

SSRP 2005

14. Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

M. Horn, M. Hofbaur, N. Dourdoumas (Hrsg.)

19. - 22. 9. 2005

Schloss Retzhof, Leibnitz, Österreich

ISBN: 3-901439-06-4

© Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz



<http://www.irt.tugraz.at>



TUG

Technische Universität Graz
Erzherzog-Johann-Universität

Vorwort

Das *Steirische Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung* findet heuer zum 14. Mal im Schloss Retzhof, dem Bildungshaus des Landes Steiermark statt. Die Veranstaltung wird vom Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz durchgeführt und verfolgt das Ziel, aktuelle Arbeiten auf den Gebieten der Regelungs- und Prozessautomatisierungstechnik in universitärer und industrieller Forschung zu erörtern. Die Beiträge des Seminars sind einem breiten Spektrum von Aufgabenstellungen gewidmet. Darüber hinaus trägt das Seminar heuer dem Forschungsschwerpunkt *Fahrzeugtechnik, -antriebe und Fahrzeugsicherheit* der Technischen Universität Graz mit einem entsprechenden thematischen Vortragsblock Rechnung. Der vorliegende Tagungsband ist eine Zusammenstellung der eingelangten Manuskripte und Vortragsunterlagen. Den Autoren sei an dieser Stelle für die Sorgfalt bei der Erstellung ihrer Tagungsbandbeiträge gedankt.

Graz, im September 2005

Inhaltsverzeichnis

Manuskripte

<i>Regelungskonzept für eine aktive Hinterachslenkung</i> Marlene KREUTZ, Martin HORN	3
<i>Methoden zur experimentellen Modellierung von Verbrennungskraftmaschinen</i> Harald ALTENSTRASSER, Martin HORN	16
<i>Stabilisierung rückwärts fahrender Fahrzeugkombinationen</i> Helmut WASER, Wolfgang HIRSCHBERG	40
<i>Optimale nichtlineare Regelung mit garantierter Robustheitsgrenze am Beispiel eines Motorenprüfstandes</i> Engelbert GRÜNBACHER	52
<i>Design eines virtuellen Sensors für Partikelmessung am Dieselmotor</i> P. LANGTHALER, D. ALBERER, S. WINKLER, L. DEL RE	71
<i>Verteilt-parametrische PCHD-Systeme</i> Kurt SCHLACHER, Helmut ENNSBRUNNER	88
<i>Gradients for Decoupling Continuous-Time Control Systems using the Controllability Gramian</i> Alexander WEINMANN	99
<i>Polvorgaberegler für Regelstrecken mit begrenzter Stellgröße</i> Mikuláš HUBA	117
<i>Constrained Controller Based on Dynamics Decomposition</i> Pavol Bisták, Peter Ľapák and Mikuláš Huba.....	141
<i>Mechanik und angewandte Mathematik bei Archimedes</i> Dimitri KALLIGEROPOULOS, Sultana VASILEIADOU	153
<i>Non-holonomic Nature and Torque Control of Induction Machines</i> B. GRČAR, P. CAFUTA, G. ŠTUMBERGER, H. CORTÉS, A. STANKOVÍ	167
<i>Ein systemtheoretischer Ansatz zur Lösung der Neutronendifusionsgleichungen</i> Karlheinz OCHS	182

Vortragsunterlagen

Generische By-Wire-Plattform für Flug - und Fahrzeuge und neue Anwendungsmöglichkeiten

R. REICHEL, M. ARMBRUSTER, M. LEHMAN, G. KONRAD, S. HESSE 205

Automotive Powertrain Testing

Michael PAULWEBER 231

Manuskripte

Regelungskonzept für eine aktive Hinterachslenkung

Marlene Kreutz, Martin Horn
Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik,
Technische Universität Graz
Inffeldgasse 16 c/II, Graz
kreutz@irt.tu-graz.ac.at, horn@irt.tu-graz.ac.at

Zusammenfassung

Bei der Entwicklung moderner Kraftfahrzeuge spielt die Erhöhung der Fahrsicherheit, sowie die Verbesserung des Fahrkomforts eine zentrale Rolle. Um diese Ziele zu erreichen, gibt es verschiedene Eingriffsmöglichkeiten im Bereich der Fahrdynamik.

Ein vielversprechender Ansatz zur Verbesserung der Sicherheit ist der Einsatz einer aktiven Lenkung. Ein Vorteil dieses Konzepts besteht darin, dass es - im Gegensatz zu bereits in Serie realisierten Fahrerassistenzsystemen wie z. B. ABS und ESP - im *gesamten* fahrdynamischen Bereich unterstützend wirkt.

Bei der Realisierung einer aktiven Lenkung sind prinzipiell drei Varianten denkbar: Die aktive Vorderachslenkung basiert auf der Idee, dem Fahrerwunsch einen „intelligenten“ Lenkeingriff zu überlagern. Kombiniert man die Überlagerungslenkung mit einer zusätzlichen Hinterachslenkung, so eröffnen sich weitere Eingriffsmöglichkeiten zur Beeinflussung der Fahrdynamik. Allerdings ist der Realisierungsaufwand für eine Überlagerungslenkung beträchtlich. Es ist daher naheliegend als dritte Variante nur an der Hinterachse aktiv einzugreifen.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf letztere Variante. Der in diesem Aufsatz vorgestellte, modellbasierte Lösungsansatz basiert auf der Idee, dem Fahrzeug eine von der Fahrsituation abhängige Giergeschwindigkeit aufzuprägen. Eine geschickte mathematische Aufbereitung der Problemstellung ermöglicht es, den Reglerentwurf auf der Basis eines einfachen Standardregelkreises durchzuführen.

1 Einleitung

Der Einsatz hochentwickelter mechatronischer Systeme ermöglicht die gezielte Beeinflussung des Fahrverhaltens moderner Kraftfahrzeuge. Dabei werden im Wesentlichen zwei Ziele verfolgt: Einerseits soll in fahrdynamisch kritischen Situationen - wie z. B. bei Kurvenfahrten auf teilweise glattem Untergrund - stabilisierend eingegriffen werden, andererseits soll die Fahrzeug-Agilität z. B. bei abrupten Ausweichmanövern verbessert werden. Zur Erreichung der gesteckten Ziele gibt es prinzipiell die Eingriffsmöglichkeiten „Antrieb“, „Bremsen“ und „Lenkung“. Der Einsatz einer sogenannten *aktiven* Lenkung besticht durch die Möglichkeit - im Gegensatz zu anderen Konzepten - im *gesamten* fahrdynamischen Bereich einzugreifen.

In Bild 1 ist das Konzept einer aktiven Lenkung schematisch dargestellt [7]. Dabei werden vorderer und hinterer Lenkwinkel nicht mehr nur aus dem Fahrerwunsch, sondern auch mit Hilfe geeigneter Algorithmen aus der Fahrzeugreaktion ermittelt. Wesentliche Ergebnisse im

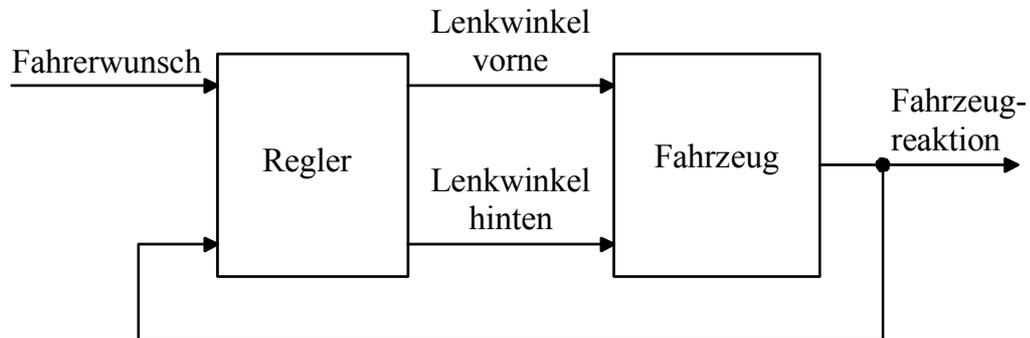


Bild 1: aktive Allradlenkung

Bereich der Allradlenkung wurden in [3] veröffentlicht. Offensichtlich erfordert dieser Ansatz neben einer Hinterachslenkung auch die Möglichkeit, dem Fahrerwunsch einen zusätzlichen vorderen Lenkwinkel zu überlagern¹. Der daraus resultierende Aufwand bei der technischen Realisierung ist somit beträchtlich. Darin ist auch der Grund zu sehen, warum existierende aktive Lenkungen nicht das volle Potential dieser Methode ausschöpfen. Denkbar sind die in Bild 2 dargestellten Varianten.

In Bild 2.a wird auf eine lenkbare Hinterachse verzichtet, siehe [2], [9]. Erwähnenswert ist, dass dieses System bereits in Serienfahrzeugen realisiert wurde.

Im Gegensatz dazu verzichtet das in Bild 2.b dargestellte alternative Konzept auf die mechanisch aufwändige Überlagerung lenkung an der Vorderachse [10]. Vorteilhaft daran ist unter anderem, dass eine Nachrüstung der aktiven Lenkung grundsätzlich möglich ist. Alle weiteren Ausführungen beziehen sich auf den Entwurf eines Regelungskonzeptes für eine solche aktive Hinterachse.

2 Modellbildung

Für die mathematische Beschreibung fahrdynamischer Vorgänge gibt es in der Literatur zahlreiche Ansätze. Speziell im Bereich der Lenkung ist die Querdynamik eines Fahrzeugs von primärem Interesse. Häufig wird das lineare Einspurmodell ([7], [11], [14]) verwendet, siehe hierzu auch Abschnitt 2.1. Dieses stark vereinfachte, lineare Modell eignet sich zur Untersuchung des Fahrverhaltens eines Fahrzeugs in einem Querschleunigungsbereich bis etwa 4ms^{-2} . Für Untersuchungen fahrdynamischer Eigenschaften in höheren Querschleunigungsbereichen sind allerdings oft kompliziertere, nichtlineare Modelle notwendig. Dies ist unter anderem auf das, beim linearen Einspurmodell vernachlässigte, nichtlineare Verhalten der Reifen zurückzuführen (siehe Abschnitt 2.1.1)

¹Eine mechanisch entkoppelte Lenkeinrichtung („steer by wire“) ist derzeit gesetzlich nicht erlaubt.

