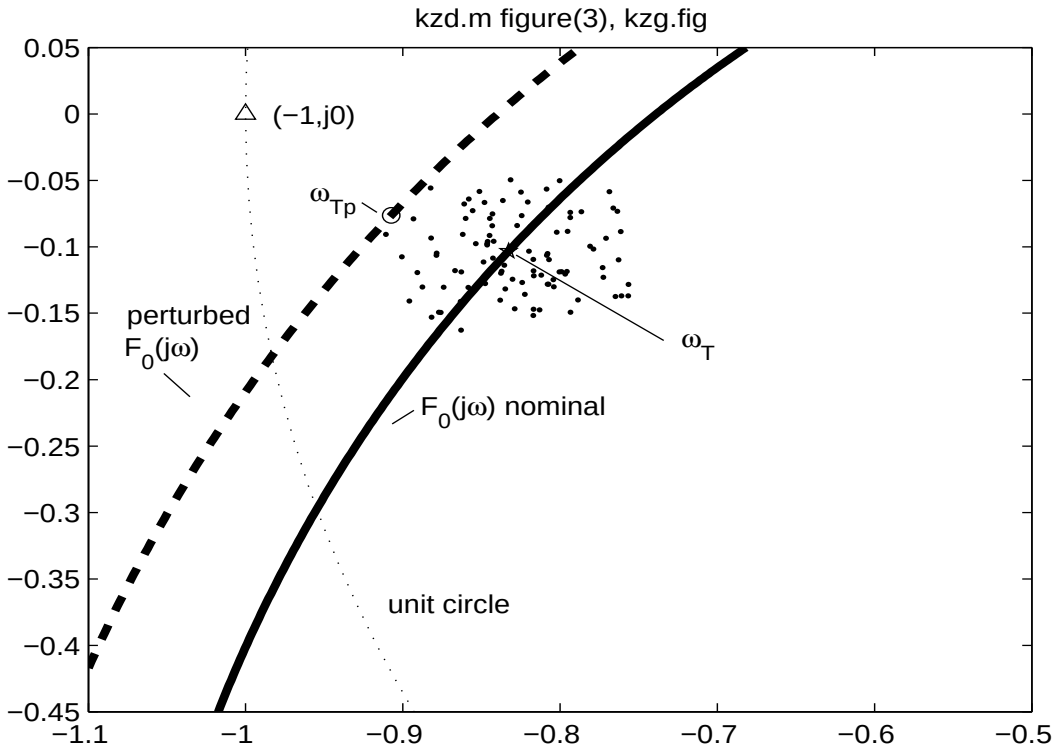


Figure 3: Nominal and worst perturbed open-loop characteristic $F_0(j\omega)$ and a cloud of random selctions of the perturbed $F_0(j\omega_T)$

If only some of the coefficients are uncertain, then at the positions of the certain parameters the parameter increments are kept fixed at zero.

Example 1. Plant in analytic representation:

The result of Eqs.(44) and (45) is carried out in detail. The setup for the controller is the order 3, the plant is of fourth order 4.

In Fig. 3, the initial plant and controller is illustrated. The nominal characteristic $F_0(j\omega)$ is depicted, and the characteristic of $K(j\omega)G_p(j\omega)$, where

$$G_p = \frac{(\mathbf{p}_{Gz} + \Delta\mathbf{p}^{\star}_{Gz})^T\mathbf{s}}{(\mathbf{p}_{Gn} + \Delta\mathbf{p}^{\star}_{Gn})^T\mathbf{s}} \tag{46}$$

is the initial worst case. The result of changing the steps of K are not repeated.

For illustration purpose, random perturbations of the same limit are also applied, producing the family of dots around $F_0(j\omega_T)$. In the initial $F_0(j\omega)$, there is only a slight difference between $\omega_T = 0.697$ and $\omega_R = 0.703$.

4 Stability Margin, Continuous-Time Systems, State-Space

4.1 Minimum Hodograph Distance

Presupposing a stable MIMO control system and $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$; $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^r$; $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$; $\mathbf{A}, \mathbf{\Phi} \in \mathcal{R}^{n \times n}$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Psi} \in \mathcal{R}^{n \times m}$; $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{r \times n}$, the closest point of the closed-loop hodograph (Mikhailow hodograph) to the origin follows from

$$\min_{\omega} |p_{cl}(j\omega)|^2 = \min_{\omega} p^*_{cl}(j\omega) p_{cl}(j\omega) \stackrel{\triangle}{=} h_0^2 \ . \tag{47}$$

Using

$$p_{cl}(j\omega) = \det(j\omega \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl}), \tag{48}$$

and differentiating (*Vetter, W.J., et al., 1972; Brewer, J.W., 1978; Weinmann, A., 2001*), the optimum frequency ω_0 is determined by

$$f(\omega_0, \mathbf{A}_{cl}) = \mathrm{tr}[\mathrm{adj}(\omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)] = 0 \tag{49}$$

and the minimum distance h_0 squared

$$h_0^2 = \det(\omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2) \ . \tag{50}$$

The differential sensitivity of h_0^2 with respect to $\mathbf{K}_y$ results as

$$\frac{\partial \det(\omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2)}{\partial \mathbf{K}_y} = \frac{\partial (h_0^2)}{\partial \mathbf{K}_y} = 2[\mathbf{C}\mathbf{A}_{cl}(\mathrm{adj}\mathbf{U})\mathbf{B}]^T \ . \tag{51}$$

In a reasonable range, the minimum h_0 is obtained for $\omega_0 = 0$ in Eq.(49). Then, from Eq.(51)

$$\frac{\partial (h_0^2)}{\partial \mathbf{K}_y} = 2[\mathbf{C}\mathbf{A}_{cl}^{-1}\mathbf{B}]^T \det(\mathbf{A}_{cl}^2) \ . \tag{52}$$

There is a similarity to the gradient of holistic controllers, which minimize $\mathrm{tr}[\mathbf{A}_{cl}^{-1}]$. Their gradient is $\partial \mathrm{tr}[\mathbf{A}_{cl}^{-1}]/\partial \mathbf{K}_y = [\mathbf{C}\mathbf{A}_{cl}^{-2}\mathbf{B}]^T$ (*Weinmann, A., 2005; 2005a*) .

4.2 Resonant Frequency with Respect to the Output State Controller

We evaluate the increment of the resonant frequency ω_0 when increasing $\mathbf{K}_y$ with an increment $\Delta \mathbf{K}_y$. From Eq.(49), the total differential expression is

$$d\, f = \frac{\partial f}{\partial \omega_0} d\omega_0 + \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial K_{y,ij}} dK_{y,ij} = \frac{\partial f}{\partial \omega_0} d\omega_0 + \mathrm{tr}[(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{K}_y})^T d\mathbf{K}_y] = 0 \ . \tag{53}$$

$$\mathbf{U} \triangleq \omega_0^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_{cl}^2 = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{H}^\star(j\omega), \tag{54}$$

$$\frac{d\omega_0}{d\mathbf{K}_y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{K}_y}}{\frac{\partial f}{\partial \omega_0}} = \frac{\{\mathbf{C}[\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{I}_n \mathrm{tr}\mathbf{U}^{-1}]\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{B}\}^T}{\omega_0\{(\mathrm{tr}[\mathbf{U}^{-1}])^2 - \mathrm{tr}[\mathbf{U}^{-2}]\}} \ . \tag{55}$$

4.3 Maximum Admissible Unstructured Uncertainty

The smallest $\Delta\mathbf{A}_{\min}$, in norm sense, which is sufficient to destabilize $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C} = \mathbf{A}_{cl}$ at a frequency ω_0, requires

$$\|\Delta\mathbf{A}_{\min}\|_F^2 + \mu \det(j\omega_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl} - \Delta\mathbf{A}_{\min}) \rightarrow \min_{\Delta\mathbf{A}_{\min}} \tag{56}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\max}[\Delta\mathbf{A}]}{\partial \mathbf{K}_y} \geq \frac{-\mathbf{B}^T \Re e\ \{\mathbf{H}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-2}\}\mathbf{C}^T}{\|\mathbf{H}^{-1}\|_F^3} = \frac{-\mathbf{B}^T \Re e\ \{\mathbf{\Phi}_{cl}^H \mathbf{\Phi}_{cl} \mathbf{\Phi}_{cl}^H(j\omega)\}\mathbf{C}^T}{\|\mathbf{\Phi}_{cl}(j\omega)\|_F^3} \ , \tag{57}$$

where $\mathbf{H} \triangleq j\omega\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}$ (*Weinmann, A., 2005a*).

4.4 Entirely Perturbed System

The stability margin h_0 of the perturbed system is the minimum distance of the hodograph $\det(j\omega I_n - \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A})$ of its coefficient matrix $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$. For a feedback control system, $\mathbf{A}$ is replaced by $\mathbf{A}_{cl}$. Squared, it is given by

$$h_0^2 = \det[\omega_0^2\mathbf{I}_n + (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^2] = h_0^2(\Delta\mathbf{A}) \ . \tag{58}$$

Following Eq.(5) accordingly,

$$\mathbf{W} \triangleq \mathrm{adj}[\omega_0^2\mathbf{I}_n + (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^2)], \tag{59}$$

$$\mathrm{col}\Delta\mathbf{A}^\star = -(\mathbf{W}^T \oplus \mathbf{W} + 2\lambda\mathbf{U}_{nn})^{-1}\mathrm{col}(\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}) \ . \tag{60}$$

The multiplier λ is obtained via the desired norm of the uncertainty (*Weinmann, A., 2006c*).

Example 2. For a sixth-order system, the uncertainty is increased stepwise by the worst uncertainty, see Fig. 4.

5 Stability Margin, Discrete-Time Systems

Consider the nth order discrete-time plant with sampling time T_s

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}(T_s)\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Psi}\mathbf{u}(k) \qquad \in \mathcal{R}^n & (61)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0} \ , & (62) \end{aligned}$$

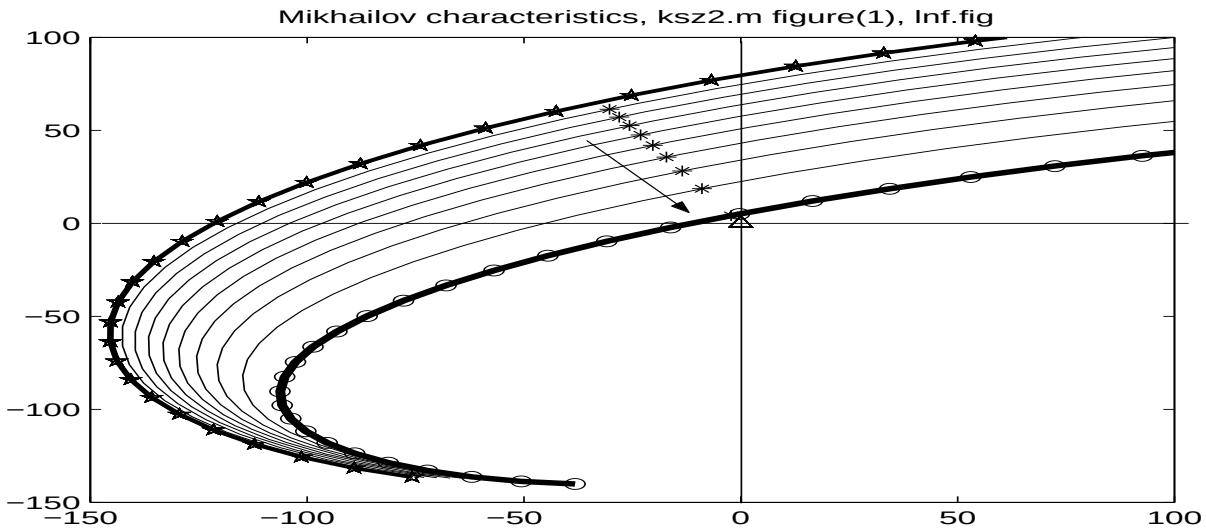


Figure 4: Increasing the uncertainty of the entirely perturbed system until nearly touching the stability border

and a controller $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_y\mathbf{y}(k) = \mathbf{K}_y\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$. The input matrix $\mathbf{\Psi}$ is set constant although there is a slight dependence on T_s.

Then the characteristic equation of the closed-loop system for $z = e^{j\omega T_s}$ is

$$p_{cl}(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = h(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} \stackrel{\triangle}{=} \det(e^{j\omega T_s}\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl}) = \det(e^{j\omega T_s}\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_y\mathbf{C}) = 0, \quad (63)$$

where $\mathbf{\Phi}_{cl} = \mathbf{\Phi}(T_s) + \mathbf{\Psi}\mathbf{K}_y\mathbf{C}$. Selecting the closed-loop polynomial and replacing $z = e^{j\omega T_s}$, the hodograph (Mikhailov plot) is obtained. The closest point to the origin at frequency ω_0 results from (*Weinmann, A., 2006b*)

$$|\det(e^{j\omega T_s}\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl})| \to \min_{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \omega_0 \quad (64)$$

$$\mathrm{tr}[\mathbf{\Phi}_{cl}\ \mathrm{adj}(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{\Phi}_{cl}\cos\omega_0 T_s + \mathbf{\Phi}_{cl}^2)] = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial(h_o^2)}{\partial \mathbf{K}_y} = 2\mathbf{\Psi}\mathbf{U}_{d0}^{-T}[\mathbf{\Phi}_{cl}^T - \mathbf{I}_n\cos\omega_0 T_s]\mathbf{C}^T \det\mathbf{U}_{d0}\ . \quad (66)$$

Example 3. For $n = 5$, $|h(j\omega)|$ from Eq.(63) is depicted in Fig. 5. The root locus is given in Fig. 6.

5.1 Unstructured Uncertainty

The unstructured destabilizing uncertainty $\Delta\mathbf{\Phi}$ is selected in order to change $\mathbf{\Phi}_{cl}$ such that the closed-loop dynamics z_0 with $z_0 = e^{(\delta_0 + j\omega_o)T_s}$ is obtained. Then

$$\det(z_0\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl} - \Delta\mathbf{\Phi}) \ = \ 0 \quad (67)$$

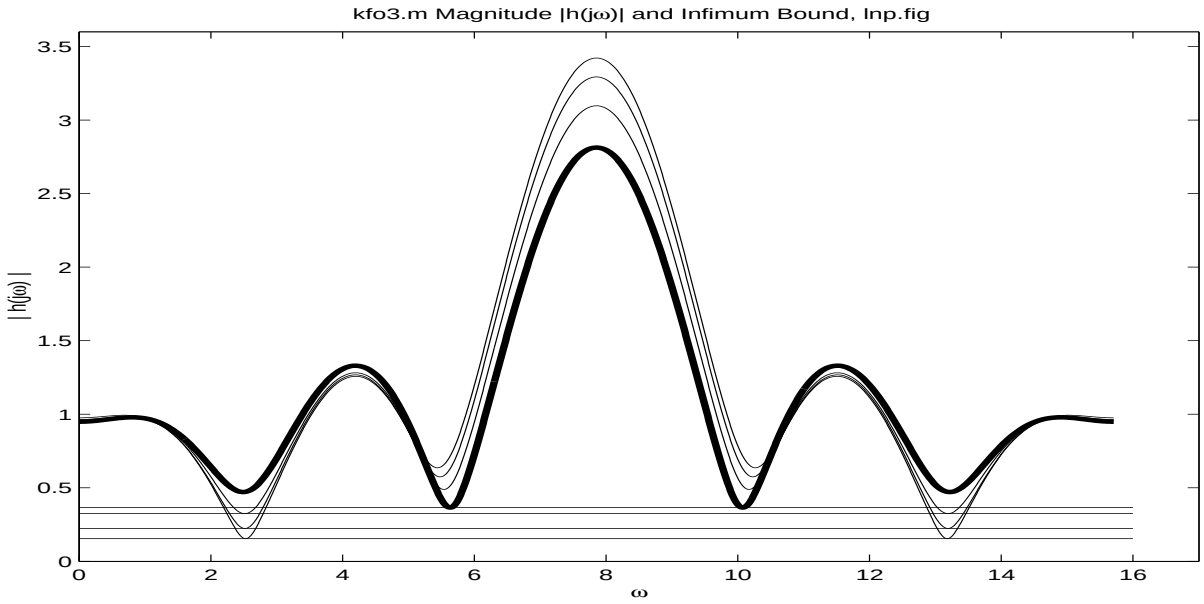


Figure 5: Cartesian hodograph of the discrete-time system

$$\det[\mathbf{I}_n - (z_0\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl})^{-1}\Delta\mathbf{\Phi}] = 0 \tag{68}$$

$$\lambda_i[(z_0\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl})^{-1}\Delta\mathbf{\Phi}] = 1 \tag{69}$$

$$\Leftarrow \quad \sigma_{\max}[\Delta\mathbf{\Phi}] \leq \sigma_{\min}[e^{(\delta_0+j\omega_0)T_s}\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}_{cl}] \stackrel{\triangle}{=} \sigma_1 \tag{70}$$

(*Doyle, J.C., and Stein, G., 1981; Weinmann, A., 1991*). In order not to destabilize the system the maximum singular value of $\Delta\mathbf{\Phi}$ must not exceed the right-hand side of Eq.(70).

6 Stability Margin Gradients and Robustification. Transfer Matrices

The characteristic equation of a MIMO control system with two inputs and two outputs follows from the inverse of $\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s)$ where $\mathbf{K}(s)$ and $\mathbf{G}(s)$ are the matrix-valued transfer functions of the controller and plant of a control system of arbitrary dimension, respectively,

$$\mathbf{H}(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \frac{Z_{K11}}{N_{K11}} & \frac{Z_{K12}}{N_{K12}} \\ \frac{Z_{K21}}{N_{K21}} & \frac{Z_{K22}}{N_{K22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Z_{G11}}{N_{G11}} & \frac{Z_{G12}}{N_{G12}} \\ \frac{Z_{G21}}{N_{G21}} & \frac{Z_{G22}}{N_{G22}} \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$H_{11} = \frac{Z_{K11}Z_{G11}N_{K12}N_{G21} + Z_{K12}Z_{G21}N_{K11}N_{G12}}{N_{K11}N_{G11}N_{K12}N_{G21}} + 1 \tag{72}$$

$$H_{12} = \frac{Z_{K11}Z_{G12}N_{K12}N_{G22} + Z_{K12}Z_{G22}N_{K11}N_{G12}}{N_{K11}N_{G12}N_{K12}N_{G22}} \tag{73}$$

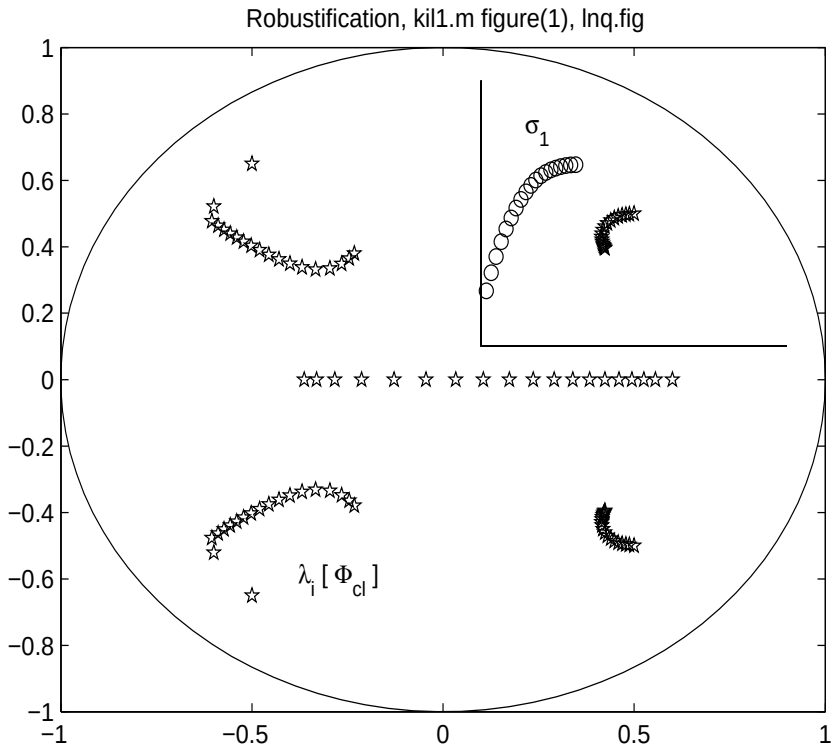


Figure 6: Eigenvalues of the closed loop and admissible uncertainty for Example 3

$$H_{21} = \frac{Z_{K12}Z_{G11}N_{K22}N_{G21} + Z_{K22}Z_{G21}N_{K21}N_{G11}}{N_{K21}N_{G11}N_{K22}N_{G21}} \tag{74}$$

$$H_{21} = \frac{Z_{K21}Z_{G12}N_{K22}N_{G22} + Z_{K22}Z_{G22}N_{K21}N_{G12}}{N_{K21}N_{G12}N_{K22}N_{G22}} + 1 \tag{75}$$

All the terms above are functions of the Laplace operator s.

The coefficients of the numerator and denominator polynomial at matrix position (i, j) are concatenated in a three-dimensional array in MATLAB

$$\mathbf{P}_K \sim \mathtt{PK}(:, \mathtt{i}, \mathtt{j}) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}_G \sim \mathtt{PG}(:, \mathtt{i}, \mathtt{j}) \tag{76}$$

for the controller and plant, respectively. Vice versa, they are selected by $\mathbf{P}_z$ and $\mathbf{P}_n$ to obtain the numerator and denominator polynomials Z_{Kij} and N_{Kij}, respectively, i.e.,

$$\mathbf{P}_z \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{I}_n \ \vdots \ \mathbf{0}_n), \qquad \mathbf{P}_n \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{0}_n \ \vdots \ \mathbf{I}_n) \in \mathcal{R}^{n \times 2n} \tag{77}$$

$$Z_{Kij}(s) = \mathbf{s}^T \mathbf{P}_z \mathbf{P}_K(:, i, j), \qquad N_{Kij}(s) = \mathbf{s}^T \mathbf{P}_n \mathbf{P}_K(:, i, j) \ . \tag{78}$$

The matrix data are collected as follows

$$\mathbf{K}(s) = \text{matrix}\{K_{ij}(s)\} \ , \qquad K_{ij}(s) = \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{P}_z \mathbf{P}_K(:, i, j)}{\mathbf{s}^T \mathbf{P}_n \mathbf{P}_K(:, i, j)} \ . \tag{79}$$

Analogously, $\mathbf{G}(s)$ is figured out. The inverse of $(\mathbf{I}+\mathbf{KG})$ requires $\det(\mathbf{I}+\mathbf{KG})$. By multiplying with all the denominators N, i.e., the product $\prod_{i,j} N_{Kij}N_{Gij}$, one finds the characteristic polynomial in s. Replacing $s = j\omega$ yields the Mikhailov hodograph $h(j\omega)$. In what follows, A, B, C, D are used only for the sake of abbreviation

$$h(j\omega) = \det(\mathbf{I}+\mathbf{KG}) \prod_{i,j} N_{Kij}N_{Gij} \stackrel{\triangle}{=} AD - BC \tag{80}$$

$$A \stackrel{\triangle}{=} Z_{K11}Z_{G11}N_{K12}N_{G21} + Z_{K12}Z_{G21}N_{K11}N_{G12} + N_{K11}N_{G11}N_{K12}N_{G21} \tag{81}$$

$$B \stackrel{\triangle}{=} Z_{K11}Z_{G12}N_{K12}N_{G22} + Z_{K12}Z_{G22}N_{K11}N_{G12} \tag{82}$$

$$C \stackrel{\triangle}{=} Z_{K12}Z_{G11}N_{K22}N_{G21} + Z_{K22}Z_{G21}N_{K21}N_{G11} \tag{83}$$

$$D \stackrel{\triangle}{=} Z_{K21}Z_{G12}N_{K22}N_{G22} + Z_{K22}Z_{G22}N_{K21}N_{G12} + N_{K21}N_{G12}N_{K22}N_{G22}\ . \tag{84}$$

The terms Z_{K11} etc. are complex values of the polynomials in numerator and denominator at the frequency ω. Selecting a special polynomial, e.g., Z_{K11}, and denominating it $k(s)$ in Eq.(86), the polynomials $n_1(s)$ and $n_2(s)$ are determined. The partial gradient of the squared absolute value $|h(j\omega_0)|^2$ with respect to the coefficients of Z_{K11} is achieved from $\frac{\partial|v(\mathbf{p})|^2}{\partial \mathbf{p}} = 2\ \Re e\ [v^* \frac{\partial v}{\partial \mathbf{p}}]$. The minimum distance point to the origin characterized by the distance (squared) $h_0^2 \stackrel{\triangle}{=} |h(j\omega_0)|^2$ and ω_0 are evaluated by minimum search versus ω.

The set-up for the controller and plant is

$$\begin{bmatrix} \mathtt{PK}(:,1,1)' & \mathtt{PK}(:,1,2)' \\ \mathtt{PK}(:,2,1)' & \mathtt{PK}(:,2,2)' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathtt{PG}(:,1,1)' & \mathtt{PG}(:,1,2)' \\ \mathtt{PG}(:,2,1)' & \mathtt{PG}(:,2,2)' \end{bmatrix}. \tag{85}$$

The derivative with respect to one of the parameters of the absolute value squared taken from a polynomial product is given as follows. Consider the subpolynomials in $h(s)$, i.e., $n_1(s),\ n_2(s),\ k(s)$ and

$$h(s) = n_1(s) + n_2(s)k(s) \tag{86}$$

in order to derive $\frac{\partial|h(s)|^2}{\partial p_\nu}$. The polynomials $n_1,\ n_2$ are in special use for $s = j\omega$. The polynomial $k(s)$ is that polynomial which is selected as one of the numerator or denominators of the elements of the matrix-valued transfer function $\mathbf{K}(s)$

$$\mathbf{s} \stackrel{\triangle}{=} (1\ \ s\ \ s^2\ \ \ldots\ s^n)^T\ \in \mathcal{C}^{n+1} \qquad k(s) = \mathbf{s}^T\mathbf{p} = \sum_{\nu=1}^{r+1} p_\nu s^{\nu-1}\ , \tag{87}$$

where r is the degree of $k(s)$.

An opportunitiy for the derivation is

$$\frac{\partial|h|^2}{\partial p_\nu} \stackrel{\triangle}{=} \frac{\partial|h|^2}{\partial \Re e\ k}\frac{\partial \Re e\ k}{\partial p_\nu} + \frac{\partial|h|^2}{\partial \Im m\ k}\frac{\partial \Im m\ k}{\partial p_\nu} \tag{88}$$

$$= \frac{\partial |h|^2}{\partial \Re e\ k} \Re e\ \frac{\partial k}{\partial p_\nu} + \frac{\partial |h|^2}{\partial \Im m\ k} \Im m\ \frac{\partial k}{\partial p_\nu} \tag{89}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial \Re e\ k}(n_1 + n_2 k)(n_1^* + n_2^* k^*)] \Re e\ \frac{\partial k}{\partial p_\nu} + [\frac{\partial}{\partial \Im m\ k}(n_1 + n_2 k)(n_1^* + n_2^* k^*)] \Im m\ \frac{\partial k}{\partial p_\nu} \tag{90}$$

$$= 2\,[\Re e\ (n_1 n_2^*) + |n_2|^2 \Re e\ k] \Re e\ (s^{\nu-1}) + 2\,[-\Im m\ (n_1 n_2^*) + |n_2|^2 \Im m\ k] \Im m\ (s^{\nu-1})\ . \tag{91}$$

An important result is the increase of plant uncertainty gained by applying gradient steps. The frequency-dependent and additive-type uncertainty $\mathbf{\Delta G}$ of the plant in its spectral norm $\|\mathbf{\Delta G}\|_s$ must not increase (see, e.g., *Weinmann, A., 1995, Gl. (19.63)*) the right-hand side of

$$\|\mathbf{\Delta G}\|_s < \frac{\sigma_{\min}[\mathbf{I} + \mathbf{KG}]}{\sigma_{\max}[\mathbf{K}]} \quad \forall\ \omega\ . \tag{92}$$

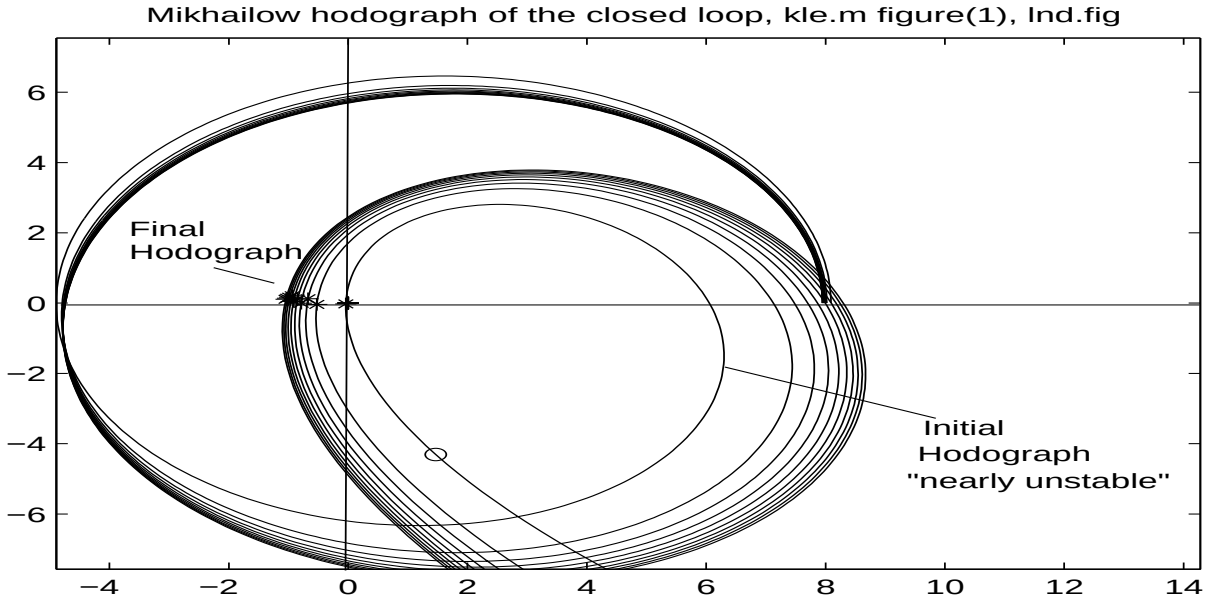


Figure 7: Mikhailov hodograph

For multiple-input multiple-output systems with dimensionality $m > 2$, the presented process would turn out too complicated in its analytic preparation. Therefore, an all-numerical procedure is suggested in *Weinmann, A., 2005c*.

Example 4. Matrix elements throughout of second order, two inputs und two outputs. The gradient-oriented modification of $\mathbf{K}$ is illustrated in Fig. 7. Eq.(92) is figured out in Fig. 8. The arrows indicate the gain in the admissible uncertainty as far as the minimum values with respect to ω are concerned.

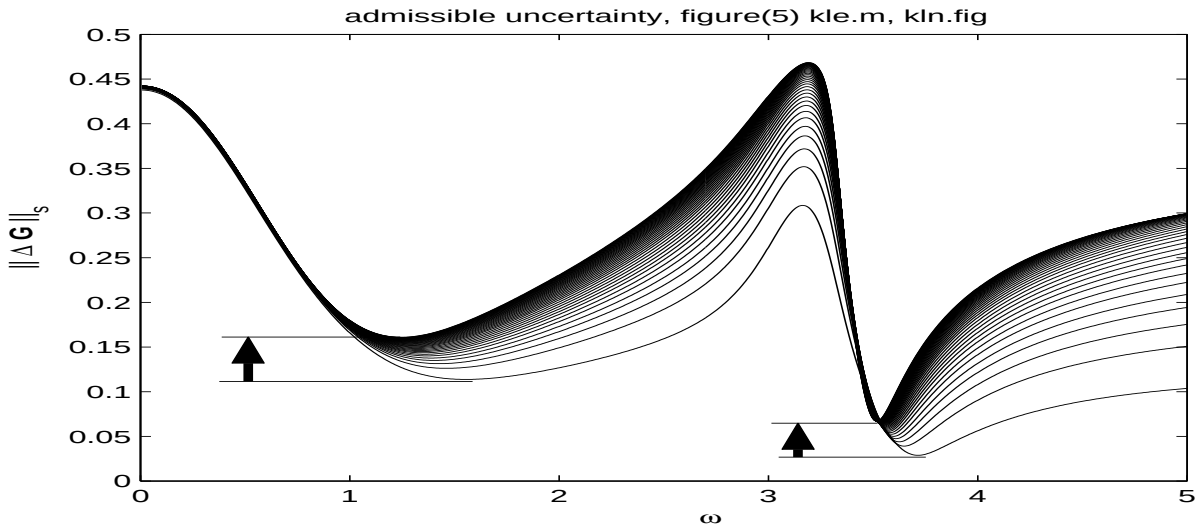


Figure 8: Upper bound for the frequency-dependent spectral norm $\|\Delta\mathbf{G}\|_s$ of the uncertainty of the plant

7 Stability Margin Gradients, Polynomial Matrices

7.1 Using Three-Dimensional Arrays

Consider a multiple-input multiple-output controller and plant given by polynomial matrices $\in \mathcal{C}^{n\times n}$

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{N}_K^{-1}(s)\mathbf{Z}_K(s)\ , \qquad \mathbf{G}(s) = \mathbf{Z}_G(s)\mathbf{N}_G^{-1}(s). \tag{93}$$

Then, the characteristic equation of the closed-loop system is

$$\det \mathbf{Q}(s) \stackrel{\triangle}{=} \det[\mathbf{Z}_K(s)\mathbf{Z}_G(s) + \mathbf{N}_K(s)\mathbf{N}_G(s)] = 0. \tag{94}$$

The Mikhailow hodograph results from the characteristic polynomial by replacing s by $j\omega$ and the results is (*Weinmann, A., 2006*)

$$\det[\mathbf{Z}_K(j\omega)\mathbf{Z}_G(j\omega) + \mathbf{N}_K(j\omega)\mathbf{N}_G(j\omega)] = \det \mathbf{Q}(j\omega)\ . \tag{95}$$

At the position (i, j), the polynomial is determined by the three-dimensional arrays

$$\begin{aligned} Z_K(i,j) &= \mathbf{s}^T\mathbf{P}_z\mathbf{P}_K(:,i,j) && (96)\\ N_K(i,j) &= \mathbf{s}^T\mathbf{P}_n\mathbf{P}_K(:,i,j) && (97)\\ Z_G(i,j) &= \mathbf{s}^T\mathbf{P}_z\mathbf{P}_G(:,i,j) && (98)\\ N_G(i,j) &= \mathbf{s}^T\mathbf{P}_n\mathbf{P}_G(:,i,j). && (99) \end{aligned}$$

The gradient result is

$$\frac{\partial(h_0^2)}{\partial p_{ijk}} = \frac{\partial|\det \mathbf{Q}|^2}{\partial p_{ijk}} = 2|\det \mathbf{Q}|^2 \qquad \Big[\Re e\,(\mathbf{Z}_G\mathbf{Q}^{-1})_{ji}\frac{\partial \Re e\, Z_K(i,j)}{\partial p_{ijk}} - \Im m\,(\mathbf{Z}_G\mathbf{Q}^{-1})_{ji}\frac{\partial \Im m\, Z_K(i,j)}{\partial p_{ijk}} + \Re e\,(\mathbf{N}_G\mathbf{Q}^{-1})_{ji}\frac{\partial \Re e\, N_K(i,j)}{\partial p_{ijk}} - \Im m\,(\mathbf{N}_G\mathbf{Q}^{-1})_{ji}\frac{\partial \Re e\, N_K(i,j)}{\partial p_{ijk}}\Big]. \tag{100}$$

(*Weinmann, A., 2006*).

7.2 Polynomial and Power-Oriented Matrices

Suppose now, the matrix $\mathbf{N}(s)$ is split into separate s-power-oriented coefficient matrices $\mathbf{N}_i$

$$\mathbf{N}(s) \stackrel{\triangle}{=} \sum_0^n \mathbf{N}_i s^i \ \in \mathcal{C}^{m\times m}. \tag{101}$$

Concatenating these coefficient matrices in a hyper parameter matrix $\mathbf{P}_N$

$$\mathbf{P}_N \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{N}_0 \vdots \mathbf{N}_1 \vdots \ldots \vdots \mathbf{N}_i \vdots \ldots \vdots \mathbf{N}_n) \in \mathcal{R}^{m\times m(n+1)}\ . \tag{102}$$

Consider the plant and controller are given by fractions of polynomial matrices $\mathbf{G}(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{Z}_G\mathbf{N}_G^{-1}$ and $\mathbf{K}(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K$, respectively; in this specific order. Moreover,

$$\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{N}_K\mathbf{N}_G, \quad \mathbf{Z} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G \tag{103}$$

$$\mathbf{N}_G \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}_{NG}\mathbf{S}_\sigma, \quad \mathbf{N}_K \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}_{NK}\mathbf{S}_\sigma, \quad \mathbf{Z}_G \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}_{ZG}\mathbf{S}_\sigma, \quad \mathbf{Z}_K \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}_{ZK}\mathbf{S}_\sigma \tag{104}$$

$$\mathbf{S}_\sigma \ \stackrel{\triangle}{=} \ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m s \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m s^i \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m s^n \end{pmatrix} \stackrel{(14)}{\equiv} \mathbf{s}\otimes\mathbf{I}_m \quad \in \mathcal{C}^{m(n+1)\times m}, \qquad \begin{matrix}\text{e.g., for}\\ m=3\\ n=2:\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \\ s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

where $\mathbf{P}_{ZK},\ \mathbf{P}_{NK},\ \mathbf{P}_{NG},\ \mathbf{P}_{ZG}\ \in \mathcal{R}^{m\times m(n+1)}$.

Then, the open-loop transfer function of the multivariable system is $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{Z}$. From the return difference $\mathbf{I}+\mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{I}+\mathbf{N}_K^{-1}\mathbf{Z}_K\mathbf{Z}_G\mathbf{N}_G^{-1}$, by pre- and postmultiplying there

results $\mathbf{N}+\mathbf{Z}$. Keeping plant and controller separated, the characteristic polynomial of the closed-loop system is

$$h(s)=\det[\mathbf{N}(s)+\mathbf{Z}(s)]=\det[\mathbf{N}_K(s)\mathbf{N}_G(s)+\mathbf{Z}_K(s)\mathbf{Z}_G(s)]\ . \tag{106}$$

From the frequency hodograph (Mikhailov hodograph) the stability margin is defined $h_0^2\stackrel{\triangle}{=}\min_\omega|h(j\omega)|^2$. Changing $h_0^2=|h(j\omega_0)|^2$ stepwise with respect to $\mathbf{P}_{ZK}$ and $\mathbf{P}_{NK}$, one finds (*Weinmann, A., 2007a*)

$$0.5\frac{\partial(h_0^2)}{\partial\binom{\mathbf{P}_{ZK}}{\mathbf{P}_{NK}}}=|\det(\mathbf{N}+\mathbf{Z})|^2\Re e\ [\mathbf{S}_\sigma(\mathbf{Z}_G\,\vdots\,\mathbf{N}_G)\ \mathrm{bd}\{(\mathbf{N}+\mathbf{Z})^{-1}\}]^T\ . \tag{107}$$

The operator "bd" terms $\mathrm{bd}(\mathbf{J})\stackrel{\triangle}{=}\begin{pmatrix}\mathbf{J}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{J}\end{pmatrix}$. The result can be subject to the condition $\|\Delta\mathbf{P}_K\|_F=n_{Ko}$.

8 Gradients of Square Performance Indices

8.1 Energy of the State Variable

Consider the weighted energy of the transient $\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}_{cl}t}\mathbf{x}_0$ in a closed-loop control system with $\mathbf{A}_{cl}=\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ where $\mathbf{A}\in\mathcal{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathcal{R}^{n\times m}$, $\mathbf{K}\in\mathcal{R}^{m\times n}$, and the index of performance I_x based on the state variable $\mathbf{x}(t)$

$$I_x=\int_0^\infty\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)dt=\int_0^\infty\mathbf{x}_0^Te^{\mathbf{A}_{cl}^Tt}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}_{cl}t}\mathbf{x}_0dt\stackrel{\triangle}{=}\mathbf{x}_0^T\mathbf{P}_Q\mathbf{x}_0\ , \tag{108}$$

where $\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}_Q+\mathbf{P}_Q\mathbf{A}_{cl}=-\mathbf{Q}\in\mathcal{R}^{n\times n}$ and $\mathbf{P}_Q$ is symmetric (e.g., *Weinmann, A., 1995*). The integral

$$\mathbf{P}_Q=\int_0^\infty e^{\mathbf{A}_{cl}^Tt}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}_{cl}t}dt\in\mathcal{R}^{n\times n} \tag{109}$$

cannot be utilized for $\frac{\partial\mathbf{P}_Q}{\partial\mathbf{K}}$ or $\frac{\partial I_x}{\partial\mathbf{K}}$ because $e^{\mathbf{A}+\mathbf{BK}}\ \neq\ e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{BK}}$, even for matrices small in norm sense. However, resolving

$$\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}_Q+\mathbf{P}_Q\mathbf{A}_{cl}+\mathbf{Q}=\mathbf{0} \tag{110}$$

with respect to $\mathbf{P}_Q$, its derivation with respect to $\mathbf{K}$ can be obtained employing the first-order Taylor expansion

$$(\mathbf{A}_{cl}^T+\Delta\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T)(\mathbf{P}_Q+\Delta\mathbf{P}_Q)+(\mathbf{P}_Q+\Delta\mathbf{P}_Q)(\mathbf{A}_{cl}+\mathbf{B}\Delta\mathbf{K})+\mathbf{Q}=\mathbf{0}\ . \tag{111}$$

With the abbreviations

$$\mathbf{E}_a\ \stackrel{\triangle}{=}\ (\mathbf{A}^T\oplus\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{A}^T+\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{I}_n)^{-1}\in\mathcal{R}^{n^2\times n^2} \tag{112}$$

$$\mathbf{Z}_0 \triangleq (\mathbf{P}_Q\mathbf{B}) \otimes \mathbf{I}_n + [\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{P}_Q\mathbf{B})]\mathbf{U}_{nm} \in \mathcal{R}^{n^2 \times mn} , \tag{113}$$

one finds the derivative

$$\frac{\partial I_x}{\partial \mathbf{K}} = -\{\mathbf{I}_m \otimes [(\mathbf{x}_0^T \otimes \mathbf{x}_0^T)\ \mathbf{E}_a\mathbf{Z}_0]\}[(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n] . \tag{114}$$

8.2 Time-Weighted Energy of the State Variable

Now, based on Lyapunov equations, the sensitivity of time-weighted and time-to-powers-weighted energy associated with the state variable is derived for an arbitrary power i

$$\mathbf{P}_{Qi} \triangleq \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\ \ t^i\ \ dt \qquad I_{xi} = \mathbf{x}_o^T\mathbf{P}_{Qi}\mathbf{x}_o , \tag{115}$$

$$\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}_{Qi} + \mathbf{P}_{Qi}\mathbf{A}_{cl} + i\ \mathbf{P}_{Q,i-1} = \mathbf{0} , \tag{116}$$

where $\mathbf{P}_{Qo} = \mathbf{P}_Q$. Defining new matrices $\mathbf{S}_i \in \mathcal{R}^{n^2 \times mn}$ there is a recursion

$$\mathbf{S}_i = -\mathbf{E}_a\mathbf{Z}_i - i\ \mathbf{E}_a\mathbf{S}_{i-1} . \tag{117}$$

The matricial gradient results as

$$\frac{\partial I_{xi}}{\partial \mathbf{K}} = \left\{\mathbf{I}_m \otimes [(\mathbf{x}_0^T \otimes \mathbf{x}_0^T)\mathbf{S}_i]\right\}[(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_n] . \tag{118}$$

8.3 Actuating Energy

From *Weinmann, A., 2003*

$$I_u \triangleq \int_0^\infty \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C}\mathbf{x}(t)dt \tag{119}$$

$$= \mathbf{x}_0^T \int_0^\infty e^{\mathbf{A}_{cl}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C}e^{\mathbf{A}_{cl}t}dt\ \mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}_0^T\mathbf{P}_{Ry}\mathbf{x}_0 , \tag{120}$$

where

$$\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}_{Ry} + \mathbf{P}_{Ry}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R}\mathbf{K}_y\mathbf{C} = \mathbf{0} . \tag{121}$$

Defining

$$\mathbf{E}_1 \triangleq (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl}^T + \mathbf{A}_{cl}^T \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2} \tag{122}$$

$$\mathbf{E}_2 \triangleq \mathbf{P}_{Ry}\mathbf{B} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_y^T\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times m} \tag{123}$$

$$\frac{\partial I_u}{\partial \mathbf{K}_y} = -\{\mathbf{I}_m \otimes [(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0)^T\ \mathbf{E}_1(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{C}^T)]\}[(\text{col}\mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r] \tag{124}$$

$$= -\mathbf{E}_2^T\{\text{loc}_n[\text{col}\,\mathbf{X} + \mathbf{U}_{nn}\text{col}\,\mathbf{X}]\}^T\mathbf{C}^T = -2\mathbf{E}_2^T\mathbf{X}\mathbf{C}^T , \tag{125}$$

where

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathtt{lyap}(\mathtt{Acl}, \mathtt{Acl}', -\mathtt{x0} * \mathtt{x0}') \tag{126}$$

$$\mathbf{A}_{cl}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{cl}^T = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T \tag{127}$$

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl} \otimes \mathbf{I}_n)\mathrm{col}\,\mathbf{X} = \mathrm{col}(\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T) \tag{128}$$

$$\mathrm{col}\,\mathbf{X} = (\mathbf{A}_{cl} \oplus \mathbf{A}_{cl})^{-1}(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0) = \mathbf{E}_1^T(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0)\ . \tag{129}$$

9 Per-Unit Square Index of Performance

Find the maximum of a per-unit energy expression versus $\mathbf{x}$, i.e.,

$$I_{pu} \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\ . \tag{130}$$

Comparison of Eq. 130 with the definition Eq.(131) of the singular value

$$\sigma_{\max}[\mathbf{M}] = \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{M}\mathbf{x}\|_F}{\|\mathbf{x}\|_F} = \sup_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}} \tag{131}$$

yields the correspondences by employing $\mathbf{R} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} \in \mathcal{R}^{n\times n}$

$$\sup_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sigma_{\max}^2[\mathbf{M}] = \sigma_{\max}^2[\sqrt{\mathbf{R}}]\ . \tag{132}$$

The worst initial condition $\mathbf{x}_0$, which yields the maximum per-unit index of performance I_{pu} , results from

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \mathbf{0} \tag{133}$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\mathbf{x} \tag{134}$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{x} = \sigma_{\max}^2[\mathbf{M}] \cdot \mathbf{x}\ . \tag{135}$$

The last but one line equals the correspondence of eigenvalues and eigenvectors, i.e., in specific detail, $\mathbf{A}\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}$,

$$(\mathbf{M}^T\mathbf{M}) \cdot \mathrm{eigv}[\mathbf{M}^T\mathbf{M}] = \mathrm{eig}_{\max}[\mathbf{M}^T\mathbf{M}] \cdot \mathrm{eigv}[\mathbf{M}^T\mathbf{M}] = \sigma_{\max}^2[\mathbf{M}] \cdot \mathrm{eigv}[\mathbf{M}^T\mathbf{M}]\ . \tag{136}$$

The largest eigenvalue is selected in order to find the largest I_{pu} . The largest eigenvalue of $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ is the squared singular value $\sigma_{\max}[\mathbf{M}]$. The worst vector $\mathbf{x}$ is $\mathbf{x}_0 = \mathrm{eigv}[\mathbf{R}]$ and has the manifold of the eigenvector. Only the direction is determined, not the length.

Referring to Eq.(132) and Eq.(120) (*Weinmann, A., 2003; 2004a*), an upper bound for the maximum per-unit energy of the actuating variable is

$$I_{um} = \sigma_{\max}^2[\sqrt{\mathbf{P}_{Ry}}] \le \|\sqrt{\mathbf{P}_{Ry}}\|_F^2 = \mathrm{tr}[(\sqrt{\mathbf{P}_{Ry}})^T(\sqrt{\mathbf{P}_{Ry}})] = \mathrm{tr}[\mathbf{P}_{Ry}]\ . \tag{137}$$

The worst initial condition is $\mathbf{x}_0 = \mathrm{eigv}[\mathbf{P}_{Ry}]$.

10 Interaction Energy Gradient, Continuous Time

For a closed-loop system with output controller $\mathbf{K}_y$ and prefilter $\mathbf{V}_F$, one has

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}_F\mathbf{y}_{ref}(s) \ . \tag{138}$$

From the input $y_{ref,k}$ to the output $y_i(s)$, the impulse response is

$$y_i(s) = \mathbf{c}_i^T(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{w}_k \ , \tag{139}$$

where $\mathbf{w}_k$ is the corresponding column of $\mathbf{W} \triangleq \mathbf{B}\mathbf{V}_F$.

The controllability Gramian $\mathbf{L}_{ck}$ for the single input via $\mathbf{b}_k$ results from

$$\mathbf{A}\mathbf{L}_{ck} + \mathbf{L}_{ck}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}_k\mathbf{b}_k^T = \mathbf{0} \ . \tag{140}$$

In the Lyapunov Eq.(140), $\mathbf{A}$ has to be replaced by $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}$ and $\mathbf{b}_k$ by $\mathbf{w}_k$.

To design a system with low interaction, the output y_i should be influenced as low as possible by $y_{ref,k}$ for $k \neq i$. Hence, for unequally enumerated reference and output signals the entire energy associated with the interaction should obey to

$$\sum_{i=1,\ k=1;\ i\neq k}^{r} \mathbf{c}_i^T\mathbf{L}_{ck}\mathbf{c}_i \ \ \rightarrow \ \min_{\mathbf{K}_y} \ . \tag{141}$$

The controller $\mathbf{K}_y$ is used to drive the system to a low interaction level.

Investigating the increments $\Delta\mathbf{L}_{ck}$ caused by $\Delta\mathbf{K}_y$ (*Weinmann, A., 2005b*), referring to the Lyapunov equation Eq.(140), abbreviating

$$\mathbf{E}_1 \triangleq (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl} \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} \ \in \mathcal{R}^{n^2\times n^2} \tag{142}$$

and $\mathbf{X}_1$ from $\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i^T$, one has finally

$$\frac{\partial I_{G,ik}}{\partial \mathbf{K}_y} = -\{\mathrm{loc}_r[\mathbf{B}^T \otimes (\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})]\ 2\ \mathrm{col}\,\mathbf{X}_1\}^T = -2\mathbf{B}^T\mathbf{X}_1\mathbf{L}_{ck}\mathbf{C}^T \ . \tag{143}$$

Including spherical uncertainties, the Kronecker sum with identical operands $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ surfaces very often and hence is abbreviated

$$\check{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{A} \oplus \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n^2\times n^2} \ . \tag{144}$$

Now presuppose the following differential quotients by utilizing the permutation matrix $\mathbf{U}_{kl}$ and the self-derivative matrix $\bar{\mathbf{U}}_{kl}$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{A}}}{\partial A_{ij}} \overset{(144)}{=} \frac{\partial(\mathbf{A}\oplus\mathbf{A})}{\partial A_{ij}} \overset{(144)}{=} \frac{\partial(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n\otimes\mathbf{A})}{\partial A_{ij}} \triangleq \check{\mathbf{E}}_{ij} \tag{145}$$

$$\mathbf{U}_{eye} \triangleq \frac{\partial \check{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \bar{\mathbf{U}}_{nn} \otimes \mathbf{I}_n + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{U}_{nn})(\bar{\mathbf{U}}_{nn} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{U}_{nn}) \quad \in \mathcal{R}^{n^3\times n^3} \tag{146}$$

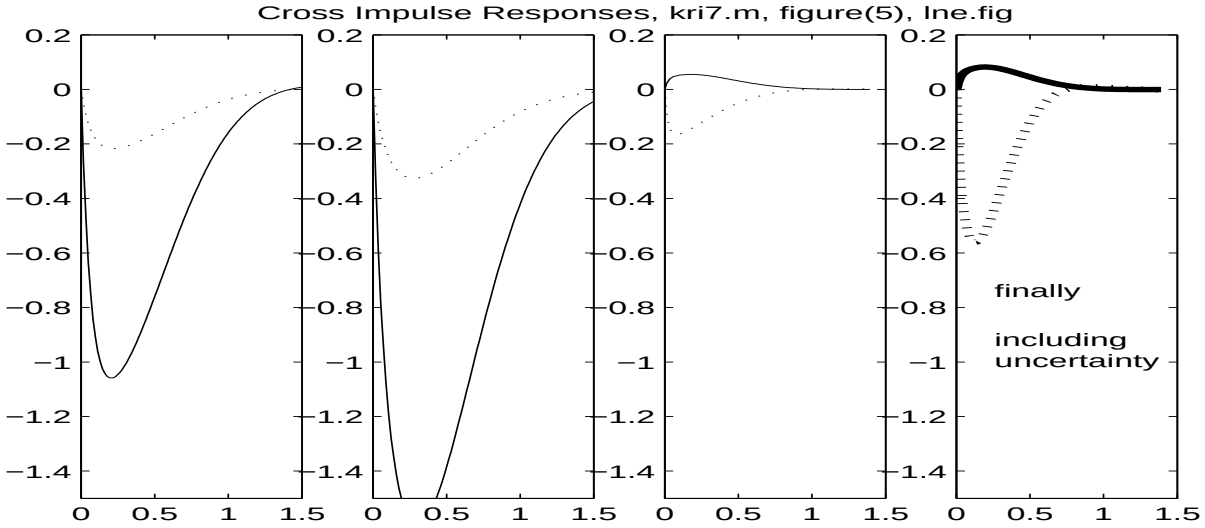


Figure 9: Initial and final cross impulse responses, nominally and with uncertainty

$$\frac{\partial I_{Glk}}{\partial \Delta \mathbf{A}} = -\{\mathbf{I}_n \otimes [(\mathbf{c}_l \otimes \mathbf{c}_l)^T \check{\mathbf{A}}_{cl}^{-1}]\}\ \mathbf{U}_{eye}\ (\mathbf{I}_n \otimes \mathrm{col}\mathbf{L}_{c,k})\ . \tag{147}$$

For discrete-time systems, similar derivations can be obtained (*Weinmann, A., 2007*).

Example 5. For a tenth-order system one finds the results of Fig. 9. Subplot 1 and 2 show the cross impulse responses without and with worst-case uncertainty; subplot 3 and 4 accordingly after having applied several gradient steps.

11 Conclusion

The paper presents a straightforward method combining the gradients of indices of performance and the influence of uncertainties. The resulting formulas are rather complicated. However, by computer assistance they can be resolved conveniently. Transfer functions, state space and polynomial matrices have been taken into consideration. Polynomial matrices with special s-power-orientation turn out advantageous. Stability margin increase and robustification lead to a common considertation. The methods presented are well suited from the viewpoint of practitioners. Five examples were given in order to illustrate the result numerically and assisted by figures.

References

Brewer, J.W., 1978, Kronecker products and matrix calculus in system theory, *IEEE-Trans.* **CAS-25**, pp. 772-781

Doyle, J.C., Glover, K., Zhou, K.,1996, Robust and Optimal Control (Englewood Cliffs, Prentice Hall)

Vetter, W.J., Balchen, J.G., and Pohner, F., 1972, Near-optimal control of parameter-dependent linear plants, *Int.J.Control* **15**, pp. 683-691

Weinmann, A., 1991, Uncertain Models and Robust Control (Vienna and NewYork: Springer)

Weinmann, A., 2001a, Control system design based on holistic eigenvalue allocation, e&i *Elektrotechnik und Informationstechnik* **118**, H. 4, S. 167-173

Weinmann, A., 2001b, Gradients of norms, traces and determinants for automatic control applications, *Int. J. Automation Austria* **9**, H.1/2, pp. 36-50

Weinmann, A., 2003, Control systems design driven by worst-initial energy sensitivity, *Cybernetics and Systems: An International Journal (Taylor and Francis)* **34**, No.8, pp. 591-615

Weinmann, A., 2004a, Robust worst-case initialization for norm-limited output state controllers in embedded systems, *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* **121**, pp. 282-285

Weinmann, A., 2005, Holistic criteria for incrementally designed controller, *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* **122**, No. 10, pp. 361-368

Weinmann, A., 2005a, A dialog-oriented and gradient-based stability margin in uncertain systems, *Cybernetics and Systems: An International Journal (Taylor and Francis)* **36**, pp.641-666

Weinmann, A., 2005b, Gradients for decoupling continuous-time control systems using the controllability Gramian, *Tagungsband des 14. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung in Retzhof, 21. Sept. 2005*, S. 99-116

Weinmann, A., 2005c, Stability margin gradients and robustification of control systems based on transfer matrices *Int. J. Automation Austria* **13**, pp. 37-49

Weinmann, A., 2006, Stability margin gradients using the polynomial matrix representation *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* **123**, H.5, S. 197-201

Weinmann, A., 2006a, Attenuating the interaction via discrete-time controllability Gramian, *Int. J. Automation Austria* **14**, pp. 13-30

Weinmann, A., 2006b, Robustness gradients for discrete-time control systems, *Cybernetics and Systems: An International Journal* **37**, Number 4, pp. 283-292

Weinmann, A., 2006c, Stability margin and spherical uncertainty, *Cybernetics and Systems: An International Journal (Taylor and Francis)* **37**, Number 7, pp. 685-705

Weinmann, A., 2007, Robustness and dynamic interaction, *Cybernetics and Systems: An International Journal (Taylor and Francis)* **38**, No 3, pp. 229-248

Weinmann, A., 2007a, Duality-based robust polynomial matrix controller, *e & i (Elektrotechnik und Informationstechnik)* , submitted

Weinmann, A., 2007b, The encirclements of the hodograph of perturbed high-order dynamic systems, *Int. J. Automation Austria*, submitted

Weinmann, A., 2007c, Robust stability radius gradient. A duality approach for high-order systems, *Int. J. Automation Austria* , submitted

Weinmann, A., 200?, Robust improvement of the phase and gain margin and crossover frequency, submitted

Die Konstruktion flacher Ausgänge durch sukzessive Elimination und Reduktion

Kurt Schlacher, Markus Schöberl
Johannes Kepler Universität Linz, Österreich
kurt.schlacher@jku.at*, markus.schoeberl@jku.at

Zusammenfassung

Die Konstruktion von flachen Ausgängen zu allgemeinen konzentriertparametrischen Systemen ist noch immer ein offenes Problem. Mit Hilfe eines algorithmischen Verfahrens, es basiert auf sukzessiver Reduktion der Anzahl der Variablen sowie auf der Elimination von Variablen, lassen sich nun solche Ausgänge systematisch konstruieren, wobei im Allgemeinen eine dynamische Erweiterung des Systems erforderlich ist. Die geometrische Interpretation dieser Eigenschaft ist, dass gewisse Vektorfelder auf einer erweiterten Mannigfaltigkeit projizierbar werden.

1 Einleitung

Seit seiner Einführung vor ungefähr fünfzehn Jahren hat sich das Konzept der Flachheit, siehe z.B. [3] und die dortigen Zitate, beim Regler- und Steuerungsentwurf für konzentriertparametrische Systeme sehr bewährt. Obwohl es nun sehr viele Ergebnisse zur Konstruktion flacher Ausgänge gibt, ist das allgemeine Problem noch offen. Dieser Beitrag ist nun eine Kurzfassung eines Aufsatzes [8], in dem ein Verfahren zur Konstruktion von flachen Ausgängen vorgeschlagen wird, dass auf einer sukzessiven Vereinfachung der betrachteten Systeme beruht, bis schlussendlich einfach festgestellt werden kann, ob das System flache Ausgänge zulässt oder nicht. Im Falle von Eingangs/Zustands linearisierbaren Systemen, siehe [5], [7] führt das Verfahren auf die bekannten Ergebnisse, genauso wie für Eingrößensysteme, siehe [1], bei denen Flachheit äquivalent zur Eingangs/Zustands-Linearisierbarkeit ist, oder auf die Bedingungen von [6] für AI-Systeme n-ter Ordnung mit $n-1$ Eingängen.

Der vorgeschlagene Algorithmus beruht auf der sukzessiven Verringerung der Anzahl von Variablen und der Elimination von Variablen so, dass implizite Systeme in natürlicher Weise auftreten. Daher werden mathematische Eigenschaften impliziter dynamischer Systeme ebenso benötigt, wie einige Ergebnisse der Eliminationstheorie. Daher wird in diesem Beitrag die Sprache der Differentialgeometrie, insbesondere die der Jet-Bündel, ebenso verwendet wie die übliche Tensornotation, siehe z.B. [4].

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

2 Motivation

Die einfache Idee des später entwickelten Algorithmus lässt sich schon an Hand des linearen Systems

$$M_\alpha^i z_t^\alpha = N_\alpha^i z^\alpha,\ i = 1, \ldots, n_e,\ \alpha = 1, \ldots, n_z \tag{1}$$

mit $M_\alpha^i, N_\alpha^i \in \mathbb{R}$ und den Koordinaten (z^α, z_t^α) mit $\dim(z) = n_z$ zeigen. Koordinaten von Ableitungsvariablen werden mit z_t^α bezeichnet, um konsistent mit dem nichtlinearen Fall zu sein. Es habe $[M_\alpha^i]$ maximalen Rang mit $n_e < n_z$. Im Reduktionsschritt wird nun die Anzahl der Ableitungsvariablen in (1) minimiert. Mit Hilfe der Lösung der Gleichung

$$M_\alpha^i V_{\bar\tau}^\alpha = 0$$

für $\bar\tau = 1, \ldots, n_{\bar u} = \dim(\ker(M))$ und der Transformation auf die Koordinaten $\bar z^{\bar\alpha}$, $\bar\alpha = 1, \ldots, n_{\bar z} = n_z - n_{\bar u}$ mittels

$$z^\alpha = W_{\bar\alpha}^\alpha \bar z^{\bar\alpha} + V_{\bar\tau}^\alpha \bar u^{\bar\tau}$$

erhält man die Gleichungen

$$\tilde M_{\bar\alpha}^i \bar z_t^{\bar\alpha} \;=\; \tilde N_{\bar\alpha}^i \bar z^{\bar\alpha} + \tilde B_{\bar\tau}^i \bar u^{\bar\tau} \tag{2}$$

mit $\tilde M_{\bar\alpha}^i = M_\alpha^i W_{\bar\alpha}^\alpha$, $\tilde N_{\bar\alpha}^i = N_\alpha^i W_{\bar\alpha}^\alpha$, $\tilde B_{\bar\tau}^i = N_\alpha^i V_{\bar\tau}^\alpha$. Im nächsten Schritt, dem Eliminationsschritt, werden die Variablen $\bar u^{\bar\tau}$ von den Gleichungen eliminiert. Nun existieren Matrizen $\left[S_i^{\bar i}\right]$, $\left[T_i^{\bar j}\right]$, $\left[\overline{\bar B}_{\bar\tau}^{\bar j}\right]$ mit maximalem Rang

$$\begin{aligned} S_i^{\bar i} \tilde B_{\bar\tau}^i &= 0\,, \quad \bar i = 1, \ldots, n_e - n_u \\ T_i^{\bar j} \tilde B_{\bar\tau}^i &= \overline{\bar B}_{\bar\tau}^{\bar j}\,, \quad \bar j = 1, \ldots, n_u \end{aligned}$$

mit $n_u = \dim\left(\mathrm{im}\left(\left[\tilde B_{\bar\tau}^i\right]\right)\right)$, und man erhält das System

$$\bar M_{\bar\alpha}^{\bar i} \bar z_t^{\bar\alpha} \;=\; \bar N_{\bar\alpha}^{\bar i} \bar z^{\bar\alpha} \tag{3}$$

$$\overline{\bar M}_{\bar\alpha}^{\bar j} \bar z_t^{\bar\alpha} \;=\; \overline{\bar N}_{\bar\alpha}^{\bar j} \bar z^{\bar\alpha} + \overline{\bar B}_{\bar\tau}^{\bar j} \bar u^{\bar\tau} \tag{4}$$

mit $\bar M_{\bar\alpha}^{\bar i} = S_i^{\bar i} \tilde M_{\bar\alpha}^i$, $\bar N_{\bar\alpha}^{\bar i} = S_i^{\bar i} \tilde N_{\bar\alpha}^i$, $\overline{\bar M}_{\bar\alpha}^{\bar j} = T_i^{\bar j} \tilde M_{\bar\alpha}^i$, $\overline{\bar N}_{\bar\alpha}^{\bar j} = T_i^{\bar j} \tilde N_{\bar\alpha}^i$.

Analysiert man obige Vorgehensweise, dann sind zwei Fakten besonders auffallend. Wendet man das Verfahren auf das System (3) nochmals an, dann erhält man eine weitere Vereinfachung. Kennt man eine Lösung des Systems (3), dann kann man eine Lösung von (4) ganz einfach bestimmen. Gilt $n_u = n_{\bar u}$, dann sind die Werte von $\bar u^{\bar\tau}$ eindeutig bestimmt, andernfalls liegen sie in einem $(n_u - n_{\bar u})$-dimensionalen linearen Unterraum.

Offensichtlich erlaubt die obige Vorgehensweise die Bestimmung des flachen Ausgangs zu (1), falls er existiert. Im Folgenden wird nun dieses Verfahren auf implizite Systeme der Art

$$f^i(t, z, z_t) = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n_e$$

mit $z = (z^\alpha),\ \alpha = 1, \ldots, n_z$ übertragen.

3 Der Algorithmus

Betrachtet wird ein implizites System

$$f^i\left(t,z,z_t\right)=0\ ,\ i=1,\ldots,n_e \tag{5}$$

definiert auf einem Bündel $\mathcal{E}\overset{\pi}{\rightarrow}\mathcal{B}$ mit eindimensionaler Basis $\mathcal{B}$ mit Koordinate (t) und totaler Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}$ mit den Koordinaten (t,z^α), $\alpha=1,\ldots,n_z>n_e$ und Projektion π. Es bezeichne $J_0^1\left(\mathcal{E}\right)$ das erste Jetbündel von $\mathcal{E}$, dann soll (5) eine reguläre gefaserte Untermannigfaltigkeit von $J_0^1\left(\mathcal{E}\right)$ beschreiben. Für das weitere ist nun die spezielle Form

$$\tilde{f}^i\left(t,\bar{z},\bar{u},\bar{z}_t\right)=0\ ,\ i=1,\ldots,n_e \tag{6}$$

mit $(\bar{z}^{\bar{\alpha}})$, $\bar{\alpha}=1,\ldots,n_{\bar{z}}$, $(\bar{u}^{\bar{\tau}})$, $\bar{\tau}=1,\ldots,n_{\bar{u}}$, $n_{\bar{z}}+n_{\bar{u}}=n_z$ von Interesse. Die Bedingungen unter denen man nun (6) in die Form

$$\begin{aligned}\bar{\bar{f}}^{\bar{i}}\left(t,\bar{z},\bar{z}_t\right) &= 0\ ,\ \bar{i}=1,\ldots,n_e-n_u &(7)\\ \bar{\bar{f}}^{\bar{j}}\left(t,\bar{z},\bar{u},\bar{z}_t\right) &= 0\ ,\ \bar{j}=1,\ldots,n_u &(8)\end{aligned}$$

überführen kann, findet man in [8]. Man beachte wieder, dass zu einer Lösung von (7) die Werte von $\bar{u}^{\bar{\tau}}\left(t\right)$ direkt aus (8) im Falle $n_e=n_{\bar{u}}$ folgen, bzw. sie sonst in einer $(n_e-n_{\bar{u}})$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit liegen. Offensichtlich ist dies genau der Eliminationsschritt, wie er im linearen Fall bereits vorgestellt worden ist.

Beim Reduktionsschritt sucht man nun eine geeignete Transformation $(t,z)=\phi\left(\bar{t},\bar{z},\bar{u}\right)$, die das System (5) in die Form (6) überführt. Wir beschränken uns auf den speziellen Typ

$$\begin{aligned}t &= \bar{t}\\ z^{\alpha_z} &= \phi^{\alpha_z}\left(t,\bar{z}^{\bar{\alpha}},\bar{u}^{\bar{\tau}}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

und erhalten die Beziehungen

$$z_t^{\alpha_z} = \partial_t\phi^{\alpha_z}+\partial_{\bar{\alpha}}\phi^{\alpha_z}\bar{z}_t^{\bar{\alpha}}+\partial_{\bar{\tau}}\phi^{\alpha_z}\bar{u}_t^{\bar{\tau}}$$

für ihre Prolongation $(t,z,z_t)=j\left(\phi\right)\left(\bar{t},\bar{z},\bar{u},\bar{z}_{\bar{t}},\bar{u}_{\bar{t}}\right)$. Wieder findet man in [8] die Bedingungen für die Existenz von ϕ.

Auf den ersten Blick scheint mit diesem Verfahren die Übertragung des Algorithmus vom linearen auf den nichtlinearen Fall gelungen zu sein. Allerdings erkennt man schnell, dass die Bedingungen für die Existenz von ϕ so einschränkend sind, dass man mit diesem Verfahren nichts gegenüber der Eingangs/Zustands-Linearisierung gewinnt. Bei genauerem Hinsehen erkennt man allerdings, dass man aus diesen Bedingungen eine dynamische Erweiterung des Systems (5) der Art

$$\begin{aligned}f^i\left(t,z,z_t\right) &= 0\ ,\ i=1,\ldots,n_e &(10)\\ g^j\left(t,z,z_t\right) &= p^j\ ,\ j=1,\ldots,n_p &(11)\end{aligned}$$

mit den zusätzlichen Gleichungen (11) in den zusätzlichen Variablen (p^j) konstruieren kann, wobei nur der Fall $n_z>n_e+n_p$ von Interesse ist. Für das erweiterte System

(10,11) existiert dann nun eine Transformation (9) so, dass das transformierte System die Form

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i\left(t,\bar{z},\bar{u},p,\bar{z}_t\right) &= 0\ ,\ i=1,\ldots,n_e \qquad (12)\\ \tilde{g}^j\left(t,\bar{z},\bar{u},p,\bar{z}_t\right) &= p^j\ ,\ j=1,\ldots,n_p \qquad (13)\end{aligned}$$

besitzt. Offensichtlich kann man von den Gleichungen (12,13) die Variablen $p,\overline{u}$ wieder eliminieren. Die genauen Details dazu entnehme man [8].

4 Ein Beispiel

Man betrachte das System, siehe [2],

$$\begin{aligned} x_t^1-u^1 &= 0\\ x_t^2-u^2 &= 0\\ x_t^3-\sin\left(\frac{u^1}{u^2}\right) &= 0\end{aligned}$$

für $i=1,2,3$. Die Elimination der Variablen u^1, u^2 führt auf das implizite System

$$\bar{f}=z_t^3-\sin\left(\frac{z_t^1}{z_t^2}\right)=0\ ,$$

mit $z^\alpha=x^\alpha$, $\alpha=1,2,3$. Wendet man nun das in [8] beschriebene Verfahren an, es erfordert im Allgemeinen die Lösung nichtlinearer Gleichungen sowie die Integration von Distributionen, dann erhält man die dynamische Erweiterung

$$\ln\left(\frac{z_t^1}{z_t^2}\right)=p=\ln\left(q\right)\ ,$$

siehe dazu (11). Das erweiterte System (10,11) hat nun die Form

$$\begin{aligned} z_t^3-\sin\left(q\right) &= 0\\ \frac{z_t^1}{z_t^2}-q &= 0\ ,\end{aligned}$$

wobei die Bedingungen für die Existenz einer Transformation (9) erfüllt sind. Eine Möglichkeit ist

$$\begin{aligned} z^1 &= \bar{u}\bar{q}\\ z^2 &= \bar{u}+\bar{z}^2\\ z^3 &= \bar{z}^3\\ q &= \bar{q}\ ,\end{aligned}$$

und aus

$$\overline{z}_t^2=z_t^2-\bar{u}_t=\frac{z_t^1}{q}-\bar{u}_t=\frac{\bar{u}_t q+\bar{u}q_t}{q}-\bar{u}_t=\frac{\bar{u}q_t}{q}$$

erhält man das transformierte System

$$\begin{aligned} \overline{z}_t^2 &= \frac{\bar{u}\bar{q}_t}{\bar{q}} \\ \bar{z}_t^3 &= \sin(\bar{q}) \, . \end{aligned}$$

Nun sieht man sofort, dass $\overline{z}^3$, $\overline{z}^2$ flache Ausgänge sind, denn sie bestimmen $\bar{q}, \bar{u}$ und in Folge dann z^1, z^2, z^3. Die flachen Ausgänge h_1, h_2 des ursprünglichen Systems ergeben sich als $h^1 = z^3$, und aus

$$\overline{z}^2 = z^2 - \bar{u} = z^2 - z^1 \frac{1}{q} = z^2 - z^1 \frac{z_t^2}{z_t^1}$$

folgt noch

$$h^2 = z^2 - z^1 \frac{u^2}{u^1} \, .$$

5 Schlussbemerkungen

Die vorgeschlagene Konstruktion flacher Ausgänge basiert auf einer stufenweisen Vereinfachung impliziter Systeme, wobei zwei Schritte wesentlich sind, die Reduktion der Anzahl der Ableitungsvariablen, sowie die Elimination von Variablen, deren zugehörige Ableitungsvariablen nicht in den Gleichungen vorkommen. Die exakte Herleitung und Beschreibung der einzelnen Schritte findet man in [8]. Die Effizienz des Verfahrens wurde an Hand eines einfachen Beispiels gezeigt. Ein komplexes Beispiel, das VTOL, findet man unter der Adresse http://regpro.mechatronik.uni-linz.ac.at/about/staff/Schoeberl/.

Literatur

[1] B. Charlet and J. Levine. On dynamic feedback linearization. *System and Control Letters 13*, pages 143–151, 1989.

[2] V.N. Chetverikov. Flatness conditions for control systems. *Preprint DIPS-01,* http : //diffiety.ac.ru, 2002.

[3] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *Int. Journal of Control*, 61:1327–1361, 1995.

[4] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily. *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory.* World Scientific, Singapore, 1997.

[5] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer, London, 1995.

[6] Ph. Martin. A geometric sufficient condition for flatness of systems with m inputs and $m + 1$ states. *Proc. of the* 32nd *IEEE Conf. on CDC*, pages 3431–3436, 1993.

[7] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.

[8] K. Schlacher and M. Schöberl. Construction of flat outputs by reduction and elimination. *Handouts of the* 7^{th}*-IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Pretoria, South Afrika*, 2007.

Entwicklung eines humanoiden Roboters (HWM)

Wolfgang Werth
Fachhochschule Kärnten,
Europastrasse 4, A-9524 Villach
w.werth@fh-kaernten.at

Kurzfassung

Die Konstruktion von humanoiden, also menschenähnlichen Robotern stellt seit langem eine große Herausforderung für viele Ingenieure dar. Dies liegt zum einen in der hohen Komplexität eines derartigen technischen Systems. Andererseits erfordert der Nachbau des menschlichen Ganges das Zusammenspiel und Lösen vieler unterschiedlicher Teilaufgaben.

Im Rahmen einer studentischen Projektarbeit wurde der Prototyp eines gehenden Robotors, der so genannten Humanoid Walking Machine (HWM), in der sehr kurzen Entwicklungszeit von einem Jahr realisiert. Der Roboter verfügt über 12 Motoren, zahlreiche Sensoren, eine zentrale Steuerungseinheit und eine Bilderverarbeitungseinheit, um Hindernisse zu erkennen. Damit ist er in der Lage auf dem Stand zu balancieren oder etwa einen Ball zu erkennen und zu kicken.

In diesem Aufsatz wird nun der Entwicklungsprozess des Roboters detailliert beschrieben.

1 Einleitung

In den verschiedensten technischen Bereichen übernehmen Maschinen seit vielen Jahren für den Menschen unangenehme oder gefährliche Tätigkeiten. Dies sind meistens ortsfeste oder gegebenenfalls fahrende Roboter. So ist es natürlich auch naheliegend, dass Ingenieure seit einiger Zeit versuchen, einem Roboter die menschliche Fortbewegungsart - das Gehen oder Laufen - beizubringen. Andererseits ist es eine menschliche Eigenschaft schwierige technische Herausforderungen dann anzunehmen und mit Bravur zu meistern, wenn damit seine spielerische Natur gefordert wird. Vermutlich aus diesen Gründen haben sich verspielte Ingenieure aus vielen Ländern das Ziel gesetzt, im Jahre 2050 den amtierenden Weltmeister des Fußballs mit einer Mannschaft aus humanioden Robotern zu schlagen. Die Fortschritte dazu gibt es bei der jährlich stattfindenden Weltmeisterschaft der Roboter, dem RoboCup, zu sehen.

So hat sich auch eine Gruppe von sieben Studierenden der Fachrichtung Elektronik der FH Kärnten für diese Idee interessiert und die Herausforderung angenommen, einen hunanoiden Roboter im Rahmen des so genannten Projektjahres zu entwickeln. Die anfänglich optionale Idee, dem Roboter auch die ersten Schritte des Fußballspielens

beizubringen, führte schießlich zur erfolgreichen Teilnahme am RoboCup in Atlanta in diesem Jahr.

Die Entwicklung und natürlich der aktive Betrieb eines humanoiden, menschenähnlichen Roboters stellt nun aus mehreren Gründen eine sehr große Herausforderung dar. Zum einen erfordert die Komplexität der Systems fundierte Kenntnisse aus den Bereichen Elektronik, Mechanik und natürlich Informatik. Andererseits benötigt die Implementierung eines stabilen menschenähnlichen Ganges ebenso eine intensive theoretische Beschäftigung mit den dynamischen Vorgängen des Gehens wie etwa eine mathematische Modellierung.

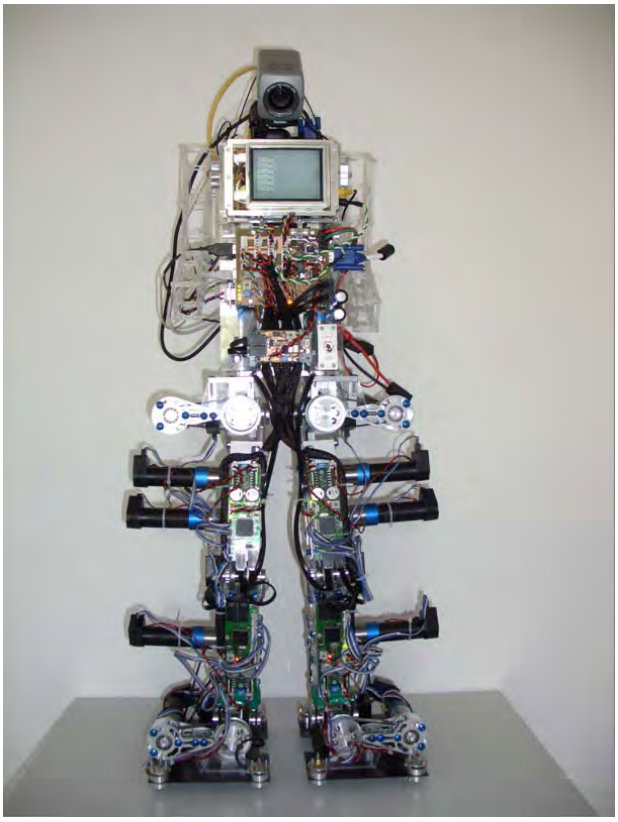


Bild 1: Der Roboter

Es ist leicht einzusehen, dass ohne strukurierte Vorgehensweise und ohne den Rahmen eines Projektmanagementes eine Aufgabe dieser Größenordung in der angestrebten Entwicklungszeit von einem Jahr nicht bewältigbar ist. So ist zeitlich gesehen der Realsierungsphase eine intensive Planungs- und Konzeptionszeit von 4 Monaten vorausgegangen.

2 Entwicklung und Aufbau der HWM

Die Grundstrukur des humanoiden Roboters bildet vergleichbar zum Menschen das mechanische Skelett aus Duraluminium, das den menschlichen Torso als 12 DOF System nach-

bildet. Dieses System wurde in Zusammenarbeit mit der Universität Turin entwickelt und besteht aus den Grundplatten (Füße), den 2 Beinen mit jeweils 6 Gelenken und dem derzeit starren Oberkörper.

Der vollständig bestückte Roboter hat eine Höhe von $96cm$ und ein Gewicht von ca. $20kg$. Die Bewegung der Gelenke wird durch einen Antrieb erzeugt, der aus DC-Motoren und über jeweils einen Zahnriemen verbundenes Getriebe besteht. Zur Bestimmung der aktuellen Position der Gelenke werden Encoder benützt.