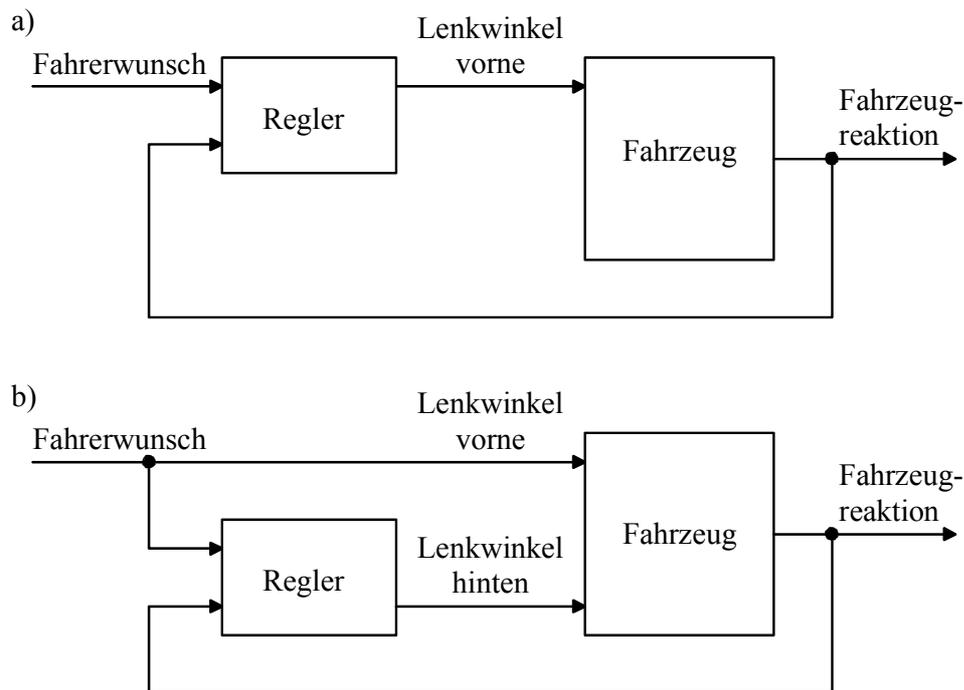


Bild 2: Varianten aktiver Lenkungen

Für Untersuchungen im fahrdynamischen Grenzbereich - dieser liegt bei herkömmlichen Fahrzeugen bei einer Querbeschleunigung von etwa $8ms^{-2}$ - ist eine wesentlich detailliertere Modellierung des Fahrzeugs erforderlich. Diese kann z. B. in Form eines Mehrkörpersystems erfolgen. Dabei werden die wesentlichen Baugruppen (wie z. B. Fahrzeugaufbau, Motorblock, oder Achsen) mit geeigneten Werkzeugen [13] modelliert.

2.1 Lineares Einspurmodell

Beim linearen Einspurmodell wird davon ausgegangen, dass die Fahrzeuggeschwindigkeit v konstant ist und, dass sich der Fahrzeugschwerpunkt auf Fahrbahnhöhe befindet. Dadurch werden weder Längskräfte noch Radlaständerungen durch Wank- und Nickbewegungen berücksichtigt. Weiters werden die Räder einer Achse zu *einem* Rad in der Achsmitte zusammengefasst (siehe Bild 3).

Der so genannte Gierwinkel ψ ist jener Winkel, den die Fahrzeuglängsachse im *ortsfesten* Koordinatensystem x_0, y_0 einnimmt. Der Winkel zwischen Fahrzeuglängsachse und der Richtung der Fahrzeuggeschwindigkeit v im Fahrzeugschwerpunkt (SP) ist der Schwimmwinkel β . Der vordere bzw. hintere Lenkwinkel wird mit δ_v bzw. δ_h bezeichnet². Der Radstand l des Fahrzeugs setzt sich aus den Abständen (l_v bzw. l_h) der jeweiligen Achsen vom Fahrzeugschwerpunkt zusammen.

²Mit dem Index v werden im Folgenden Größen an der Vorderachse, mit h Größen an der Hinterachse bezeichnet.

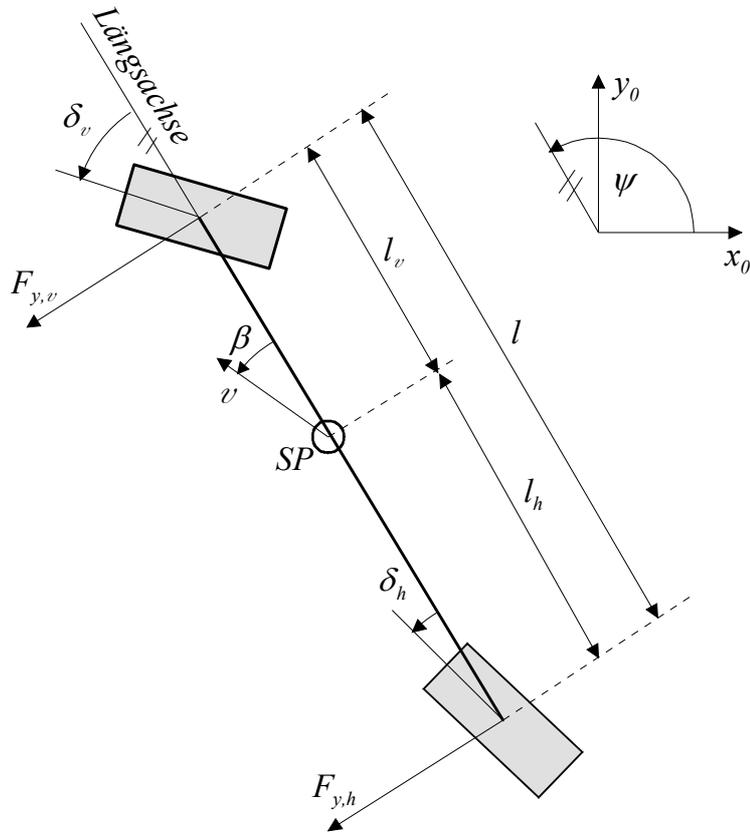


Bild 3: Einspurmodell

Das lineare Einspurmodell kann nun mit Hilfe des Kräftegleichgewichts in Fahrzeugquer- richtung und des Momentengleichgewichts um die Fahrzeughochachse abgeleitet werden. Die Indizes x , y und z kennzeichnen die Achsrichtungen des *fahrzeugfesten* Koordinatensystems. Die Fahrzeughochachse ist dabei die z -Achse, die x -Achse ist die Längs- und die y -Achse die Querachse. Die Größe a_y repräsentiert die Fahrzeugbeschleunigung in Querrichtung, mit $F_{y,v}$ und $F_{y,h}$ werden die Seitenkräfte an den entsprechenden Achsen symbolisiert. Bezeichnet man mit m die Fahrzeugmasse, so lautet das Kräftegleichgewicht in Querrichtung

$$ma_y = F_{y,v} + F_{y,h}. \quad (1)$$

Unter Annahme eines Trägheitsmomentes J_z gilt für das Momentengleichgewicht bezüglich der Hochachse

$$J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = F_{y,v}l_v - F_{y,h}l_h. \quad (2)$$

2.1.1 Reifen

Die Reifenseitenkräfte bei einer Kurvenfahrt entstehen aufgrund der Reifenelastizität durch eine Deformation der Latschfläche, d. h. der Kontaktfläche des Reifens mit der Fahrbahn. Das

führt dazu, dass das Rad nicht entlang der Felgenebene, sondern unter einem Schräglaufwinkel α dazu abrollt. (siehe Bild 4).

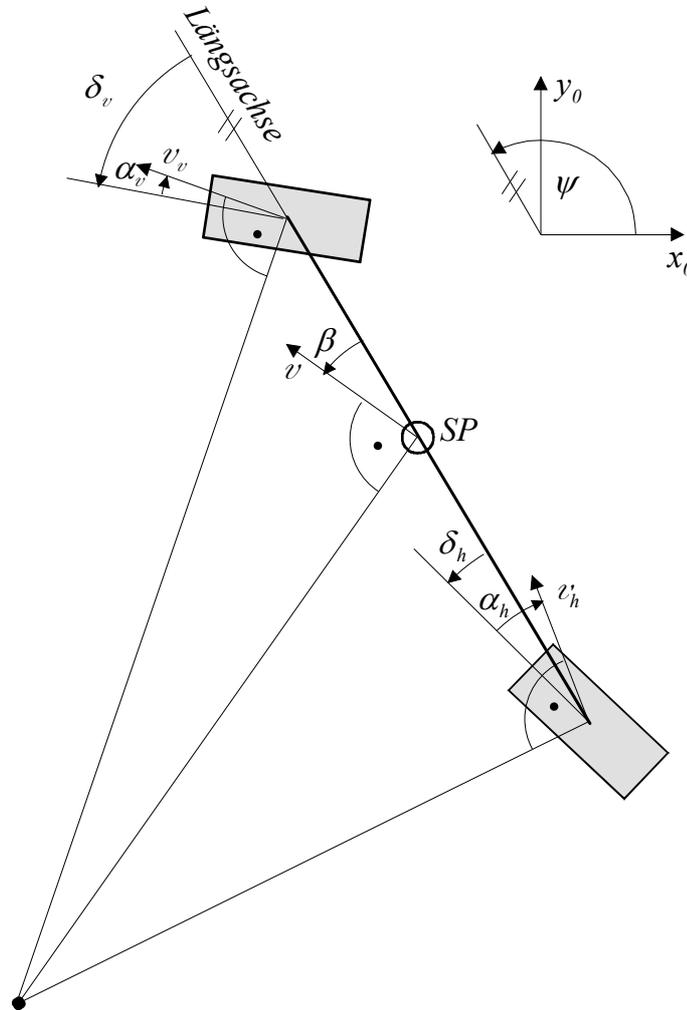


Bild 4: Schräglaufwinkel im Einspurmodell

Die sich dadurch einstellende Seitenkraft hängt von verschiedenen Einflussgrößen wie z. B. Reifentyp, Reifenaufstandskraft, Reifenluftdruck oder Fahrbahnbeschaffenheit ab. Üblicherweise wird der Zusammenhang zwischen Schräglaufwinkel und Seitenkraft anhand eines Kennlinienfeldes (siehe Bild 5) dargestellt. Um diese nichtlineare Reifencharakteristik nachzubilden existieren in der Literatur verschiedene Ansätze, z. B. [8], [5], [12]. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen Modellen, die auf physikalischen Betrachtungen basieren und Modellen, die auf der Beschreibung der Reifenkennlinien durch Näherungsformeln beruhen.