2.1 Die Idee

Mit den Ziel Erfahrung in mehreren Fachgebieten zu erwerben, hat eine Studentengruppe vorgeschlagen, im Rahmen des Projektjahres einen humanoiden Roboter von Grund auf zu entwickeln. Wichtig dabei war, dass der Roboter einen menschenähnlichen Gang beherrschen sollte. Selbstverständlich gibt es bereits eine Reihe von kommerziellen Roboter-Anbietern am Markt. Doch ist zum einen aus finanziellen Gründen, zum anderen aufgrund der meist fehlenden Eingreifbarkeit (eigenes Regelkonzept) entschieden worden, lediglich bei der Konstruktion des Skelettes auf externe Hilfe zurückzugreifen. In der folgenden Abbildung (Bild 2) ist der erste Konzeptentwurf als Blockdiagramm zu sehen. Dabei sind bereits die wichtigsten zu bewältigenden Teilaufgaben ersichtlich.

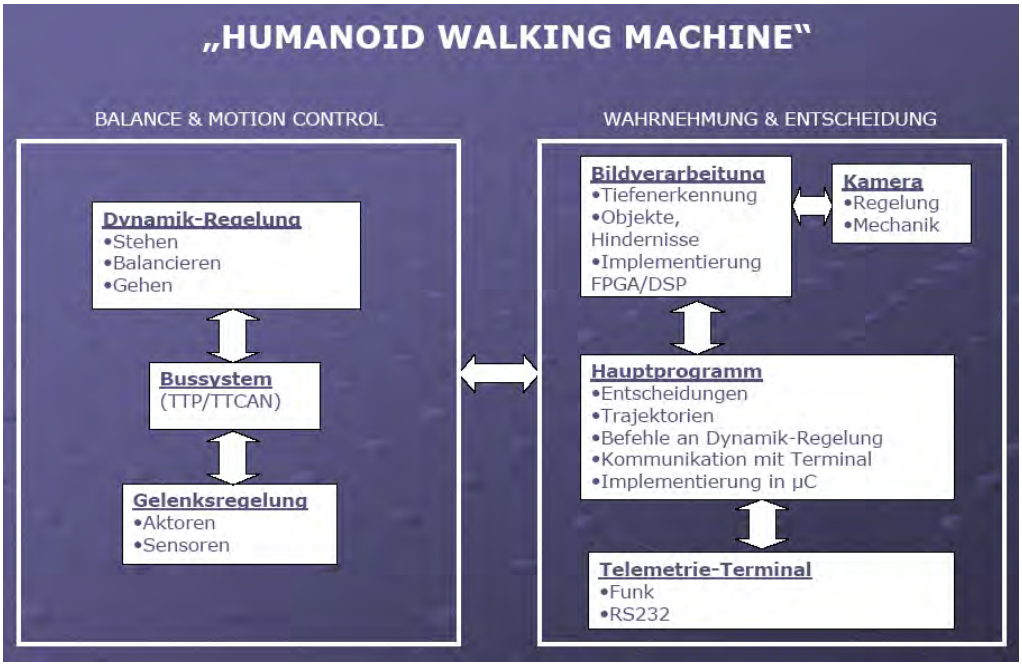


Bild 2: Das erste Konzept

Die wichtigste Grundentscheidung in der Konzeptionsphase war es, das prinzipielle Rechenkonzept festzulegen. Welche Aufgaben sollen von einer Zentraleinheit übernommen werden, welche Größen sollen direkt beispielsweise an den Gelenken weiterverarbeitet werden? Natürlich ist auch die Frage nach der Wahl eines geeigneten Kommunikationsinterfaces entscheidend. Zusätzlich wurden bei der Planung auch restriktive Bedingungen für eine RoboCup Teilnahme berücksichtigt.

2.2 Systemstruktur

Der Roboter stellt ein System mit einer so genannten verteilten Architektur dar. Durch die modulare Strukur sind Erweiterungen leicht beziehungsweise ein Redesign mit vertretbarem Aufwand möglich.

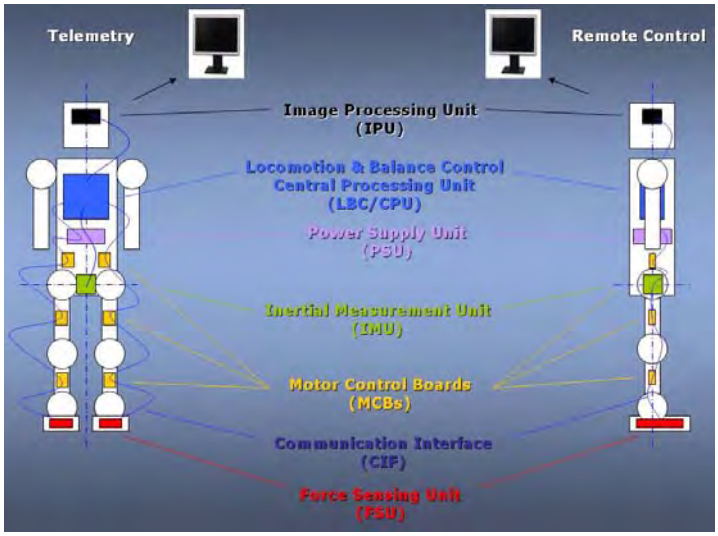


Bild 3: Die aktuelle System-Struktur

Um die Übersicht in der Entwicklungsphase wie auch im Betrieb zu behalten, wurden die wichtigsten Systemkomponenten zu bestimmten Einheiten (siehe Bild 3) zusammengefaßt:

- Single board Computer

Ein Industrie-PC mit einem $133MHz$ Prozessor unter Verwendung des Echtzeitbetriebssystems InTime stellt die zentrale Recheneinheit des Roboters dar, in dem die gesamte Koordination und Überwachung der einzelnen Module erfolgt. Auch die Trajektorienplanung und die Gesamtregelung wird von dieser Einheit ausgeführt. Die Verbindung zu den lokalen Modulen und Sensoren erfolgt über einen schnellen seriellen Bus. Der so genannte RS485-Bus arbeitet mit einer Baudrate von $1.152Mbps$.

- PSU (Power Supply Unit)

Die Bereitstellung der erforderlichen Energie wird durch diese Einheit gewährleistet. Es werden verschiedene benötigte Spannungen ($24V$, $12V$, $6V$) durch eine eigens entwickelte Versorgungseinheit mit Hilfe eines Lithium-Ionen-Akkupacks oder eines Netzgerätes zur Verfügung gestellt.

- IMU (Interial Mesaurement Unit)

Die Ermittlung der vertikalen Neigung des Roboters erfolgt in dieser wichtigen Einheit. Dabei wird eine Kombination aus Beschleunigungssensoren und Gyroskop verwendet. Eine Verknüpfung und Auswertung der entsprechenden Sensorsignale (sensor fusion) erfolgt in einem geeigneten Signalprozessor.

- IPU (Image Processing Unit)

Um dem Roboter das Erkennen von Hindernissen oder eines Balles zu ermöglichen, ist er mit einem Compact Vision System ausgestattet. Die Kommuniktion mit der zentralen Recheneinheit wird über eine serielle Verbindung hergestellt.

- FSU (Force Sensing Unit)

Die Kräfteverteilung an den Fußsohlen wird mit Hilfe von Drucksensoren gemessen. Auch hier wird ein Signalprozessor eingesetzt, um lokal die resulierende Kraft und den sogenannten Zero-Moment-Point zu berechnen. Diese Signale werden für eine Gesamtregelung herangezogen.

- Motoren und Encoder

Damit der Roboter autonome Bewegungen ausführen kann, benötigt er natürlich eine entsprechende Antriebseinheit. Die jeweilige Bewegung erfolgt über die 12 Gelenke des Roboters und eine Ansteuerung der erwähnten DC-Motoren. Dazu wurden spezielle Motor Control Boards (siehe Bild 4) entwickelt. Diese dienen auch zur Auswertung der Encodersignale und zur lokalen Gelenksregelung.

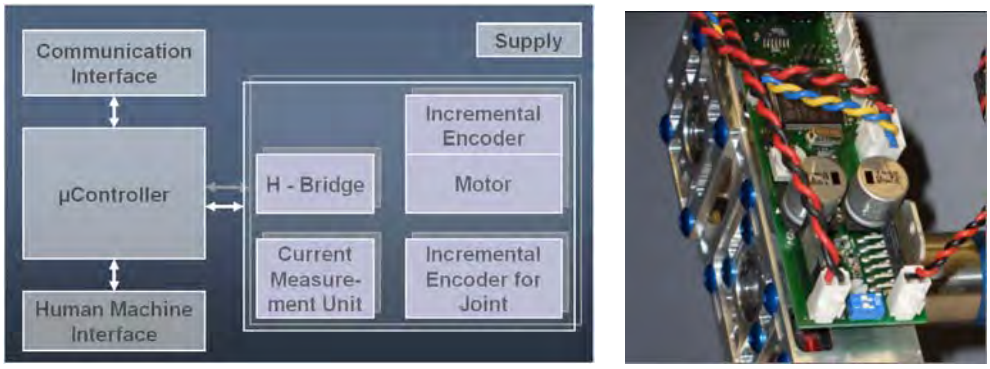


Bild 4: MCB-Konzept un Realsierung

- LBC (Locomotion and Balance Control Unit)

Mit Hilfe dieser Einheit wird die gesamte Steuerung und Koordination der einzelnen Module übernommen. Zusätzlich stellt diese Unit eine so genanntes Telemetrieprogramm zur Verfügung, um relevante Größen bei der Bewegung des Roboters visualisieren zu können. Dies erfolgt in komfortabler Weise über ein WLAN-Modul.

3 Betrieb und Regelkonzept

Neben der Implementierung der vorgestellen modularen Strukur, ist es natürlich erforderlich ein Konzept für den Betrieb des Roboters zu entwickeln. Die Grundidee ist dabei, eine Reihe von Einzelaufgaben wie das Balancieren auf einem Bein, das Vorführen

einer Kniebeuge, das Gehen eines Schrittes, etc. nacheinander zu analysieren und zu beschreiben. Es ist nämlich unumgänglich, diese dynamischen Vorgänge zu verstehen, um dann eine Umsetzung am Roboter realisieren zu können. Dazu waren einerseits die Nachahmung der Vorgänge beim Menschen und andererseits bestehende Simulationsprogramme (LISA) recht hilfreich.

In der derzeitigen Realisierung ist ein Test der angesprochenen Einzelaufgaben sowohl durch direkte Auswahl am Roboter (switch), also auch mit Hilfe des Human-Machine-Interfaces des Balance Control Moduls über eine entsprechende WLAN-Verbindung möglich. Die Realisierung eines Vorganges besteht nun im Wesentlichen aus drei Schritten:

- Vorgabe (Planung) der benötigten Trajektorien in $(x, y, z)-$Koordinaten
- Umrechnung der Ortskoodinaten in entsprechende Winkelvorgaben an die Gelenke (inverse Kinematik)
- Ansteuerung und Regelung der entsprechenden Motoren

Die jeweilige Trajektorenplanung wird zunächst in Matlab durchgeführt. Anschließend werden die entsprechenden Größen als Textfile auf den Industrie-PC überspielt, aufbereitet und als Sollvorgaben an die Gelenke weitergeleitet. Da dem Gesamtsystem eine Abstastzeit von $T_a = 10ms$ zugrunde liegt, müssen natürlich für jeden Abtastzeitpunkt Koordinatenwerte zur Verfügung stehen. In der folgenden Abbildung ist ein typische Trajektorienvorgabe für das Gehen eines Schrittes angegeben:

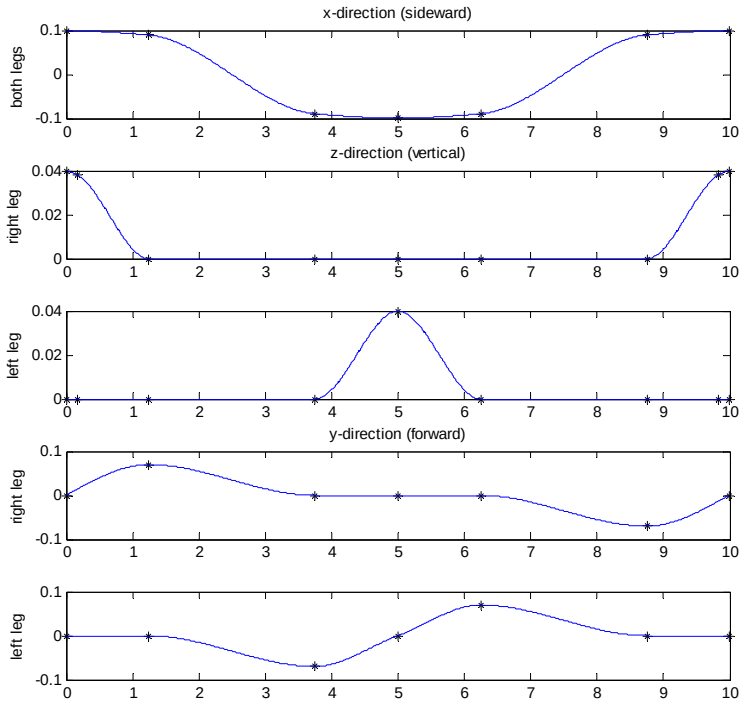


Bild 5: Trajektorienplanung

An jedem Gelenk ist eine lokale Positionsregelung implementiert. Diese erweist sich als notwendig, um Schwingbewegungen der Gelenkseinheiten zu unterdrücken. Diese werden hautpsächlich durch die benötigten Zahnriemen verursacht. Ziel der Regelungsaufgabe ist es nun, die vorgegebenen Sollwerte in der übergeordneten Abtastzeit von $10ms$ zu erreichen. Es hat sich gezeigt, dass als Regelgesetz für die Gelenksregelung ein PI-Regler geeignet ist. Der Reglerentwurf und die Simulation der Regelkreises wurde in der Matlab/Simulink Umgebung durchgeführt. Die Regelgesetze sind mit Hilfe eines XC167 Mikrocontrollers realisiert, der mit einer Abtastzeit von $1ms$ arbeitet. Ein typischer Soll-Istwertvergleich einer Gelenksbewegung ist in folgender Abbildung zu sehen:

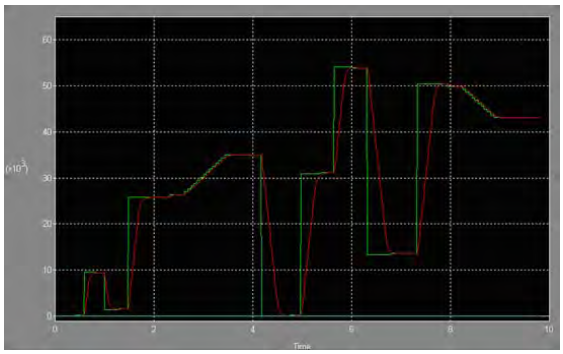


Bild 6: Trajektorienverlauf eines Gelenks

Vor allem in der Test- und Entwicklungsphase ist es erforderlich, durch entsprechende Messdaten das reale dynamische Verhalten des Roboters beim Ausführen der Einzelaufgaben zu analysieren. Mit Hilfe des Telemetrieprogramms ist es nun in komfortabler Weise möglich, den Zustand des Roboters zu überprüfen. Dabei können alle relevanten Daten, wie Soll- und Istwinkel der Gelenke oder etwa die Werte der Neigungssensoren, dargestellt werden. In der nachfolgenden Abbildung sind beispielhaft die für den Betrieb relevanten Daten in Form einer Darstellung der Telemetrieoberfläche zu sehen.

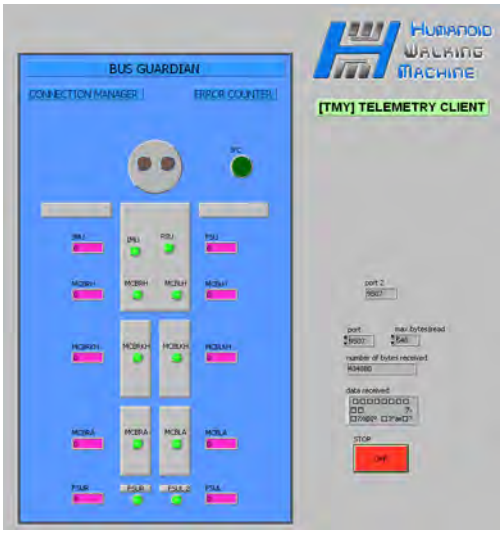


Bild 7: Größen im Telemetrieprogramm

4 RoboCup

Obwohl der Roboter nicht dazu entwickelt wurde ein besonders chancenreicher Teilnehmer am RoboCup zu werden, konnte die HWM-Gruppe in Atlanta erfolgreich ihren Roboter präsentieren und an den Wettkämpfen teilnehmen. Neben dem so genannten Penalty-Kick mußten beispielsweise eine vorgegebene Strecke möglichst schnell, eine andere ohne Hindernisse zu berühren durchschritten werden.

Es ist leicht verständlich, dass der Roboter neben der Grundvoraussetzung eines stabilen Ganges zahlreiche weitere Aufgaben erfüllen muss. So ist bespielsweise das Kicken eines Balles eine weitere wichtige Teilaufgabe. Dazu muss natürlich die Aufgabe "Balancieren auf einem Bein" bereits gelöst sein. Ferner ist es auch erforderlich, dass der Roboter über ein Visionsystem verfügt. Die Mindestvoraussetzung dabei ist, dass er in der Lage ist, einen Ball in einem bestimmten Feld zu erkennen. Das Gesichtsfeld des Roboters mit entsprechenden Abmessungen und die Grundaufgabe des Ballsehens ist in folgender Abbildung zu sehen.

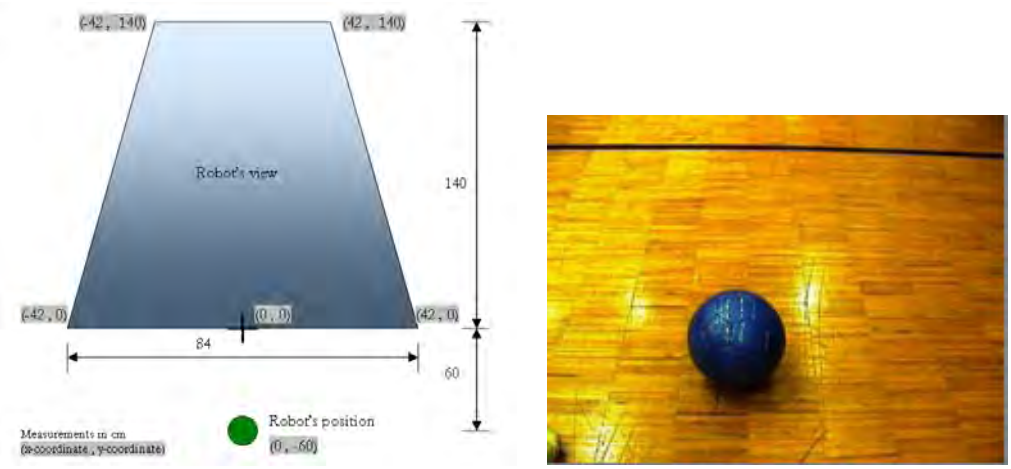


Bild 8: Gesichtfeld des Roboters mit dem Ball am Holzboden

Um die Entwicklungszeit kurz zu halten, wurde ein Compact Vision System von National Instruments zur Lösung der Bildverarbeitungsaufgabe herangezogen. Dies hat den Vorteil, dass die Programmierung der Bilderkennung in LabView mit relativ geringem theoretischem Aufwand im Bereich der Bildverarbeitung erfolgen kann. Als Kamera wurde eine IEEE 1394 Industriekamera verwendet.

5 Zukunft

Der Betrieb des Roboters und letztlich auch die Wettkämpfe im Rahmen des RoboCup haben gezeigt, dass eine Reihe von Verbesserungen beziehungsweise Erweiterungen wünschenswert wären. Daher wurde eine zweite Gruppe von 5 Studierenden beauftragt wieder im Rahmens des Projektjahres ein Redesign in einigen Punkten vorzunehmen.

Der erste wichtige Verbesserung besteht darin den Kopf des Roboters in horizonaler und vertikaler Weise drehbar zu machen. Damit wird die Suche nach Objekten oder Hindernissen wesentlich vereinfacht. Dies ist derzeit nur dadurch möglich, dass sich der Roboter am Stand dreht. Erfahrungen haben gezeigt, dass dies dynamisch die schwierigste Teilaufgabe ist.

Ein weiterer bestehender Nachteil liegt in der so genannten Initialisierungsphase. Derzeit muß der Roboter zu Beginn jeder "Arbeitsphase" auf einem Justiersockel initialisiert werden. Dies ist schon aufgrund des hohen Gewichts des Roboters eine unangenehme Prozedur. Zusätzlich ist diese Prozedur jedesmal zu wiederholen, wenn der Roboter aufgrund eines auftretenden Fehlers seine aktuelle Position (Gelenke) verliert. Daher soll eine Lösung gefunden werden, die es dem Roboter erlaubt, in jeder Lage eine Initialisierung durchzuführen.

Als dritte Aufgabe soll das bestehende Reglerkonzept verbessert werden. Derzeit ist eine übergeordnete Regelung aus Zeitgründen nur als Konzept realisiert.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass durch die Entwicklung des Roboters nun ein komplexes mechatronisches System zur Verfügung steht, das noch vielen Studierenden als Forschungsobjekt dienen wird. Erwähneswert ist auch, dass ohne den ausdauernden Einsatz der Studierenden und der unterstützenden Personen das gesteckte Ziel nicht erreicht worden wäre.

Literatur

[1] Craig J.: Introduction to robotics, 3rd edition, Prentice Hall, 2005

[2] Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M.: Robot Modeling and Control, John Wiley & Sons, 2006

[3] Veronesi P., Werth W., Zauner M. et al.: Team Decription Paper, Humanoid Walking Machine Research Group, RoboCup Atlanta, 2007

[4] Veronesi P., et al.: Technical Manual, Humanoid Walking Machine Research Group, FH Kärnten, 2006

[5] Farina F.: Progetto della sensoristica per il controllo del robot umanoide "ISAAC", tesi di laurea, Politecnico di Torino, 2005

[5] Kee D.: Design and construction of a humanoid robot platform for walking gait research, PHD thesis, Australia, 2007

[6] Chen C.T.: Control System Design, Stony Brook: Sauders College Publishing, 1993

[7] http://www.robocup.org

Modellbasierte Diagnose und Re-Konfiguration eines autonomen mobilen Roboters (Erweiterte Kurzfassung)

Franz Wotawa
Technische Universität Graz, Institut für Softwaretechnologie
8010 Graz, Inffeldgasse 16b/2
wotawa@ist.tugraz.at

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Anwendung von modellbasiertem Schließen auf die Diagnose von technischen Systemen, wobei hier die Erhöhung der Robustheit der Systeme im Vordergrund steht. Wir werden dabei anhand eines konkreten Beispiels zeigen, wie solche Modelle aufgebaut und verwendet werden können um Probleme, die während der Laufzeit der Systeme auftreten, automatisiert lösen zu können. Das in der Arbeit verwendete Beispiel, ist dem Bereich des Antriebs von autonomen, mobilen Robotern entnommen. Wir werden zeigen, wie man ausgehend von einem Modell, fehlerhafte Komponenten identifizieren kann und wie eine automatisierte Reparatur funktioniert.

Was versteht man nun unter modellbasierten Schließen beziehungsweise im speziellen der modellbasierten Diagnose? Im Prinzip ist die zugrunde liegende Idee einfach erklärt. Wir gehen von einem System, das uns Beobachtungen liefert, und einem Modell dieses Systems aus. Die Beobachtungen und das Modell des Systems müssen zu allen Zeitpunkten konsistent sein. Das heißt, dass das beobachtete Verhalten nicht im Widerspruch zum erwarteten Verhalten, welches durch das Modell gegeben ist, steht. Ist Konsistenz nicht gegeben, dann muss das System einen Fehler aufweisen und wir sind daran interessiert, diesen zu lokalisieren. Eine Möglichkeit der Fehlerlokalisierung besteht in der Verwendung spezieller Regeln, die ausgehend von Beobachtungen zu deren Begründung führen. Diese Vorgehensweise nennt man auch Regelbasierte Diagnose und hat den Nachteil, dass das Systemmodell nicht direkt für die Diagnose verwendet wird. Alternativ zur Regelbasierten Diagnose verwendet die modellbasierte Diagnose das Systemmodell direkt zur Fehlerlokalisierung. Zu diesem Zweck nehmen wir Änderungen Systemmodell vor und zwar solange bis die Beobachtungen mit dem geänderten Systemmodell wiederum konsistent sind. Damit sind die durchgeführten Änderungen eine Erklärung für das Fehlverhalten des Systems.

Der modellbasierten Diagnose liegen zwei Annahmen zugrunde: (1) Das verwendete Modell ist korrekt und (2) die möglichen Änderungen des Systems zur Fehlerlokalisierung sind ebenfalls definiert und korrekt. Ausgehend von den möglichen Systemänderungen, kann man zwei Klassen von modellbasierten Diagnosesystemen unterscheiden: (1) Konsistenzbasierte Diagnosesysteme und (2) Abduktive Diagnosesysteme. Im Fall der konsistenzbasierten Diagnose wird nur das korrekte Verhalten eines Systems modelliert. Bei abduktiven Diagnosesystemen wird das Verhalten im Fehlerfall ebenfalls im Modell abgebildet. Dieses Unterscheidungsmerkmal ist an dieser Stelle ausreichend. Eine genauere Definition beziehungsweise Charakterisierung dieser beiden Ansätze ist nicht im Fokus dieser Arbeit und es sei an dieser Stelle auf die Arbeit von Console und Torasso [9] verwiesen.

Die bisher in dieser Arbeit verwendete Sichtweise auf modellbasierte Diagnose (siehe [8]) kommt aus dem Fachgebiet der Künstlichen Intelligenz (Artificial Intelligence; AI). In diesem

Bereich werden meistens Modelle verwendet, die das Systemverhalten abstrahieren, in dem nur für die Diagnose relevante Systemteile und Systemaspekte modelliert werden. Zur Darstellung der Modelle werden als Modellierungssprachen Logiken wie die Aussagen- oder Prädikatenlogik oder einfache Relationen verwendet. Es hat sich gezeigt, dass diese Modellierungssprachen für viele Applikationen aussagekräftig genug sind. So gibt es zum Beispiel Anwendungen der AI-basierten modellbasierten Diagnose aus dem Automobilbereich [7] und der Raumfahrt [5]. Ein Nachteil der logikbasierten Modellierungssprachen ist es, das die Modelle nicht direkt auf den reichen Fundus der Simulationsmodelle zurück greifen können. Dies ist in Anwendungsbereichen wie der Automobilindustrie ein Problem, da dort Modelle während der Entwicklung eines Automobils zu Simulationszwecken erstellt werden. Eine nachträgliche Modellierung zum Zweck der Diagnose würde dann entfallen. Eine Lösung für das angesprochene Problem ist, die abstrakten Modelle direkt aus den Simulationsmodellen, die meistens Differentialgleichungen und andere algebraische Gleichungen verwenden, abzuleiten. Ein entsprechender Ansatz zur automatisierten Abstraktion wurde von Sachenbacher und Struss [6] vorgeschlagen.

Unabhängig von der AI-basierten Sichtweise der modellbasierten Diagnose wurde in den vergangenen Jahren parallel dazu eine auf exakteren Modellen basierte Version der modellbasierten Diagnose vorangetrieben. Im FDI (Fault Detection and Identification) werden Simulationsmodelle direkt zur Fehlererkennung und Fehlerlokalisierung verwendet. Die Fehlerlokalisierung wird im Fall von FDI als Fehleridentifikation bezeichnet. Um den AI-basierten Ansatz und FDI zu unterscheiden, werden wir den erstgenannten als MBD bezeichnen. In den letzten Jahren wurden Aktivitäten zur Zusammenführung der beiden Zweige der modellbasierten Diagnose unter dem Schlagwort BRIDGE durchgeführt (Siehe hierzu auch [9]). Der in Folge beschriebene Ansatz zur Diagnose von Roboterfahrwerken kann hier ebenfalls als Ansatz zur Zusammenführung von FDI und MBD verstanden werden. Die Modelle kombinieren Zustandsübergangsgraphen mit (Differential-)Gleichungssystemen und verwenden Algorithmen aus dem Bereich MBD zur Lösungssuche.

Modellbasierte Diagnose

Abbildung 1 zeigt das Grundprinzip der modellbasierten Diagnose. Ausgehend von einem Systemmodell und Beobachtungen wird direkt auf die Ursache von Fehlern geschlossen. Eine formale Definition der Diagnose und deren Implikationen werden in [8] von Reiter beschrieben. Eine Diagnose nach Reiter ist dabei nichts anderes als eine Menge von Systemkomponenten, die als fehlerhaft angenommen werden müssen, damit das Systemmodell gemeinsam mit den gegebenen Beobachtungen konsistent ist. Alle anderen Komponenten des Systems werden als korrekt angenommen. Formal schreiben wir $\Delta \subseteq COMP$ ist eine Diagnose, wenn der logische Satz $SD \cup OBS \cup \{\neg AB(x) \mid x \in COMP \backslash \Delta\} \cup \{AB(x) \mid x \in \Delta\}$ konsistent ist, wobei SD das Modell, OBS die Beobachtungen und COMP die Menge aller Systemkomponenten bezeichnet.

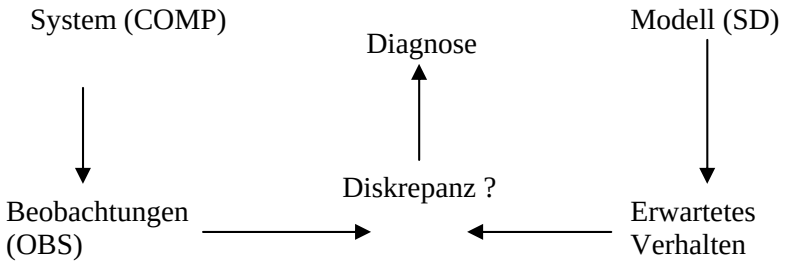


Abbildung 1: Das Grundprinzip der modellbasierten Diagnose

Folgendes triviales Beispiel soll helfen diese Definition zu verstehen. Angenommen wir habe ein System, das nur aus einer Widerstandskomponente C_R besteht. Somit ist COMP = { C_R }. Das Verhalten eines Widerstandes ist über das Ohmsche Gesetz „Der Spannungsabfall ist direkt proportional zum durchfließenden Strom“ U=R·I gegeben. Formal können wir für das Systemmodell folgende Regeln aufschreiben: SD = { $\neg AB(C_R) \rightarrow U(C_R)=R(C_R)\cdot I(C_R)$, $R(C_R)=1\Omega$}[1]. Wenn wir nun Strom und Spannung messen, können wir überprüfen, ob das System noch korrekt funktioniert. Angenommen wir messen $U(C_R)=1V$ und $I(C_R)=1A$. Diese Messungen werden in OBS repräsentiert. Wie leicht zu überprüfen ist, ist SD gemeinsam mit OBS und der Annahme, dass C_R funktioniert, das heißt $\neg AB(C_R)$, konsistent ist. Somit gilt hier $\Delta=\{\}$. Nehmen wir nun weiter an, dass wir nach einer Minute folgenden neuen Beobachtungen haben: OBS={ $U(C_R)=0V$, $I(C_R)=10A$ }. Unter $\Delta=\{\}$ ist der logische Satz nun offensichtlich inkonsistent, da aus $\neg AB(C_R)$ und $\neg AB(C_R) \rightarrow U(C_R)=R(C_R)\cdot I(C_R)$ folgt $U(C_R)=R(C_R)\cdot I(C_R)$. Das Gleichungssystem bestehend aus dieser Gleichung sowie $U(C_R)=0V$, $I(C_R)=10A$ und $R(C_R)=1\Omega$ hat offensichtlich keine Lösung! In diesem Fall müssen wir somit $\Delta=\{ C_R \}$ annehmen. Da nun $AB(C_R)$ gilt und wir nicht mehr die Gleichung $U(C_R)=R(C_R)\cdot I(C_R)$ logisch ableiten können, ist der Satz zur Charakterisierung einer Diagnose offensichtlich konsistent. Somit wissen wir, dass der Widerstand fehlerhaft funktioniert.

Wir haben somit anhand des Beispiels gezeigt, dass ausgehend von der obigen Definition eine Schlussfolgerung der Fehlerursache möglich ist. Im Generellen muss man nur alle Möglichkeiten, dass bestimmte Komponenten fehlerhaft sind, durchgehen und die Konsistenz prüfen. Ist Konsistenz gegeben, dann haben wir eine mögliche Erklärung gefunden. In der Praxis wird man intelligentere Suchalgorithmen verwenden, da das angesprochene Verfahren einen exponentiellen Aufwand bedeutet. Man muss bei diesem Verfahren alle Untermengen der Menge aller Komponenten testen. In der Praxis reduziert man die Suche jedoch auf Einfachfehler oder man verwendet Methoden, die meistens – aber natürlich nicht immer – schneller zu Resultaten führen.

Das in diesem Kapitel verwendete Beispiel können wir gleich dazu verwenden eine Besonderheit der Definition zu zeigen. Angenommen die folgenden Beobachtungen $U(C_R)=1V$ und $I(C_R)=1A$ können erhoben werden. In diesem Fall ist das System in Ordnung da wir $\Delta=\{\}$ annehmen können um Konsistenz sicherzustellen. Allerdings ist in diesem Fall auch $\Delta=\{ C_R \}$ eine mögliche Erklärung. Die Besonderheit hier ist, dass alle Übermengen einer Diagnose

[1] Wenn das System aus mehreren Komponenten besteht, kann das Modell von Widerständen und anderen Bauteilen generalisiert werden. In diesem Fall wird es auch mehrere Spannungsabfälle und Ströme geben, die getrennt zu bezeichnen sind und für die ein Modell zur Beschreibung der Schaltungsstruktur gegeben sein muss.

ebenfalls Diagnosen sind. Interessant hierbei ist, dass eine fehlerhafte Komponente zu einem sich (zumindest teilweise) korrekt verhaltenem System führen kann. Dies erscheint im ersten Moment nicht intuitiv. Allerdings kann es in der Praxis durchaus vorkommen. Um dieses Problem zu umgehen, kann man durch Einführung von Minimalitätskriterien eine Ordnung von Lösungen erhalten. Die Untermengenrelation kann eingesetzt werden um möglichst kleine Diagnosen zu bevorzugen.

Alternativ dazu kann man auch das fehlerhafte Verhalten spezifizieren um unerwünschte Diagnosen zu verhindern. In unserem Beispiel können wir die Systembeschreibung entsprechend anpassen. Wir können zum Beispiel 2 Fehlerverhaltensmodi spezifizieren. Ein Modus steht für den Fall, dass der Widerstand keinen Strom mehr leitet (BROKEN), und der andere für den Fall, dass kein Widerstand mehr vorhanden ist (SHORT) und somit der Spannungsabfall 0V beträgt. Das neue Modell SD' hat nun folgendes Aussehen SD' = SD $\cup$ {SHORT(C_R) $\rightarrow$ U(C_R)=0V, BROKEN(C_R) $\rightarrow$ I(C_R)=0A}. Um dieses Modell zur Diagnose verwenden zu können, müssen wir die Definition der Diagnose auf Zustände von Komponenten erweitern. Wir definieren nun eine Diagnose als Menge von Komponentenzuständen, die konsistent mit SD und OBS sind und die möglichst viele Beobachtungen vorhersagen. Somit erhält man 2 Diagnosen: AB(C_R) und SHORT(C_R) wobei SHORT(C_R) U(C_R)=0V vorhersagt und somit bevorzugt wird. Diese Art der Diagnose entspricht der abduktiven Diagnose, da hier auch Fehlermodelle verwendet werden. In den nun folgenden Beispielapplikationen verwenden wir ebenfalls Fehlermodelle.

Ein Vorteil der modellbasierten Diagnose ist die Unterstützung von komponentenbasierte Modellierungsmethoden. Es ist somit möglich Komponentenmodelle auszutauschen beziehungsweise Gesamtsysteme als Summe von Einzelkomponenten und deren Verbindungen darzustellen. Dadurch wird der Wartungsaufwand wesentlich reduziert. Das Gesamtmodell besteht aus den Verhaltensmodellen der Komponenten und dem Verbindungsmodell, das im Wesentlichen aus Gleichungen besteht. Die Komponentenmodelle müssen zumindest das korrekte Verhalten abbilden. Fehlermodelle können ebenfalls verwendet werden.

Diagnose von Roboterfahrwerken

Zur Erhöhung der Robustheit von mobilen Plattformen ist es erforderlich Redundanzen in das System einzubauen. Allerdings ist dies nicht immer so einfach und erfordert jedenfalls erhöhten Aufwand. Redundanzen können sowohl explizit als auch implizit vorhanden sein. Sind diese explizit vorhanden, so hat man für Komponenten immer eine Ersatzkomponente, die bei Bedarf als Ersatz fungiert. Bei impliziter Redundanz kann die gewünschte Funktionalität durch Re-Konfiguration bereitgestellt werden. Bei einem Roboterfahrwerk, das als omnidirektionales Fahrwerk („Omni-directional Drive“) ausgeführt wird (siehe Abbildung 2) hat man genug Freiheitsgrade um einen gegebenen Kurs auch bei Ausfall eines Motors – zumindest eingeschränkt – befahren zu können. Um die Re-Konfiguration automatisch durchführen zu können, benötigt man ein Modell, das den Fehler erkennt und lokalisiert und darauf aufbauend entsprechend adaptiert wird. Ein solches Modell muss die Kinematik des Motors und das Verhalten im Fehlerfall abdecken. Die in diesem Kapitel beschriebenen Techniken und Verfahren sind genauer in [1, 3] beschrieben.

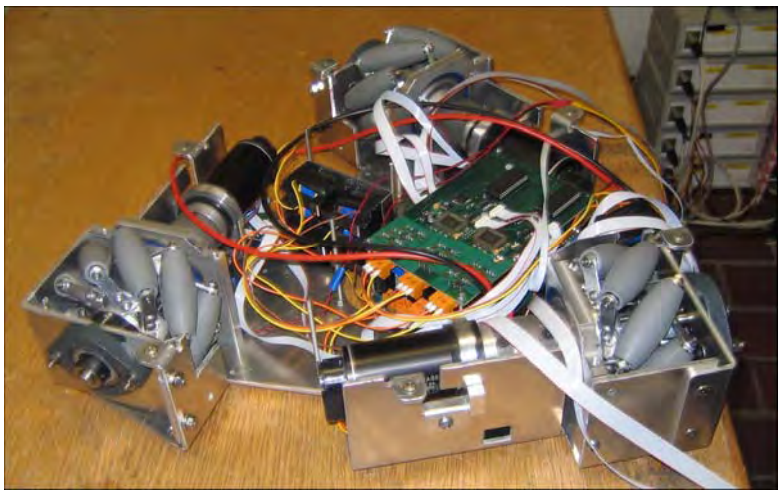


Abbildung 2: Omnidirektionales Fahrwerk eines mobilen Roboters mit 3 „Swedish-Wheels“

Bevor wir uns mit der Frage der Re-Konfiguration eines Fahrwerks beschäftigen, schauen wir uns die Modellierung an. Wie bereits gesagt, bilden wir die Kinematik des Fahrwerks direkt als Modell ab. Zu diesem Zweck werden wir die Kinematik jedes einzelnen Rads inklusive der Steuerkommandos abbilden und diese dann zu einem Modell zusammenfügen. Da wir nicht nur Differentialgleichungen sondern auch die Zustände der Einzelkomponenten – in diesem Fall der Radmotoren – modellieren müssen, verwenden wir probabilistische, hybride Automaten (PHA) zur Modellierung. Ein PHA A ist ein Tupel (x,u,y,F,T,N) wo x der Zustand des Automaten ist, der sich aus einem kontinuierlichen Zustand x_c und einem diskreten Zustand x_d zusammensetzt, u beziehungsweise y ist die Menge der kontinuierlichen und diskreten Eingangs- beziehungsweise Ausgangsvariablen, F beschreibt das kontinuierliche Verhalten in Form von Differentialgleichungen, Differenzgleichungen beziehungsweise algebraische Gleichungen, die in einem bestimmten Zustand gelten, T beschreibt die probabilistischen Zustandsübergänge und N beschreibt Störungen beziehungsweise Rauschen, das in einem Zustand auftreten kann.