Wie in Bild 5 zu erkennen ist, kann man die Seitenkraft F_z für konstante Radaufstandskraft und kleine Schräglaufwinkel durch einen linearen Zusammenhang

$$F_y = c\alpha \quad (3)$$

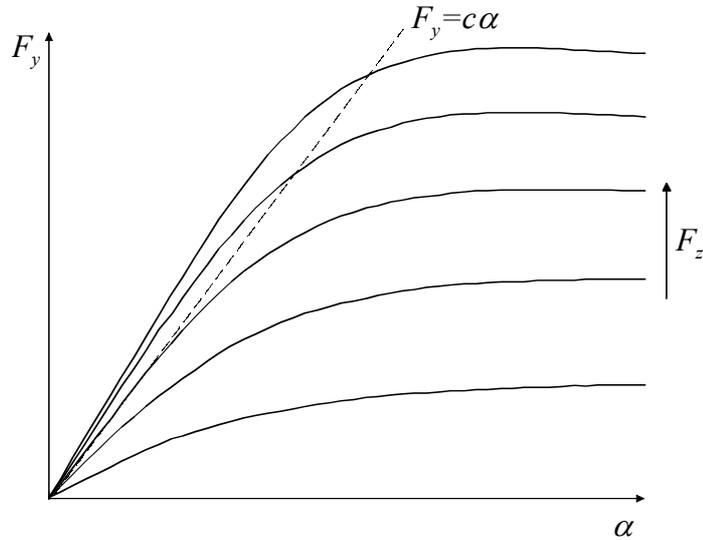


Bild 5: nichtlineares Reifenkennfeld

gut annähern. Die Beschränkung auf konstante Radaufstandskraft stellt im Zusammenhang mit dem linearen Einspurmodell keine wesentliche Einschränkung dar, da Wank- und Nickbewegungen nicht berücksichtigt werden. Die Proportionalitätskonstante c wird Seitenkraftbeiwert oder Schräglaufsteifigkeit genannt. Sie wird üblicherweise mit dem so genannten Kraftschlussbeiwert μ , der je nach Straßenverhältnissen einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann, skaliert.

$$c = \tilde{c}\mu$$

Typische Werte für μ sind [1]:

$\mu = 1$	trockene Straße
$\mu = 0.5$	nasse Straße
$\mu = 0.15$	vereiste Straße

Für die folgenden Betrachtungen wird Hochreibwert, d. h. $\mu = 1$ vorausgesetzt. Die Schräglaufwinkel an Vorder- und Hinterachse können mit Hilfe der Giergeschwindigkeit

$$r := \frac{d\psi}{dt}$$

und des Schwimmwinkels β ausgedrückt werden. Unter Annahme kleiner Lenkwinkel und eines kleinen Schwimmwinkels gilt nämlich [7]:

$$\alpha_v = \delta_v - \left(\beta + \frac{l_v r}{v} \right) \quad (4a)$$

$$\alpha_h = \delta_h - \left(\beta - \frac{l_h r}{v} \right) \quad (4b)$$

2.1.2 Zusammenfassung

Aus den bisherigen Erkenntnissen wird nun ein mathematisches Modell, bestehend aus Differentialgleichungen in den Variablen β und r gewonnen. Die Lenkwinkel δ_v und δ_h sind die Eingangsgrößen dieses Modells. Um die Modellgleichungen aufzustellen, ist es notwendig, in den Gleichungen (1) und (2) die Querbeschleunigung a_y und die Seitenkräfte in Abhängigkeit von β und r darzustellen.

Die Querbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) kann mit

$$a_y = \frac{v^2}{\rho}$$

angegeben werden. Hierbei ist ρ der Krümmungsradius der Bahnkurve des Fahrzeugs. Für diesen gilt näherungsweise die Beziehung

$$\rho = \frac{v}{\frac{d(\beta + \psi)}{dt}}.$$

Damit kann für die Querbeschleunigung

$$a_y = v \frac{d(\beta + \psi)}{dt} \quad (5)$$

geschrieben werden.

Die Seitenkräfte an den Achsen können mit Hilfe von (4) angeschrieben werden:

$$F_{y,v} = c_v \alpha_v = c_v \left[\delta_v - \left(\beta + \frac{l_v r}{v} \right) \right] \quad (6a)$$

$$F_{y,h} = c_h \alpha_h = c_h \left[\delta_h - \left(\beta - \frac{l_h r}{v} \right) \right]. \quad (6b)$$

Setzt man die Zusammenhänge für die Querbeschleunigung (5) und für die Seitenkräfte (6) in die Gleichungen (1) und (2) ein, so erhält man nach einigen Umformungen ein lineares, von der als konstant angenommenen Fahrzeuggeschwindigkeit v abhängiges Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_h + c_v}{mv} & -1 + \frac{c_h l_h - c_v l_v}{mv^2} \\ \frac{c_h l_h - c_v l_v}{J_z} & -\frac{c_h l_h^2 + c_v l_v^2}{J_z v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_v}{mv} & \frac{c_h}{mv} \\ \frac{c_v l_v}{J_z} & -\frac{c_h l_h}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_v \\ \delta_h \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Dieses kann auch mit Hilfe der Übertragungsmatrix $G(s)$ dargestellt werden.

$$\begin{bmatrix} \beta(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}}_{G(s)} \begin{bmatrix} \delta_v(s) \\ \delta_h(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Die Daten für das lineare Einspurmodell wurden an das Testfahrzeug (*Mercedes E-Klasse 4matic*) angepasst. Die durch das Fahrzeug vorgegebenen, nominellen Werte sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst [4]:

Formelzeichen	Wert
m	$2055kg$
J_z	$2895kgm^2$
l	$2.852m$
l_v	$1.395m$
l_h	$1.457m$

Die Schräglaufsteifigkeiten für den verwendeten Reifen (*Michelin Pilot 245-45 R17*) betragen mit den gegebenen Fahrzeugdaten

$$c_v = 11081 \frac{N}{rad} \text{ und } c_h = 17560 \frac{N}{rad}.$$

3 Regelungskonzept

3.1 Ziele

Es soll ein Regelalgorithmus entworfen werden, der vor allem die „Stabilität“ des Fahrzeugs in einem Geschwindigkeitsbereich von $50km/h$ bis $200km/h$ verbessert. Um dem Fahrzeug ein „sportlicheres“ Fahrverhalten aufzuprägen, soll außerdem seine Agilität erhöht werden. Das stationäre Verhalten des Fahrzeugs soll durch die Regelung möglichst unbeeinflusst bleiben. Im Hinblick auf die spätere Implementierung in einem Steuergerät und die rasche Adaption an verschiedene Fahrzeugtypen soll das Regelgesetz möglichst einfach sein.

3.2 Reglerentwurf

Die Basis für den Reglerentwurf ist das in Abschnitt 2.1 beschriebene lineare Einspurmodell. Als Regelgröße wird die Giergeschwindigkeit r verwendet, da sie relativ einfach messbar ist und bei elektronischen Stabilitätssystemen, wie z. B. ESP über den CAN-Bus verfügbar ist.

Für den Reglerentwurf wird eine konstante Fahrzeuggeschwindigkeit angenommen. Diese Annahme ist im Hinblick auf eine einfache Implementierung des resultierenden, zeitinvarianten Regelgesetzes und eine darauf folgende Stabilitätsanalyse sinnvoll. Bei der Betrachtung der Eigenwerte des linearen Einspurmodells 2.1 zeigt sich, dass eine Parametrierung des Modells (7) für eine Geschwindigkeit von $100km/h$ dabei repräsentativ für die Modelleigenschaften im gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich ist.

Für die Giergeschwindigkeit gilt unter Annahme einer konstanten Geschwindigkeit v gemäß (8)

$$r(s) = G_{21}(s) \delta_v(s) + G_{22}(s) \delta_h(s). \quad (9)$$

Da für die Regelung nur der hintere Lenkwinkel als Stellgröße zur Verfügung steht, muss der Einfluss des vom Fahrer vorgegebenen, vorderen Lenkwinkels beim Reglerentwurf berücksichtig-

sichtigt werden. Dieser kann jedoch durch Addition eines Anteils

$$\gamma(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)}\delta_v(s) = K(s)\delta_v(s)$$

zur Stellgröße u , kompensiert werden (siehe Bild 6)³.

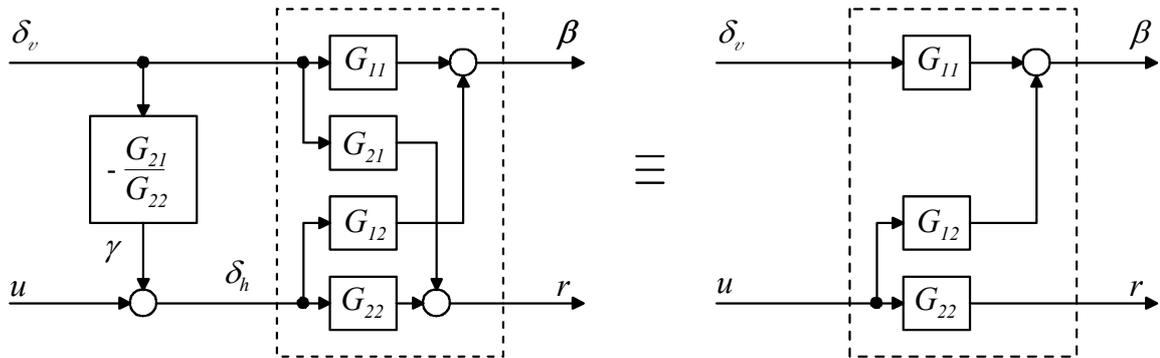


Bild 6: Kompensation

Bei Anwendung des auf Basis des linearen Einspurmodells entworfenen Kompensationszweigs in Verbindung mit einem *nichtlinearen* Modell bzw. dem realen Fahrzeug gelingt natürlich keine vollständige Kompensation. Trotzdem wirkt der Kompensationszweig dem Einfluss des vorderen Lenkwinkels entgegen. Für den Regelkreis kann damit die in Bild 7 dargestellte Struktur angesetzt werden. Dabei entspricht r_{ref} der Referenzgiergeschwindigkeit, die über geeignete mathematische Modelle oder über Kennfelder ermittelt werden kann. Der Regelkreis wurde im vorliegenden Fall mit Hilfe der analytischen Synthese [6] ausgelegt. Diesem Entwurfsverfahren liegt die in Bild 8 dargestellte Regelkreisstruktur zugrunde. Die Idee des Entwurfs besteht darin, aus den gegebenen Spezifikationen die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises zu ermitteln. Daraus können die Übertragungsfunktionen $V(s)$ und $R(s)$ problemlos berechnet werden.

³Hierbei ist die Realisierbarkeit von $K(s)$ zu gewährleisten, instabile Kürzungen als Folge der Kompensation sind zu vermeiden.

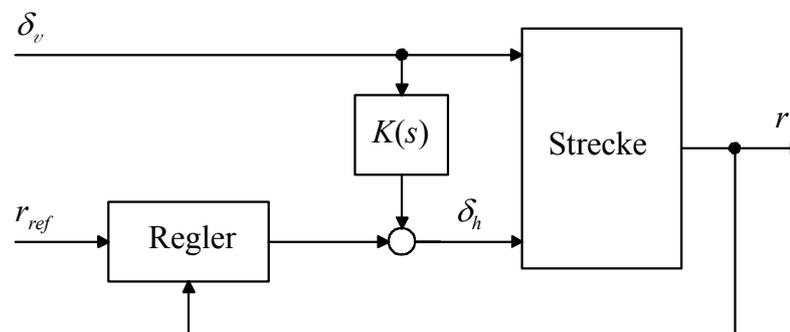


Bild 7: Regelkreis

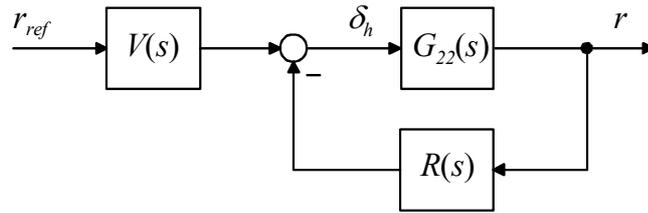


Bild 8: vereinfachte Regelkreisstruktur

Als sinnvolle Spezifikationen für das dynamische Verhalten des Regelkreises haben sich eine Anstiegszeit der Sprungantwort von $0.1s$ bei verschwindendem Überschwingen herausgestellt. Die bleibende Regelabweichung für konstante Führungsgrößen soll ebenfalls verschwinden. Daraus resultiert ein Regelgesetz mit integrierendem Charakter. Selbstverständlich muss beim Entwurf auch berücksichtigt werden, dass der hintere Lenkwinkel aus konstruktiven Gründen eine vorgegebene Schranke betragsmäßig nicht überschreiten darf.

4 Ergebnisse

Die Leistungsfähigkeit der entworfenen Regelung wurde anhand verschiedener Fahrmanöver getestet. Dazu wurde das Verhalten des Fahrzeugs mit aktiver Hinterachslenkung (*aktives* Fahrzeug) dem des selben Fahrzeugs mit herkömmlicher Vorderachslenkung (*passives* Fahrzeug) gegenübergestellt. Die Referenzgierrate entspricht dabei der (stationären) Gierrate des Fahrzeugs *ohne* Hinterachslenkung für das selbe Fahrmanöver. Im Bild 9 sind Messergebnisse bei einem Spurwechsel mit einer konstanten Fahrzeuggeschwindigkeit von $60km/h$ dargestellt. Dabei versucht der Fahrer, das Fahrzeug auf einem vorgegebenen Kurs zu halten.

Die Messergebnisse belegen, dass der Regler die Spurhaltungseigenschaften des Fahrzeugs wesentlich verbessert. Dies ist in Bild 9 in der Schlussphase des Spurwechsels deutlich zu erkennen. Diese Fahrzeugeigenschaft des geregelten Fahrzeugs hat zur Folge, dass korrigierende Lenkeingriffe durch den Fahrer dramatisch reduziert werden können. Dabei ist allerdings zu beachten, dass zur Durchführung der gleichen Manöver - verglichen mit dem passiven Fahrzeug - größere Lenkradeinschläge notwendig sind. Dieser Effekt tritt *prinzipiell* bei gleichsinniger (stabilisierender) Lenkung der Hinterräder auf und kann z. B. durch Änderung des vorderen Lenkübersetzungsverhältnisses korrigiert werden.

Bild 10 zeigt die Verhältnisse bei einer Vollbremsung auf teilweise glattem Untergrund („ μ -split-Bremmung“). Dabei befinden sich die Räder einer Fahrzeugseite auf trockenem Asphalt ($\mu \approx 1$), die anderen Räder auf einem nassen Fliesenboden ($\mu \approx 0.1$). Vor allem bei diesem Manöver zeigt sich die Stärke des vorgeschlagenen Reglerkonzepts. Im Vergleich zum passiven Fahrzeug ist deutlich weniger Korrektur durch den Fahrer notwendig. In Bild 10 ist zu beachten, dass der Regler bei Unterschreitung von $40km/h$ deaktiviert wird.

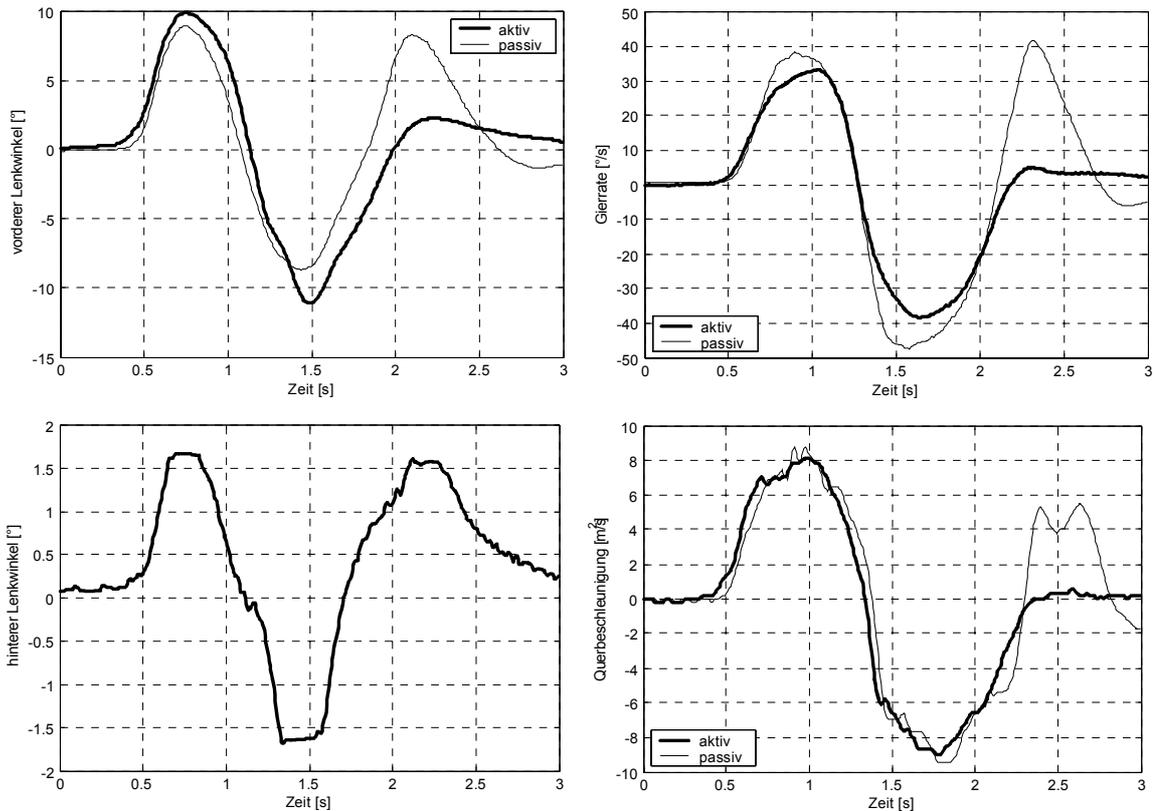


Bild 9: Fahrmanöver Spurwechsel

5 Beurteilung des Regelungskonzepts und Ausblick

Eine wesentliche Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung des vorgeschlagenen modellbasierten Regelungskonzepts ist ein mathematisches Modell (8) bei dem alle fahrzeugspezifischen Parameter genau bekannt sind. Nur dann besteht auch die Möglichkeit, die für die Regelung benötigte Führungsgröße r_{ref} hinreichend genau zu ermitteln. Im vorliegenden Fall war diese Voraussetzung erfüllt, das Regelungskonzept hat sich hier als sehr leistungsfähig herausgestellt. Dies wird auch durch die in Abschnitt 4 dargestellten Messergebnisse belegt.

Allerdings stellt der modellbasierte Entwurf auch die Schwachstelle des Konzepts dar. Die Abhängigkeit des Modells von fahrzeugspezifischen Daten erschwert die Übertragbarkeit auf andere Fahrzeugtypen. Weiters ist die Feinabstimmung des Reglers *im* Fahrzeug nur mit beträchtlichem Aufwand möglich, da den Reglerparametern keine physikalische Interpretation zugeordnet werden kann.

Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass der Regler bereits auf geringfügige Schwankungen der Gierrate r - beispielsweise verursacht durch Straßenumebenheiten - reagiert. Daraus resultiert ein Komfortverlust aufgrund des unruhigen Fahrverhaltens. Aus diesem Grund ist es unerlässlich, für bestimmte Fahrmanöver, wie z. B. für die Geradeausfahrt, zusätzliche Maßnahmen zur Unterdrückung dieses unerwünschten Verhaltens zu ergreifen.