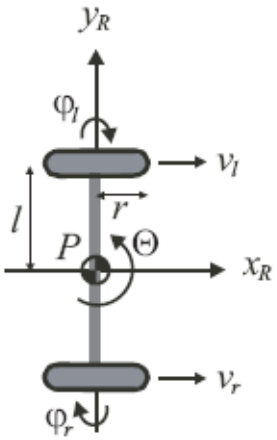


Abbildung 3: Differentialantrieb

Als Beispiel für die Modellierung mit PHA werden wir uns einen Differentialantrieb („Differential Drive“) ansehen. Ein solches Fahrwerk hat 2 getrennt betriebene Motoren und ist eines der einfachsten Fahrwerke, die in der mobilen Robotik verwendet werden. Die Abbildung 3 zeigt den Aufbau eines solches Fahrwerks. Da wir es nun mit 2 Motoren zu tun haben, die jeweils entweder funktionieren ($\neg$AB) oder nicht funktionieren (AB), gibt es 4 mögliche Zustände für das gesamte Fahrwerk. Für jeden dieser Zustände müssen wir dann ein Modell in Form von Gleichungen erstellen. In der Praxis kann man die Erstellung eines PHA aus den einzelnen PHA direkt automatisiert ableiten. In diesem Fall müssen PHA für die einzelnen Räder erstellt und diese dann zusammengefügt werden. Die Kombination von einzelnen PHA zu einem Gesamtsystem ist unter anderem in [4] beschrieben.

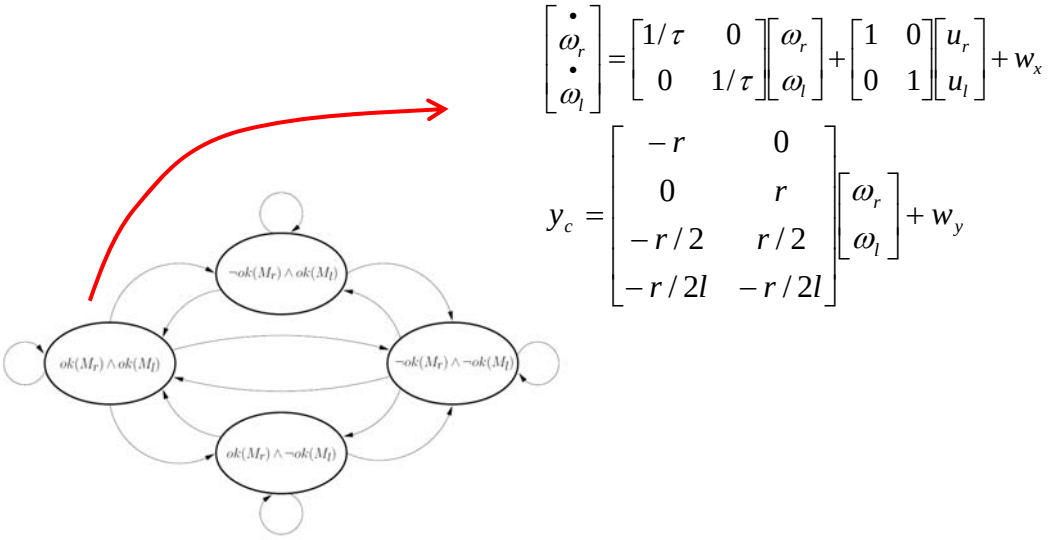


Abbildung 4: Der PHA für den Differentialantrieb

Für unseren einfachen Differentialantrieb können wir einen einfachen PHA konstruieren. Dieser ist in Abbildung 4 wiedergegeben. Dort sieht man auch die Gleichungssysteme für den Zustand $\neg AB(M_r) \wedge \neg AB(M_l)$. Das ist der Fall, bei dem der linke und der rechte Motor korrekt funktionieren. Mit Hilfe dieses Modells kann man nun Aussagen über das Verhalten des Fahrwerks machen und mit dem beobachteten Verhalten vergleichen. Angenommen, man befindet sich in einem Zustand und das beobachtete Verhalten weicht vom berechneten Verhalten ab. In diesem Fall wird man einen Zustand suchen, der mit dem aktuellen Zustand verbunden ist und dessen Gleichungen, diese Abweichung nicht aufweisen. Auf diese Art lässt sich der aktuell gültige Zustand durch Suche im PHA finden. Dieses Problem ist auch als „Hybrid Estimation Problem“ bekannt (siehe hierzu [2]). Gibt es mehrere alternative Lösungen, dann werden diese solange parallel gehandhabt, bis neue Beobachtungen eine Klärung herbeiführen. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten, die im PHA ebenfalls definiert werden können, ist es möglich Alternativen zu bewerten und nur die zum Beispiel 5 wahrscheinlichsten Hypothesen weiter zu behandeln. Die Abbildung 6 zeigt, das Resultat einer „Hybrid Estimation“ für unser Differentialantriebsbeispiel.

Halten wir an dieser Stelle unsere bisherigen Resultate fest. Mit Hilfe von PHA können Modelle erstellt werden, die sowohl kontinuierliches als auch diskretes Verhalten aufweisen. Durch Vergleich, des vom PHA vorgegebenen Verhaltens mit den Beobachtungen, können die Zustände eruiert werden, die konsistent mit den Beobachtungen sind und diese auch vorhersagen. Somit ist es möglich Fehler zu erkennen und zu lokalisieren. Im Fall des Differentialantriebs und den Beobachtungen aus Abbildung 6 kann zum Beispiel geschlossen werden, dass der rechte Motor fehlerhaft ist. Was noch fehlt, ist die automatisierte Adaption des Systems, wenn dies möglich ist. Im Fall des Differentialantriebs wird es keine Möglichkeit der Korrektur geben, da wir hier auf keine Redundanzen zurückgreifen können. Bei anderen Fahrwerken wie dem omnidirektionalen Fahrwerk ist eine Reparatur zur Laufzeit mittels Re-Konfiguration möglich.

Wie können wir nun Re-Konfiguration und Reparatur durchführen? Im Prinzip haben wir schon die Lösung. Da uns der PHA das Verhalten für jeden möglichen Zustand gibt, wissen wir das

Verhalten in einem konkreten Fall ebenfalls. Wir wissen dann nicht nur welche Komponente des Systems fehlerhaft war, sondern auch wie das zugehörige kontinuierliche Verhalten aussehen muss. Dieses Verhaltensmodell können wir dann verwenden um Aussagen über die vorliegenden Möglichkeiten der Steuerung des Gesamtsystems zu treffen. Wir können zum Beispiel die möglichen und noch steuerbaren Bewegungsabläufe aus den Gleichungen bestimmen in dem wir die noch vorhandenen Freiheitsgrade ausrechnen. Sind diese noch groß genug, kann der Roboter sich auch noch im Fehlerfall entsprechend bewegen, auch wenn dies nur eingeschränkt möglich ist. Ein weiterer interessanter Aspekt hier ist die Tatsache, dass die Information bezüglich des noch vorhandenen Verhaltens an die höhere Kontrollebene eines Roboters geschickt werden kann. Durch dieses Feedback können auf oberer Ebene der Steuerung ebenfalls Maßnahmen gesetzt werden. Mehr Informationen über die Berechnung der Freiheitsgrade aus den Kinematikmodellen findet man in [1].

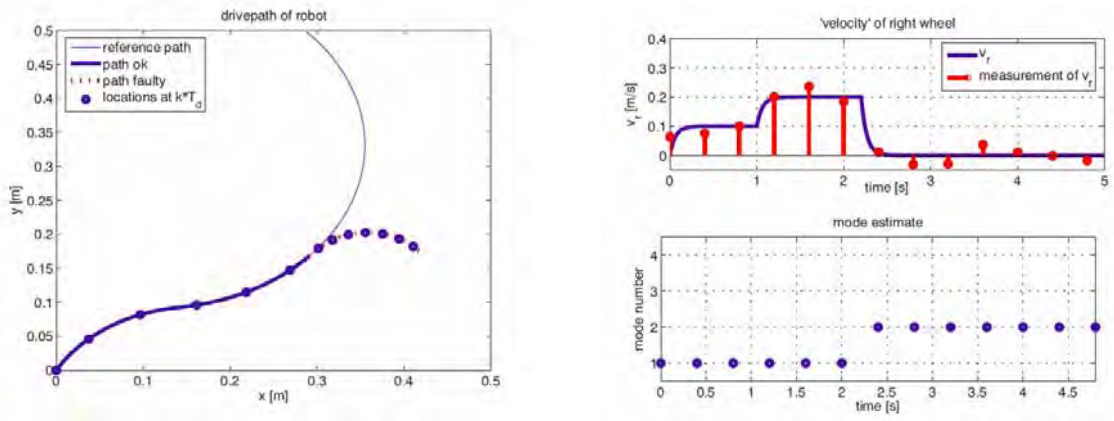


Abbildung 6: Beispiel für Zustandsübergänge in PHA für einen Differentialantrieb, die durch Beobachtungen ausgelöst werden.

Das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren zu Re-Konfiguration von Roboterfahrwerken wurde gemeinsam mit dem Institut für Regelungstechnik implementiert und auf unserer Robotikplattform getestet. Die verwendeten Roboter verwenden das in Abbildung 2 gezeigte omnidirektionale Fahrwerk. Der Ausfall eines Motors kann somit – zumindest was die zu fahrende Route angeht – korrigiert werden. In Abbildung 7 (a) sieht man die Fahrroute, die von einem Roboter abgefahren wird. Abbildung 7 (b) zeigt den Fall, wo Motor 2 ausfällt. In diesem Fall kann die Fahrroute nicht mehr eingehalten werden. In Abbildung 7 (c) wurde derselbe Fehler induziert. Der Roboter kann sich jedoch aufgrund der automatischen Re-Konfiguration korrigieren und fährt den vorgegebenen Kurs.

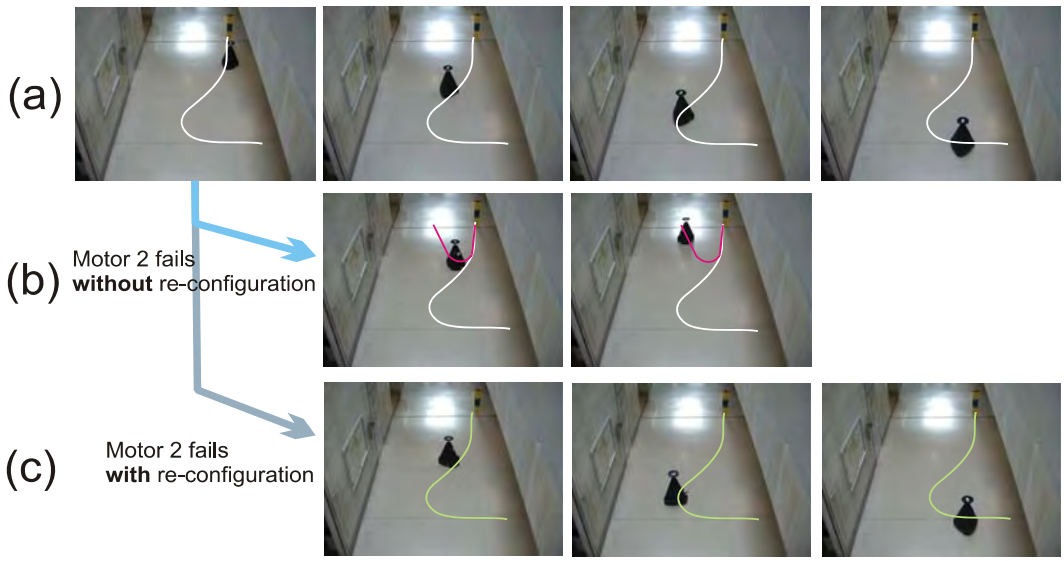


Abbildung 7: Das gewünschte Verhalten (a) im Vergleich zum Verhalten ohne Re-Konfiguration (b) und mit Re-Konfiguration (c)

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Verwendung der modellbasierten Diagnose zur Steigerung der Robustheit von autonomen, mobilen Systemen. Die Arbeit versteht sich als Übersichtsartikel. Für Details sei an folgende zwei Publikationen verwiesen: [1] und [3]. Dem Forschungsgebiet modellbasierte Diagnose liegt die Idee zugrunde, Diagnosen automatisch aus Beobachtungen und einem Systemmodel abzuleiten. Diagnose umfasst dabei mindestens die Fehlererkennung und die Fehlerlokalisierung/Fehleridentifikation. In diesem Artikel kann das Modell auch zur Reparatur beziehungsweise Re-Konfiguration verwendet werden. Zur Diagnose wird das erwartete Verhalten, das aus dem Modell gewonnen werden kann, mit dem tatsächlich beobachteten Verhalten verglichen. Divergieren diese beiden Verhalten, dann spricht man von einer Inkonsistenz und versucht ebenfalls ausgehend vom Modell einen Systemzustand zu finden, der diese Inkonsistenz auflöst und es erlaubt, die Beobachtungen zu erklären.

Die Suche nach einem geeigneten Systemzustand verhält sich exponentiell mit der Anzahl der Systemkomponenten, da diese die möglichen Systemzustände determiniert. Um die Suche effizienter zu gestalten, werden in der Arbeit „Propabilistic Hybrid Automata (PHA)“ verwendet, die es erlauben die Wahrscheinlichkeiten von Erklärungen zu bestimmen. Der Zustand, der ein bestimmtes beobachtetes Verhalten erklärt, liefert auch die Informationen welche Komponente sich in welchem Zustand befindet. Somit kann man direkt die fehlerhaften Komponenten identifizieren.

Ausgehend vom verwendeten Modell, dass die Kinematik im Zusammenspiel mit Steuerungs- beziehungsweise Regelungsparameter beschreibt, ist es auch möglich eine geeignete Re-Konfiguration zu finden. Diese folgt direkt aus dem Modell und beschreibt die noch möglichen Freiheitsgrade des Systems. Sind die Freiheitsgrade zu gering, ist es natürlich nicht mehr möglich die vollständige Funktionalität aufrecht zu erhalten. Selbst wenn dies nicht der Fall ist, hilft diese Information bei der weiteren Planung der Interaktion zwischen dem autonomen, mobilen System und seiner Umgebung.

Die beschriebene Methode ist ein sehr gutes Beispiel für die Zusammenarbeit zwischen unterschiedlichen Fachdisziplinen. In diesem Fall werden Methoden und Verfahren der Regelungstechnik und der Künstliche Intelligenz benötigt um das Problem der Robustheitssteigerung zu behandeln und für eine konkrete Applikation zu lösen. Die durchgeführten Tests haben gezeigt, dass der beschriebene Ansatz in der Praxis verwendet werden kann. Allerdings müssen hier noch Optimierungen vorgenommen werden. Eine Einschränkung hinsichtlich der Verwendbarkeit der Methode in anderen Bereichen besteht nicht, solange die Modelle in Form von PHA dargestellt werden können und diese das Verhalten im Fehlerfall ebenfalls beinhalten.

Danksagung

Die in dieser Arbeit beschriebenen Techniken und Methoden wurden in enger Zusammenarbeit zwischen dem Institut für Regelungstechnik und dem Institut für Softwaretechnologie entwickelt. Mein Dank gilt dabei allen, die bisher mitgewirkt haben. Das sind in alphabetischer Reihenfolge: Mathias Brandstötter, Michael Hofbaur, Johannes Köb, und Gerald Steinbauer.

Literaturliste

[1] Mathias Brondstötter, Michael W. Hofbaur, Gerald Steinbauer, and Franz Wotawa, Model-Based Fault Diagnosis and Reconfiguration of Robot Drives, In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2007.

[2] Michael Hofbaur. Hybrid Estimation of Complex Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 319, Springer, 2005.

[3] Michael Hofbaur, Johannes Köb, Gerald Steinbauer, and Franz Wotawa. Improving Robustness of Mobile Robots using Model-Based Reasoning. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 48(1):37-54, 2007.

[4] Michael Hofbaur and Franz Wotawa, A Causal Analysis Method for Concurrent Hybrid Automata, In *Proceedings of the 21st National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, S. 840 – 846, 2006.

[5] Nichal Muscettola, P. Pandurang Nayak, Barney Pell, and Brian C. Williams, Remote agent: To boldly go where no AI System has gone before. *Artificial Intelligence*, 103(1-2):5-48, August 1998.

[6] Martin Sachenbacher and Peter Struss, Task-dependent qualitative domain abstraction. *Artificial Intelligence*, Vol. 162, pp. 121-143, 2005.

[7] Struss P., Heller U., Malik A., Sachenbacher M., Modellbasierte Werkzeuge für Diagnose und Fehleranalyse von Fahrzeugsubsystemen, pages 17-40. *In: Hotz L.,Struss P., Guckenbiehl T.,(editors). Intelligent Diagnosis in Industrial Applications*. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2001.

[8] Reiter, R. 1987. A theory of diagnosis from first principles. *Artificial Intelligence,* Vol. 32, 1 (Apr. 1987), 57-95.

[9] M.-O. Cordier and P. Dague and F. Lévy and J. Montmain and M. Staroswiecki and L. Travé-Massuyès , Conflicts versus Analytical Redundancy Relations : A comparative analysis of the model-based diagnostic approach from the artificial intelligence and automatic control perspectives , IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B. , Vol. 34, 2004.

Neue Methode zur Regelung von Petersen Spulen: Theorie und Betriebserfahrung

Gernot Druml

Bahnhofstr. 19
A-4311 Schwertberg
g.druml@ieee.org

Kurzfassung

In diesem Beitrag wird ein neues Verfahren zur Ermittlung der aktuellen Abstimmung eines gelöschten Netzes durch Einspeisung eines Stromes mit zwei Frequenzen ungleich 50 Hz vorgestellt. Es wird ausführlich über die technischen Probleme bei der Umsetzung des Verfahrens und über die bisherigen Betriebserfahrungen berichtet.

Das Hauptproblem für die richtige Berechnung der Leiter-Erde Kapazität bzw. des Resonanzpunktes des gelöschten Netzes ist die nicht vorhandene oder sehr kleine Verlagerungsspannung in den heutigen 20kV Verteil-Netzen. Erschwert wird die Berechnung durch das Übersprechen des Laststromes auf das Nullsystem.

Sowohl die Anzahl der erforderlichen Verstellungen der Petersen-Spule als auch die Zeit der Fehlabstimmungen werden durch das neue Verfahren stark reduziert.

Im ersten Teil werden die Schritte zur Herleitung der Ersatzschaltung des Nullsystems sowie die dabei durchgeführten Vernachlässigungen aufgezeigt. Im darauf folgenden Abschnitt wird die neue Methode und deren technische Realisation vorgestellt.

Anschließend werden die technischen Probleme bei der Umsetzung, die im wesentlichem durch die Petersenspule verursacht werden, aufgezeigt. Es werden auch verschiedene Lösungsvorschläge für die Problem vorgestellt.

Zur Veranschaulichung der Wirksamkeit des neuen Verfahrens werden zum Abschluss zwei Netze exemplarisch vorgestellt. In einem Netz sind die Verlagerungsspannung und deren Änderung sehr hoch. Im anderen Netz ist die Verlagerungsspannung sehr klein und es erfolgt ein Übersprechen durch das nichtsynchrone 16.7 Hz Bahn-Netz.

1 Einleitung

Die Abstimmung der Petersen-Spule ist eine Präventivmaßnahme die bereits im gesunden Netz durchgeführt wird [10]. Die Verhältnisse im Erdschlussfall sind im *Bild 1* dargestellt. Es ist leicht erkennbar, dass durch Verstelllung der Petersen-Spule der Strom über die Fehlerstelle minimiert werden kann.

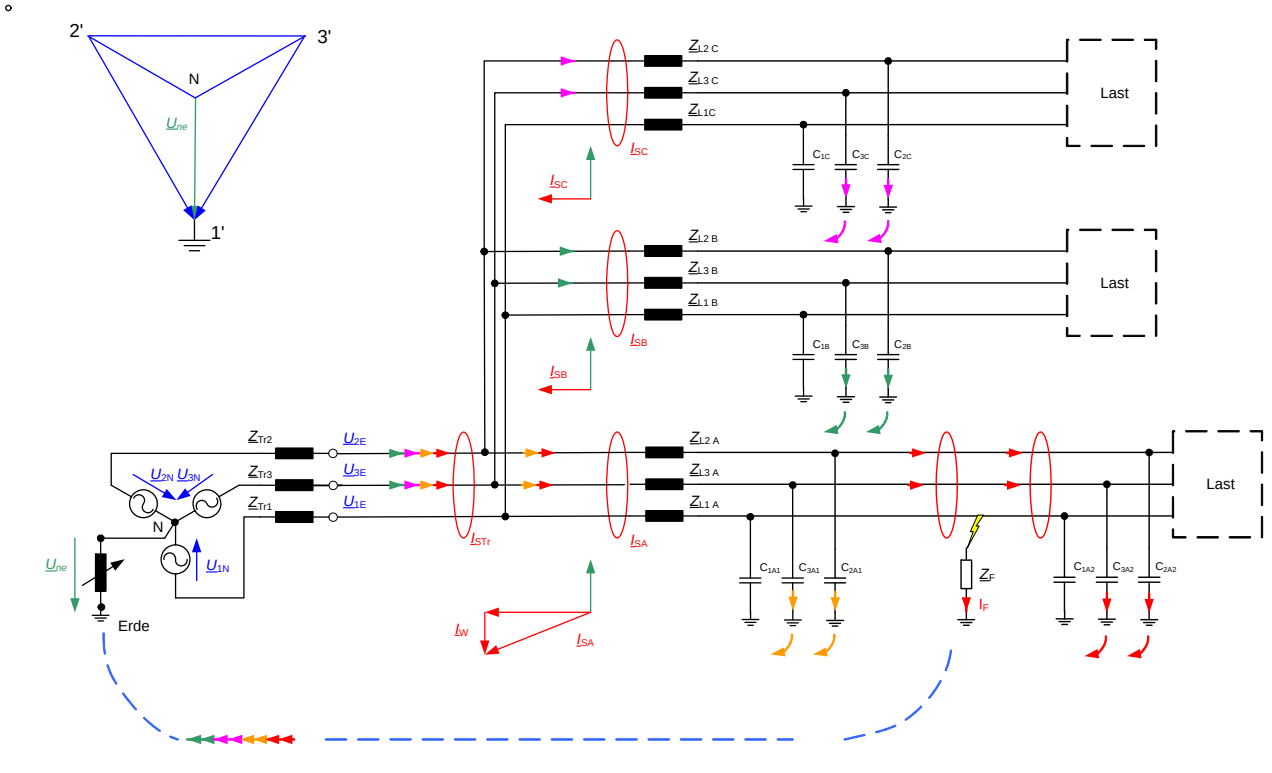


Bild 1 *Einfaches Netz mit Erdschlusskompensation*

Mit den derzeit verfügbaren Methoden ist es leider nicht möglich, die Netzparameter während eines satten Erdschlusses zu bestimmen. Der Fehlerort und die Impedanz der Fehlerstelle sind normalerweise unbekannt und einer Messung nicht zugänglich. Im Falle eines satten Erdschlusses ist die Verlagerungsspannung eingeprägt und der Strom über die Fehlerstelle kann nicht gemessen werden. Die Nullspannung und der Nullstrom können nur im Umspannwerk bzw. manchmal auch in einigen Schaltstationen gemessen werden. Vor allem der gemessene Nullstrom entspricht dabei allerdings nicht dem Strom über die Fehlerstelle.

In der Vergangenheit sind die unterschiedlichsten Regelalgorithmen zur Abstimmung der Petersen-Spule im gesunden Netz entwickelt worden [2], [4]. Die meisten dieser Algorithmen basieren auf einer notwendigen Verstellung der Petersen-Spule. Die heutigen Netze sind einerseits charakterisiert durch eine Zunahme von sehr

symmetrischen Kabeln, was sich in eine wesentlich kleineren verwendbaren Null-Spannung auswirkt, und anderseits durch eine Zunahme des Übersprechens des Mitsystems auf das Nullsystem [2]. Durch die reduzierte Nullspannung müssen die Regler wesentlich empfindlicher eingestellt werden. Durch das Übersprechen des Laststromes auf das Nullsystem löst jede Änderung des Laststromes einen Abstimmvorgang aus, welcher bei den meisten der heute verwendeten Algorithmen zu einer Verstellung der Petersen-Spule führt. Durch das Übersprechen ist die Parameter-Estimation des Netzes wesentlich schwerer und eine Verstimmung der Petersen-Spule über einen größeren Verstellbereich erforderlich. Trotz des großen Verstellweges ist es manchmal nicht möglich, eine korrekte Abstimmung durchzuführen.

Mit der neuen Methode ist es möglich, eine korrekte Verstimmung auch ohne Verstellung der Petersen-Spule zu berechnen. Dies ist sogar dann möglich, wenn die natürliche Verlagerungsspannung Null ist oder die Störung durch das Übersprechen nicht vernachlässigbar ist. Die berechnete Verstimmung wird zur Überprüfung verwendet, ob die Petersen-Spule innerhalb eines definierten Toleranzbereiches der Sollverstimmung liegt, oder ob sie nachgestellt werden muss. Dadurch wird die Anzahl der notwendigen Verstellungen und die Zeit der Fehlabstimmung der Petersen-Spule wesentlich reduziert.

2 Symmetrische Komponenten

Die Ersatzschaltung für die Petersen-Spulenregelung wird anhand des folgenden einfachen Netzes abgeleitet [4],[1].

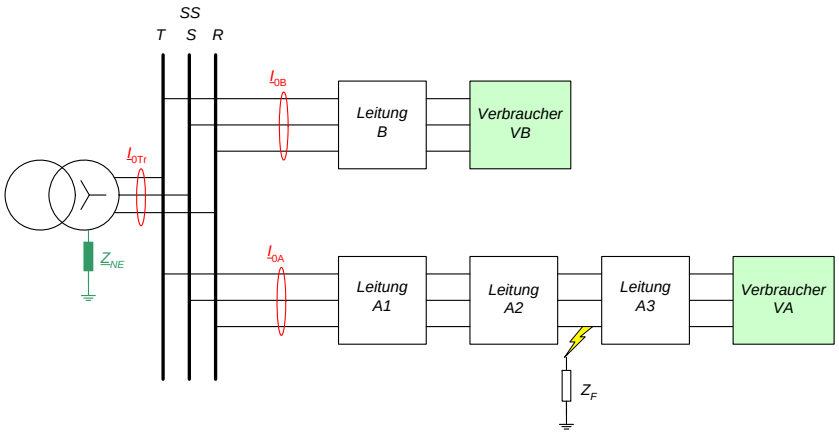


Bild 2 Erdschluss in einem einfachen gelöschten Netz

Im folgenden *Bild 3* ist für einen Leitungsabschnitt aus *Bild 2* das dreiphasige Ersatzschaltbild dargestellt.

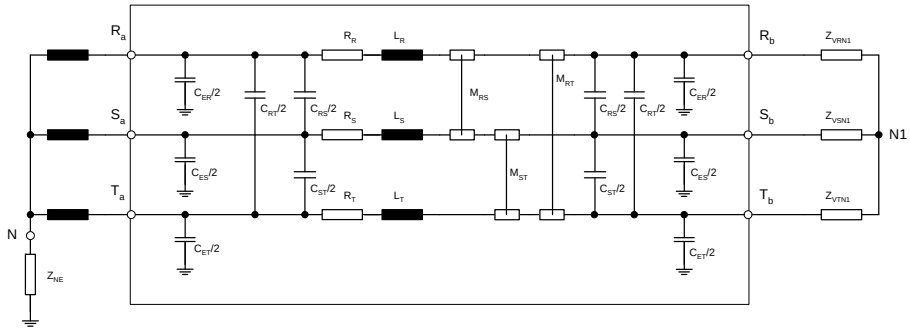


Bild 3 *Ersatzschaltung eines Leitungselementes des Netzes im Bild 2*

Die Anwendung der kompletten Ersatzschaltung der Leitung zur Beschreibung und Berechnung eines ausgedehnten Netzes wird schnell sehr komplex. Durch Transformation auf "Symmetrische Komponenten" [7],[5] erhält man für den gesunden Betrieb für den stationären Zustand das in *Bild 4* dargestellte entkoppelte Netzwerk.

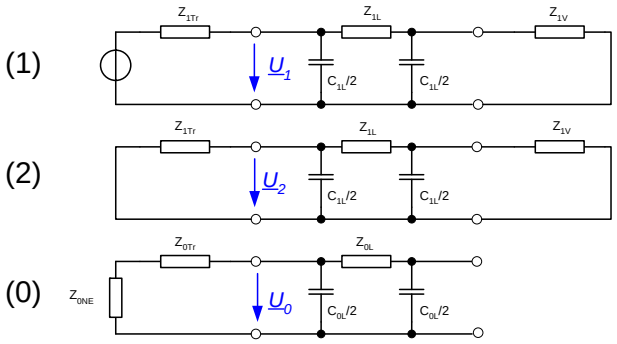


Bild 4 *Darstellung des gesunden Netzes mit Symmetrische Komponenten*

Im folgenden Bild ist das Netz von *Bild 2* vollständig mit Hilfe der symmetrischen Komponenten beschrieben.

Beim einpoligen Erdschluss erfolgt, wie im *Bild 5* dargestellt, eine Kopplung der drei Systeme an der Fehlerstelle.

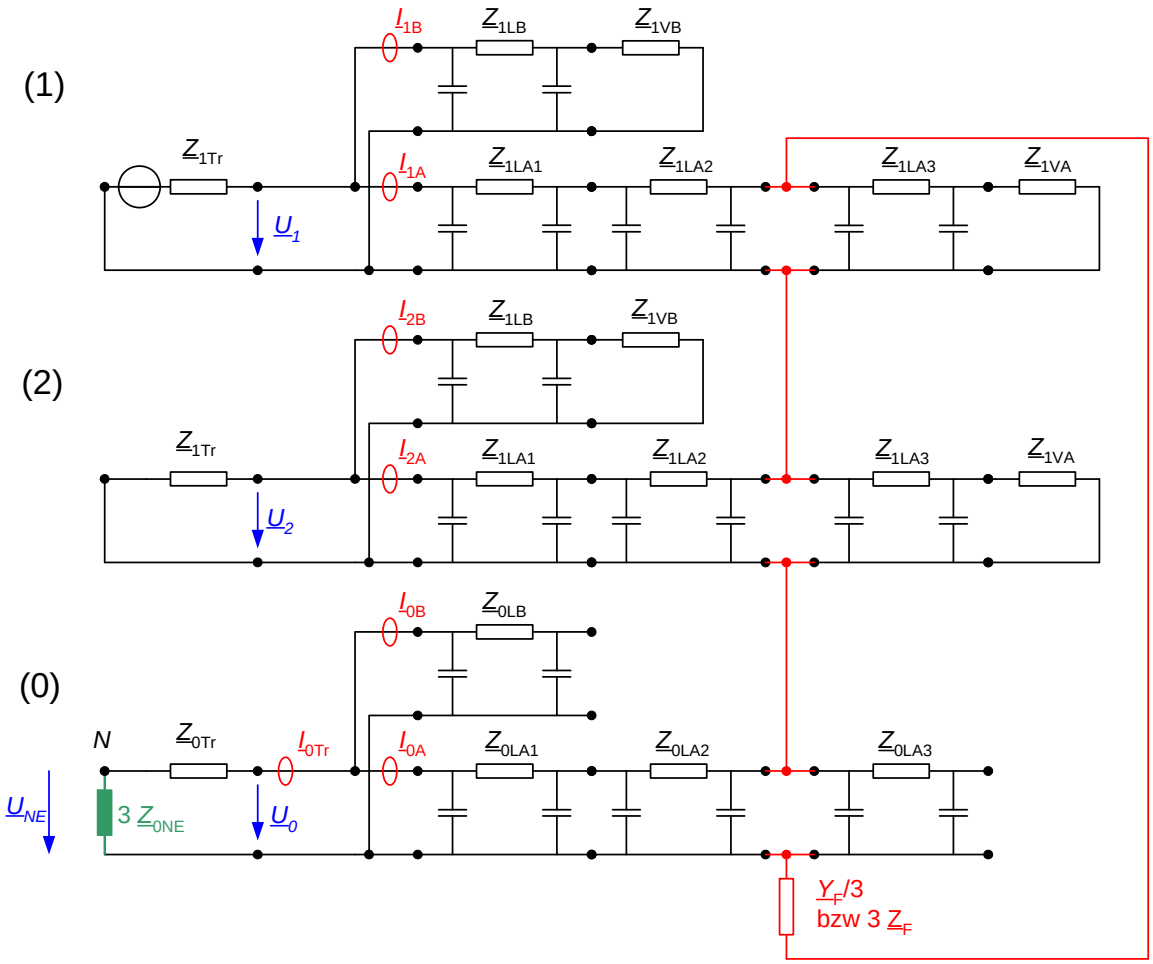


Bild 5 *Darstellung des erdschlussbehafteten Netzes vom Bild 2 mit Symmetrischen Komponenten*

Für die Betrachtung des Erdschlusses können weitere Vereinfachungen getroffen werden. Die Impedanz der Last ist wesentlich größer als die Summe der Mitimpedanz des Trafos und der Leitungsimpedanz vom Umspannwerk bis zur Fehlerstelle. Entlang der Leitung ist bei Nennbetrieb ein Spannungsabfall von 10% erlaubt. Dies bedeutet, dass die Impedanz der Last mindestens den zehnfachen Wert der Impedanz des Trafos und der Leitungslängsimpedanz hat. Die folgenden Impedanzen können daher zur Impedanz $\underline{Z}_j$ zusammengefasst werden:

- Mitimpedanz des Trafos
- Längsimpedanzen des Mitsystems der Leitung vom Trafo bis zur Fehlerstelle
- Gegenimpedanz des Trafos
- Längsimpedanz des Gegensystems der Leitung vom Trafo bis zur Fehlerstelle

Dies führt zu dem in *Bild 6* dargestellten vereinfachten Ersatzschaltbild.

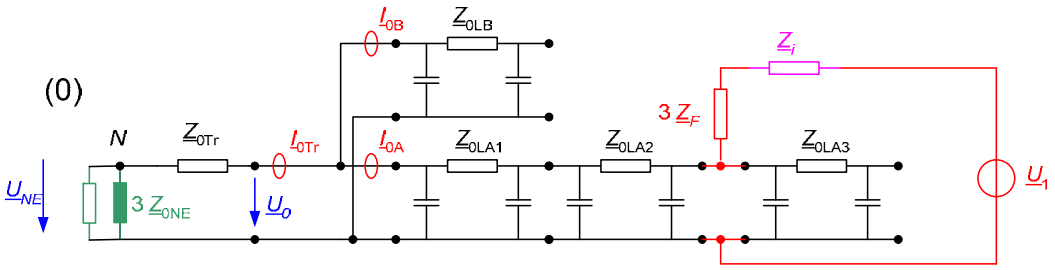


Bild 6 *Reduktion des Mit- und Gegensystems*

Im *Bild 7* wurde zusätzlich die Leitungslängsimpedanz des Nullsystems der gesunden Abgänge vernachlässigt.

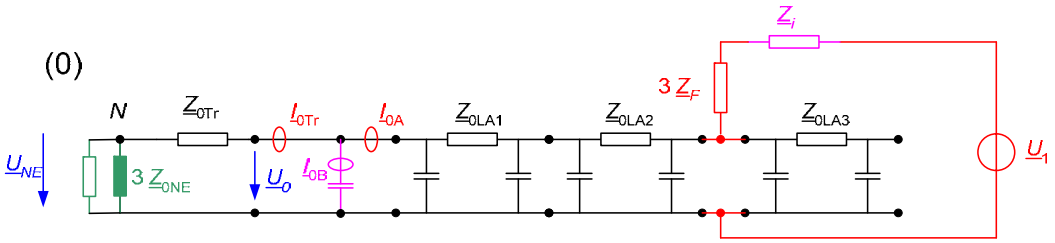


Bild 7 *Reduktion der gesunden Abgänge*

Für die weiteren Betrachtungen werden nun auch die Längs-Nullimpedanzen der Leitung im erdschlussbehafteten Abgang vernachlässigt. Die ohmschen Verluste in den Längsimpedanzen und die des Trafos werden über den Verlustwiderstand parallel zur Petersenspule berücksichtigt. Dies führt zu der sehr einfachen Ersatzschaltung von *Bild 8*.

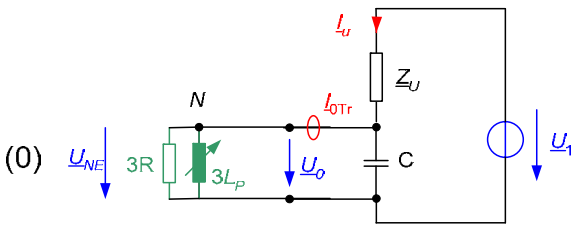


Bild 8 *Resultierendes Ersatzschaltbild*

Bei einem sehr niederohmigen Erdschluss ist die Spannung am Resonanzkreis mehr oder weniger eingeprägt. Der Strom $\underline{I}_u$ über die Fehlerstelle ist abhängig von der Art der Kompensation. Bei exakter Abstimmung verbleibt nur der Wirkstrom.

3 Prinzip des neuen Algorithmus

Alle bestehenden Algorithmen basieren auf der Tatsache, dass die Verlagerungsspannung entweder durch die natürliche Unsymmetrie des Netzes oder durch eine 50 Hz Stromeinspeisung hervorgerufen wird. Diese Algorithmen gehen davon aus, dass während des Abstimm- bzw. Berechnungsvorganges keine Änderung der natürlichen Unsymmetrie des Netzes bzw. keine Änderung des Übersprechens durch den Laststrom auftritt. Dabei ist zu beachten, dass der Berechnungsvorgang zwischen einigen Sekunden bis zu einigen Minuten dauern kann.

In der Realität sind aber diese Annahmen nicht gültig, wie z.B. im Bereich der Schwerindustrie mit symmetrischen Netzen aber extrem starken Schwankungen des Laststromes. Der neue CIF-Algorithmus (Control by Injecting Frequencies) unterdrückt durch Verwendung von Frequenzen ungleich 50 Hz das 50 Hz Übersprechen des Laststromes.

Im *Bild 9* ist das vereinfachte Ersatzschaltbild der Stromeinspeisung dargestellt.

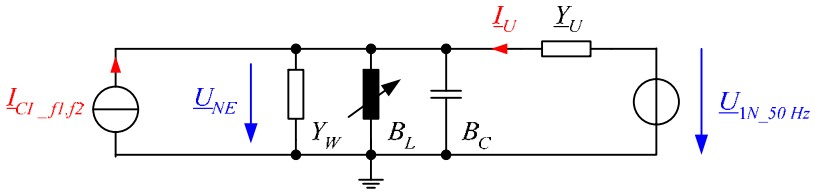


Bild 9 Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Stromeinspeisung

Für Frequenzen ungleich 50 Hz ergibt sich das folgende Bild

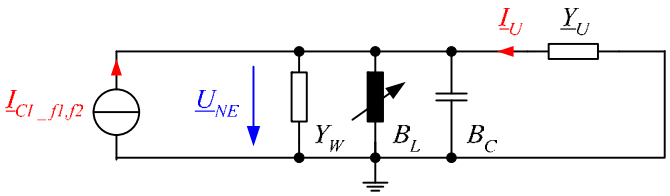


Bild 10 Ersatzschaltbild der Stromeinspeisung für Frequenzen ≠ 50Hz

Für die Frequenz f_n kann die Admittanz für ein Netz mit einer kleinen natürlichen Unsymmetrie $\underline{Y}_U$ aus der Sicht der Stromeinspeisung wie folgt beschrieben werden:

$$\underline{Y}_{CI_fn} = \frac{\underline{I}_{CI_fn}}{\underline{U}_{NE_fn}} \approx Y_W + j(\omega_n C - \frac{1}{\omega_n L}) \qquad (1)$$

Durch die Verwendung von zwei unterschiedlichen Frequenzen erhält man zwei komplexe Gleichungen für drei Unbekannte, die einfach gelöst werden können.

Die Annahme eines linearen Systems ermöglicht die Einspeisung von zwei Frequenzen und Berechnung der zugehörigen Admittanzen $\underline{Y}_{CI_fn}$ zur gleichen Zeit. Dies ermöglicht eine sehr schnelle Messung und Berechnung innerhalb von 240 ms.

Die folgenden Punkte stellen die Hauptvorteile des CIF-Algorithmus dar:

- Sehr schnelle Messung
- Verwendbar auch für vollkommen symmetrische Netze
- Unempfindlich gegenüber dem Messfehler der offenen Dreieckswicklung
- Unterdrückung des 50 Hz Übersprechens durch den Laststrom
- Einfache Anpassung des Einspeisestromes an Netzgegebenheiten

Die einzuspeisenden Frequenzen können einfach mit Hilfe einer Phasenanschnittsteuerung nach *Bild 12* realisiert werden.