An der Behebung der angegebenen Nachteile wird zur Zeit intensiv gearbeitet. Ein vielver-

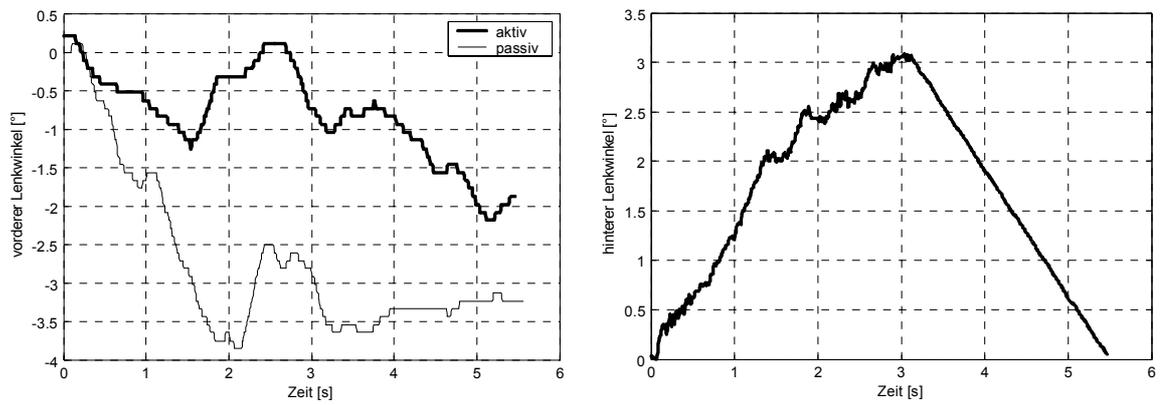


Bild 10: Fahrmanöver μ -split-Bremmung

sprechender Ansatz für ein alternatives Regelungskonzept befindet sich zur Zeit in einer Erprobungsphase.

Literatur

- [1] ACKERMANN J.: Robuste Regelung, Springer-Verlag, 1993
- [2] ACKERMANN J.: Robust control prevents car skidding, IEEE Control Systems Magazine, pp 23-31, June 1997.
- [3] ACKERMANN J., SIENEL W.: Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Whell Steering, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 1, no. 1, March 1993
- [4] EITZINGER S., ZEMLA B., KREUTZ M., HORN M., RIEPL A.: Simulation-based development of an active system to improve stability and agility of passenger vehicles, 7th International Symposium on Advanced Vehicle Control, Arnhem, Netherlands, 2004
- [5] HIRSCHBERG W., RILL G., WEINFURTER H.: User-Appropriate Tyre-Modelling for Vehicle Dynamics in Standard and Limit Situations, Vehicle System Dynamics, vol. 38, No. 2, pp. 103-125, 2002
- [6] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Studium, 2004
- [7] MITSCHKE M., WALLENTOWITZ H.: Dynamik der Kraftfahrzeuge, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2004
- [8] PACEJKA H. B.: Tire and Vehicle Dynamics, SAE, 2002
- [9] SACKMANN M., TRÄCHTLER A.: Nichtlineare Fahrdynamikregelung mit einer aktiven Vorderachslenkung zur Verbesserung des Seitenwindverhaltens, at - Automatisierungstechnik 51, 2003
- [10] WALLENTOWITZ H., DONGES E., WIMBERGER J.: Die Aktive-Hinterachs-Kinematik (AHK) des BMW 850 Ci, 850 CSi, ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 94, 1992
- [11] WILLUMEIT H. P.: Modelle und Modellierungsverfahren in der Fahrzeugdynamik, B. G. Teubner Stuttgart - Leipzig, 1998
- [12] www.ftire.com
- [13] www.mssoftware.com
- [14] ZOMOTOR A.: Fahrwerktechnik: Fahrverhalten, VOGEL Buchverlag Würzburg, 1987

Methoden zur experimentellen Modellierung von Verbrennungskraftmaschinen

Harald Altenstrasser, Martin Horn

`altensth@irt.tu-graz.ac.at` *

`horn@irt.tu-graz.ac.at`

Institut für Regelungs- und
Automatisierungstechnik
Technische Universität Graz
Inffeldgasse 16c / II
A - 8010 Graz

AVL List GmbH
Optimization Technologies
Instrumentation and Test Systems
Hans-List-Platz 1
A - 8020 Graz

1 Einleitung

Die Entwicklung moderner Automobile und Motoren ist heutzutage wesentlich geprägt durch strenge Auflagen seitens der Gesetzgebung sowie durch ständig steigende, differenzierte Kundenansprüche. Wachsende Verkehrszahlen (siehe Abbildung 1 und Abbildung 2) sowie gestiegenes Bewusstsein für Umweltprobleme bedingen weltweit eine strenge Abgasgesetzgebung. Dem gegenüber stehen Wünsche wie „mehr Leistung“, „weniger Verbrauch“, „mehr Komfort“ sowie „höhere Zuverlässigkeit“.

Diese sich teilweise widersprechenden Anforderungen stellen eine enorme Herausforderung für die Entwicklungsingenieure moderner Verbrennungsmotoren dar. Neue Konzepte, die diesen Anforderungen gerecht werden, bedingen aufgrund ihrer Komplexität eine steigende Anzahl von Motorsteuerungsparametern. Somit steigt der Aufwand zur Parametrierung der Motorsteuerung kontinuierlich an. Das Auffinden optimaler Parameterkombinationen wird aufgrund geringerer Überschaubarkeit immer schwieriger. Natürlich wird dieser Optimierungsprozess auch durch das Fahrzeug, in dem der Motor eingesetzt wird, wesentlich beeinflusst. Nur die ganzheitliche Betrachtung des Verbundes Motor,

*Korrespondenz bitte an diese Adresse

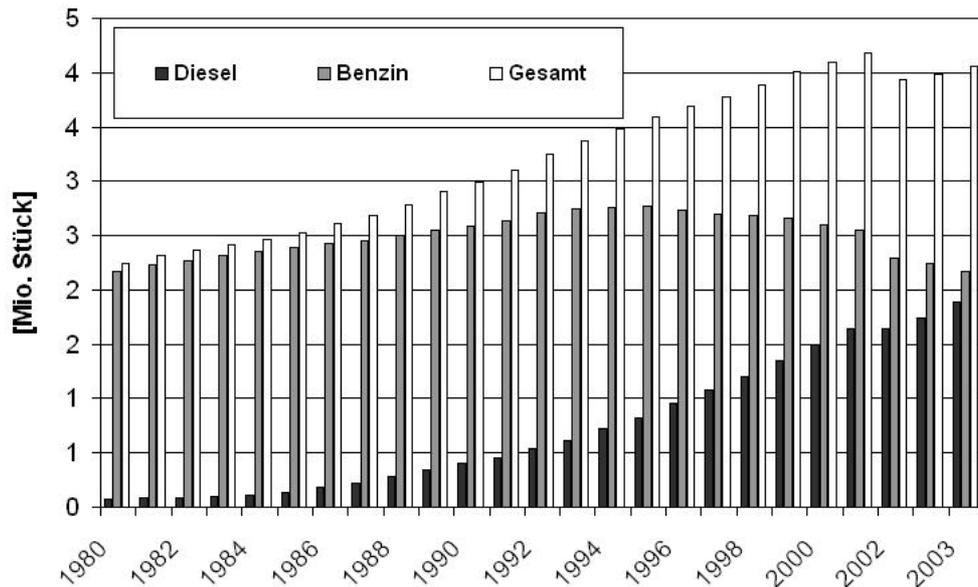


Abbildung 1: Bestand an PKW und Kombi nach Antriebsart in Österreich, [Quelle: Statistik Jahrbuch 2004, S.44, Fachverband der Fahrzeugindustrie]

Getriebe, Antriebsstrang und Fahrzeug ermöglicht daher eine optimale Ausnutzung dieser Konzepte.

Aus Zeit- und Kostengründen werden die entwickelten Motorkonzepte bereits in einer möglichst frühen Phase des Entwicklungsprozesses mittels Simulation getestet und verifiziert. Eine auf Simulationen basierende Optimierung erfordert eine hochgenaue Modellierung aller betrachteten Systemkomponenten. Dabei kann es sich um mathematische Modelle handeln, deren Beschreibung aus physikalischen oder chemischen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet wird, oder um Modelle, deren Parameter experimentell mit Hilfe von Methoden der Systemidentifikation ermittelt werden.

Die hohe Komplexität des Verhaltens von Verbrennungsmotoren, sowie der in der Industrie vorhandene Zeit- und Kostendruck, erfordern den Einsatz effizienter Methoden zur Datengewinnung und Identifikation. Mittels statistischer Methoden zur Versuchsplanung und verschiedener Modellstrukturen wird es möglich, präzise und abgesicherte Beschreibungen des realen Systemverhaltens zu ermitteln.

In einer Simulationsumgebung werden die Modelle der einzelnen Fahrzeugkomponenten zu einem Gesamtfahrzeugmodell zusammengefügt (vgl. Abbildung 3). Dadurch kann der Verbrennungsmotor zum Beispiel hinsichtlich seines Abgas- oder Verbrauchsverhaltens im Rahmen eines vom Gesetzgeber vorgeschriebenen Testzyklus untersucht und optimiert werden [9].

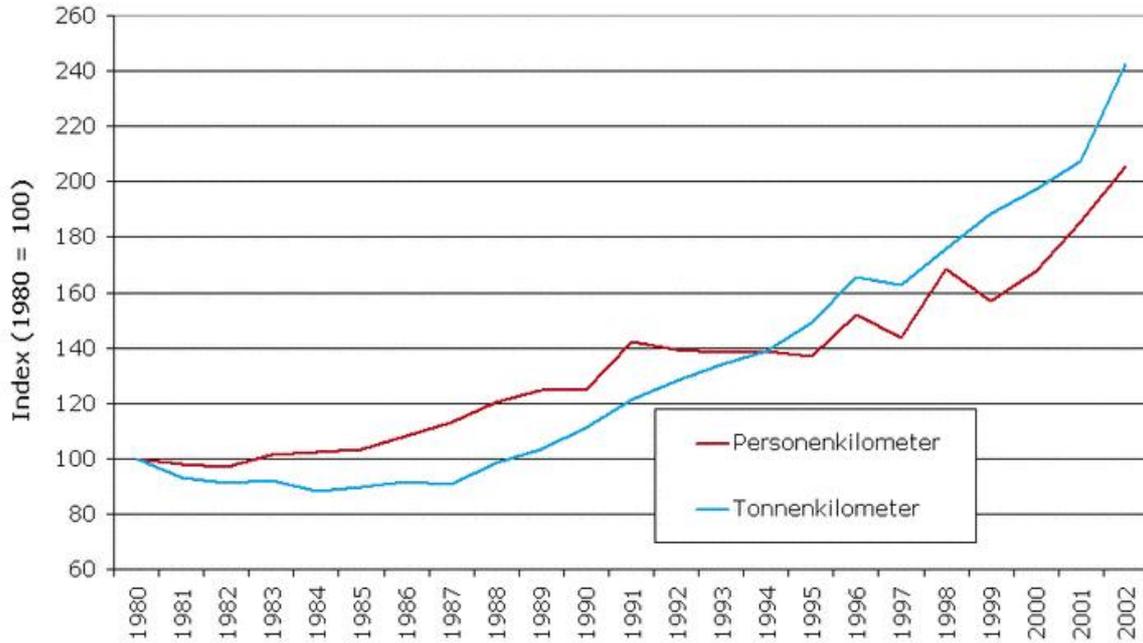


Abbildung 2: Entwicklung des Personen- und Güterverkehrs auf der Straße [Quelle: Umweltbundesamt, 2003]