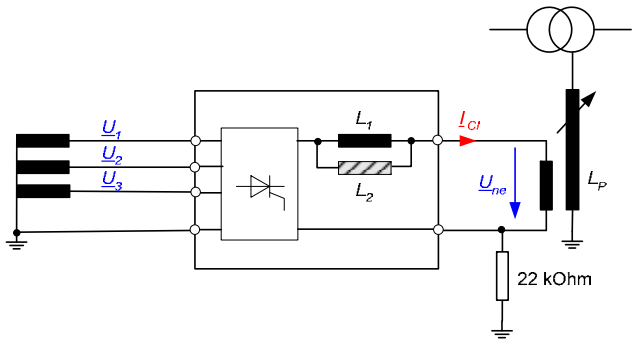


Bild 11 Phasenanschnittsteuerung zur Erzeugung der Einspeisefrequenzen

Durch eine PAM kann erreicht werden, dass die wesentlichen Spektralanteile des eingespeisten Stromes über definierte Periodenlängen ungleich 50 Hz sind. Dies wird in den folgenden Bildern gezeigt.

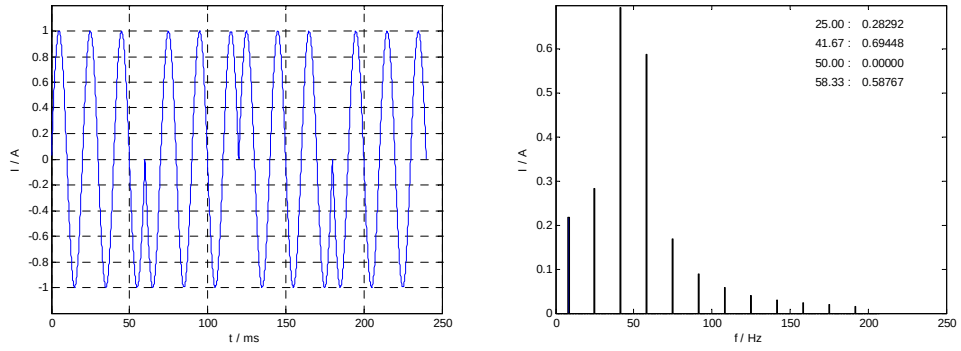


Bild 12 Puls-Diagramm des Einspeisestromes und zugehörige FFT

Durch eine Phasenanschnittsteuerung ist eine einfache Anpassung des einzuspeisenden Stromes möglich. Dadurch kann die Einspeiseleistung für kleine Netze einfach reduziert werden. Würde man auch bei kleinen Netzen mit der vollen Leistung einspeisen, dann würde man dadurch sofort eine große Verlagerungs-spannung und somit eine Erdschlussmeldung erzeugen.

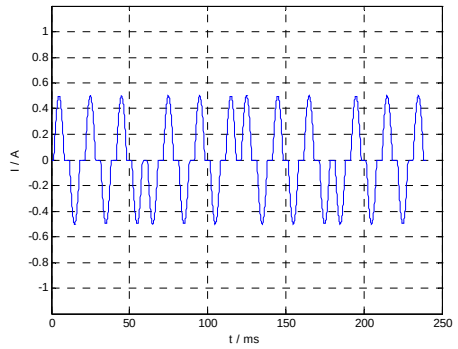


Bild 13 Steuerung der Amplitude des Einspeisestromes

Weitere Details wie die Frequenzen erzeugt werden sind ausführlich in [3] und [1] beschrieben.

4 Probleme bei der Realisierung

Das folgende Bild zeigt den prinzipielle Aufbau einer Petersen-Spule

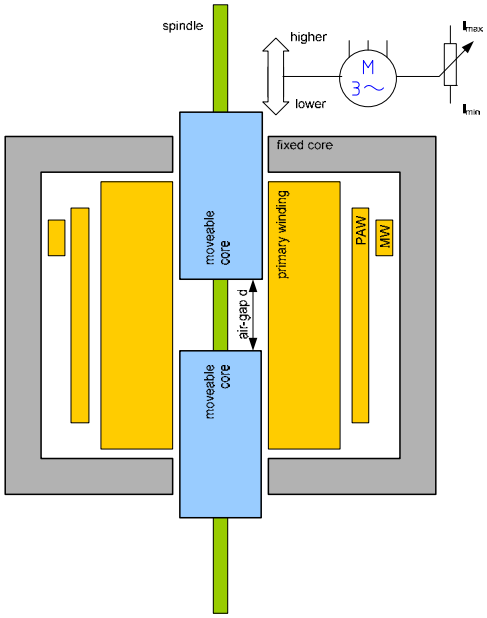


Bild 14 Prinzipieller Aufbau einer Petersen-Spule

Das Hauptproblem bei der Realisierung war die Frage, wie die beiden Frequenzen in das Nullsystem eingespeist werden können. Die erste Idee war, die Petersen Spule als Transformator zu verwenden und einen Strom von ca. 10 A in die 500 V Leistungshilfswicklung (Power-Auxiliary-Winding PAW) einzuspeisen und über die 100 V Messwicklung (MW) der Petersen-Spule die Verlagerungsspannungen zu messen.

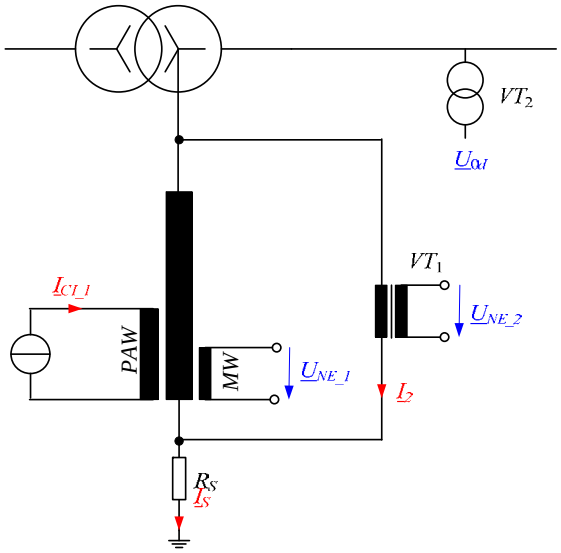


Bild 15 Petersen Spule mit externen Spannungswandlern

Bisher war es nicht notwendig, Petersen-Spulen für deren Verwendung in Verbindung mit einer Stromeinspeisungen zu spezifizieren. Die Standard-Designs der Petersen-Spule berücksichtigen daher derzeit keinen Anforderungskatalog für die Stromeinspeisung.

Durch den veränderlichen Luftspalt der Petersen-Spule wird die Kopplung von der Primär-Seite zur Sekundär-Seite von der Spulenstellung abhängig (siehe *Bild 16*).

Die Feldbilder in *Bild 16* wurden für zwei unterschiedliche Spulenstellungen bei Einspeisung des gleichen Stromes in die PAW mit Hilfe der FEM Methode [9][8] ermittelt.

Die Leistungshilfswicklung (PAW) wird üblicherweise so ausgelegt, dass ein Widerstand zur Erhöhung des Wattreststromes für die Erdschlussortung angeschlossen werden kann. Die Genauigkeit dieses Übersetzungsverhältnisses liegt im Bereich von ± 10 % und ist abhängig von der Spulenstellung. Ein zusätzliches Problem bei der Realisierung ergibt sich dadurch, dass einige EVU's das wattmetrische Verfahren nicht für die Erdschlussortung verwenden und somit die Petersen-Spulen aus Kostengründen ohne Leistungshilfswicklung bestellt werden.

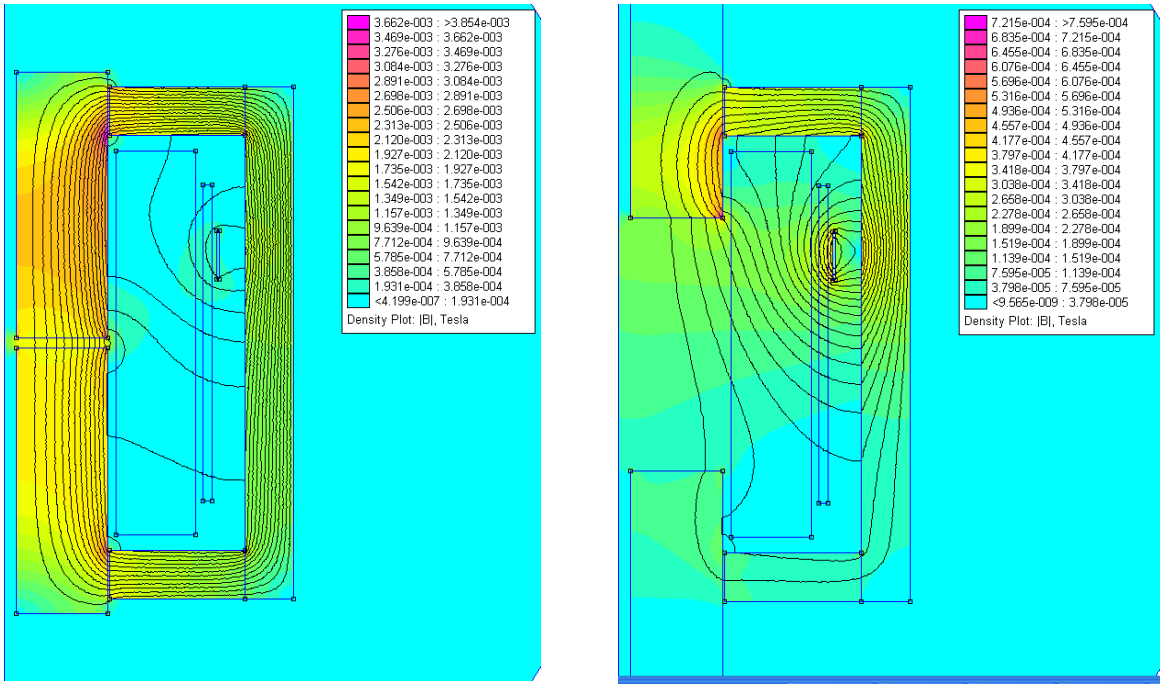


Bild 16 FEM-Bilder für unterschiedliche Spulenstellungen

Die Realisierung der Messwicklung (MW) hängt vom Hersteller und der Petersen-Spulen Spezifikation ab. Im einfachsten Fall sind es wenige konzentrierte oder verteilte dritte Wicklungen. Die Genauigkeit hängt von der Positionierung und Verteilung dieser Wicklung ab, ist aber üblicherweise auch nur im Bereich von ±5 bis ±10 %. Wenn vom Kunden eine höhere Genauigkeit gefordert wird, dann wird ein eigener Messwandler auf der Primärseite der Petersen-Spule montiert. Dieser Messwandler kann entweder innerhalb der Spule unter Öl oder extern z.B. auf dem Kessel der Petersen-Spule montiert werden.

Normalerweise existiert keine Spezifikation für die Kopplung zwischen der Leistungshilfswicklung (PAW) und der Messwicklung (MW). Dies kann aber zu Problemen führen, wenn in die Leistungshilfswicklung ein Strom eingespeist wird, da die Messwicklung die Spannung von der Primärseite abbilden sollte und nicht die Spannung an der PAW.

Aufgrund der Tatsache, dass die Petersen-Spule kein idealer Transformator ist, ist die genaueste Lösung die Verwendung eines externen Einphasen-Transformator parallel zur Petersen-Spule. Die Messung des Einspeisestromes erfolgt dabei auf der Primärseite dieses Einspeise-Transformators und die Messung der Spannung der Primärseite über einen eigenen Messwandler. Um die Kosten zu reduzieren kann bei geringem Verlust an Genauigkeit die Messwicklung der Petersen-Spule zur Messung der Spannung verwendet werden. Der Vorteil dieser Variante ist, dass diese Kombination auch verwendet werden kann, wenn die Petersen-Spule keine PAW besitzt.

Für die aufgezeigte Konfiguration wird ein Einphasentransformator benötigt, der auf der Niederspannungsseite dauernd mit ca. 10 A belastet werden kann. Für einen Messwandler ist dieser Strom bereits zu groß. Für den Einspeisetrafo sind damit bereits Sonderanfertigungen notwendig. Wenn an der Petersen-Spule eine PAW verfügbar ist, kann über diese der Strom eingespeist werden und über einen Messwandler parallel zur Petersen-Spule oder mit Hilfe der vorhandenen offenen Dreieckswicklung der Sammelschiene die Spannung gemessen werden. Diese Variante ist wesentlich kostengünstiger, da maximal ein zusätzlicher Standard-Spannungswandler benötigt wird.

Wenn alle drei Wicklungen am Kern der Wicklung angeordnet sind, ist die Kopplung von der PAW auf die MW zu groß. Diese Kombination sollte nicht verwendet werden. Die Praxis hat aber gezeigt, dass sehr wohl Anordnungen existieren, wo diese Kombination der PAW mit der internen MW bei reduzierter Genauigkeit verwendbar ist. Allerdings hat sich auch gezeigt, dass die notwendigen Berechnungsmethoden bei den Herstellern der Petersen-Spulen meist nicht zur Verfügung stehen, um eine Reproduktion des richtigen Verhaltens zu gewährleisten.

5 Betriebserfahrungen

Im Folgenden werden zwei Netze als Beispiel für die inzwischen sehr zahlreichen Installationen herausgegriffen.

Im ersten Netz hatte die installierte Petersen Spule einen Maximalwert von 210 A und der Resonanzpunkt des gelöschten Netzes lag bei 108 A. Der Sollwert der Verstimmung des Netzes war -5A. Aus *Bild 17* ist erkennbar, dass die Verlagerungs-spannung sehr klein und nicht stabil ist.

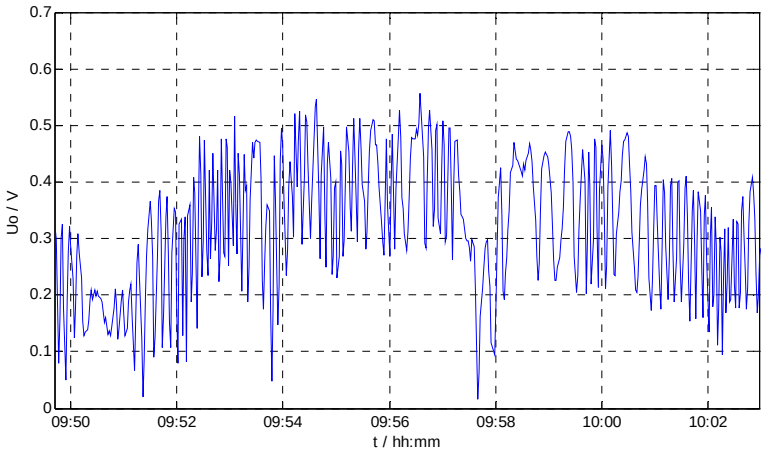


Bild 17 *Verlauf der gestörten Verlagerungsspannung* $\underline{U}_0$

Langsame und statistische Änderungen von $\underline{U}_0$ könnten als Übersprechen des Laststromes auf das Nullsystem interpretiert werden [2]. Aus der Detailansicht in *Bild 18* ist erkennbar, dass die Änderung einerseits einigermaßen periodisch ist und andererseits eine Periodendauer von wenigen Sekunden bis zu 30 Sekunden besitzt.

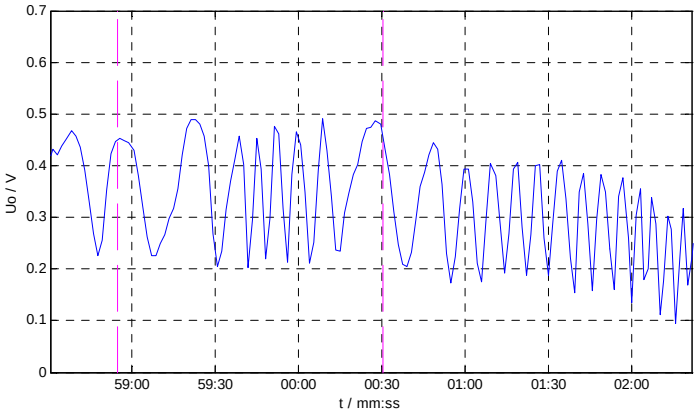


Bild 18 *Detailansicht von* $\underline{U}_0$

In *Bild 19* ist die zugehörige Ortskurve des selektierten Bereiches aus *Bild 18* dargestellt.

Weitere Untersuchungen ergaben, dass das Übersprechen durch die 3. Harmonische des 16.7 Hz 110-kV-Bahnnetzes verursacht wird, dass über eine längere Strecke parallel zum 20-kV-Netz verläuft. Die 16.7 Hz sind gegenüber dem 50 Hz Netz nicht synchronisiert, sodass eine variable Schwebung im 20-kV-Netz verursacht wird.

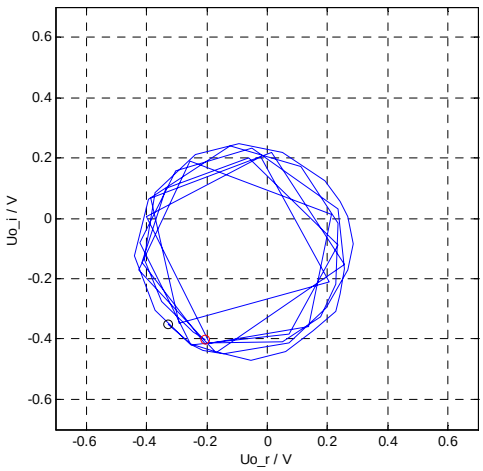


Bild 19 *Ortskurve von* $\underline{U}_0$

Durch diese Schwebung wird die Resonanzkurve natürlich, wie im *Bild 20* dargestellt, gestört. Für einen Petersen-Spulen Regler mit einem Standard-Such-Algorithmus ist eine korrekte Abstimmung nicht möglich. Zusätzlich würde dieser Regler dauernd auslösen und versuchen, die Spule abzustimmen. Die Anzahl der Suchvorgänge und die Zeit der Fehlabstimmung steigen dadurch stark an. Eine Petersen-Spule ist normalerweise so ausgelegt, dass sie nur 8h pro Jahr bewegt wird. Die mechanischen Teile würden dadurch in diesem Netz zu stark belastet werden.

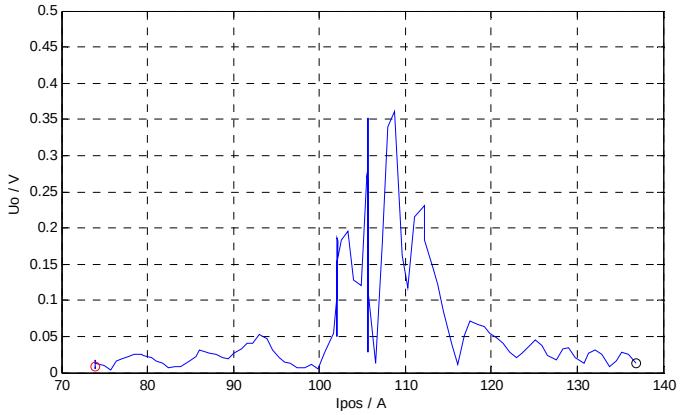


Bild 20 *Gestörten Resonanzkurve*

Für die folgende Darstellung wurde eine kontinuierliche Schätzung des Abstimm-punktes mit Hilfe der CIF-Methode während der Verstellung der Petersen-Spule von der oberen Endstelllung bis zur unteren Endstellung aktiviert. Die rote Kurve stellt die Spulenposition dar und die blaue Kurve den geschätzten Resonanzpunkt. Es ist erkennbar, das trotz der hohen Einstreuung die Abweichung des geschätzten Resonanzpunktes über den gesamten Bereich innerhalb von ±10 A liegt. Diese Werte sind sogar für die großen Verstimmungen von 100 A erreichbar.

Die üblichen Algorithmen funktionieren meist nur in der Umgebung des Resonanzpunktes und sind meist gar nicht in der Lage, bereits bei großen Verstimmungen den Resonanzpunkt zu schätzen.

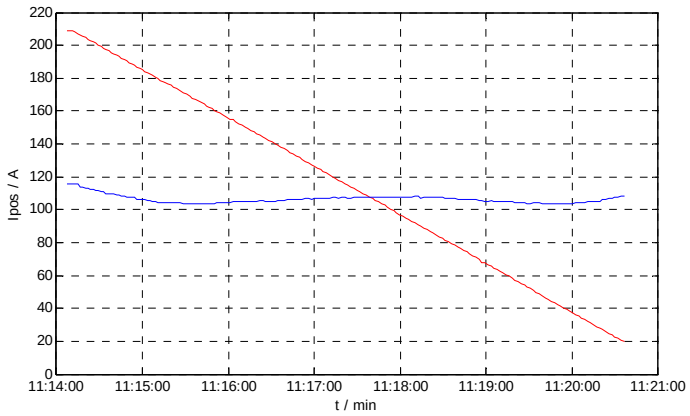


Bild 21 Geschätzter Resonanzpunkt abhängig von der Spulenstellung

Das zweite 20-kV-Netz hatte eine Petersen-Spule mit 188 A und einen Resonanzpunkt bei ca. 67 A. Die Sollverstimmung war auf -5A eingestellt. Infolge der Erdströme eines starr geerdeten 110-kV-Netzes mit 50 Hz im gleichen Umspannwerk wurde die Verlagerungsspannung des 20-kV-Netzes so stark beeinflusst, dass sich Änderungen der Verlagerungsspannungen im Bereich von 200% ergaben. Der zeitliche Verlauf der Verlagerungsspannung ist im *Bild 22* dargestellt.

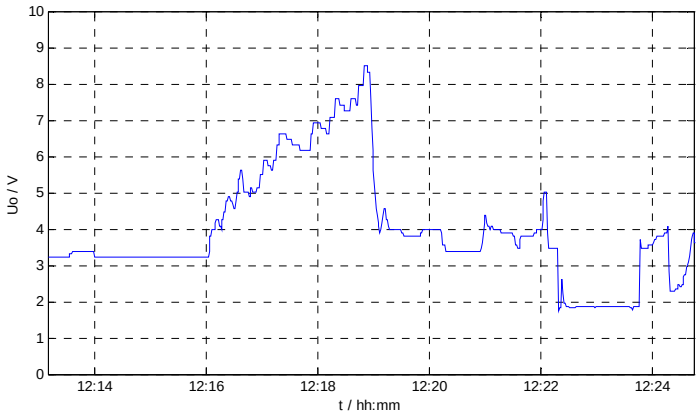


Bild 22 Gestörten Verlagerungsspannung $\underline{U}_0$ ohne Schaltvorgänge im Netz

Obwohl die Verlagerungsspannung in diesem Netz von Haus aus relativ hoch ist, können Standard-Petersen-Spulen Regler infolge des Übersprechens keine korrekte Abstimmung des Netzes durchführen. Im *Bild 23* ist die Resonanzkurve des Netzes dargestellt. Es ist zu beachten, dass diese Kurve bei der nächsten Suchoperation vollkommen anders aussieht.

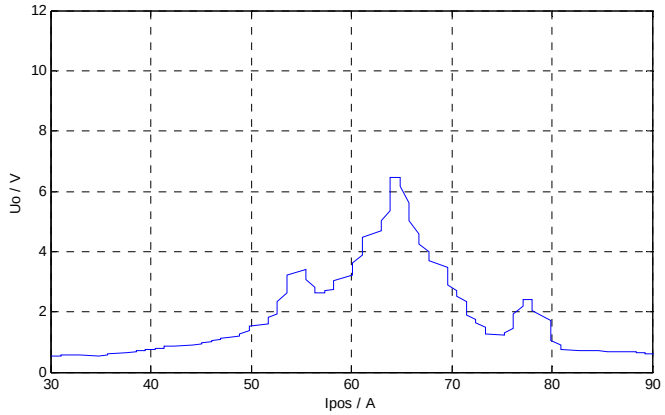


Bild 23 Gestörten Resonanzkurve

Die nächsten beiden Bilder zeigen die Verlagerungsspannung und die Spulenstellung bei aktivierter CIF-Methode. Während der Messung erfolgte eine beabsichtigte Netzumschaltung. Bei dieser Netzumschaltung wurde das Netz vorübergehend mit einem zweiten Netz gekuppelt, das auch mit -5A Unterkompensation betrieben wurde. Die Trennung der beiden Netze erfolgte danach an einer anderen Stelle, sodass das eigene Netz um ca. 10 A verkleinert wurde. Nach erfolgreicher Abstimmung wurde wieder in den ursprünglichen Netzzustand zurück geschaltet. Im Verlauf der Spulenstellung sind diese Vorgänge eindeutig identifizierbar. Hingegen ist im Verlauf der zugehörigen Verlagerungsspannung kaum etwas zu erkennen.

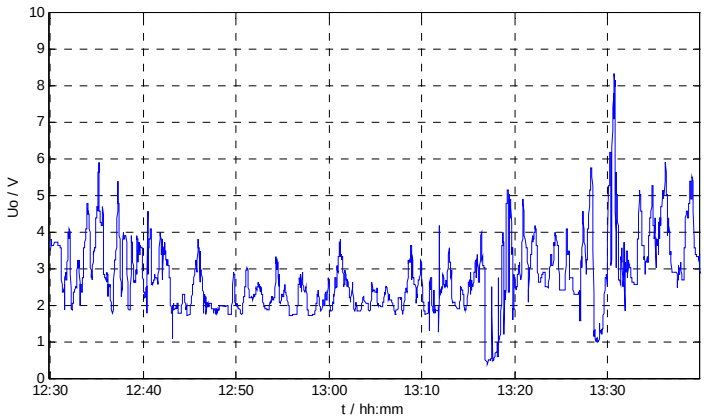


Bild 24 Verlauf der Verlagerungsspannung $\underline{U}_0$ mit Umschaltungen im Netz

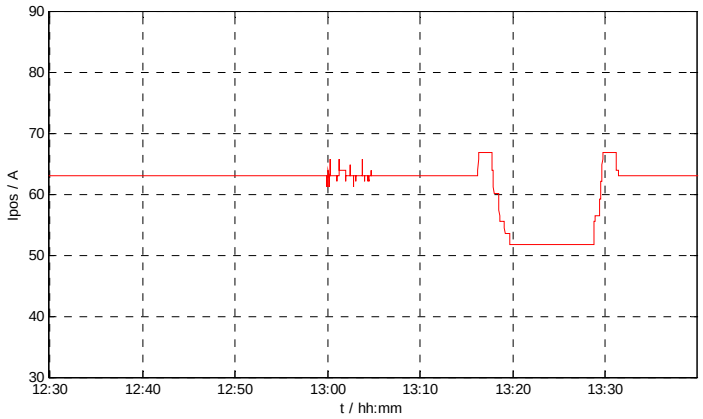


Bild 25 Spulenstellung

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden zwei Beispiele mit kleiner und großer natürlicher Unsymmetrie und mit großem Übersprechen durch den Laststrom bzw. durch ein 16.7-Hz-Netz gezeigt. Im Vergleich zu Standard Petersen-Spulen Reglern, die nicht in der Lage sind derartige Netze korrekt abzustimmen, können Regler die auf der CIF-Methode basieren ohne Probleme eine korrekte Abstimmung durchführen. Der CIF-Algorithmus ist genauer und schneller und kombiniert diese Vorteile mit einer wesentlich reduzierten Anzahl von Spulenbewegungen.
Die Ergebnisse aus diesen beiden Beispielen zeigen sehr überzeugend die Vorteile des CIF-Algorithmus. Auch die inzwischen sehr zahlreichen Installationen in vielen anderen Umspannwerken haben die Wirksamkeit des neuen Konzeptes bestätigt.

7 Literaturverzeichnis

[1] Druml G., 2007, *Petersen-Coil Controller REG-DP, Operation Manual*, A.Eberle GmbH&CoKG, Nürnberg, Germany

[2] Druml G., Kugi A., Parr B., 2001, "Control of Petersen Coils", *XI. International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, Linz

[3] Druml G., Kugi A., Seifert O., 2005, "New Method to Control Petersen Coils by Injection of Two Frequencies", CIRED 2005, Turin

[4] Druml G., Regelung von Petersen Spulen, 13. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung, Graz, 2003

[5] Grainger J., Stevenson W., Jr., Power System Analysis, McGraw-Hill, Singapore, 1994.

[6] Herold Gerhard, 2002, *Elektrische Energieversorgung II*, J. Schlembach Fachverlag, Weil der Stadt, Germany

[7] Koettnitz H., Pundt H., Berechnung elektrischer Energieversorgungsnetze: Mathematische Grundlagen und Netzparameter, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig ,1973

[8] Meeker David, Finite Element Method Magnetics, User Manual Version 4.0, 2006

[9] Meeker David, Finite Element Method Magnetics: Octave FEMM, User Manual Version 1.0, 2006

[10] Willheim R., Waters M., Neutral Grounding in High-Voltage Transmission, Elsevier Publishing Company, London, 1956.

Ein Beitrag zur Beobachtbarkeitsanalyse von verteilt parametrischen Systemen

Karl Rieger, Kurt Schlacher
Johannes Kepler Universität Linz,
Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung,
Altenberger Str. 69, 4040 Linz, Austria
karl.rieger@jku.at*, kurt.schlacher@jku.at

Kurzfassung

Dieser Beitrag widmet sich der Systemeigenschaft Beobachtbarkeit für verteilt parametrische Systeme, d.h. für Systeme, deren Bewegungsgleichungen durch partielle Differentialgleichungen bestimmt werden. Eine intrinsische Beschreibung für die Klasse der infinit dimensionalen Systeme im Rahmen der Differentialgeometrie soll zu einer formalen systemtheoretischen Analyse motivieren. Beginnend mit der Präsentation einer geeigneten Darstellungsform für verteilt parametrische Systeme, beschäftigt sich der Hauptteil dieses Beitrags mit der Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie. Weiters wird gezeigt, wie (lokale) Kriterien für die (Nicht-)Beobachtbarkeit durch den Einsatz von differentialgeometrischen und funktionalanalytischen Methoden gewonnen werden können.

1 Einleitung

Während mathematische Modelle in der klassischen Mechanik finit dimensionale Systeme darstellen, da der Kontinuumsaspekt keine Berücksichtigung findet, treten hingegen in der Kontinuumsmechanik im Allgemeinen infinit dimensionale Systeme auf, siehe z.B. [9]. Im Bereich der Numerik findet man meistens wiederum finit dimensionale Systeme aufgrund von Diskretisierungen. Der Fokus dieses Beitrags richtet sich auf dynamische Systeme, deren Bewegungsgleichungen durch (nichtlineare) gewöhnliche oder/und partielle Differentialgleichungen (ODEs, PDEs) bestimmt werden.

Für das Modellieren von physikalischen Phänomen kann die Beschreibung durch verteilt parametrische Systeme erforderlich sein, siehe z.B. [6]. Die Analyse von infinit dimensionalen Systemen ist jedoch nicht unkompliziert. Eine Möglichkeit besteht darin, das zugehörige approximative System zu berechnen, welches dann durch ODEs dargestellt ist. Jedoch können manche physikalische Effekte bzw. Systemeigenschaften durch diesen Ansatz nur bedingt erfasst werden, siehe z.B. [2]. Deshalb wird hier ein anderer Zugang

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

vorschlagen, wobei die Gleichungen selbst, d.h. ohne die Approximation mittels ODEs, betrachtet werden. Basierend auf einer intrinsischen Beschreibung von dynamischen Systemen wird gezeigt, wie notwendige und hinreichende Kriterien für (Nicht-)Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie mit Hilfe von differentialgeometrischen und funktionalanalytischen Methoden hergeleitet werden können.

Der Beitrag ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 werden einige verwendete mathematische Präliminarien zusammengefasst. In Abschnitt 3 wird dann das Beobachtbarkeitsproblem dargestellt und eine Analyse basierend auf Transformationsgruppen durchgeführt. Zur Erläuterung der vorgeschlagenen Theorie behandelt der Abschnitt 4 die Beobachtbarkeit von finit dimensionalen Systemen. In Abschnitt 5 wird die in Abschnitt 3 begonnene Beobachtbarkeitsanalyse mit funktionalanalytischen Methoden fortgeführt. Die entwickelte Theorie and deren Anwendbarkeit wird anschließend an einem Beispiel demonstriert.

2 Mathematische Präliminarien

Das geometrische Rahmengebilde bedient sich des Konzepts von glatten Mannigfaltigkeiten und Bündeln, siehe z.B. [13]. Ein Bündel ist ein Tripel $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$ mit der totalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}$, der Basismannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ and der surjektiven Submersion $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$, der so genannten Projektion. Für einen Punkt $p \in \mathcal{M}$ bezeichnet $\mathcal{F}_p = \pi^{-1}(p)$ die Faser über p. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}$ ist mit den adaptierten Koordinaten (X^i, x^α) ausgestattet, wobei X^i, $i = 1 \dots n_X$ die unabhängigen und x^α, $\alpha = 1 \dots n_x$ die abhängigen Koordinaten darstellen. Ein Schnitt γ eines Bündels $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ ist eine Abbildung $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$, für welche $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_\mathcal{M}$ gilt, wobei $\mathrm{id}_\mathcal{M}$ die Einheitsabbildung auf $\mathcal{M}$ ist. Das Tangential- und Kotangentialbündel bezüglich einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ werden mit $\mathcal{T}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ und $\mathcal{T}^*(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ bezeichnet. Diese Vektorbündel besitzen entsprechend die induzierten Koordinaten $(X^i, \dot{X}^i)$ und $(X^i, \dot{X}_i)$ sowie die holonomen Basen $\{\partial_i\}$ und $\{\mathrm{d}X^i\}$. Zur Vereinfachung wird im gesamten Beitrag die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Die äußere Algebra über der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ wird durch $\wedge(\mathcal{T}^*(\mathcal{N}))$ bezeichnet, mit der äußeren Ableitung $\mathrm{d} : \wedge_k(\mathcal{T}^*(\mathcal{N})) \to \wedge_{k+1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{N}))$, dem Inneren Produkt $\rfloor : \wedge_{k+1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{N})) \to \wedge_k(\mathcal{T}^*(\mathcal{N}))$, geschrieben in der Form $v \rfloor \omega$, $v : \mathcal{N} \to \mathcal{T}(\mathcal{N})$ und $\omega : \mathcal{N} \to \wedge_{k+1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{N}))$, sowie dem äußeren Produkt $\wedge$, wobei $\wedge_k(\mathcal{T}^*(\mathcal{N})) \to \mathcal{N}$ das äußere k-Formen Bündel auf $\mathcal{N}$ darstellt. Die Lie-Ableitung von $\omega : \mathcal{N} \to \wedge(\mathcal{T}^*(\mathcal{N}))$ und $v : \mathcal{N} \to \mathcal{T}(\mathcal{N})$ entlang eines Vektorfeldes $f : \mathcal{N} \to \mathcal{T}(\mathcal{N})$ wird durch $L_f(\omega) = f(\omega)$ und $L_f(v) = f(v)$ entsprechend indiziert.

Die k-ten partiellen Ableitungen eines Schnittes $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ sind durch

$$\gamma^\alpha_J = \partial_J \gamma^\alpha = \frac{\partial^k}{\partial_1^{j_1} \dots \partial_{n_X}^{j_{n_X}}} \gamma^\alpha, \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$$

gegeben, mit dem geordneten Multiindex $J = j_1, \dots, j_{n_X}$, und $k = \#J = \sum_{i=1}^{n_X} j_i$. Unter Verwendung von adaptierten Koordinaten kann der Schnitt $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ zu einer Abbildung $j^n(\gamma) = (X^i, \gamma^\alpha(X), \partial_J \gamma^\alpha(X))$ erweitert werden, dem n-ten Jet von γ. Die Menge aller n-ten Jets (oder Prolongationen) der Schnitte $\mathcal{M} \to \mathcal{E}$ ist eine Mannigfaltigkeit

$J^n(\mathcal{E})$ mit dem adaptierten Koordinatensystem (X^i, x^α_J), $0 \leqslant \#J \leqslant n$, wobei $x^\alpha = x^\alpha_J$ für $\#J = 0$ gilt. Zusätzlich können mit Hilfe der Jetmannigfaltigkeit $J^n(\mathcal{E})$ unter anderem die zwei Bündel $\pi^n : J^n(\mathcal{E}) \to \mathcal{M};\ (X^i, x^\alpha_J) \mapsto (X^i)$ und $\pi^n_0 : J^n(\mathcal{E}) \to \mathcal{E};\ (X^i, x^\alpha_J) \mapsto (X^i, x^\alpha)$ konstruiert werden.

Das vertikale Vektorbündel $\mathcal{V}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ ist eine Unterbündel von $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$, wobei $\pi_*(v) = 0\ \forall v : \mathcal{E} \to \mathcal{V}(\mathcal{E})$ gilt und v als π-vertikal bezeichnet wird. Weiters ist ein Vektorfeld $v : \mathcal{E} \to \mathcal{T}(\mathcal{E})$ π-projizierbar, wenn $\exists w : \mathcal{M} \to \mathcal{T}(\mathcal{M})\ \pi_*(v) = w \circ \pi$ gilt. Ein π-projizierbares Vektorfeld generiert (lokal) eine 1-parametrische Gruppe mit dem Parameter ε und induziert ebenfalls den Bündelautomorphismus $(\exp(\varepsilon\pi_*(v), \exp(\varepsilon v)))$, siehe bspw. [13]. Für ein Vektorfeld $v : \mathcal{E} \to \mathcal{V}(\mathcal{E})$ kann weiters ein fasererhaltender Automorphismus $(\mathrm{id}_\mathcal{M}, \exp(\varepsilon v)))$ angegeben werden. Anstatt den gruppeninduzierten Automorphismus auf $J^n(\mathcal{E})$ zu prolongieren, kann der zugehörige infinitesimale Generator mit folgender Formel prolongiert werden,

$$\begin{aligned} j^n(v) = d_J(v^\alpha)\partial^J_\alpha,\ 1 \leqslant \#J \leqslant n, \\ v = v^\alpha\partial_\alpha,\ d_J = (d_1)^{j_1} \circ \cdots \circ (d_{n_X})^{j_{n_X}} \end{aligned} \tag{1}$$

mit $d_i : J^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{T}(J^\infty(\mathcal{E}))$ und $d_J(v^\alpha) = v^\alpha$ für $\#J = 0$. Der Operator d_i ist ein Vektorfeld $d_i : J^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{T}(J^\infty(\mathcal{E}))$, wobei $(d_i f) \circ j^{n+1}(\gamma) = \partial_i f(j^n(\gamma))\ \forall f \in C^\infty(J^n(\mathcal{E}))$, $\forall \gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ gilt, und wird als die totale Ableitung bzgl. der unabhängigen Koordinate X^i bezeichnet. In den adaptierten Koordinaten (X^i, x^α) gilt $d_i = \partial_i + x^\alpha_{J+1_i}\partial^J_\alpha,\ \partial^J_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha_J}$.

In diesem Beitrag indiziert die Koordinate X^1 explizit die Zeit t und $X^j_\mathcal{D} = X^{1+j}$, $j = 1 \ldots n_X - 1$ die räumlichen Koordinaten. Ein dynamisches System wird beschrieben durch eine Menge von ODEs und PDEs, wovon sich jede Differentialgleichung auf ein bestimmtes räumliches Gebiet $\mathcal{D}(\alpha)$ mit $\mathcal{D} = \bigcup_\alpha \mathcal{D}(\alpha) \subseteq \mathcal{M},\ \alpha = 1, \ldots, n_x$ bezieht. Es sei angenommen, dass es sich bei $\mathcal{D}(\alpha)$ um $n_{\mathcal{D}(\alpha)}$-dimensionale, nicht-leere, beschränkte, reguläre und offene Mengen handelt $(\forall \alpha \in [1, \ldots, n_x]\ n_{\mathcal{D}(\alpha)} \in \mathbb{N}^+)$, d.h. mit den Rändern $\partial\mathcal{D}(\alpha)$, welche stückweise C^1 sind, sowie durch $(n_{\mathcal{D}(\alpha)} - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten gegeben sind, bei denen $\mathcal{D}(\alpha)$ entsprechend lokal auf einer Seite von $\partial\mathcal{D}(\alpha)$ positioniert ist. Die Gebiete $\mathcal{D}(\alpha)$ sind mit den topologischen Eigenschaften einer beschränkten Mannigfaltigkeit mit kohärent orientierten Rändern $\partial\mathcal{D}(\alpha)$ ausgestattet. Weiters bezeichnen $\mathcal{B}(\mu)$, $\mu = 1, \ldots, n_b$ mit $\mathcal{B}(\mu) \subseteq \bigcup_\alpha \partial\mathcal{D}(\alpha)$ die räumlichen Randgebiete und $\mathcal{Y}(\zeta), \zeta = 1, \ldots, n_y$ mit $\mathcal{Y}(\zeta) \subseteq \mathcal{D}$ die räumlichen Ausgangsgebiete.