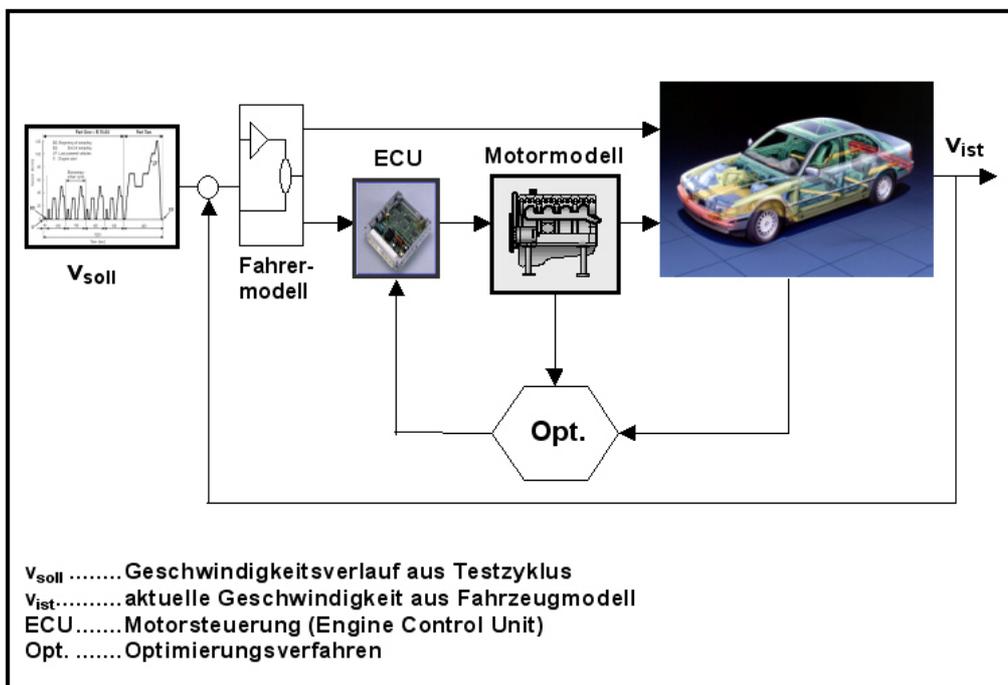


Abbildung 3: Optimierungsverfahren mittels Gesamtfahrzeugmodell

2 Ansätze zur Modellierung von Verbrennungskraftmaschinen

Die Grundlage von Methoden zur rechnerunterstützten Analyse und Synthese dynamischer Systeme bilden üblicherweise Modelle der betrachteten Prozesse. Dabei kann es sich um verschiedenste Formen von Modellen handeln, wie zum Beispiel Systeme von Differentialgleichungen, Kennfelder oder neuronale Netze.

Die Gewinnung der benötigten Modelle, die so genannte Modellbildung, kann auf verschiedene Arten erfolgen. Die Herleitung der Modellgleichungen auf Basis physikalischer oder chemischer Gesetzmäßigkeiten wird analytische Modellbildung genannt. Benutzt man Verfahren, bei denen freie Parameter eines postulierten Modells mit Hilfe von Messungen und Methoden der Systemidentifikation ermittelt werden, so spricht man von experimenteller Modellbildung. Häufig wird auch eine Kombination beider Vorgehensweisen gewählt.

Die Modellierung von Verbrennungskraftmaschinen stellt aufgrund ihrer enormen Komplexität eine große Herausforderung dar. Speziell die analytische Modellierung des Verbrennungsprozesses im Zylinder von Verbrennungskraftmaschinen erweist sich als besonders schwierig und aufwändig. Bei hohen Anforderungen an die Modellqualität des Verbrennungsprozesses, beispielsweise für die Optimierung von Steuerungs- oder Reglerparametern, werden experimentell gewonnene Modelle bevorzugt.

Im Allgemeinen besteht das Ziel der Modellbildung nicht darin, das Systemverhalten möglichst detailgetreu abzubilden, vielmehr muss der Komplexitätsgrad des Modells an die jeweilige Aufgabenstellung angepasst sein. Die Modelle sollen einfach und flexibel zu benutzen, verständlich und erweiterbar sein. Es ist zu beachten, dass im industriellen Umfeld wirtschaftliche Aspekte wie zeitlicher und materieller Aufwand, und daraus resultierende Kosten eine entscheidende Rolle spielen. Auch bei der vorliegenden Arbeit ist dies ein entscheidender Faktor. Deshalb liegt der Schwerpunkt hier auch auf der experimentellen Modellbildung.

2.1 Experimentelle Modellbildung

Die typische Vorgehensweise bei der experimentellen Modellbildung besteht darin, eine geeignete Modellstruktur vorzugeben und die entsprechenden Modellparameter auf Basis experimentell gewonnener Daten mit geeigneten Algorithmen zu bestimmen [3]. Faktoren, die den Erfolg der Modellbildung wesentlich beeinflussen, sind eine systematisch geplante Vorgehensweise und der Einsatz von eventuell vorhandenem Vorwissen über die Struktur des zu identifizierenden Systems (beispielsweise linear/nichtlinear, partielle/gewöhnliche Differentialgleichungen).

Einen bekannten Ansatz stellt die statistische Versuchsplanung, bzw. „Design of Ex-

periments (DoE)“ dar. Bei dieser Methode wird der Versuchsplan nach statistischen Gesichtspunkten erstellt, die Modellstruktur anhand von Vorwissen über das System gewählt und die Modellparameter werden „optimiert“. Hierbei ist man bestrebt, die Zahl der Experimente, die zur Bestimmung des Einflusses von Parametern auf ein untersuchtes Qualitätsmerkmal erforderlich sind, möglichst klein zu halten.

Ein Vergleich der erforderlichen Messzeiten in Abhängigkeit der Anzahl der Motorstellgrößen und des verwendeten Designs ist in Abbildung 4 dargestellt. Dabei wird eine Rastervermessung den DoE-Designs CCD (Central Composite Design) und D-optimal gegenübergestellt. Dabei handelt es sich um spezielle Versuchspläne für nichtlineare Zusammenhänge [8].

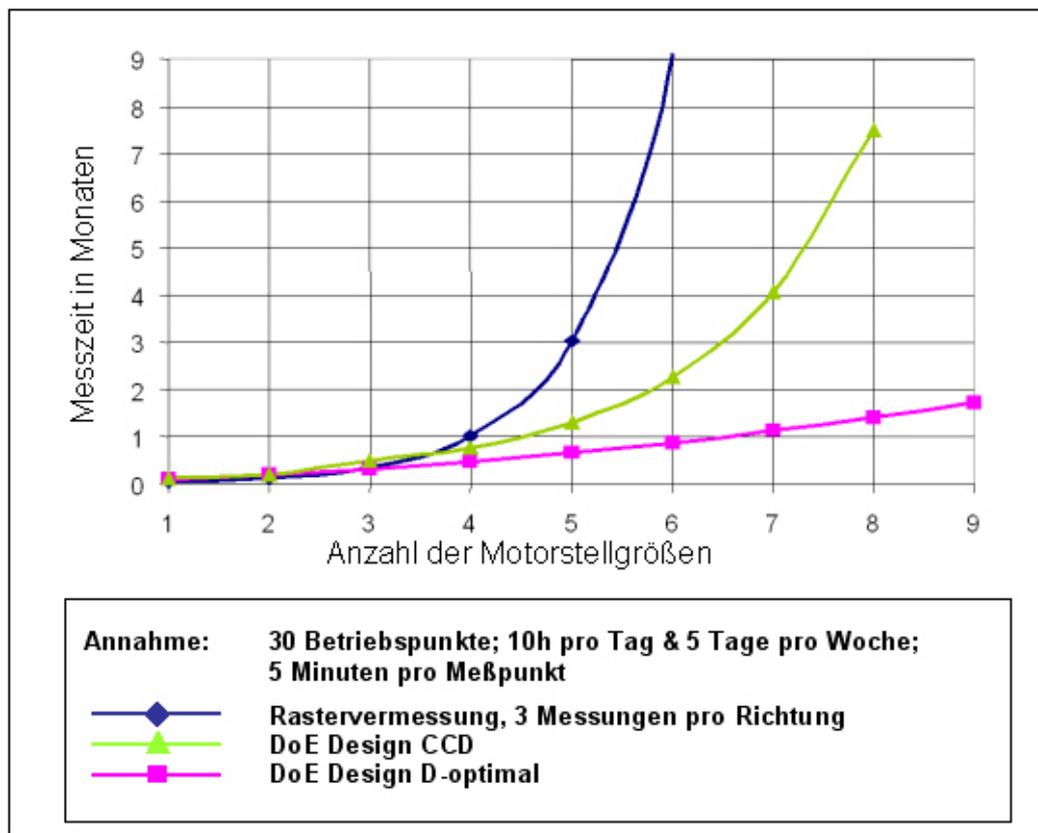


Abbildung 4: Messzeiten in Abhängigkeit von Anzahl der Motorstellgrößen und verwendetem Design

Selbst bei geringem Wissen über das Systemverhalten kann in vielen Fällen mit Polynommodellen operiert werden. Darunter versteht man Modelle, bei denen das Eingangs-Ausgangsverhalten durch Polynome beschrieben wird. Bei komplexen Prozessen mit vielen Eingangsgrößen sind Polynommodelle aufgrund des resultierenden hohen Polynomgrads („Fluch der Dimensionalität“) nicht mehr anwendbar. Häufig wird dann auf neuronale Netze zurückgegriffen. Beispiele dafür sind das Multi-Layer Perceptron (MLP),

radiale Basis-Funktionen (RBF) oder LOcal LInear MOdel Tree (LOLIMOT) [11].