In weiterer Folge betrachten wir explizite dynamische Systeme in der Form

$$\begin{aligned} x^\alpha_{[1,\mathbf{0}]} &= F^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)}\left(X, x_{[0,J]}, u_{[0,K]}\right) \quad ,\ \alpha = 1, \ldots, n_x \\ 0 &= F^\mu_{\mathcal{B}(\mu)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}, u_{[0,\tilde{K}]}\right) \quad ,\ \mu = 1, \ldots, n_b \\ y^\zeta &= F^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}, u_{[0,\tilde{K}]}\right) \quad ,\ \zeta = 1, \ldots, n_y \end{aligned} \tag{2}$$

mit $0 \leq \#J \leq n$, $0 \leq \#K \leq n$, $0 \leq \#\tilde{J} \leq m$ und $0 \leq \#\tilde{K} \leq m$. Der tiefgestellte Index referenziert entsprechend auf den örtlichen Gültigkeitsbereich der einzelnen Gleichungen. Weiters betrachten wir die Bündel $\mathcal{E}_\mathcal{X} \to \Omega$ und $\mathcal{E}_\mathcal{U} \to \Omega$ mit den (lokalen)

adaptierten Koordinaten (X^i, x^α) und (X^i, u^ς) auf $\mathcal{E}_\mathcal{X}$ und $\mathcal{E}_\mathcal{U}$, wobei X^i, $i = 1 \dots n_X$ die unabhängigen Koordinaten darstellen und x^α, $\alpha = 1 \dots n_x$ sowie u^ς, $\varsigma = 1 \dots n_u$ die abhängigen Koordinaten. Der so genannte Raum-Zeit Zylinder $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$, in dem sich das System evolviert, sei eine kompakte n_X-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}$. Um das geometrische Bild eines dynamischen Systems mit Eingängen zu verdeutlichen, wird das Produktbündel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mathcal{X} \times \mathcal{E}_\mathcal{U} \to \Omega$ eingeführt. Die expliziten Systemgleichungen (2) beschreiben nun eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $J^n(\mathcal{E})$, siehe [3]. Entsprechend dieser Bündelkonstruktion ist eine Lösung des Systems (2) ein Schnitt $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{X}$, welcher für einen zulässigen Eingang $u = \mu(X)$, $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{U}$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^\alpha_{[\bar{1},\mathbf{0}]} \circ j^1(\gamma) = &\quad F^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)}\left(X, x_{[0,J]}, u_{[0,K]}\right) \circ j^n(\mu) \circ j^n(\gamma) \\ 0 = &\quad F^\mu_{\mathcal{B}(\mu)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}, u_{[0,\tilde{K}]}\right) \circ j^m(\mu) \circ j^m(\gamma) \end{aligned} \tag{3}$$

erfüllt. Fortan verwenden wir die Abkürzung $\check{F}^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)} = F^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)} \circ j^n(\mu)$, $\check{F}^\mu_{\mathcal{B}(\mu)} = F^\mu_{\mathcal{B}(\mu)} \circ j^m(\mu)$ und $\check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)} = F^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\mu)$. Ein zulässiger Koordinatenwechsel des dynamischen Systems (2) ist gegeben durch eine bijektive Abbildung $\psi = (\psi^i_X, \psi^\alpha_x, \psi^\varsigma_u)$,

$$\begin{aligned} \bar{X}^{\bar{1}} &= \psi^{\bar{1}}_X(X^1), \\ \bar{X}^{1+\bar{j}}_\mathcal{D} &= \psi^{1+\bar{j}}_X(X_\mathcal{D}) \quad , \ \bar{j} = 1, \dots, n_X - 1 \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}} &= \psi^{\bar{\alpha}}_x(X_\mathcal{D}, x) \quad , \ \bar{\alpha} = 1, \dots, n_x \\ \bar{u}^{\bar{\varsigma}} &= \psi^{\bar{\varsigma}}_u(X_\mathcal{D}, u) \quad , \ \bar{\varsigma} = 1, \dots, n_u. \end{aligned} \tag{4}$$

Natürlich könnten auch allgemeinere Transformationen zugelassen werden. Diese würden aber weitere mathematische Präliminarien benötigen. Das System in neuen Koordinaten folgt zu

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\bar{\alpha}}_{[\bar{1},\mathbf{0}]} &= \partial_{\bar{1}}(\psi^{\bar{1}}_X)^{-1} d_{[1,\mathbf{0}]}\left(\psi^{\bar{\alpha}}_x(X_\mathcal{D}, x)\right) \circ j^n(\psi)^{-1} &&= \bar{F}^{\bar{\alpha}}_{\mathcal{D}(\bar{\alpha})}\left(\bar{X}, \bar{x}_{[0,\bar{J}]}, \bar{u}_{[0,\bar{K}]}\right), \\ 0 &= F^{\bar{\mu}}_{\mathcal{B}(\bar{\mu})}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}, u_{[0,\tilde{K}]}\right) \circ j^m(\psi)^{-1} &&= \bar{F}^{\bar{\mu}}_{\mathcal{B}(\bar{\mu})}\left(\bar{X}, \bar{x}_{[0,\bar{\tilde{J}}]}, \bar{u}_{[0,\bar{\tilde{K}}]}\right), \\ y^{\bar{\zeta}} &= F^{\bar{\zeta}}_{\mathcal{Y}(\zeta)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}, u_{[0,\tilde{K}]}\right) \circ j^m(\psi)^{-1} &&= F^{\bar{\zeta}}_{\mathcal{Y}(\zeta)}\left(\bar{X}, \bar{x}_{[0,\bar{\tilde{J}}]}, \bar{u}_{[0,\bar{\tilde{K}}]}\right). \end{aligned}$$

Äquivalent zur Darstellungsform (2) kann ein freies explizites dynamisches System auch in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}^\alpha = &\quad F^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)}\left(X, x_{[0,J]}\right) \\ 0 = &\quad F^\mu_{\mathcal{B}(\mu)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma(X)|_{X^1=t_0} = \gamma_{t_0} = x_{t_0}$ angegeben werden. Hierbei entspricht die Zeit t explizit dem Kurvenparameter τ und $F^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)}\partial_\alpha : J^n(\mathcal{E}_\mathcal{X}) \to \pi_0^{n,*}(\mathcal{V}(\mathcal{E}_\mathcal{X}))$ stellt ein generalisiertes vertikales Vektorfeld dar. Ein (Halb-)Fluss des Systems (5) ist bestimmt durch ein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^+$), welches auch 0 enthält, und durch eine Abbildung

$\phi : \mathcal{I} \times \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$, welche für alle $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{I}$ und $X_0 = X|_{X^1=t_0}$

$$\phi_0 (X_0, x_{t_0}) = (X_0, x_{t_0})$$
$$\phi_{\tau_1+\tau_2} (X_0, x_{t_0}) = \phi_{\tau_1} \circ \phi_{\tau_2} (X_0, x_{t_0}) = \phi_{\tau_2} \circ \phi_{\tau_1} (X_0, x_{t_0})$$

erfüllt, wenn $\tau_1 + \tau_2 \in \mathcal{I}$ und die Systemgleichungen

$$\begin{aligned} d_{[1,\mathbf{0}]} (\phi^{\alpha}_{\tau} (X_0, x_{t_0})) &= F^{\alpha}_{\mathcal{D}(\alpha)} \left(X, x_{[0,J]}\right) \circ j^n (\phi_{\tau} (X_0, x_{t_0})) \\ 0 &= F^{\mu}_{\mathcal{B}(\mu)} \left(X, x_{[0,\tilde{J}]}\right) \circ j^m (\phi_{\tau} (X_0, x_{t_0})) \end{aligned}$$

eingehalten werden.

3 Beobachtbarkeit und Transformationsgruppen - 1

Mit der Hilfe von differentialgeometrischen Methoden besteht die Intention nun darin, diese Klasse von Systemen vom Standpunkt der Regelungstechnik aus zu untersuchen. In diesem Beitrag wird eine Systemanalyse basierend auf Liegruppen, siehe z.B. [10], angestrebt, da sich dieser Ansatz bereits als zielführend zur Untersuchung von zeitkontinuierlichen konzentriert parametrischen Systemen herausgestellt hat, siehe [15]. Mit der Hilfe eines infinitesimalen Invarianzkriteriums für verteilt parametrische Systeme können Bedingungen für lokale (Nicht-)Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie angegeben werden. Die Idee hinter dieser Analyse besteht darin, die Systemeigenschaft Beobachtbarkeit mit der Nicht-Existenz einer gewissen Transformationsgruppe in Verbindung zu setzen.

Die Anforderungen für die Analyse mittels Transformationsgruppen sind ein mathematisches Modell (2) und passende Funktionenräume $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t([t_0, t_0 + T], \mathcal{H}_{\mathcal{D}})$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(t_0, t_0 + T)$ für die Lösungen und Ausgänge, d.h. wir fordern an dieser Stelle die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ bezeichnet den Funktionenraum basierend auf dem Gebiet $\mathcal{D}$ und $\mathcal{H}_t$ den Funktionenraum für die zeitliche Evolution. Für spezifische Koordinaten wird angenommen, dass es sich bei diesen Funktionenräumen um Banachräume handelt, d.h. um normierte, vollständige Vektorräume. Betrachtet man Lösungen $\gamma_{\mu} : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ des dynamischen Systems (2) auf dem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0+T]$, $T > 0$ für zulässige Eingänge $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$, so ist für die Beobachtbarkeit insbesondere die Ausgangsabbildung $f_y : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$; $\gamma_{t_0} \longmapsto y$ von Interesse, welche eine Abbildung zwischen Banachräume darstellt. Zur Vereinfachung verwenden wir hier die bekannte Notation aus der Funktionalanalysis. So bezeichnet $\acute{f}_y$ die Fréchet Ableitung von f_y, siehe z.B. [1]. Es wird angenommen, dass f_y kontinuierlich (Fréchet) differenzierbar ist bezüglich allen Punkten $\bar{\gamma}_{t_0}$ aus einer offenen Umgebung $V_{\gamma_{t_0}}$ von $\gamma_{t_0} \in V_{\gamma_{t_0}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$, d.h. die Fréchet Ableitung $\acute{f}_y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$ existiert für $\forall \bar{\gamma}_{t_0} \in V_{\gamma_{t_0}}$, wobei $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$ den Raum der linearen Operatoren von $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ auf $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ bezeichnet. Dies induziert somit die Stetigkeit von f_y für alle $\bar{\gamma}_{t_0} \in V_{\gamma_{t_0}}$, siehe z.B. [1]. Weiters wird $f_y : V_{\gamma_{t_0}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ als kontinuierlich (Fréchet) differenzierbar bezeichnet, wenn $\acute{f}_y \circ \bar{\gamma}_{t_0}$ (als ein Element von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$) stetig von $\bar{\gamma}_{t_0} \in V_{\gamma_{t_0}}$ abhängt.

Für konzentriert parametrische Systeme ist sehr wohl bekannt, dass im Generellen die Beobachtbarkeitseigenschaft von der Systemtrajektorie abhängt, siehe z.B. [15]. Aus diesem Grund definieren wir hier den Begriff der Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie.

Die grundsätzliche Idee hinter dem Beobachtbarkeitproblem ist die Eigenschaft, dass der Anfangszustand mit Hilfe bekannter Daten über ein Zeitintervall ermittelt werden kann.

Definition 1. *Gegeben sei eine Lösung $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ des dynamischen Systems (2) gemäß (3) auf dem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, mit den zulässigen Eingängen $u^{\varsigma} = \mu^{\varsigma}(X)$, $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ sowie den Ausgängen $y^{\zeta} = F^{\zeta}_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\mu) \circ j^m(\gamma)$, $\alpha_y = 1, \ldots, n_y$.*

1. *Das System (2) ist (lokal) exakt beobachtbar entlang einer Trajektorie γ, wenn lokal der Anfangszustand γ_{t_0} in eindeutiger Weise und stetiger Abhängigkeit von den Ausgängen y^{ζ} bei Kenntnis der Eingänge u^{ς} sowie der Systemgleichungen (3) ermittelt werden kann.*

2. *Das System (2) ist (lokal) approximativ beobachtbar entlang einer Trajektorie γ wenn lokal der Anfangszustand γ_{t_0} eindeutig aufgrund der Kenntnis der Ausgänge y^{ζ}, der Eingänge u^{ς} sowie der Systemgleichungen (3) festgelegt wird.*

Im finit Dimensionalen sind approximative und exakte Beobachtbarkeit äquivalente Begriffe [16]. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall für verteilt parametrische Systeme aufgrund der intrinsischen infinit dimensionalen Natur des Zustandsraumes. Ein schwächerer Begriff als exakte Beobachtbarkeit wurde daher eingeführt, um zu berücksichtigen, dass das Urbild von f_y auch ein dichter Unterraum von $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ sein kann. Dies hat zur Folge, dass der Anfangszustand nur beliebig genau, aber nicht exakt, ermittelt werden kann, siehe z.B. [16]. Im $\mathbb{R}^{n_X}$ hingegen ist jeder Unterraum abgeschlossen, siehe z.B. [8], d.h. der einzige abgeschlossene dichte Unterraum ist der ganze Unterraum selbst. Die Beobachtbarkeit gemäß Definition 1 ist lokal definiert und dient als Basis für die nachfolgenden Untersuchungen.

Anmerkung 1. *Gegeben sei eine Lösung $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ des dynamischen Systems (2) auf dem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, mit dem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Wenn die Lösung γ vertikal so variiert werden kann, d.h. in der Form*

$$\bar{\gamma}(X) = \Phi(X, \gamma(X)),$$

dass die verzerrte Lösung $\bar{\gamma}$ eine weitere Lösung des dynamischen Systems (2) darstellt und zudem den Ausgang y invariant lässt, d.h.

$$y^{\zeta} = F^{\zeta}_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\gamma) = F^{\zeta}_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\bar{\gamma}),$$

dann ist das System (2) nicht beobachtbar entlang der Trajektorie γ.

Hinsichtlich Anmerkung 1 wird eine solche Verzerrung der Lösungskurve durch eine Symmetriegruppe $\Phi_{\varepsilon} : \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ identifiziert, d.h. welche einen Fluss auf $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ generiert und mit deren Hilfe neue Lösungen von gegebenen Lösungen berechnet werden können. Aus diesem Grund wird hier die Theorie über Symmetriegruppen (Lie-Gruppen) verwendet. Um die Überlegungen von Anmerkung 1 nun geeignet zu formulieren, betrachten wir eine 1-parametrige (Lie-)Gruppe der Form

$$\Phi : \mathcal{G} \times \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}};\ (\varepsilon, X,\ x) \longmapsto (X,\ \bar{x}) \tag{6}$$

und $(X,\ \bar{x}) = \Phi_\varepsilon\,(X,\ x)$ mit dem Gruppenparameter ε sowie $\Phi_\varepsilon = \Phi\,(\varepsilon, \cdot) = \left(\Phi^i_{X,\varepsilon}, \Phi^\alpha_{x,\varepsilon}\right)$, welche nur auf den abhängigen Koordinaten x^α operiert. Weiters kann auch der infinitesimale Generator von der Transformationsguppe (6)

$$v_{\mathcal{O}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Phi^\alpha_{x,\varepsilon}(X,\ x)\bigg|_{\varepsilon=0}\partial_\alpha = v^\alpha(X,\ x)\partial_\alpha \tag{7}$$

mit geeigneten Funktionen $v^\alpha(X,\ x) \in C^\infty(\mathcal{E}_\mathcal{X})$ betrachtet werden. Da die Gruppe nur auf den abhängigen Koordinaten x^α operiert, entspricht (7) einem vertikalen Vektorfeld $v_\mathcal{O} : \mathcal{E}_\mathcal{X} \to \mathcal{V}(\mathcal{E}_\mathcal{X}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}_\mathcal{X})$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}_\mathcal{X}$. Fortan verwenden wir den infinitesimalen Generator $v_\mathcal{O}$ der Transformationsgruppe Φ_ε und die zugehörige n-te Prolongation $j^n(v_\mathcal{O})$, gegeben durch $j^n(v_\mathcal{O}) = d_J(v^\alpha)\partial^J_\alpha$, siehe (1), anstatt Φ_ε selbst, um Variationen einer nominellen Lösung γ zu untersuchen.

Ein zulässiges Vektorfeld $v_\mathcal{O}$ unterliegt nun gewissen Restriktionen. Es muss gewährleistet werden, dass die Transformationsgruppe eine Symmetriegruppe des Systems (2) darstellt, damit Lösungen auf Lösungen abgebildet werden. Deshalb wird das (prolongierte) vertikale Vektorfeld $v_\mathcal{O}$ auf die Systemgleichungen angewandt, wodurch die folgenden Bedingungen für dessen Koeffizienten v^α auf den Gebieten $\mathcal{D}\,(\alpha)$

$$\begin{aligned} &j^n(v_\mathcal{O})\left(x^\alpha_{[1,\mathbf{0}]} - \check{F}^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)}\left(X, x_{[0,J]}\right)\right) \circ j^n(\gamma) \\ &= d_{[1,\mathbf{0}]}\left(v^\alpha\right) - d_{[0,L]}\left(v^\beta\right)\partial^{[0,L]}_\beta \check{F}^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

sowie auf den Rändern $\mathcal{B}\,(\mu)$

$$\begin{aligned} &j^m(v_\mathcal{O})\left(\check{F}^\mu_{\mathcal{B}(\mu)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}\right)\right) \circ j^m(\gamma) \\ &= d_{[0,\tilde{L}]}\left(v^\alpha\right)\partial^{[0,\tilde{L}]}_\alpha F^\mu_{\mathcal{B}(\mu)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

mit $0 \leq \#L \leq n$ und $0 \leq \#\tilde{L} \leq m$ entsprechend folgen. Durch das Verschwinden der Terme (8) und (9) ist gewährleistet, dass Φ_ε eine Symmetriegruppe von (2) repräsentiert, siehe z.B. [10]. Für die Beobachtbarkeitsanalyse muss zusätzlich noch gefordert werden, dass die Ausgangsgleichungen $\check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)}$ ebenfalls Invarianten der Transformationsgruppe (6) sind, da Variationen betrachtet werden, bei denen der Ausgang unverändert bleiben soll. Somit folgt

$$\begin{aligned} j^m(v_\mathcal{O})\left(y^\zeta\right) &= j^m(v_\mathcal{O})\left(\check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)}\left(X, x_{[0,\tilde{J}]}\right)\right) \circ j^m(\gamma) \\ 0 &= d_{[0,\tilde{L}]}\left(v^\beta\right)\partial^{[0,\tilde{L}]}_\beta \check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)}. \end{aligned}$$

Bedingungen für die (lokale) (Nicht-)Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie γ des dynamischen Systems (2) folgen also nun durch die Berücksichtigung von $\left(x_{[1,\mathbf{0}]} - \check{F}_\mathcal{D}\right)$, $\check{F}_\mathcal{B}$ und $\check{F}_\mathcal{Y}$ als die Invarianten $\mathcal{I}$ einer Transformationsgruppe Φ_ε, d.h. $j^n(v_\mathcal{O})\ \mathcal{I} = 0$

oder $j^n(v_\mathcal{O})\ \left(x_{[1,\mathbf{0}]} - \check{F}_\mathcal{D}\right) = 0$, $j^m(v_\mathcal{O})\ \check{F}_\mathcal{B} = 0$ sowie $j^m(v_\mathcal{O})\ \check{F}_\mathcal{Y} = 0$. Von der geometrischen Betrachtungsweise können wir also folgern, dass das System (2) offensichtlich nicht beobachtbar ist, wenn $\left(x_{[1,\mathbf{0}]} - \check{F}_\mathcal{D}\right)$, $\check{F}_\mathcal{B}$ und $\check{F}_\mathcal{Y}$ die Invarianten einer nicht trivialen Transformationsgruppe Φ_ε darstellen.

Satz 1. *Auf einem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$ sei $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{X}$ eine Lösung des dynamischen Systems (2) mit dem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}$ und Φ_ε eine Transformationsgruppe mit dem zugehörigen vertikalen Vektorfeld $v_\mathcal{O} : \mathcal{E}_\mathcal{X} \to \mathcal{V}(\mathcal{E}_\mathcal{X})$. Für ein dynamisches System (2), welches (lokal) beobachtbar entlang einer Trajektorie γ ist, muss folgen, dass die Gleichungen*

$$\begin{aligned} d_{[1,\mathbf{0}]}\left(v^\alpha_\mathcal{O}\right) &= \hat{F}^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)} = j^n(v_\mathcal{O})\check{F}^\alpha_{\mathcal{D}(\alpha)} \circ j^n(\gamma) \\ 0 &= \hat{F}^\mu_{\mathcal{B}(\mu)} = j^m(v_\mathcal{O})\check{F}^\mu_{\mathcal{B}(\mu)} \circ j^m(\gamma) \\ 0 &= \hat{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)} = j^m(v_\mathcal{O})\check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\gamma) \end{aligned} \tag{10}$$

nur die triviale Transformationsgruppe Φ_ε erlauben, d.h. $v_\mathcal{O} = v^\alpha \partial_\alpha \equiv 0$.

Beweis. Aufgrund der vorherigen Konstruktion definiert ein nicht triviales vertikales Vektorfeld $v_\mathcal{O}$ (7) eine nicht triviale Transformationsgruppe Φ_ε (6). Mit dieser Symmetriegruppe berechnen wir uns nun eine weitere Lösung $\bar{\gamma} = \gamma \circ \Phi_\varepsilon$ mit $\bar{\gamma}_{t_0} = (\gamma \circ \Phi_\varepsilon)\,|_{X^1 = t_0}$, welche die Gleichungen (10) für ein spezifisches ε erfüllt. Infolge der geforderten Eindeutigkeit von Lösungen folgt, dass $\bar{\gamma}_{t_0} \neq \gamma_{t_0}$. Die Ausgangsgleichung ist eine Invariante der Symmetriegruppe und somit gilt $f_y \circ \gamma_{t_0} = f_y \circ \bar{\gamma}_{t_0}$, d.h. der Anfangszustand kann nicht eindeutig ermittelt werden. □

Damit nun ein System überhaupt beobachtbar gemäß Definition 1 ist, muss also gezeigt werden, dass grundsätzlich nur die triviale Symmetriegruppe ($v_\mathcal{O} = v^\alpha \partial_\alpha \equiv 0$) für die Invarianten $\mathcal{I}$ und einer spezifischen Zeit $T \geqslant 0$ geeignet ist. Das bedeutet, dass die Lösung nicht in einer Art und Weise verzerrt werden kann, ohne die Bedingungen (10) zu verletzen. Exemplarisch wird in Abbildung 1 die Nichtbeobachtbarkeitseigenschaft eines verteilt parametrischen Systems geometrisch veranschaulicht. Die zwei verschiedenen Trajektorien γ und $\bar{\gamma}$ mit den unterschiedlichen Anfangswerten γ_{t_0} und $\bar{\gamma}_{t_0}$ liefern hier den gleichen Ausgang, wobei angenommen wird, dass die beiden Trajektorien über eine zulässige Transformationgruppe Φ_ε miteinander zusammenhängen.

Erwähnenswert ist auch, dass die Gleichungen (10) eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{V}\left(J^n\left(\mathcal{E}_\mathcal{X}\right)\right)$ (definiert bzgl. $J^n\left(\mathcal{E}\right) \to \Omega$) beschreiben, wobei $\mathcal{V}\left(J^n\left(\mathcal{E}_\mathcal{X}\right)\right)$ mit den Koordinaten $(X^i, x^\alpha_J, v^\alpha_J)$ und der holonomen Basis $\left\{\partial^J_\alpha\right\}$ ausgestattet ist.

Korollar 1. *Durch die Einhaltung der Bedingungen von Satz 1 folgt die approximative Beobachtbarkeit des Systems (2) entlang einer Trajektorie γ gemäß Definition 1.*

Beweis. Die Beweisführung ist äquivalent zu der von Satz 1. Die Gewährleistung der Injektivität der Abbildung f_y impliziert die eindeutige Festlegung des Anfangszustands γ_{t_0} und somit auch die approximative Beobachtbarkeitseigenschaft gemäß Definition 1. □

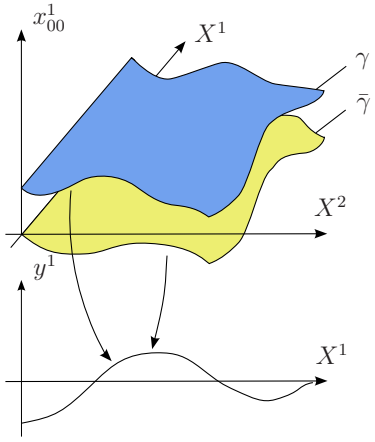


Abbildung 1: Lokale Nichtbeobachtbarkeit entlang einer Trajektorie

Weiters sollte erwähnt werden, dass die Beobachtbarkeitsbedingungen von Satz 1 homogene und lineare (bzw. entlang einer Trajektorie γ linearisierte) Differentialgleichungen mit homogenen Randbedingungen darstellen. Deswegen ist dieser formale Ansatz auch sehr vielversprechend in Hinblick auf nichtlineare Systeme, da für die Beobachtbarkeitsanalyse lineare zeit-(in)variante Systeme betrachtet werden.

4 Finit dimensionale Systeme

Zur Erläuterung der bisher angeführten Theorie wird an dieser Stelle das Beobachtbarkeitsproblem für finit dimensionale Systeme der Form

$$\begin{aligned} x_1^\alpha = \quad F_{\mathcal{D}}^\alpha \quad &= f^\alpha(t,x,u) \circ \mu = \check{f}^\alpha(t,x) \\ y^\zeta = \quad F_{\mathcal{Y}}^\zeta \quad &= c^\zeta(t,x,u) \circ \mu = \check{c}^\zeta(t,x) \end{aligned} \tag{11}$$

mit $t = X^1$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{Y}$ und einem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ behandelt. Angenommen $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ sei eine gültige Lösung auf dem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0 + T]$, $T \geq 0$, dann folgen durch die Anwendung des Vektorfeldes $v_{\mathcal{O}} = v^\alpha \partial_\alpha$ bzw. des prolongierten Vektorfeldes $j^1 v_{\mathcal{O}} = v^\alpha \partial_\alpha + v_1^\alpha \partial_\alpha^1$ auf die Systemgleichungen (11) die Bedingungen gemäß Satz 1 zu

$$\begin{aligned} v_1^\alpha \quad &= v_{\mathcal{O}}\left(\check{f}^\alpha\right) \circ \gamma \\ 0 \quad &= v_{\mathcal{O}}\left(\check{c}^\zeta\right) \circ \gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

Für die Beobachtbarkeitsanalyse ist nun die (Nicht-)Existenz des Vektorfeldes $v_{\mathcal{O}}$ oder, äquivalent dazu, die (lokale) Injektivität der Abbildung $f_y : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{Y}};\ x_{t_0} \longmapsto y$ von Interesse.

Satz 2. *Auf einem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$ sei $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ eine Lösung des dynamischen Systems (11) mit dem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Das System (11) ist (lokal) beobachtbar entlang der Trajektorie γ, wenn für alle Punkte der Trajektorie $(t,x) \in \gamma(t)$ die Kodistribution*

$$\Delta_{\mathcal{O}} = \operatorname{span}\left\{\mathrm{d}t, \omega^k\right\} \qquad \textit{mit} \qquad \omega^k = \left\{\mathrm{d}L_{f_e}^k\left(\check{c}^\zeta\right)\right\} \quad \textit{und} \quad f_e = \partial_t + f^\alpha \partial_\alpha \tag{13}$$

für beliebiges $k \in \mathbb{R}^+$ der Bedingung

$$\dim\left(\Delta_{\mathcal{O}}\right) = n_x + 1 \tag{14}$$

genügt.

Beweis. Durch zeitliche Prolongation und Projektion kann sehr einfach gezeigt werden, dass folgende Beziehung

$$\begin{aligned} d_k\left(v_{\mathcal{O}}\left(\check{c}^{\zeta}\right)\circ\gamma\right) &= v_{\mathcal{O}}\left(L_{f_e}^k\left(\check{c}^{\zeta}\right)\circ\gamma\right) = v_{\mathcal{O}}\rfloor \mathrm{d}\left(L_{f_e}^k\left(\check{c}^{\zeta}\right)\circ\gamma\right) \\ \text{mit} \quad f_e &= \partial_t + f^{\alpha}\partial_{\alpha} \end{aligned} \tag{15}$$

erfüllt ist, siehe z.B. [15]. Angenommen die Kodistribution $\Delta_{\mathcal{O}}$ besitze vollen Rang für einen Eingang μ zu einem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_0 + T]$. Mit dem bekannten Ausgang $y(t)$ und der Beziehung (15) kann das Gleichungssystem

$$\partial_1^k\left(y^{\zeta}(t)\right) = L_{f_e}^k\left(\check{c}^{\zeta}\right)(t, x(t))$$

konstruiert werden, welches aufgrund des Satzes über Implizite Funktionen lokal nach $x(t)$ aufgelöst werden kann, wenn die Jacobimatrix $\partial_{\alpha}\left(L_{f_e}^k\left(\check{c}^{\zeta}\right)(t, x(t))\right)$ vollen Rang besitzt. Diese Bedingung ist aber äquivalent zu $\dim\left(\Delta_{\mathcal{O}}\right) = n_x + 1$ oder $v_{\mathcal{O}} \equiv 0$ (siehe (15)). Aufgrund der geforderten Eindeutigkeit von Lösungen kann der Anfangszustand $x(t_0)$ ermittelt werden. □

Satz 2 stellt einen Spezialfall dar, der später noch weiter verallgemeinert werden kann.

Korollar 2. *Die Bedingung von Satz 2 impliziert die Existenz der Ungleichung*

$$\|\hat{y}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}}^2 \geq \alpha_2 \|\hat{\gamma}_{t0}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}}^2$$

für alle Lösungen $\hat{\gamma}$ von (12), wobei $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$und $\hat{y} = v_{\mathcal{O}}\left(\check{c}^{\zeta}\right)\circ\gamma\circ\hat{\gamma}$.

Beweis. In weiterer Folge betrachten wir (11) in der Form (5), d.h. $\check{f}^{\alpha}\partial_{\alpha} : \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{V}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}\right)$, und das zugehörige, entlang einer gegebenen Trajektorie $\gamma(t)$ linearisierte System

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}^{\alpha} &= \partial_{\beta}\check{f}^{\alpha}\big|_{\gamma}\,\hat{x}^{\beta} = a_{\beta}^{\alpha}\hat{x}^{\beta}, \\ \hat{y}^{\zeta} &= \partial_{\alpha}\check{c}^{\zeta}\big|_{\gamma}\,\hat{x}^{\alpha} = c_{\alpha}^{\zeta}\hat{x}^{\alpha}, \end{aligned} \tag{16}$$

mit $a_{\beta}^{\alpha}\hat{x}^{\beta}\hat{\partial}_{\alpha} : \mathcal{V}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}\right) \to \mathcal{V}\left(\mathcal{V}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}\right)\right) \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{V}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}\right)\right)$. Die Gleichungen (12) stellen nämlich die entlang der Trajektorie $\gamma(t)$ linearisierten Systemgleichungen dar, d.h. $a_{\beta}^{\alpha}\hat{x}^{\beta} = \partial_{\beta}\check{f}^{\alpha}\big|_{\gamma}\,v^{\beta}$ mit $\hat{x}^{\beta} = v^{\beta}$, jedoch mit der Forderung $c_{\alpha}^{\zeta}\hat{x}^{\alpha} = 0$. Hier besitzt $\mathcal{V}\left(\mathcal{V}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}\right)\right)$ die adaptierten Koordinaten $(t, x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}, \hat{\dot{x}}^{\alpha})$ und die holonome Basis $\{\hat{\partial}_{\alpha}\}$ mit $\alpha = 1, ..., n_x$. Der Funktionenraum des Ausgangs $\hat{y}(t)$ sowie der Raum der Anfangszustände $\hat{\gamma}_{t0}$ für das linearisierte System (16) werden entsprechend mit den Innenprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} : \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} \to \mathbb{R}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ und den induzierten Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} : \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ versehen, welche durch

$$\langle\hat{y}(t), \hat{y}(t)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} = \|\hat{y}(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}}^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{y}^{\zeta}(t)\delta_{\zeta\eta}\hat{y}^{\eta}(t)\mathrm{d}t \tag{17}$$

und

$$\langle \hat{\gamma}_{t0}, \hat{\gamma}_{t0} \rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{D}} = \|\hat{\gamma}_{t0}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{D}} = \hat{\gamma}^\alpha_{t0} \delta_{\alpha\beta} \hat{\gamma}^\beta_{t0}, \tag{18}$$

mit dem Kroneckersymbol δ, gegeben sind. Mittels einer Lösung $\hat{\gamma}(t) = \hat{\phi}_\varepsilon(t_0)\,\hat{\gamma}_{t0}$ des Systems (16) wird nun folgende Abschätzung durchgeführt

$$\begin{aligned}
\|\hat{y}(t)\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{Y}} &= \left\langle c^\zeta_\alpha \hat{x}^\alpha \circ \hat{\gamma}, c^\zeta_\alpha \hat{x}^\alpha \circ \hat{\gamma} \right\rangle^2_{\mathcal{H}_\mathcal{Y}} \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\hat{x}^\beta c^\zeta_\beta \delta_{\zeta\eta} c^\eta_\alpha \hat{x}^\alpha \Big|_{\hat{\phi}_\varepsilon(t_0)\hat{\gamma}_{t0}} \right) \mathrm{d}\varepsilon \\
&\geq \lambda_{\min} \Bigg(\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \left(\hat{x}^\beta c^\zeta_\beta \delta_{\zeta\eta} c^\eta_\alpha \hat{x}^\alpha \Big|_{\hat{\phi}_\varepsilon(t_0)\hat{\gamma}_{t0}} \right) \mathrm{d}\varepsilon}_{\mathcal{O}} \Bigg) \|\hat{\gamma}_{t0}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{D}},
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_{\min}(\cdot)$ den minimalen Eigenwert der so genannten Gramschen Matrix $\mathcal{O}$ (observability Gramian), siehe z.B. [4], berechnet. Die Ungleichung ist wohldefiniert für eine nicht-singuläre Matrix $\mathcal{O}$. Basierend auf der Existenzbedingung der Lie-Ableitungen (13) wird angenommen, dass die Lösung auf einem hinreichend kleinen Zeitintervall $[\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon]$ analytisch ist. Mit dem Vektorfeld $f_e = \partial_t + a^\alpha_\beta \hat{x}^\beta \hat{\partial}_\alpha : \mathcal{T}(\mathcal{E}_\mathcal{X}) \to \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{E}_\mathcal{X}))$ und der zugehörigen Lie-Reihenentwicklung folgt der Fluss $\hat{\phi} : \mathcal{I} \times \mathcal{E}_\mathcal{X} \to \mathcal{E}_\mathcal{X}$ zu $\hat{\gamma}(t) = \hat{\phi}_\varepsilon(t_0, \hat{\gamma}_{t0}) = f^k_e(t_0, \hat{\gamma}_{t0})\ \frac{\varepsilon^k}{k!}$, wobei die Zeit t mit dem Kurvenparameter ε identifiziert wird. Aufgrund der Lösungseigenschaft konvergiert diese Lie-Reihe auf dem Zeitintervall $[\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon]$. Durch die Bedingung $\hat{y}^\zeta(t) = 0$ und die Verwendung der Lie-Reihe des Flusses $\hat{\phi}_\varepsilon$ für die Gramsche Matrix $\mathcal{O}$ folgen die Bedingungen $d_k\left(\hat{y}^\zeta(t)\right) = L^k_{f_e}\left(\check{c}^\zeta\right)(t, x(t)) = 0$ für $\forall t \in [\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon]$. Basierend auf der geforderten Eindeutigkeit von Lösungen ist nur die triviale Lösung $\hat{\gamma}(t) = 0$ zulässig, wenn $\lambda_{\min}(\mathcal{O}) > 0$ oder, äquivalent dazu, die Kodistribution $\Delta_\mathcal{O}$ bzw. die Jacobimatrix $\partial_\alpha\left(L^k_{f_e}\left(\check{c}^\zeta\right)(t, x(t))\right)$ vollen Rang besitzt. Für lineare zeitinvariante Systeme folgt das bekannte Kalman Kriterium [4], welches aufgrund der linearen Systemstruktur unabhängig von der gewählten Trajektorie ist. □

Der Satz 2 kann noch weiter verallgemeinert werden, da die Distribution $\Delta_\mathcal{O}$ nicht unbedingt an allen Punkten der Trajektorie $\gamma(t)$ vollen Rang besitzen muss.

Satz 3. *Auf einem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0+T]$, $T > 0$ sei $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{X}$ eine Lösung des dynamischen Systems (11) mit dem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{U}$. Das System (11) ist (lokal) beobachtbar entlang der Trajektorie γ, wenn die Kodistribution*

$$\Delta_\mathcal{O} = \mathrm{span}\left\{\mathrm{d}t, \omega^k\right\} \qquad \textit{mit} \qquad \omega^k = \left\{\mathrm{d}L^k_{f_e}\left(\check{c}^\zeta\right)\right\} \quad \textit{und} \quad f_e = \partial_t + f^\alpha \partial_\alpha \tag{19}$$

für einen spezifischen Punkt (oder für beliebige Punkte) der Trajektorie $(t, x) \in \gamma(t)$ und für beliebiges $k \in \mathbb{R}^+$ der Bedingung

$$\dim(\Delta_\mathcal{O}) = n_x + 1 \tag{20}$$

genügt.

Beweis. Der Beweis ist äquivalent zur Beweisführung des Satzes 2. Unter der Annahme, dass die Rangbedingung $\dim(\Delta_{\mathcal{O}}) = n_x + 1$ erfüllt ist, kann ein auflösbares Gleichungssystem durch Vereinigung der Gleichungssysteme $\partial_1^k\left(y^\zeta(t)\right) = L_{f_e}^k\left(\check{c}^\zeta\right)(t, x(t))$ $\forall\,(\bar{t}, \bar{x}) \in \gamma(t)$ generiert werden. Mit dem Satz über Implizite Funktionen folgt das gewünschte Resultat. □

Erwähnenswert ist, dass differentialgeometrische Methoden auch zur Untersuchung der Beobachtbarkeitseigenschaft von impliziten ODEs geeignet sind, siehe [15].

5 Beobachtbarkeit und Transformationsgruppen - 2

Die Bedingung von Korollar 2 für finit dimensionale Systeme, d.h. die Existenz einer Ungleichung, soll nun auf verteilt parametrische Systeme übertragen werden. Bei Funktionenräume $\mathcal{H}_t([t_0, t_0+T], \mathcal{H}_{\mathcal{D}})$ für die Lösungen mit einer Hilbertraumstruktur können explizite Beobachtbarkeitsbedingungen angegeben werden. Diese Resultate sind aber auch auf Banachräume ausdehnbar.

Korollar 3. *Für dynamische Systeme (2) sei angenommen, dass durch die Systemgleichungen eine C_0-Halbgruppe, siehe z.B. [12], auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ definiert ist. Weiters sei nun $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ eine Lösung des Systems (2) auf dem Zeitintervall $\bar{T} = [t_0, t_0+T]$, $T > 0$, mit dem zulässigen Eingang $\mu : \Omega \to \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ und Φ_ε eine Transformationsgruppe mit dem zugehörigen vertikalen Vektorfeld $v_{\mathcal{O}} : \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{V}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$. Das System (2) ist exakt beobachtbar entlang einer Trajektorie γ, wenn für Lösungen $\hat{\gamma}$ von (10) und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ eine der folgenden Bedingungen,*

$$
\begin{aligned}
&i. \quad \alpha_1 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \geq \| g_{\mathcal{Y}} \circ j^m\hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} \geq \alpha_2 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \\
&ii. \quad \alpha_1 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \geq \| g_{\mathcal{Y}} \circ j^m\hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}}, \ \ker(g_{\mathcal{Y}}) = \{0\} \\
&\qquad \textit{und } \mathcal{R}(g_{\mathcal{Y}}) \textit{ abgeschlossen,}
\end{aligned}
$$

mit $g_{\mathcal{Y}} = j^m(v_{\mathcal{O}})\check{F}^\zeta_{\mathcal{Y}(\zeta)} \circ j^m(\gamma)$, in einer offenen Umgebung von γ erfüllt ist.