In der Motorsteuerung / ECU (Engine Control Unit) sind die meisten Kennfelder über Motorlast und Drehzahl aufgespannt. Die interessierenden Ausgangsgrößen wie zum Beispiel Kraftstoffverbrauch oder Emissionen werden wesentlich von diesen beiden Haupteinflussgrößen bestimmt. Außerdem hängen die zulässigen Verstellbereiche der Motorstellgrößen wie zum Beispiel der Luftmasse bei einem Dieselmotor stark von Last und Drehzahl ab. Deshalb wird der Motor in einzelnen (Last/Drehzahl) Betriebspunkten vermessen, man spricht dann von lokaler, betriebspunktspezifischer Identifikation. Daraus können so genannte *lokale Modelle* zur Ermittlung bestimmter Ausgangsgrößen als Funktionen von variierten Motorstellgrößen generiert werden.

Für bestimmte Anwendungen, wie zum Beispiel bei Fahrzyklussimulationen, sind lokale Modelle jedoch nicht ausreichend. Dort sind so genannte *globale Modelle* notwendig, bei denen auch die Haupteinflussgrößen Last und Drehzahl Eingangsgrößen für das Modell darstellen. Durch die oft stark unterschiedlichen, zulässigen Verstellbereiche der Motorstellgrößen und deren unterschiedlich starken Einfluss auf die Ausgangsgrößen ist diese Methodik zur Messdatengewinnung allerdings deutlich aufwändiger.

2.1.1 Messdatengewinnung

Sowohl lokale als auch globale Modelle werden aus stationär gemessenen Daten ermittelt. Dabei wird nach einer dem Messplan entsprechenden Verstellung der Motorstellgrößen gewartet, bis sich alle relevanten Größen in einem stationären Zustand befinden. Dies kann bei speziellen Größen, zum Beispiel bei der Abgastemperatur, bis zu mehrere Minuten dauern. Dann werden mehrere Messungen durchgeführt, der daraus resultierende Mittelwert fließt in die Modellbildung ein. Allerdings beinhalten diese stationär gewonnenen Messdaten keinerlei Aussagen über transiente Motoreffekte. Daher werden lokale und globale Modelle als *stationäre Modelle* bezeichnet.

Die große Anzahl von Verstellparametern erfordert eine entsprechend hohe Anzahl an Messpunkten. Beispielsweise würde ein Messplan mit 6 Verstellparametern und 5 Messungen in jeder Verstellrichtung insgesamt $5^6 = 15.625$ Messpunkte erfordern. Zur Reduktion der Messpunkteanzahl und daraus resultierender Messdauer werden Methoden der statistischen Versuchsplanung herangezogen. Neben einer deutlichen Reduktion der nötigen Messpunkte liefern die später gebildeten Modelle zusätzlich auch statistische Kennwerte zur abgesicherten Beurteilung der Modellgüte.

Analysen haben gezeigt, dass ein Motor im Verlauf eines Testzyklus nur ca. 47% der Zeit stationär betrieben wird. Die restliche Zeit verteilt sich auf Beschleunigung oder Verzögerung. Gleichzeitig werden aber nur ca. 30% des gesamten NOx-Ausstoßes im stationären Betrieb verursacht (Abbildung 5). Stationäre Modelle können also nur schlecht Auskunft über die restlichen 70% NOx der transienten Phasen geben [13]. Diese Tatsachen motivieren den Wunsch nach Modellen, bei denen auch dynamische Phänomene

berücksichtigt werden.

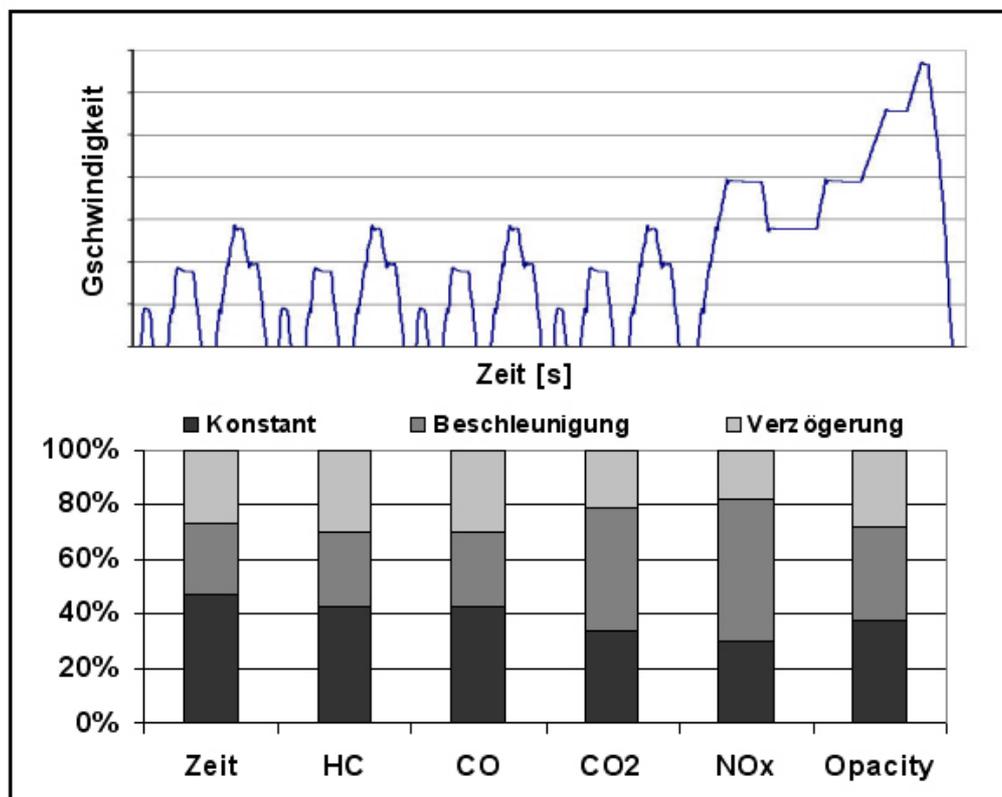


Abbildung 5: Auflösung eines Testzyklus in konstante, beschleunigende und verzögernde Phasen [13]

Bei Messplänen zur Identifikation von transienten Prozesseigenschaften werden die Motorstellgrößen in bestimmten zeitlichen Abständen verstellt. Die Messungen beschränken sich dabei nicht mehr nur auf den stationären Zustand. Die relevanten Größen werden mit einer bestimmten Frequenz während der gesamten Vermessung abgetastet. Die Messdaten enthalten nun zusätzlich auch Informationen über das dynamische Systemverhalten. Als Systemanregung ist dabei natürlich ein geeigneter Verlauf der Motorstellgrößen zu wählen. Übliche Anregungssignale sind zum Beispiel APRB-Signale (Amplitudenmodulierte Pseudo Rausch Binär Signale) [6]. Die Konsequenzen sind reduzierte Messzeiten bei deutlich höherer Messpunkteanzahl.

2.1.2 Lokale Modellierung

Die lokale Modellierung ist heute Stand der Technik. Hier werden die in einzelnen Betriebspunkten stationär gemessenen Messdaten zur Modellbildung verwendet. Eingesetzt werden üblicherweise Polynommodelle oder neuronale Netze. Hierbei ist natürlich zu be-

achten, dass die dem Messplan zu Grunde liegenden Annahmen über das Systemverhalten konsistent sind mit dem gewählten Modellansatz. Basiert beispielsweise der Messplan auf einem quadratischen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, so ist dieser Ansatz auch für die Modellbildung zu verwenden. Eine schematische Darstellung der Vorgehensweise ist in Abbildung 6 dargestellt. Im Falle von Polynommodellen erfolgt die Anpassung der Modellparameter üblicherweise unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, bei neuronalen Netzen mit entsprechenden Trainingsalgorithmen.

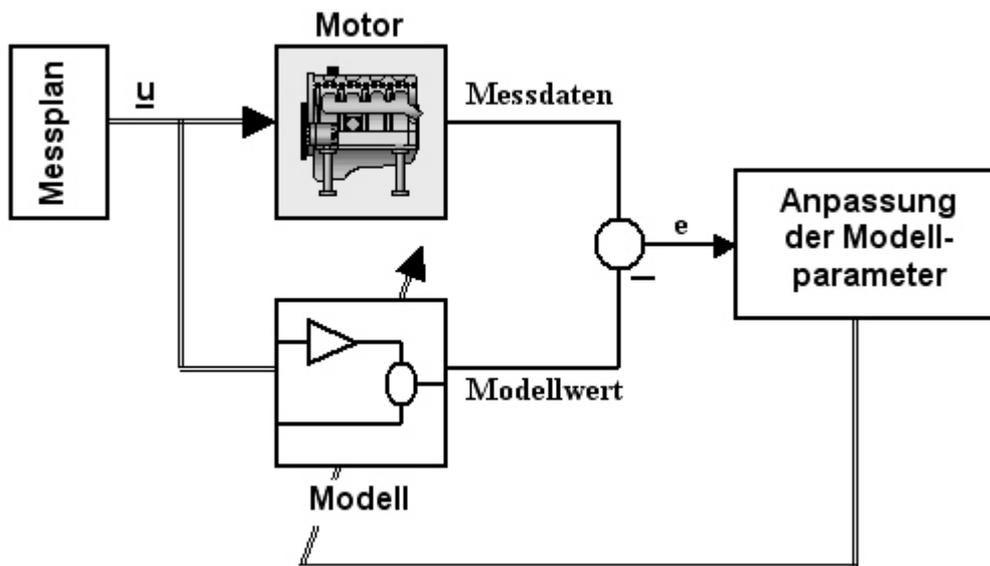


Abbildung 6: Anpassung der Modellparameter mittels Messdaten

Ein mögliches Beispiel ist in Abbildung 7 dargestellt. Dabei werden 11 wichtige und repräsentative Betriebspunkte für einen Motor ausgewählt. In diesen Betriebspunkten werden die interessierenden Größen wie Verbrauch, Leistung, NO_x-, HC-, CO- und Partikel-Emissionen in Abhängigkeit der relevanten Motorstellgrößen (Einspritzzeitpunkt, Ladedruck, Luftmasse, Menge und Zeitpunkt der Piloteinspritzung, Raildruck) vermessen. Exemplarisch ist bei Verwendung eines lokalen Polynommodells 2.Grades für NO_x die Abhängigkeit von diesen 6 Motorstellgrößen in einem Punkt des Verstellraumes dargestellt. Man erkennt u.a., dass sich eine Variation der Menge der Piloteinspritzung (1.Spalte) hier kaum auf die NO_x-Emission auswirkt, während eine Variation der Luftmasse (5.Spalte) den deutlich größten Einfluss hat. Mit Hilfe dieses Modells kann nun beispielsweise die Minimierung des Verbrauches geringstem Schadstoffausstoß berechnet werden.