Beweis. Aufgrund des Satzes über Inverse Funktionen [12] für Funktionen zwischen Banachräume muss gezeigt werden, dass die Abbildung $f_y : V_{\gamma_{t_0}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ mit $\mathcal{R}(f_y) = \mathcal{H}_Y \subset \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ stetig differenzierbar ist und dass die Fréchet Ableitung $\acute{f}_y \left(= \acute{f}_y \circ \gamma_{t_0}\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_Y)$ an der Stelle γ_{t_0} injektiv und surjektiv ist. Durch die Linearisierung von $y(X) = \check{F}_{\mathcal{Y}} \circ j^n(\gamma) = f_y \circ \gamma_{t_0}$ entlang der Trajektorie γ folgt $\hat{y}(X) = \hat{F}_{\mathcal{Y}} \circ j^n(\hat{\gamma}) = \acute{f}_y \circ \hat{\gamma}_{t_0}$, wobei $\hat{\gamma}$ die Bedingungen $\left(\hat{x}_{[1,\mathbf{0}]} - \hat{F}_{\mathcal{D}}\right) \circ j^n(\hat{\gamma}) = 0$ und $\hat{F}_{\mathcal{B}} \circ j^m(\hat{\gamma}) = 0$ erfüllt. Diese linearisierten Gleichungen entsprechen gerade den Bedingungen (10), welche aber zusätzlich $\check{F}_{\mathcal{Y}} \circ j^n(\gamma) = 0$ fordern.

Der Satz 1 gewährleistet die (lokale) Injektivität von f_y und $\acute{f}_y$. Man beachte, dass $\acute{f}_y$ invertierbar ist, wenn $\acute{f}_y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_Y)$ injektiv ist, d.h. $\acute{f}_y \circ \hat{\gamma}_{t_0} = 0$ impliziert $\hat{\gamma}_{t_0} = 0$. Aufgrund der Beobachtbarkeitsbedingung (10) $g_{\mathcal{Y}} \circ j^m\hat{\gamma} = 0$ und der Ungleichung $\| g_{\mathcal{Y}} \circ j^m\hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} \geq \alpha_2 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}}$ (i) folgt $\|\hat{\gamma}_{t_0}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} = 0$ bzw. $\hat{\gamma}_{t_0} \equiv 0$. Äquivalent

dazu impliziert $\ker(g_{\mathcal{Y}}) = \{0\}$ (ii) ebenfalls die Injektivität von $\acute{f}_y$. D.h. die Existenz solcher Ungleichungen bedingt die Erfüllung der notwendigen Beobachtbarkeitsbedingungen (10).

Weiters werden noch Bedingungen für $\acute{f}_y$ benötigt, um die Stetigkeit bzw. Beschränktheit zu gewährleisten. Für den linearen Operator $\acute{f}_y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}, \mathcal{H}_Y)$ sind diese zwei Begriffe äquivalent, siehe z.B. [2], d.h., dass $\acute{f}_y$ stetig ist, wenn $\acute{f}_y$ beschränkt ist und dass $\acute{f}_y$ stetig ist auf dem zugehörigen Definitionsbereich, wenn $\acute{f}_y$ stetig an einem einzigen Punkt ist. Zudem muss noch die Abgeschlossenheit $\acute{f}_y$ gezeigt werden. Angenommen $\acute{f}_y \circ \hat{\gamma}_{t_0,n}$ stellt eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}_Y$ dar. Dann folgt durch (i), dass $\hat{\gamma}_{t_0,n}$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ repräsentiert. Aufgrund von $\alpha_1 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \geq \| g_{\mathcal{Y}} \circ j^n \hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}}$ ist $\acute{f}_y$ ein beschränkter Operator. Es folgt aus $\acute{f}_y \circ \hat{\gamma}_{t_0,n} \to \acute{f}_y \circ \hat{\gamma}_{t_0}$ die Abgeschlossenheit des Bildes von $\acute{f}_y$. Da $\mathcal{R}(g_{\mathcal{Y}})$ abgeschlossen ist, stellt dieser Bildbereich einen Hilbertraum mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}}$ dar. Wegen der Injektivität besitzt $\acute{f}_y$ ein algebraisches Inverses $(\acute{f}_y)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_{\mathcal{D}})$, welches beschränkt ist, da der Definitionsbereich von $(\acute{f}_y)^{-1}$ und das Bild des abgeschlossenen Operators $\acute{f}_y$ genau $\mathcal{H}_Y$ entsprechen. □

Für lineare Systeme werden die Bedingungen von Korollar 3 aufgrund einer linearen Systemstruktur unabhängig von der gewählten Systemtrajektorie. Zusätzlich hat der Eingang u keinen Einfluss auf die Beobachtbarkeit. Für lineare Systeme enthält [2] äquivalente Bedingungen.

Angenommen, $E(\hat{\gamma})$ stelle die natürliche (mathematische) Energie (Norm) für eine Lösung $\hat{\gamma}$ von System (10) dar. Eine Vorgehensweise um die Bedingungen von Korollar 3 zu zeigen, stellt eine so genannte Energieungleichung dar, traditionell auch *Continuous Observability Inequality* (C.O.I.) genannt, siehe z.B. [11], d.h. gilt

$$\| g_{\mathcal{Y}} \circ j^n \hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} \geq c_{1,T} E(\hat{\gamma}) \tag{21}$$

$$c_{1,T} E(\hat{\gamma}) \geq \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \tag{22}$$

zusammen mit

$$c_{2,T} \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \geq \| g_{\mathcal{Y}} \circ j^n \hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} \tag{23}$$

für gewisse Konstanten $c_{1,T}, c_{2,T} \in \mathbb{R}^+$ und für eine Zeit T, dann resultiert daraus die (lokale) exakte Beobachtbarkeit entlang der Trajektorie γ gemäß Definition 1, da $E(\hat{\gamma})$ eine äquivalente Norm darstellt, siehe z.B. [12]. Die Ungleichung (21) kann als die Rekonstruktion der anfangs im System (10) gespeicherten Energie durch den linearisierten Ausgang $g_{\mathcal{Y}}$ interpretiert werden. Anzumerken ist auch, dass natürlich $E(\cdot)$ direkt als Norm für den Funktionenraum $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ verwendet werden könnte, wenn eine entsprechende C_0-Halbgruppe dazu existiert. Es verbleibt aber dann noch Ungleichung (23) zu zeigen. Falls $\| g_{\mathcal{Y}} \circ j^n \hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}} \geq c_{1,T} E(\hat{\gamma})$ mit $E(\hat{\gamma})$ als Norm auf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$, aber $E(\hat{\gamma})$ nicht als Norm für die Beobachtbarkeit auf $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ eingesetzt wird und die Abschätzung $c_{1,T} E(\hat{\gamma}) \geq \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{D}}}$ nicht existiert bzw. nicht gezeigt wird, resultiert daraus zumindest die approximative Beobachtbarkeit gemäß Definition 1. Dies folgt aufgrund der Implizierung eines globalen Stetigkeitsresultats durch eine solche C.O.I.: Wenn die linke Seite von (21) verschwindet,

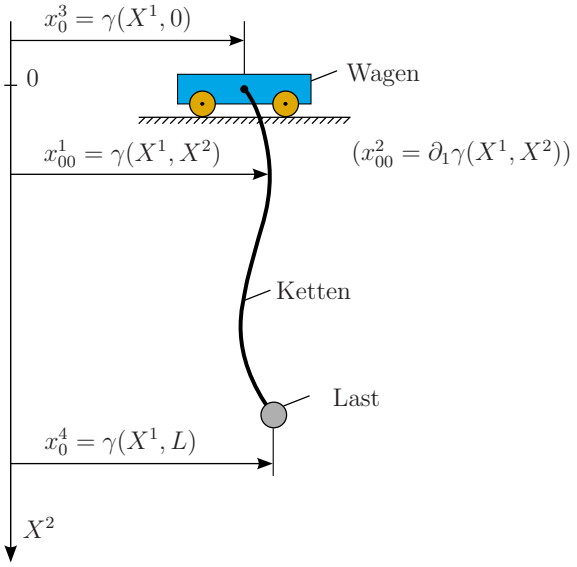


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Brückenkranes.

dann folgt $E(\hat{\gamma}) = 0$ und $\hat{\gamma} \equiv 0$ wegen (22). Erwähnenswert ist auch, dass für lineare Systeme die Ungleichung $\alpha_1 \|\hat{\gamma}_{t_0}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{D}} \geq \| g_\mathcal{Y} \circ j^m \hat{\gamma} \|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{Y}}$ direkt von der geforderten Stetigkeit von f_y folgt, siehe z.B. [2].

An dieser Stelle sei z.B. auf [16] und die enthaltenen Referenzen verwiesen, wo verschiedene Methoden zur Herleitung solcher Ungleichungen erläutert werden. Es sei aber angemerkt, dass die Literatur sehr reichhaltig in Hinblick auf entsprechende Beweise von a-priori Ungleichungen ist. Weiters haben sich (Riemannsche) differentialgeometrische Methoden als nützliche Werkzeuge erwiesen, um solche Ungleichungen zu finden, siehe z.B., [11] für eine umfangreiche Zusammenfassung.

Um die Theorie besser zu illustrieren, soll die exakte Beobachtbarkeit des *Brückenkranes mit schweren Ketten*, siehe Abbildung 2, gezeigt werden. In Anlehnung an [14] ist das System gegeben durch

$$\begin{aligned}
x_{10}^1 &= F^1_{\mathcal{D}(1)} = x_{00}^2 \\
x_{10}^2 &= F^2_{\mathcal{D}(2)} = \tfrac{1}{\rho} d_{01}\left(P\left(X^2\right) x_{01}^1\right) \\
x_1^3 &= F^3_{\mathcal{D}(3)} = \tfrac{2}{m_W} P\left(0\right) x_{01}^1 + u^1 \\
x_1^4 &= F^4_{\mathcal{D}(4)} = -\tfrac{2}{m_P} P\left(L\right) x_{01}^1 \\
0 &= F^1_{\mathcal{B}(1)} = x_{00}^2 - x_0^3 \\
0 &= F^2_{\mathcal{B}(2)} = x_{00}^2 - x_0^4 \\
y^1 &= F^1_{\mathcal{Y}(1)} = x_{00}^1 \\
y^2 &= F^2_{\mathcal{Y}(2)} = x_{01}^1
\end{aligned} \tag{24}$$

mit $\mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(2) = (0, L)$, $\mathcal{D}(3) = [0]$, $\mathcal{B}(2) = \mathcal{D}(4) = [L]$, $\mathcal{Y}(1) = \mathcal{Y}(2) = \mathcal{B}(1) = \mathcal{D}(3)$, $P(X^2) = g\left[\rho(L - X^2) + \frac{m_P}{2}\right], 0 \leqslant X^2 \leqslant L$, $m_W, m_P, g, \rho, L \in \mathbb{R}^+$. Dieses System repräsentiert ein interagierendes System, d.h. dessen zeitliche Evolution durch ODEs und PDEs bestimmt wird. Der Hilbertraum $\mathcal{H}_\mathcal{D} = \{(x_{00}^1, x_{00}^2, x_0^3, x_0^4) \in$

$L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ mit einem Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{D}}$ (zugehöriges Energiefunktional) kann als Funktionenraum für den Systemzustand eingeführt werden. Für die zugehörige Evolutionsgleichung $\dot{z} = Az + Bu$ mit $z = (x^1_{00}, x^2_{00}, m_W x^3_0, m_P x^4_0)$ kann gezeigt werden, dass der lineare Operator $A : D(A) \subset \mathcal{H}_\mathcal{D} \to \mathcal{H}_\mathcal{D}$ der infinitesimale Generator einer C_0-Operatorenhalbgruppe ist.

Angenommen $\gamma : \Omega \to \mathcal{E}_\mathcal{X}$ sei eine Lösung des Systems (24), dann folgen die Beobachtbarkeitsbedingungen gemäß Satz 1 nach einigen einfachen Modifikationen zu

$$\begin{aligned}
v^1_{10} &= \hat{F}^1_{\mathcal{D}(1)} = v^2_{00} \\
v^2_{10} &= \hat{F}^2_{\mathcal{D}(2)} = \tfrac{1}{\rho} d_{01} \left(P \left(X^2 \right) v^1_{01} \right) \\
v^3_1 &= \hat{F}^3_{\mathcal{D}(3)} = 0 \\
v^4_1 &= \hat{F}^4_{\mathcal{D}(4)} = -\tfrac{2}{m_P} P(L)\, v^1_{01} \\
0 &= \hat{F}^1_{\mathcal{B}(1)} = v^2_{00} - v^3_0 \\
0 &= \hat{F}^2_{\mathcal{B}(2)} = v^2_{00} - v^4_0 \\
0 &= \hat{F}^1_{\mathcal{Y}(1)} = v^1_{00} \\
0 &= \hat{F}^2_{\mathcal{Y}(2)} = v^1_{01}
\end{aligned} \tag{25}$$

Der Kürze halber wird die Notation $X^1 = t$, $X^2 = z$, $\mathrm{d}X^1 = \mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}X^2 = \mathrm{d}z$ benützt. Die folgende Identität spielt später eine zentrale Rolle.

Satz 4. *Eine Lösung $\hat{\gamma}$ des Systems (25) erfüllt*

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left[\int_{(0,T)} \left(2mP\hat{\gamma}^2_{01} + m\rho\hat{\gamma}^2_{10} + CP\hat{\gamma}_{01}\hat{\gamma} \right) \mathrm{d}t \right]^L_{z=0}}_{=I} = \\
&\underbrace{\int_{(0,T)\times\mathcal{D}} \left((1-C)\rho\hat{\gamma}^2_{10} + \left((C+1)\, P - m\partial_2 P \right) \hat{\gamma}^2_{01} \right) \mathrm{dX}}_{=II} \\
&+ \underbrace{\left[\int_\mathcal{D} \rho\hat{\gamma}_{10} \left(2m\hat{\gamma}_{01} + C\hat{\gamma} \right) \mathrm{d}z \right]^T_{t=0}}_{=III}
\end{aligned} \tag{26}$$

für beliebiges $C \in \mathbb{R}$ und mit den Funktionen $m = m(z)$, $P = P(z)$.

Beweis. Die Identität (26) folgt direkt durch geeignetes partielles Integrieren von

$$\int_{(0,T)\times\mathcal{D}} \left(2m\hat{\gamma}_{01} + C\hat{\gamma}_{10} \right) \left(\rho\hat{\gamma}_{20} - \partial_2 \left(P\hat{\gamma}_{10} \right) \right) \mathrm{dX} = 0.$$

□

Für das dynamische System (24) erhält man folgendes Beobachtbarkeitsresultat.

Proposition 1. *Das dynamische System (24) ist exakt beobachtbar entlang jeder Trajektorie gemäß Definition 1 für* $T > 6\frac{L}{|\sqrt{P(0)}|}$.

Beweis. Zur Beweisführung wird die Multiplizierermethode gewählt, siehe z.B. [5] und [7], um die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left[\int_{(0,T)} \left(\hat{\gamma}_{00}^2 + \hat{\gamma}_{01}^2\right) \mathrm{d}t\right]_{z=0} \geq c_T E(0) = c_T \left\langle \hat{\gamma}, \hat{\gamma} \right\rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{D}}, \tag{27}$$

mit $E(0) = E(\hat{\gamma}(0,z))$ und der natürlichen (mathematischen) Energie $E(\hat{\gamma}) = \int_\mathcal{D} \left(\frac{\rho}{2}\hat{\gamma}_{10}^2 + \frac{P}{2}\hat{\gamma}_{01}^2\right) \mathrm{d}z + \left[\frac{m_P}{2}\hat{\gamma}_{10}^2 \mathrm{d}t\right]_{z=0}$, zu beweisen. Aufgrund des Korollars 3 folgt die exakte Beobachtbarkeit des Systems (24), wenn die Existenz der Ungleichung (27) gezeigt werden kann, da bei linearen Systemen die Ungleichung (23) bereits durch die geforderte Stetigkeit der Ausgangsabbildung f_y impliziert wird. Mit $\hat{\gamma}_{00} = \hat{\gamma}_{10} = 0$ an der Stelle $z = 0$ und der Identität (26) erhält man

$$I = \underbrace{\left[\int_{(0,T)} \left(2mP\hat{\gamma}_{01}^2 + m\rho\hat{\gamma}_{10}^2 + CP\hat{\gamma}_{01}\hat{\gamma}\right) \mathrm{d}t\right]_{z=L}}_{=IV} + \underbrace{\left[-\int_{(0,T)} 2mP\hat{\gamma}_{01}^2 \mathrm{d}t\right]_{z=0}}_{\geq 0} \tag{28}$$

und

$$\begin{aligned} IV = &\underbrace{\left[\int_{(0,T)} \left(2mP\hat{\gamma}_{01}^2 + m\rho\hat{\gamma}_{10}^2\right) \mathrm{d}t\right]_{z=L}}_{=V\leq 0} - \underbrace{\left[\int_{(0,T)} C\frac{m_p}{2}\hat{\gamma}_{10}^2 \mathrm{d}t\right]_{z=L}}_{=VI\geq 0} \\ &+ \underbrace{\left[\left[C\frac{m_p}{2}\hat{\gamma}\hat{\gamma}_{10}\right]_{z=L}\right]_{t=0}^{T}}_{=VII}. \end{aligned} \tag{29}$$

Durch die Wahl $m = z - L$ und der Eigenschaft, dass $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\alpha |\xi|^2 \leq P(z) |\xi|^2 \leq \beta |\xi|^2$ für $\forall z \in \mathcal{D}$, $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, folgt die Elliptizität des Differentialoperators $\partial_2 \left(2P - m \left(\partial_2 P\right) \partial_2\right)$. Dann $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\left(2P - m \left(\partial_2 P\right)\right) |\xi|^2 \geq \mu_1 P |\xi|^2$ und $(m\,\xi)^2 \leq (\mu_2)^2 P |\xi|^2$ für $\forall z \in \mathcal{D}$, $\xi \in \mathbb{R}$ gilt. Mit $C = 1 - \frac{\mu_1}{2}$ folgt die a-priori Abschätzung von II

$$II \leq \int_{(0,T)\times\mathcal{D}} \mu_1 \left(\frac{\rho\hat{\gamma}_{10}^2}{2} + \frac{P(x)\hat{\gamma}_{01}^2}{2}\right) \mathrm{dX} \tag{30}$$

und mit $\mu_1 = \frac{2}{3}$ die a-priori Abschätzung von $II - V + VI$

$$\begin{aligned} II - V + VI \; &\leq \int_{(0,T)\times\mathcal{D}} \frac{2}{3}\left(\frac{\rho\hat{\gamma}_{10}^2}{2} + \frac{P(z)\hat{\gamma}_{01}^2}{2}\right) \mathrm{dX} + \left[\int_{(0,T)} \frac{2}{3}\frac{m_p}{2}\hat{\gamma}_{10}^2 \mathrm{d}t\right]_{z=L} \\ &\leq \tfrac{2}{3} T E(0). \end{aligned} \tag{31}$$

Durch die zusätzliche Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung und partieller Integration erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} |III - VII| \; &\leq |III| + |VII| \\ &\leq 4\mu_2 E \end{aligned} \tag{32}$$

Weiters folgt durch das Kombinieren von (28), (31), (32) und einer entsprechenden Erweiterung

$$\begin{aligned}\left[\int_{(0,T)} \left(\hat{\gamma}_{00}^2 + \hat{\gamma}_{01}^2\right) \mathrm{d}t\right]_{z=0} &\geq \tfrac{2}{3} kTE(0) - 4k\mu_2 E(0) \\ &\geq k\tfrac{2}{3}\left(T - T_0\right) E(0)\end{aligned} \tag{33}$$

für ein passendes $k \in \mathbb{R}^+$, $\mu_2 = \frac{L}{|\sqrt{P(0)|}}$ und $T_0 = 6\mu_2$, da $P(z) \in L^\infty(\mathcal{D})$ und

$$\begin{aligned}\mu_2 = \tfrac{L}{|\sqrt{P(0)|}} : &\quad m\left(z\right)^2 \leq \tfrac{L^2}{P(0)} P\left(z\right) \\ \mu_1 = \tfrac{2}{3} : &\quad 2P\left(z\right) - m\left(z\right) \partial_2 P\left(z\right) \geq \tfrac{2}{3} P\left(z\right)\end{aligned} \tag{34}$$

für $\forall z \in \mathcal{D}$ und $P(z) = g\left[\rho(L - z) + \frac{m_p}{2}\right]$. □

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde die Systemeigenschaft Beobachtbarkeit für konzentriert sowie verteilt parametrische System mit Hilfe von differentialgeometrischen Methoden erläutert und diskutiert. Basierend auf einer intrinsischen Beschreibung und einer geeigneten Darstellungsform für dynamische Systeme wurde eine formale systemtheoretische Analyse durchgeführt. Mit dem Einsatz von Transformationsgruppen sowie einer funktionalanalytischen Betrachtung können lokale Bedingungen für (Nicht-)Beobachtbarkeit angegeben werden.

Literatur

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, 2nd edition, 1983.

[2] R.F. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer, 1995.

[3] G. Giachetta, G. Sardanashvily, and L. Mangiarotti. *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*. World Scientific Pub. Co & Inc., 1997.

[4] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.

[5] V. Komornik. *Exact Controllability and Stabilization - the Multiplier Method*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

[6] J.E. Lagnese, G. Leugering, and E.J.P.G. Schmidt. *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*. Birkhuser, 1994.

[7] J.L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, 30:1–68, 1988.

[8] D.G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[9] L. Meirovitch. *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, Inc., 1989.

[10] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, 2nd edition, 1993.

[11] W. Littman R. Triggiani R. Gulliver, I. Lasiecka. e case for differential geometry in the control of single and coupled pdes: The structural acoustic chamber. In *Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control, IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, volume 137, 2003.

[12] M. Renardy and R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 2nd edition, 2003.

[13] D.J. Saunders. *The Geometry of Jet Bundles*. London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press, 1989.

[14] D. Thull, D. Wild, and A. Kugi. Infinit-dimensionale regelung eines brückenkranes mit schweren ketten. *at - Automatisierungstechnik*, 8:400–410, 2005.

[15] K. Zehetleitner and K. Schlacher. Computer algebra algorithms for the test on accessibility and observability for implicit dynamical systems. In *European Control Conference (ECC'03)*, volume 1, 2003.

[16] E. Zuazua. *Controllability and Observability of Partial Differential Equations: Some results and open problems*, volume 3 of *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations*. Elsevier Science, 2006.

Enhancement of the Knowledge Base of Already Trained and Untrained Neural Architectures

Alexander Viehweider
Viktorgasse 7/9, 1040 Wien
alexander.viehweider@chello.at*

Abstract

This contribution discusses issues that araise during design and training of neural networks. During the design of a neural network a lot of design choices have to be taken. Since these design choices are highly interrelated a 'holistic' design approach is proposed. Aspects of this approach are highlighted and discussed in detail. Special attention has been paid to the issues of the choice of a good training set and the retraining of an already trained neural network.

1 Introduction

Artificial Neural Networks (ANN) have been successfully applied in many scientific fields. As far as automation and control engineering is concerned they are used for modelling, identification and control. As a data driven modelling approach ANN show their potential in a nonlinear environment where physical modelling is not feasible or would be too complicated or the determining mechanisms of a process are not known. Besides that the wide often used Mulitlayer Perceptron Artifical Neural Network (MLP - ANN) can be explained in terms of nonlinear regression analysis from statistics. That means that this kind of ANN was not really a new scientific discovery but more or less an application of nonlinear regression analysis with biological inspiration and the substitution of the scientific terms of regression analysis with ANN vocabulary. Even the most often used Levenberg Marquardt algorithm for learning has been devised by two statisticians in order to minimize a function, generally nonlinear over a space of parameters with no a-priori application for an ANN in mind.

ANN design engineer face a variety of problem. This fact should be clarified by the following tasks:

- Is the chosen topology of the neural network appropriate for the problem at hand?
- If the appropriate topology has been chosen how does one choose the right architecture parameters ?

*Please refer correspondence to this address

- What are the criteria behind the choice of the right training data to train the ANN?
- What kind of training procedures and training algorithms one should use?
- What about convergence criteria and the speed of the training?
- Is the generalization ability be assured?
- If one wants a prediction from the ANN from nonlearned data does there exist a mean to predict the prediction quality of the ANN?
- What should one do if one gets new data after training of the ANN?

Of course some of these questions are highly interrelated. For example the choice of optimal training data depends on the chosen architecture and topology. The inclusion of information from new data can only be achieved if the (re)training algorithm is appropriately chosen.

This paper focuses on supervised learning of MLP - ANNs. More specialized ANN topology leads often to very specific architecture- and topology-related issues which would make this contribution unnecessarily long.

The article is structured as following: Chapter 2 starts with the neural networks terminology and shows the correspondig counterparts from nonlinear regression analysis. This is especially important since regression analysis plays a quite essential part in methods applicable for ANNs. The different denomination of concepts or items should be no obstacle. Chapter 3 focuses on topology and architectural choices that the designer has to make. Some theoretical results are available. In order to show what effects contributes to a deviation of the predicted value of an ANN form the real value a decomposition of the approximation error is carried out and some bounds discussed. After having chosen an apropriate topology a short look at the learning algorithms is taken in chapter 4 and the interference measure is introduced. This will prove valuable when we later on approach the retraining problem in chapter 7. Levenberg Marquardt as one of the most valuable training algorithm is shortly discussed and emotional learning shortly introduced. The previous chapters lay the ground for the discussion of the proper choice of training data in chapter 5. Starting with a quasilinear model the essential criteria for deriving appropriate algorithms for choice of optimal training points is shown. The transfer to nonlinear models is however quite difficult and can be approached in different ways. In chapter 6 the range of the input space where a reasonable prediction can be made is determined by use of a nonlinear principal component analysis realized by a neural network architecture. Finally in chapter 7 retraining of an already trained neural network is first discussed from an information theoretic point of view and then three feasible algorithms for retraining of already trained neural networks are introduced. All three methods differ significantly from each other and are especially suited in certain situations. Chapter 8 summarizes this proposed holistic approach and draws some conclusion derived from the arguments in previous chapters.

2 Neural Network Terminology - Compared to Nonlinear Regression Terminology

As already stated neural network application has a lot in common with nonlinear regression theory. In order to show this fact explicitely the following table confronts neural network terminology with terminology from statistical regression theory [21].

Nonlinear Regression Terminology	Neural Network Terminology
Model	Network
Variables	Features
Independent variables	Inputs
Predicted values	Outputs
Dependent variables	Targets or training values
Residuals	Errors
Estimation	Training, learning, adaptation, or self-organization
Estimation Criterion	Error function, cost function, Lyapunov function
Observations	Patterns or training pairs
Parameters estimates	(Synpatic) weights
Interactions	Higher-order neurons
Transformations	Functional links
Regression, discriminant analysis	Supervised learning, heteroassociation
Data reduction	Unsupervised learning, encoding or autoassociation
Cluster analysis	Competitive learning or adaptive vector quantization
Interpolation, extrapolation	Generalization
Ridge regression	Weight decay
Design of Experiment	Choice of Training Data

Table 1: Comparison of Nonlinear Regression Terminology with Neural Network Terminology

Within this article both terminology is used in order to show the strong connection between these two fields.

3 Topology and Architectural Choices

3.1 Decomposition of the Approximation Error

Before the attention is turned to the topology and architectural choices the approximation error e_{approx} is decomposed into three types of errors which are related to different aspects of the approximation capability of the ANN [22].

The approximation error e_{approx} is given by

$$e_{approx}(\mathbf{w}) = \int_{\mathbf{X}} \|\mathbf{g}_w(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 \, d\mathbf{x} \tag{1}$$

where $\mathbf{X}$ represents the whole input domain of the function to be modelled, $\mathbf{w}$ are the weights of the ANN, $\mathbf{f}(.)$ the function to be modelled and $\mathbf{g}_W(.)$ the resulting approximation function of the ANN.

1. **The representation error**: The representation error is the difference between the actual outputs of a system and the outputs of the model under the assumption that the global optimals values of the weights have been found. It is strongly related to the chosen architecture and topologies.

$$e_{repres}(\mathbf{w}_0) = e_{approx}(\mathbf{w}_0) = \int_{\mathbf{X}} \left\| \mathbf{g}_{w_0} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\|^2 d\mathbf{x} \tag{2}$$

2. **The generalization error**: There is a finite learning set, an extention of this learning set domain (generalization) leads to an additional error:

$$e_{gener}(\mathbf{w}_0|\mathbf{X}_N) = e_{approx}(\mathbf{w}_0|\mathbf{X}_N) - e_{repres}(\mathbf{w}_0) \tag{3}$$

   This error goes to zero when the learning set increases.

3. **The optimization error:** The optimization error results from the problem of finding global minima of the optimization criteria.

$$e_{optim}(\mathbf{w}_*|\mathbf{X}_N) = \int_{\mathbf{X}} \left\| \mathbf{g}_{w_{*|X_N}}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{w_{0|X_N}}(\mathbf{x}) \right\|^2 d\mathbf{x} \tag{4}$$

It can be shown that:

$$e_{approx}(\mathbf{w}_*|\mathbf{X}_N) \geq e_{repres}(\mathbf{w}_0) + e_{gener}(\mathbf{w}_0|\mathbf{X}_N) + e_{optim}(\mathbf{w}_*|\mathbf{X}_N) \tag{5}$$

The equality (5) holds only if $e_{optim} = 0 (\mathbf{w}_* = \mathbf{w}_0)$, so e_{approx} can never be lower than the representation error. Within this equation the representation error e_{repres} is unique for a given network architecture. The other errors depend on individual realizations of the approximation. One can make estimates in sense of average over all possible learning sets $\mathbf{X}_N$ and random initializations of the network by introducing the average optimization error ϵ_{opt}, the average approximation error ϵ_a, the average generalization errors ϵ_{gener}. Then the following inequality results:

$$\epsilon_a \geq \epsilon_{gener} + e_{repres} + \epsilon_{opt} \tag{6}$$

3.2 Choice of Number of Neurons in Hidden Layers

Cybenko [8] and Hornik [12] showed that single hidden layer feedforward networks are capable of providing arbitrarily accurate approximations to aribitrary functions and their derivatives. Barron [4] has given the rate for hidden layer feedforward NN with sigmoid activation functions approximating a class of functions satisfying a certain smoothness condition. The rate is $n^{-1/2}$ where n is the number of neurons in the hidden layer.

Hornik [13] refind this concept and relaxed the assumptions of Barron [4]. Vysniauskas [22] explored the relationsship (7) and made an asympotitc expansion.

$$\epsilon_a(N,h) \approx \sum_p \sum_{\alpha+\beta=p} \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{N^\alpha h^\beta} = \sum_p \epsilon_a^p(N,h) \tag{7}$$

where h is the number of neurons in the hidden layer, N is the number of training samples necessary and α, β,p are natural numbers and $\gamma_{\alpha\beta}$ are unknwokn parameters of the expansions. Since $N >> 1$ and $h >> 1$ only few terms have to be included, in order to get the asymptotic behaviour. For more information it is referred to [22].

4 Learning Algorithms Algorithm

Learning means optimizing the weights of an ANN in order to reduce the approximation error as defined in (1) as much as possible. The deviation of the output of the ANN from the desired values of the training set is used to drive the weights of the ANNs in a favourable direction by guaranteeing good generalization properties for unknown input-output pairs during production phase of the ANN. It goes without saying that training of an ANN which architecure cannot change during the training phase can only reduce the optimization error e_{optim} and the generalization error e_{gener}, but not the representation error e_{repres}. A learning algorithm that changes the neural architecture during training is discussed in chapter 7.2.3.

There exist a whole bunch of learning algorithms in the literature. Learning is essentially an optimization problem. It goes without saying that for any optimization algorithm a problem can be constructed where the optimization algorithm performance is poor. Nevertheless some optimization methods have shown to be very advantageous in a variety of applications for ANNs. Before we discuss one of the most prominent learning algorithm we introduce from a formal point of view a single step of a learning algorithm and introduce the notion of interference which we make use of in chapter 7.2.2.

Every step of a conventional supervised learning algorithm - regardless of off- or online training - can be characterized by the following formulas:

$$\Delta \mathbf{w} = \alpha(.)\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, c) \tag{8}$$

or

$$\Delta \mathbf{w} = \alpha(.)\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{c}) \tag{9}$$

where α is the stepsize of the learning step and usually a small positive real number appropriately chosen, $\mathbf{T}(.)$ is the direction for the weight change and the cost function c or $\mathbf{c}$ which somehow is related to the approximation error e or $\mathbf{e}$ or an 'emotional' signal e_s or $\mathbf{e}_s$.

If we consider a retraining algorithm then a very important concept regarding learning is the notion of interference. If one assumes that an ANN has already been trained and the ANN should learn a new data sample x then the interference It at the point x' due to the learning at x is given by

$$It_{f,\mathbf{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{w}) = \begin{cases} lim_{\eta\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{w})-\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{w}+\eta\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{w},1))}{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{w})-\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{w}+\eta\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{w},1)} & if.lim.ex. \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (10)$$

This definition is a measure of the degree to which training at an input point $\mathbf{x}$ influences the input/output function of the ANN at another point $\mathbf{x}'$. L'hospital applied to (11) leads to a simpler form of the interference measure:

$$It_{f,\mathbf{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{w}) = \begin{cases} lim_{\eta\to 0}\frac{\nabla_w\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{w})\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{w},1)}{\nabla_w\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{w})\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{w},1)} & if.den.\neq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (11)$$

In addition we introduce the localization measure $L_{\aleph}(\mathbf{w})$, it is in the case that the pdf of both $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}$' is uniformly distributed over $\aleph$:

$$L_{\aleph}(\mathbf{w}) = \left[\int_{\aleph}\int_{\aleph} It(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{w})dxdx'\right]^{-1} \quad (12)$$

The localization measure can take any positive values. Large values indicate the network is more local over the domain $\aleph$.

4.1 Levenberg Marquardt Algorithm

The Levenberg Marquardt interpolates between the Gauss-Newton algorithm and the method of gradient descent. If an ANN with one single input single output is considered and $\mathbf{e}$ is the vector consisting of the deviation from the desired value of the ANN output for each training sample then a single step of this algorithm can be expressed as following:

$$\mathbf{w}_{new} = \mathbf{w}_{old} - (\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{e} \quad (13)$$

with α a small positive number and $\mathbf{J}$ is the Jacobian matrix:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial e_1}{\partial w_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial e_N}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial e_N}{\partial w_m} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Equation 14 resembles ridge regression or Tikhonov regularization for linear ill-posed problems.

The Levenberg Marquardt method has a quadratic rate of convergence if it is assumed that the Jacobian at a solution is nonsingular. It has also be shown that a more milder condition - the assumption of local error bound - is also sufficient.

For large scale problems which may arise inexact Levenberg Marquardt methods [10] can be applied. They release the computational burden of the exact Levenberg Marquardt method by substituting the exact search direction by an approximation of the search direction.

4.2 'Emotional' Learning

Under 'emotional' learning we understand algorithms which use a so called emotional signal in order to train the ANN. The 'emotional' signal shows the emotion a a critic about the overall performance of the system. Usually this 'emotional' signal consists of a combination of objectives or goals which improve the estimation or the predicition.

'Emotional' learning algorithms have three very interesting characteristics:

- Very complicated definitions for the emotional signal allowed without increasing the computational complexity of algorithm
- Parameters (weights) are adjusted in a simple, intuitive way to obtain best performance
- Training is very fast and efficient.

'Emotional' learning are algorithms devised to reduce the computational burden of training ANNs for prediction and modelling problems. They are algorithms for reinforcement training based on cues. An 'emotional' learning scheme is satisficing rather than optimizing. For more information it is referred to [6].

4.3 Dependence of the Learning Process of an ANN from the Initial Weight Values

In order to show how strongly the learning process and the final values of the weigths after the training of the ANN are influenced from the initial values of the weights of an ANN, an ANN is trained to learn a sinusoidial relationship between input and output. To make the values of each single weigth more visible, the values of each single weigth is weigthed by the largest absolute value of each weigth connecting the same two layers of the ANN. Red color indicates a negative value and blue color a positive value. (Fig. 2 and Fig. 4)

In Fig. 1 and Fig. 3 the training samples and the approximation function before and after the training is shown.

5 Choice of Training Data

Choice of right training data is essential for the nodelling and generalization property of NN where the prediction quality of a NN is higher when it comes and to an interpolation task and may dramatically fail when it comes to an extrapolation task.

What must be considered when chosing the right training samples?

1. The model which has been juged efficient for the modelling task
2. The measurment noise and error and its properties
3. The aspects of the process that should be represented in the most precisely way by the ANN

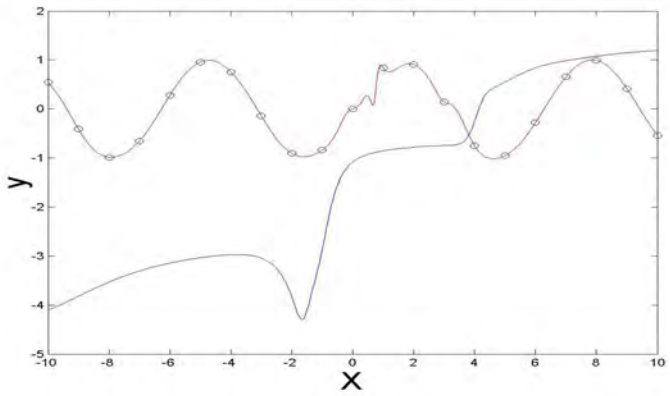


Figure 1: The training samples, the appromixation function of the ANN(1) before and after training

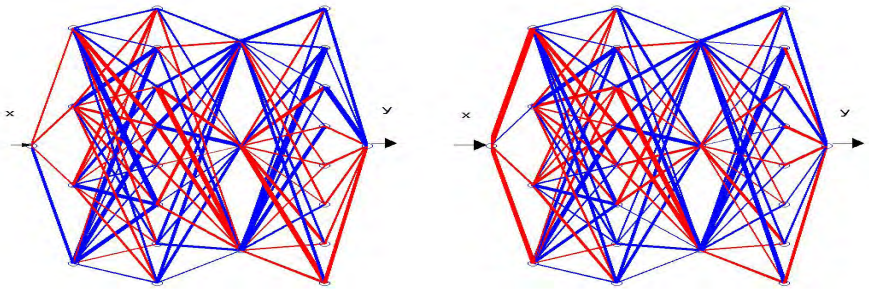


Figure 2: Untrained and trained ANN

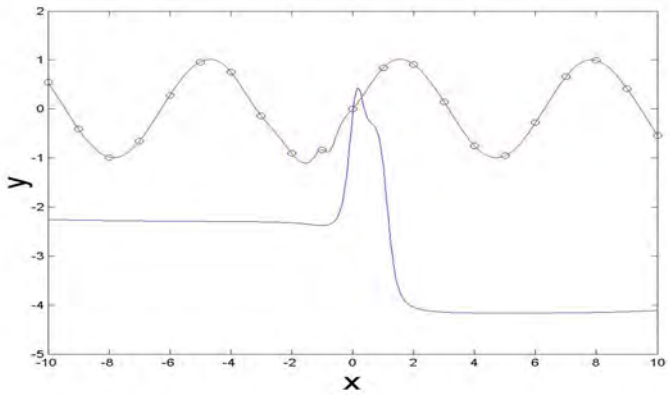


Figure 3: The training samples, the appromixation function of the ANN(2) before and after training

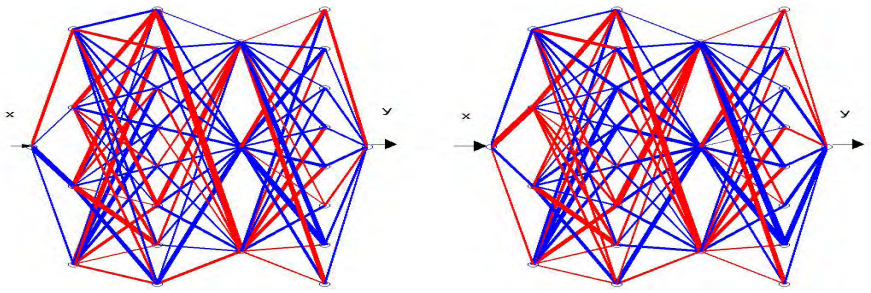


Figure 4: Untrained and trained ANN with different initialization values (2)

4. The generalization property of the NN

5.1 Model Driven Choice of Training Data

In order to make the idea clearer we start the discussion with the discussion of a quasi-linear model. A quasilinear model can have nonlinear terms but the parameterization itself is linear. It can be described with the following equation

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \xi \tag{15}$$

where $\mathbf{w}$ is a vector containing the n parameters of the model and $\mathbf{X}$ is a matrix in the scalar case a row vector containing the linear and nonlinear terms of the model and is the measurement noise. For example the nonlinear model

$$y = ax + by^3 + c + \xi \tag{16}$$

can be written as

$$y = \mathbf{x}^T\mathbf{w} + \xi = \begin{pmatrix} x & y^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \xi \tag{17}$$

Before we turn the discussion to the choice of optimal training data for this kind of model, we discuss a very important property of the measurement noise.

5.1.1 Homoscedasticity - Heteroscedasticity

We call a sequence of random variables homoscedastic if all random variables in the sequence have the same finite variance. If this is not the case we call the sequence of random variables heteroscedastic. The assumption of homoscedasticity allows the derivation of powerful methods for model estimation.

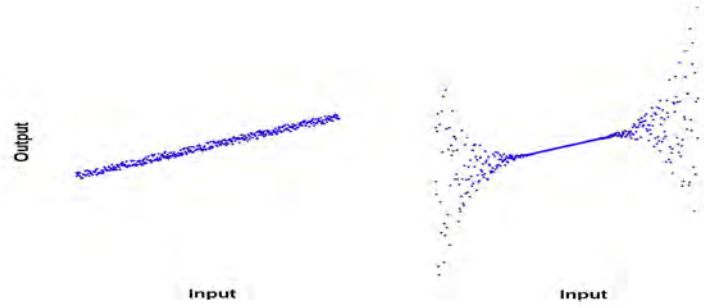


Figure 5: Difference between a homoscedastic and a heteroscedastic assumption of the measurement noise

5.1.2 Optimality Criteria

The determination of the paramters $\mathbf{w}$ is a quite simple task. If we assume that the number of training data is higher than the number of parameters and by assumption of homoscedasticity the parameters can be determined by use of the Moore-Penrose inverse (homoscedastic assumption of the measurement noise):

$$\mathbf{w}_{est} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y} \tag{18}$$

This leads to the covariance of the unknown parameters:

$$cov(\mathbf{w}_{est}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \tag{19}$$

and to the variance of the model output (this is a theoretical result and applies only if the chosen model is the correct one):

$$var(y_n) = \mathbf{x}_n^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_n \, \sigma^2 \tag{20}$$

From Eq. and Eq. it follows that in order to improve the quality of the model the choice of the training data (design of experiment) is somehow related with the minimization of the matrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

The minimum of a matrix is not uniqely determined. Candidates of the minimazation are the determinant, the biggest eigenvalue, the trace and a diagonal element of the information matrix [23]. This leads to following criteria:

$$det(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = min! \;\rightarrow\; D - optimal \tag{21}$$

$$max\, eig((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) = min! \;\rightarrow\; A - optimal \tag{22}$$

$$trace((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) = min! \;\rightarrow\; E - optimal \tag{23}$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}_{ii} = min! \;\rightarrow\; C_i - optimal \tag{24}$$

The most commonly used criterion is the D-optimality. It minimizes the determinant $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ of the matrix or maximizes the determinant of the matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. Apart from the

fact that the information matrix $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ should not be singular ([27] states the conditions for this), the D-optimality criteria itself does not give any clue about the number of necessary training samples.

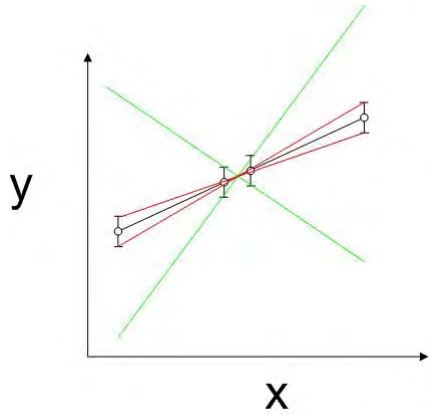


Figure 6: Measurements and the resulting estimation for a linear relationship between input and output

Fig. 6 gives an idea of the D-optimality criteria. A linear relationship between output and input should be determined (2 parameters). But the measurements are affected by some measurement noise (homoscedastic assumption). If the training samples are chosen in the middle of the input domain due to measurement noise varies strongly (two red lines). The D-oprimality criteria would suggest two training points at each end of the input domain (two green lines). Therefore the possible set is heavily reduced. However this could fail if the homoscedastic assumption is violated.

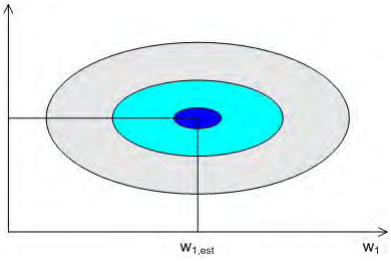


Figure 7: Exemplary Confidence ellipse of two parameters for an estimation from an unplanned design and a planned desing according to the D-optimality criterion

Fig. 7 shows the situation in the parameter space. The confidence ellipsoid of the two parameters (gray area) is reduced (blue area). The D-optimality criteria has some universal touch. It can also used if already training samples exist which didn't have been chosen to any criteria. It can be used to augment or 'repair' an unplanned design [11].

5.1.3 Nonlinear Models and D-Optimality

In case of a nonlinear model the computation of the matrix $\mathbf{X}$ demands the computation of the partial derivatives according to each parameter [5]:

$$\mathbf{X} = \{f_{ij}\} \tag{25}$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f(x_i, w)}{\partial w_j} \tag{26}$$

In the general case the matrix $\mathbf{X}$ depends on the parameter values chosen. That means that the choice of the optimal training data depends on the parameter values chosen. But the parameter values - if no reasonable apriori estimation is available - are the result of the experiment for which we would like to choose an optimal design (training data). It seems to be the snake biting its own tail.

Box and Draper [2] stated that their experience with nonlinear models of chemical reactions kinetics showed that in many cases the optimal design criterion lead to optimal settings of variables corresponding to the lower and upper limits of the experimental equipment for all possible initial values of the parameters or for all initial values of the parameters within a broad region of parameter space. In other cases the optimal settings depend only weakly on the parameter values.

Apart from that some authors used the D-optimality criteria for a quasilinear quadratic or cubic model in order to find good training data for training a nonlinear ANN. [24] applied it successfully to the modelling of the stationary behaviour of consumption and exhaust gases of a car engine. [7] concluded that this approach works fine if the region of interest is restricted and suggested a quest for a systematic method along the lines of the D-optimal design approach that is based on the particular structure of the neural network model to be trained.

Witczak [27] showed how the Wynn-Fedorov algorithm could be used for the task of optimal experimental design and a locally D-optimum online sequential design. Basic steps are the separation of weights that enter linearly into the output function and weights that do not. An important feature of his approach is that bounds on the output are obtained also.

A more questionable approach is described in [17]. The authors noticed that the matrix $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ contained in the Levenberg Marquardt algorithm looks like an information matrix from design of experiments or regression theory. Based on this fact they used the D-optimality as a criteria to search for appropriate training samples. But the matrix $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ depends strongly on the current values of the weights $\mathbf{w}$ and therefore the first choice of parameter values $\mathbf{w}$ is tantamount to the whole training and 'sampling' process and therefore for the approximation and prediction quality of the ANN. Even if the approach seems to be interesting there is still a lack of theoretical base for justification of this approach.

6 Prediction Quality

The prediction quality of an ANN is usually good when we feed the ANN with an input sample which is quite similar to the training patterns but it is bad when the input sample differs significally from the input patterns with which the ANN has been trained. In order to determine if an input pattern is somehow compatible with the training data some kind of novelty detection has to be carried out. This task of novelty detection is quite simple when the dimensionality of the input space is very low but is far from being easy when higher dimensionality is concerned, considering the nonlinear weighting which takes places within an ANN. Recent research has shown that novelty detection can be approached by the use of an auto-associative neural network (AANN) or auto encoders. They are feedforward neural networks with a bottleneck: The output layer of an AANN should reconstruct the input layer via a bottleneck of a much smaller number of neurons in the hidden layer. The driving mechanism allowing such a discrimination is a nonlinear principal componenent analysis (NLPCA) [16]. NLPCA is the nonlinear version of the principal component analysis (PCA). In order to understand the use of an AANN for determining the region of the input space in which the quality of the prediction of an ANN is acceptable, the basics of PCA and NPCA are introduced and then the application of the AANN for prediction quality is explained.

6.1 Principal Component Analysis (PCA)

The goal of a PCA is to map an input space of high dimensionality into an output space of low dimensionality with minimum loss of information. *The superficial dimensionality of data is often much greater than the intrinsic dimensionality.* This dimensionality reduction is the purpose of a PCA and is closely related to feature extraction. Let's assume that $\mathbf{Y}_H$ a collection of n observations with m variables. Then a linear PCA can be described by the following equation:

$$\mathbf{X}_H = \mathbf{X}_L \mathbf{P}^T + \mathbf{E} \tag{27}$$

where $\mathbf{X}_L$ s the score matrix of dimensionality $n \times f$ and $\mathbf{P}$ the loadings matrix of dimensionality $m \times f$. f is the numer of factors and $f < m$. This factorization is driven by the optimiality criterion, that the Euclidian norm of the residual matrix $\|\mathbf{E}\|$ is minimized. If $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}_f$ then we can state that

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{x}_H \mathbf{P}. \tag{28}$$

and the backward transformation would be

$$\mathbf{x'}_H = \mathbf{x}_L \mathbf{P}^T. \tag{29}$$

where $\mathbf{x}_H$, $\mathbf{x'}_H$ and $\mathbf{x}_L$ are the measurement, the reconstructed measurement and the feature vector.

6.2 Nonlinear Principal Component Analysis (NPCA)

Nonlinear principal component analysis drives the idea of linear PCA a little bit further. The mapping into the feature space is now allowed to be an arbitrary nonlinear functionality. Since Cybenko [8] showed that by linear superpostion of enough sigmodial functions any function can be approximated to an arbitrary degree. Therefore this mapping should be done by some layer of a neural network. Attention is focused to the two equations (28) (29) that describe the mapping from measurement space of high dimensionality to the feature space of low dimensionality and vice versa. The linear relationship in (28) is substituted by a nonlinear relationship

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{G}(\mathbf{x}_H), \tag{30}$$

where $\mathbf{G} = [g_1, g_2, ..., g_{n1}]$ is a nonlinear function vector. In Fig. the realization of this function with an ANN is shown.

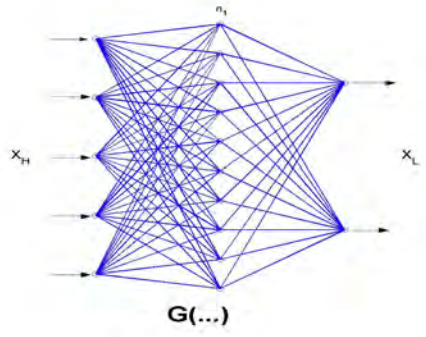


Figure 8: The function G realized with an ANN

Analogously the reconstruction transformation (29) is also made nonlinear

$$\mathbf{x'}_H = \mathbf{H}(\mathbf{x}_L) \tag{31}$$

where $\mathbf{H} = [h_1, h_2, ..., h_{n2}]$ is a nonlinear function vector.

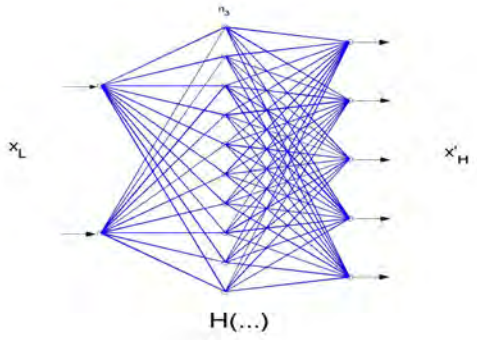


Figure 9: The function G realized with an ANN

Both functions can be realized by a hidden layer of a MLP-ANN with sigmoidal transfer function. ANNs are characterized by the fact that training is possible. But these two architectures cannot be trained independently since the feature vectors are unknown and therefore supervised learning is not possible. This can be circumvented if both ANNs are combined. So we get an ANN that should map the input to the input itself.

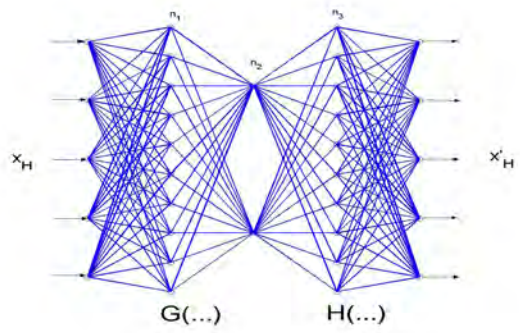


Figure 10: The Autoassociative Neural Network Topology

It goes without saying that such an ANN can be trained with standard learning algorithms. After training the ANN can broken in the two ANNs of Fig. 8 and Fig. 9 and the necessary transformations for NLPCA are realized. But there is still the question of choosing the right number of nodes in the three hidden layers.

6.3 Use of AANN for Determining the Range within the Input Space with Good Prediction Quality of an ANN

Wiesener [26] showed how AANNs can be used within the context of determination of the input space where a reasonable prediction quality can be assumend. He applied this method to the modelling of the stationary behaviour of a car engine. An MLP-ANN is trained together with an AANN during the training phase. During the production phase the prediction quality of the ANN is estimated with the AANN.

7 New Data after the Training Process

Up to now we have considered the training of a neural network as a process where an untrained neural network with favourable initial conditions is exposed to a learning procedure which influences the free parameter of the ANN in order to accomplish the task of the ANN to represent as best as possible the training data and at the same time to guarantee favourable generalization properties during the production phase of the ANN phasing unknown input and producing accurate prediction for these inputs. This quite useful application assumes that at a certain point of time no more additional knowledge of the process is available or necessary in order to well describe the process or system at hand. But most processes in everyday life don't function that way: Usually they can be bascially described at the beginning and during operation more and more information

will be available. The integration of the knowledge during process operation without cumbersome complete retraining is far from being an easy task. Before discussing the problem into detail we focus the attention on the kind of new information that during the process operation arises and its compotability with the already trained neural network. New data can be of the following kind:

- not real new information, but a refinement of the already existing knowledge of the process (Refinement of the knowledgebase),
- new information that the already trained neural network does not cover (Enhancement of the knowledgebase),
- information that is in contradiction with the already acquired knowledge (Correction of the knowledgebase).

7.1 Information Theoretic Discussion of Training and Retraining

Starting from a theoratical point of view a short information theoretic discussion seems to be revealing. For this purpose we focus our attention to an arbitrary weight w_k of some layer of the neural network. In a discrete scenario this weight w_k can take any of the values $w_k^l (l = 1..m)$. If we consider this weight as a discrete random variable we could define its entropy as follows:

$$H_D(w_k) = -\sum_{l=1}^{m} p(w_k^l) lg(p(w_k^l)). \tag{32}$$

Allowing w_k to take any continuous values in between an interval of $\Re$ i.e. to be a continuous random variable with probability density $f_P(w_k)$ we get the entropy $H_C(w_k)$ as

$$H_C(w_k) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_p(w_k) lg(f(w_k)\Delta x) dw_k \tag{33}$$

Since the information entropy or Shannon entropy can be considered as a measure of the average information content missing when the value of the random variable is unknown, we need the amount of information I_{wk} in order to determine the final state of the weight w_k and this necessary information equals to the entropy of the weight:

$$I_{wk} = H_C(w_k). \tag{34}$$

Up to now we discussed a single weight of some layer of the neural network. If we consider the network as a whole the weights are strongly related. This means that the weight as random variables are mutually conditioned. The entropy of the whole neural network X(NN1) is given by

$$H_N = H(w_1, w_2, ..., w_K) = H(w_1) + H(w_2|w_1) + ... + H(w_K|w_1, w_2, ..., w_{K-1}). \tag{35}$$

There is not really an algorithm to compute this entropy as far as high dimensional ANNs are concerned, so this result has more a theoretical value. Learning form this point of

view means reducing the entropy of the ANN. The entropy given by the initial values (usually randomly chosen) is highest and should then be reduced by a proper training scheme. If we choose uniformly distributed values as inital values for the weights of the ANN we would increase the probability of finding the optimum solution by a training scheme. But a searching scheme may not be optimal as far as the number of training cycles is concerned. If we consider the retraining of ANNs than we can state this problem in the information theory way as follows:

$$I_{X \to Y} = H(Y) - H(Y|X) \tag{36}$$

where $I_{X \to Y}$ is the information of Y (NN2) obtained throguh X (NN1). By use of the already trained net X (NN1) we diminish the entropy of the ANN Y (NN2) by the conditional entropy $H(Y|X)$. Unfortunately there is no feasible pratical way to compute $H(Y|X)$ for ANNs or at least it is a hard task.

This information theoretic based discussion is quite fascinating but does not lead to constructive results. For more information on this topic we refer to [9] [15].

7.2 Methods for Retraining

Within this article we focus our attention to three methods for retraining that make use of the information content of an already trained ANN. Depending on the problem at hand they are more or less suited. The advantage of special algorithms for retraining should be the reduction of the training effort and/or the keeping of the already trained knowledge. It is generally difficult or impossible to separate the weights from the neural network and then derive from the weights useful information. The network itself can administer best its own information from its weights. Some highly interpretable weights can be found in neuro-fuzzy architecture [1]. Rule extraction algorithms use the weights and the neural network in order to derive information [19].

7.2.1 Retraining by Weight Scaling for Low Function Dissimilarity

In case that some functional behaviour of two systems to be modelled is similar as far as a certain similarity measure is concerned, Nastac and Matei [20] propose a retraining algorithm which is based on a rescaling of the weight values obtained from the former training of the ANN. The dissimiliarity measure E_d is defined as

$$E_d(f_{NN1}, f_{NN2}, v) = \frac{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - \theta(x_j)|}{v} \tag{37}$$

In order to show the potential of this quite simple method they devised a benchmark method to evaluate the reduction of number of training cycles achieved by this method. Here are the basic steps of this benchmark:

1. Decide the initial function f and training set
2. Choose the network architecture

3. Select the training procedure
4. Initialize the network weights with small uniformly distributed values
5. Train and hold the training cycles number
6. Assign L values to scale factor γ
7. Reduce by γ_i each the weights obtained
8. Repeat learning procedure for each set of weights and memorize $V(\gamma_i)$
9. Repeat step 8 for another training set of function f or for the case of function g with a similar graph

In [20] different functions are evaluated according to the testbench. As expected a noticeable reduction in training cycle number is achieved if the two function don't differ too significantly. If they differ significantly no reduction in training cycle number is achieved and training the ANN from anew seems to be more efficient.

7.2.2 Retraining by Use of Interference and Localization

In chapter 4 the notion of interference has been introduced. Learning should be carried out by observing the already acquired knowledge from former training. Therefore unlearning of previously learned data should be prevented byt the use of local neural network techniques [25]. Standard schemes for learning or training would when new data arrives that is confined to a certain region in the state space - in case of a dynamical system - altering their approximation capalities in order to adapt to this new data which may be unrepresentative of the entire domain being learned. On the other hand if a dynamical system settles into a desired trajectory and the neural network architecture may continually adapt its weight due to noise, then this can cause the approximation of the ANN in other areas to collapse due to excessive interference.

The localizing algorithm described in [25] takes interference into account by slight change of the cost function for optimization. The cost function contains an error contribution and a weighted interference contribution.

7.2.3 Retraining by Dynamic Construction of the Neural Network

The drawback of many MLP ANN training methods is the fact that they need the neural architecture beforehand. If the architecture is chosen before the training process, there is in the general case absolutely no guarantee that the architecture will be appropriate for the approximation task at hand (→ see chapter 3.1) nor that the weights during training will converge to a solution. In order to circumvent this problem, several MLP ANN training algorithms have been devised that do not need the architecture a - priori: Cascade Correlation, DCN, DNAL, Upstart, ASOCS, Meiosis, Perceptron Cascade, the Tower and Inverted Pyramid algorithms. Other authors tried to circumvent this problem with techniques that don't necessarily need the 'optimal' MLP-ANN architecture by using

a more complex architecture than necessary: Complexity/accuracy tradeoff to determine the appropriate network architecture, cross validation, Bayesian training, early stopping, connection pruning algorithms and weight decay.

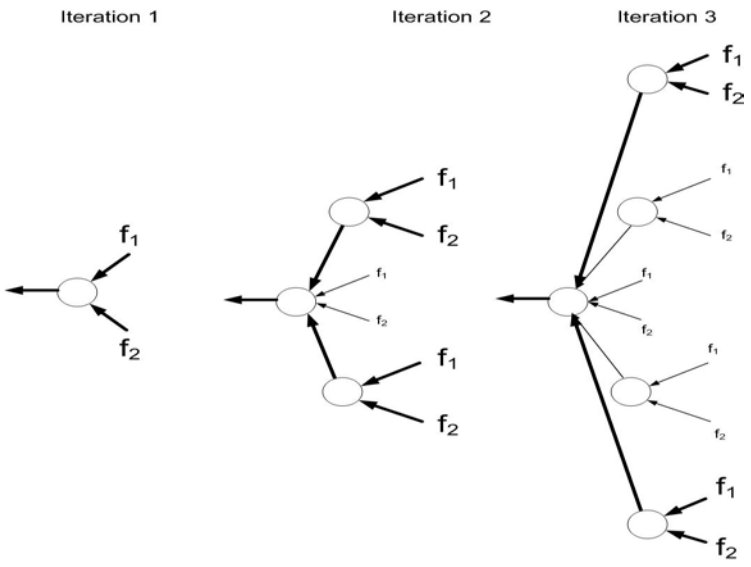


Figure 11: Construction principle of the DMP3

Andersen and Martinez [3] proposed a method of the first kind for incrementally constructing multilayer perceptron networks called Dynamic Multilayer Perceptron 3 (DMP3). It is characterized by a cycling between a training phase and a growth phase. It starts with one node and sucessively adds other nodes (growth phase) if the error can't be reduced to an acceptable level. During the growth phase the existing network weights are frozen and the weights that connect the new elements to the existing elements are initialized to predetermined values. Information gain is the driving force behind growth of the network and training of network elements. For more information it is referred to [3].

8 Conclusion

In order to improve the accuracy and efficiency of the neural architecture approach and the knowledge base of an ANN, a lot of issues have to be taken into account. But these issues are highly intricated. Therefore the components of a holistic approach towards neural network modelling have been shown within this article. Regression analysis and design of experiments are a precious tool when it comes to choosing highly advantageous input samples for the ANN. Special retraining algorithms can lessen the number of training cycles in certain situations. Designing an appropriate neural model is a multi faceted task. Neural network designer should be aware of this issues.

Appendix

Nomenclatura used within this article

Term	Definition
$\mathbf{x}$	Single data item for training or reproduction
$\mathbf{X}$	Data items for training or reproduction
$\mathbf{X}_N$	N data items
$\mathbf{X}_O$	Whole domain of input values for the function to be approximated by the ANN
$\mathbf{w}$	Weights of all layers of the ANN summarized in one vector
$\mathbf{T}(...)$	Learning algorithm
α	Learning rate
λ	Damping factor for the Levenberg Marquardt algorithm
e_{approx}	Approximation error of an ANN
e_{repres}	Representation error of an ANN
e_{gener}	Generalization error of an ANN
e_{optim}	Optimization error of an ANN
$\mathbf{g}$	Resulting approximation function of the ANN
$\mathbf{J}$	Jacobian matrix
H_D	Entropy of a discrete random variable
H_C	Entropy of a continuous random variable
f_p	Probability density of a continuous random variable
I	Information
$\mathbf{I}_f$	Unity matrix of dimension f $\times f$
$\mathbf{x}_H, \mathbf{X}_H$	Data vector,matrix of high dimensionality
$\mathbf{x}_L, \mathbf{X}_L$	Data vector,matrix in the feature space of low dimensionality
$\mathbf{M}$	Fisher Information matrix
f_{NNx}	Approximation function of Neural Network x
n_1	Number of hidden neurons in the first layer of an AANN
n_2	Number of hidden neurons in the second layer of an AANN
n_3	Number of hidden neurons in the third layer of an AANN
h	Number of neurons in the hidden layer

Table 2: Nomenclatura and its definition used with this article

Algorithms for D-optimal Design

There is no analytic way to solve the D-optimal design problem, but there exist very efficient heuristic methods [18] to find at least sub-optimal solutions to this problem. Almost all algorithms are Monte Carlo algorithms, heuristics, that base on the idea of sequentially exchanging 'bad' candidates of design for 'better' ones. In the last years even methods from artifical intelligence like genetic algorithms [14] have been successfully applied for this problem.

The most essential algorithm is the so called DETMAX algorithm whose major steps are the following:

1. Start with a randomly selected p-point design.
2. Add a $(p+1)$st point; selected such that the maximum possible increase in the determinant is achieved.
3. Remove from the $(p+1)$-point design obtained in 2) the point that results in the minimum decrease in the determinant of the matrix $(\mathbf{X})^T\mathbf{X}$
4. Repeat Steps 2) and 3) until no significant change in the determinant of the matrix $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ occurs.

There exist some very useful relationships that speed up the computation [28] In order to reduce the computational burden, the new calculation of the determinant of the information matrix can be avoided, if a row is added to or eliminated from matrix $\mathbf{X}$.

If the determinant of $\mathbf{M} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ is already known and we add another candidate then $\mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ y^T \end{pmatrix}$ might not necessarily be computed from scratch. Instead one can use the following formula:

$$det(\mathbf{M}_y) = det(\mathbf{M})(1[+]\mathbf{y}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}) \tag{38}$$

Also the inverse of $\mathbf{M}$ can computed recursively:

$$\mathbf{M}_y^{-1} = \mathbf{M}^{-1}[-](\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y})^T/(1[+]\mathbf{y}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}) \tag{39}$$

This means only once $det(\mathbf{M})$ and $\mathbf{M}^{-1}$ have to be computed and then the equations (38) and (39) can be used to update the values when candidates are removed from or added to the design.

Nevertheless numerical reasons makes it necessary that from time to time some bootstraping is done i.e. the determinant and the inverse have to be explicitely computed. This reduces the influence of rounding errors on the final design.

From (38) it follows that the task to find the candidate which maximizes the determinant is equivalent to find the candidate that maximizes $\mathbf{y}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$. This means a time-saving methods can be devised:

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{M}_y^{-1}\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}_i[-]\frac{(\mathbf{y}_i^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}_i)^2}{1[+]\mathbf{y}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}} \tag{40}$$

Literature

[1] A. Abraham. *Neuro Fuzzy Systems: State-of-the-art Modeling Techniques*. School of Computing and Information Technology, Monash University, Churchill, Australia.

[2] M. J. Box andd N. R. Draper. *Factorial Designs, the det(X'X) Criterion and Some Related Matters*. Technometrics, The American Society for Quality Control and The American Statistical Association, Vol. 13, No.4, 1971.

[3] T. L. Andersen. *DMP3: A Dynamic Multilayer Perceptron Construction Algorithm*. Computer Science Department Brigham Young University, Provo, Utah USA.

[4] A. R. Barron. *Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function*. IEEE Transaction Information Theory, 930-945, IT-39, 1993.

[5] G. E. P. Box and H. L. Lucas. *Design of Experiments in Nonlinear Situations*. Technometrics, The American Society for Quality Control and The American Statistical Association.

[6] A. Gholipour B. N. Araabi M. Fatourechi C. Lucas, A. Abbaspout. *Enhancing the Performance of Neurofuzzy Predictors by Emotional Learning Algorithm*. I, 2002.

[7] M. H. Choueiki. *Training Data Development with the D-Optimality Criterion*. IEEE Transactions on Neural Networks Vol.10, No.1, 1999.

[8] G. Cybenko. *Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function*. Math. Control Signal & Sys.,2,303, 1989.

[9] M. Girolami. *Self-Organizing Neural Networks*. Springer Verlag, London, 1999.

[10] N. Yamashita H. Dan and M. Fukushima. *Convergence Properties of the Inexact Levenberg-Marquardt Method under Local Error Bound Conditions*. Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Japan, 2001.

[11] T. L. Hebble and T. J. Mitchell. *Notes: Repairing Response Surface Design*. Technometrics, The American Society for Quality Control and The American Statistical Association, Vol. 14, No.3, 1972.

[12] K. Hornik. *Approximation capabilities of multilayer feedforward networks*. Neural Networks 3, 551-560, 1991.

[13] K. Hornik. *Degree of Approximation Results for Feedforward Networks Approximating Unknown Mappings and Their Derivatives*. Neural Computation, 1262-1275 Massachusetts Institue of Technology, 1994.

[14] K. Knoedler J. Poland, A. Mitterer. *Genetic Algorithms Can Improve the Construction of D-Optimal Experimental Design*. WSI Rechnerarchitektur, Universitt Tuebingen, Germany, 2003.

[15] R. Johannesson. *Informationstheorie - Grundlagen der (Tele-Kommunikation)*. Addison Wesley, 1992.

[16] M. A. Kramer. *Nonlinear Principal Component Analysis Using Autoassociative Networks.* AIChE Journal, Vol. 37, No.2, 1991.

[17] C. Wilhelm T. Winsel M. Ayeb, H. Theuerkauf. *Robust Identification of Nonlinear Dynamic Systems Using Design of Experiment.* Proceedings of the 2006 IEEE, Conference on Computer Aided Control Systems Design, Munich, Germany, October 4-6, 2006.

[18] Tobj J. Mitchell. *An Algorithm for the Construction of D-Optimal Experimental Design.* Technometrics, The American Society for Quality Control and The American Statistical Association, Vol. 16, No.2, 1974.

[19] K. Mossakowski. *Rule extraction in neural networks. A survey.* Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology.

[20] I. Nastac. *A Retraining Improvement of Feedforward Neural Networks.* Turku Centre for Computer Science Technical Report No 504, 2003.

[21] Warren S. Sarle. *Neural Networks and Statistical Models.* Proceedings of the Nineteenth Annual SAS Users Group International Conference, April, 1994, 1994.

[22] B. Kroese V. Vysniauskas, F. Groen. *A method for finding the optimal number of learning samples and hidden units for function approximation with a feedforward network.* Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, The Netherlands.

[23] A. Viehweider. *Statistische Versuchsplanung in der Motorkennfeldoptimierung, Diplomarbeit.* Lehrstuhl fuer Messystem- und Sensortechnik, Technische Universitaet Muenchen, 1999.

[24] S. Wagner. *Kűnstliche neuronale Netze in der Motorentwicklung.* Lehrstuhl fűr elektrische Messtechnik, Műnchen, 1997, 1997.

[25] Sc. Weaver. *Preventing Unlearning During On-Line Training of Feedforward Networks.* Department of Electrical and Computer Engineering, University of Cincinnati, Ohio.

[26] O. Wiesener. *Autoassoziative Neuronale Netze zur Datenvalidierung im Bereich der Kennfeldoptimierung, Diplomarbeit.* Lehrstuhl fuer Messystem- und Sensortechnik, Technische Universitaet Muenchen, 1999.

[27] M. Witczak. *Toward the Training of Feed-Forward Neural Networks With the D-Optimum Input Sequence.* IEEE Transactions on Neural Networks Vol.17, No.2, 2006.

[28] J. Kiefer Z. Galil. *Time- and Space-Saving Computer Methods, Related to Mitchell's DETMAX, for Finding D-Optimum.* Technometrics, The American Society for Quality Control and The American Statistical Association, Vol. 22, No.3, 1980.

Kurzfassungen

Industrialisierung von Regelungstechnik am Beispiel der Fahrwerkselektronik

Helmut Hochschwarzer
BMW Group
Helmut.Hochschwarzer@bmw.de

Wie in vielen Bereichen unseres Lebens hat die Elektronik in den letzten Jahren auch immer stärkere Bedeutung im Automobilbereich gewonnen. Studien zeigen, dass das exponentielle Wachstum von Speicher und Rechenleistung der PC-Welt mit ca. 7 Jahren Zeitverzug im Automobil auftaucht.
Im Fahrwerksbereich begann der Einzug der Regelungstechnik auf elektronischer Basis 1979 mit den ersten Antiblockier- Bremsregel- Systemen. Lange Zeit blieben die Regler auf Bremsen- und Antriebsmomenteingriffe beschränkt: Antriebsschlupfregelung (1986) und stabilisierender Bremseneingriff (1992).
Seit Beginn der 90er- Jahre wurden immer mehr physikalische Eingriffsmöglichkeiten erschlossen: Eingriffe in die Dämpfung durch elektrisch angesteuerte Ventile, Lenkung der Hinterräder, aktive Federung, aktive Stabilisatoren, geregelte Längs- und Quermomentverteilung sowie die Regelung des Lenkmoments und zu guter Letzt der aktive Lenkeingriff.
In diesem Beitrag sollen einige Aspekte der Entwicklung dieser Regelsysteme behandelt werden: Die regelungstechnischen Funktionen, die zu berücksichtigenden Sicherheitsaspekte, Hardware- und Software- Architektur und Entwicklungsprozesse.

Ziel aller Entwicklungen fahrdynamischer Regelsysteme ist es, dem Fahrer ein im Vergleich zum rein mechanischen Fahrwerk verbessertes Verhalten anzubieten. Neben der klassischen Fahrzeugstabilisierung im Grenzbereich stehen zunehmend Verbesserungen des normalen Fahrverhaltens im Vordergrund. Die wesentlichen Zielrichtungen sind dabei die Steigerung von Fahrdynamik und Agilität und die Verbesserung des Fahrkomforts sowie die Auflösung der Konflikte zwischen diesen Zielrichtungen.
Wurde bei den Entwicklungen der einzelnen Regelsysteme mit jeweils einem physikalischen Stelleingriff nur eine Zielgröße betrachtet, so ist dies bei der Vielzahl der Eingriffe nicht mehr möglich. Grund dafür ist, dass das zu regelnde Fahrzeug ein Mehrgrößensystem darstellt und die beschreibenden Differentialgleichungen für die 3 translatorischen und rotatorischen Bewegungen verkoppelt sind.
Erschwerend kommt hinzu, dass viele der Regelsysteme als Sonderausstattungen angeboten werden und deshalb auf die dadurch entstehende Varianten- Kombinatorik Rücksicht genommen werden muss. Aus diesem Grund wird derzeit unter dem Namen ICM (Integrated Chassis Management) versucht, die Regler zu strukturieren, zu koordinieren und Priorisierungsebenen einzuführen. Nur dadurch können die Funktionspotentiale der Stelleingriffe optimal genutzt werden.

Wie alle technischen Systeme müssen auch die Fahrwerksregelsysteme hinsichtlich ihrer Sicherheitsrelevanz eingestuft und entsprechend entwickelt werden. Bei der Einstufung wird beurteilt, wie groß die Gefahr ist, die von dem System bei einem Fehlverhalten oder Ausfall ausgeht. Dabei orientiert man sich an Normen, die den Stand der Technik repräsentieren. Abhängig von der Sicherheitseinstufung müssen sowohl der Entwicklungsprozess als auch die Systemauslegung spezielle Anforderungen erfüllen. Fahrwerksregelsysteme werden im allgemeinen fail silent ausgelegt, d.h. dass sie sich bei Erkennen eines Fehlers abschalten. Um dies sicher zu gewährleisten werden für die meisten Systeme Architekturen mit redundanten Funktionspfaden von der Signalplausibilisierung über Berechnung der Algorithmen bis zu den Hardware- Abschaltpfaden gewählt.

Bei der Gestaltung der Systemarchitektur für die Fahrwerkselektronik sind verschiedene Aspekte zu berücksichtigen: Erfüllung der geforderten Funktionalität, Minimierung der Herstellkosten, Stromversorgung, Ruhestrom durch Funktionen, die auch bei abgestelltem Fahrzeug gefordert sind, geometrische Integrierbarkeit, Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit und noch einige mehr.
Aus diesem Grund wird zuerst die logische Architektur entworfen und abgestimmt, um dann die Funktionen auf Steuergeräte zu partitioniert, die über Bussysteme kommunizieren. Dabei ist auch zu beachten, dass in den verschiedenen Fahrzeugmodellen insbesondere bei Sonderausstattungen mit niedriger Verkaufsrate möglichst Gleichteile zu verwenden sind.
Um bei der Zusammenarbeit mit verschiedenen Zulieferfirmen die Freiheitsgrade für die Systemgestaltung möglichst groß zu halten ist die Standardisierung von Basissoftware, Bussystemen und Funktionsschnittstellen erforderlich, wie sie z.B. im AUTOSAR-Konsortium vorangetrieben wird.
Um die ständig wachsenden Kommunikationsanforderungen zwischen den Steuergeräten zu erfüllen wurde der FlexRay- Bus entwickelt, der bezüglich Bandbreite und durch seinen Determinismus einen deutlichen Fortschritt zum bisher verwendeten CAN- Bus darstellt.

Wegen der hohen Komplexität und den Sicherheitsanforderungen spielen die Entwicklungsprozesse eine entscheidende Rolle. Die Abläufe bei der Fahrwerkselektronik orientieren sich dabei am V- Modell, das zur Beschreibung einer Iterationsschleife der Elektronikentwicklung verwendet wird. Diese Iterationsschleifen werden im Projektterminplan für das Gesamtfahrzeug mit den Terminplänen für die Mechanikkomponenten, den Abläufen in den Werken und den Vorbereitungen für die Service- Werkstätten zusammengeführt.
Bezüglich der Entwicklungsmethodik ist vor allem der Einsatz automatischer Codegenerierung aus Matlab- Simulink zu erwähnen. Dabei muss für sicherheitsrelevante Software eine Qualifizierung des Codegenerators erfolgen, um aufwändige Reviews zu vermeiden. Die Absicherung der Systeme verlagert sich immer mehr vom klassischen Fahrversuch auf Hardware- in the- Loop- Prüfstände, bei denen Fahrzeug, Fahrer und Umgebung in Echtzeit simuliert werden.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass im Bereich der Fahrwerkselektronik getrieben durch die ständig steigenden Kundenanforderungen und ermöglicht durch die ständigen Fortschritte der Elektronikindustrie noch mit vielen interessanten Entwicklungen zu rechnen ist.

Modellierung von Wärmeübertragern in Biomassefeuerungsanlagen

Markus Gölles, Robert Bauer

Austrian Bioenergy Centre GmbH
8010 Graz, Inffeldgasse 21b
markus.goelles@abc-energy.at[1]

Technische Universität Graz
Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik
8010 Graz, Kopernikusgasse 24/II
robert.bauer@tugraz.at

Biomasse (Hackgut, Rinde, Sägemehl, usw.) ist im Gegensatz zu fossilen Brennstoffen ein CO_2-neutraler Energieträger. Vor dem Hintergrund steigender Bemühungen zur Reduktion von CO_2-Emissionen gewinnt die Verbrennung von Biomasse somit immer mehr an Bedeutung.

In Biomassefeuerungsanlagen wird die bei der Verbrennung freigesetzte Wärme zur weiteren Nutzung in Wärmeübertragern auf einen anderen Fluidstrom (in der Regel Wasser) übertragen. Um die Wärmeübertrager geeignet betreiben zu können ist es hilfreich ihre dynamischen Eigenschaften zu kennen. Hierzu wird ein einfacher und flexibler Ansatz zu deren hinreichend genauen Modellierung anhand eines sogenannten Rohrbündel-Wärmeübertragers vorgestellt.

Es wird zunächst von einer allgemeinen Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten Rohr ausgegangen. Daraus können partielle Differentialgleichungen zur Beschreibung der Temperatur als Funktion von Zeit und Ort sowohl für den Rauchgas- als auch für den Wasserstrom hergeleitet werden. Aus den Simulationsergebnissen wird ersichtlich, dass das dynamische Verhalten letztendlich durch ein nichtlineares mathematisches Modell erster Ordnung zufriedenstellend beschrieben werden kann. Aufgrund des dabei verwendeten allgemeinen Ansatzes ist zu erwarten, dass das vorgestellte Modell auch für andere Wärmeübertragerbauformen adaptiert werden kann.

Abschließend wurde das entwickelte neue Modell mit Messdaten aus Testläufen an einer Versuchsanlage des Austrian Bioenergy Centres (Rostfeuerung mit einer thermischen Nennleistung von 180kW; Rohrbündelwärmeübertrager mit drei Rauchgaszügen) verifiziert. Dabei zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Werten.

Das vorgestellte Modell kann als Grundlage für eine modellbasierte Regelung dienen sowie zur Abschätzung nicht gemessener Größen bzw. des Verschmutzungsgrades des Wärmeübertragers verwendet werden.

[1]Korrespondenz bitte an diese Adresse