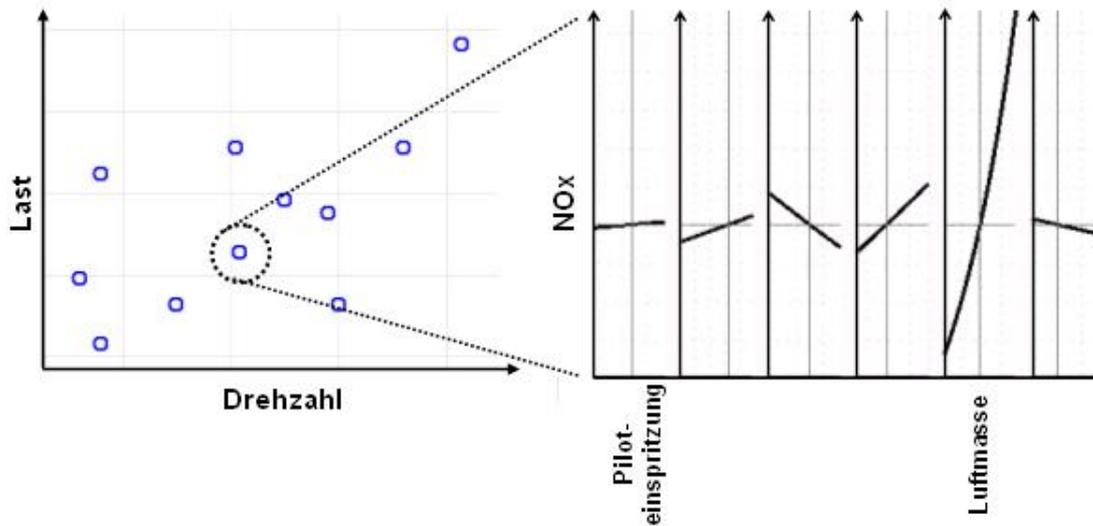


Abbildung 7: Lokales NOx-Modell in Abhängigkeit von 6 Motorstellgrößen

2.1.3 Globale Modellierung

Bei globalen Modellen werden die beiden Größen Last und Drehzahl als zusätzliche Eingangsgrößen in das Modell aufgenommen. Die Vorgehensweise wird wieder an Hand eines Beispiels erklärt. Es handelt sich dabei um ein System mit zwei Eingangsgrößen u_1 und u_2 und der Ausgangsgröße y . Konstante Werte der Größe u_2 charakterisieren Betriebspunkte, in denen durch geeignete Variation von u_1 und Messung von y eine lokale Identifikation durchgeführt werden soll. In Abbildung 8 sind die Verläufe der Messgrößen y und die Ausgangsgrößen der lokal identifizierten Modelle \hat{y} dargestellt. Zur Generierung eines globalen Modells mit beiden Eingangsgrößen u_1 und u_2 werden beide Messreihen zusammengefasst. Der Verlauf der Ausgangsgröße des globalen Modells ist ebenfalls in Abbildung 8 dargestellt. Man erkennt deutlich den betriebspunktabhängigen Unterschied in der Qualität der Übereinstimmung zwischen globalem Modell und entsprechendem lokalem Modell bzw. den Messdaten. Dies ist zurückzuführen auf den weiteren Modellparameter u_2 und den erweiterten Messbereich.

Wenn ein Motor in unterschiedlichen Fahrzeugtypen eingesetzt werden soll, wird er aufgrund verschiedener Antriebsstränge (Getriebe, Kupplung, Differential,...) in unterschiedlichen Last-/ Drehzahlbereichen betrieben. Die Herausforderung an die globale Modellbildung liegt nun darin, trotz des erwähnten großen Einflusses von Last und Drehzahl auch den Einfluss der weiteren Motorstellgrößen in einem Modell für den gesamten Betriebsbereich noch hinreichend genau abzubilden. Als Werkzeuge dienen auch hier Polynommodelle und neuronale Netze. Ein Vorteil von globalen Modellen besteht darin, dass sie bei konstruktiven Änderungen am Motor, die sich nur in einem bestimmten Teilbetriebsbereich auswirken, durch gezielte Messungen in diesem Bereich angepasst werden können.

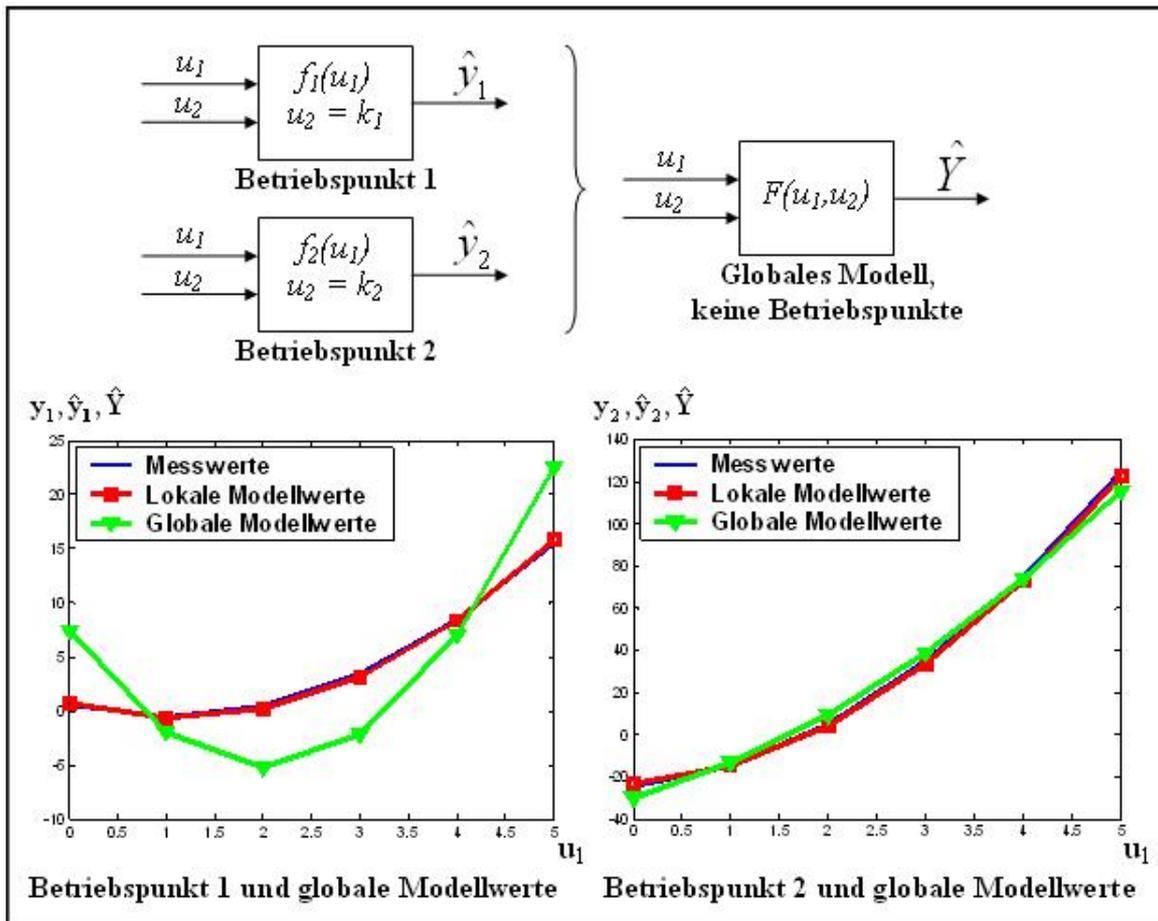


Abbildung 8: Zwei lokale Modelle und ein globales Modell

2.1.4 Dynamische Modellierung

Diese *dynamischen Modelle* sollen neben dem stationären Verhalten auch die transienten Effekte global abbilden können. Die Modellstruktur (beispielsweise Systemordnung, Totzeiten) hängt meist stark von Last und Drehzahl ab. Sowohl Ausgangs- als auch Eingangsgrößen können aufgrund vorhandener Totzeiten verzögert auftreten. Daraus resultieren große Probleme bei der Modellierung. Eine weitere Herausforderung liegt in der Verarbeitung der großen Datenmengen. Der Messdatenaufbereitung und -analyse kommt daher eine entscheidende Bedeutung zu.

Die Modellbildungsalgorithmen sind hier in der Regel neuronale Netze. Als Eingangsgrößen (Parameter) der Modelle dienen neben den Haupteinflussgrößen Last und Drehzahl sowie weiteren Motorstellgrößen, auch der angenommenen Systemordnung entsprechende zeitverzögerte Werte der Ein- und Ausgangsgrößen. Die Ausgangsgrößen hängen somit nicht nur von den Momentanwerten, sondern auch von vorangegangenen Werten mancher Ein- bzw. Ausgangsgrößen ab [5]. Dies wird in Abbildung 9 durch den Verschiebeoperator (z^{-1}) symbolisiert.

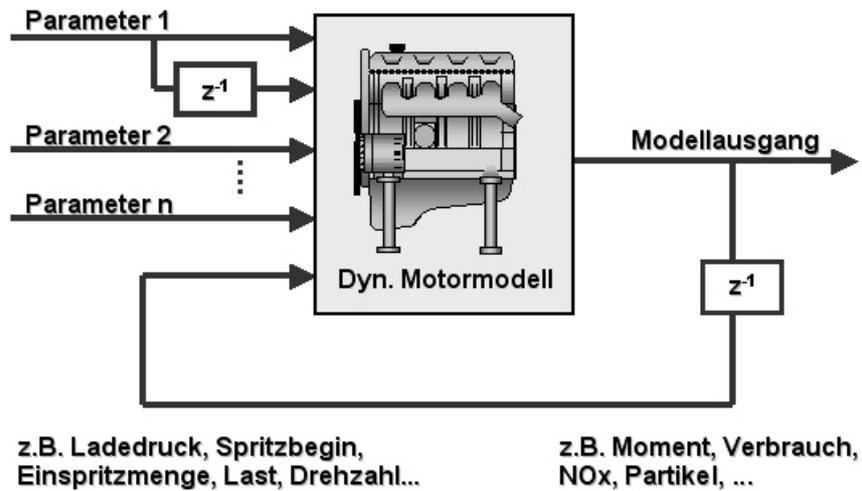


Abbildung 9: Struktur eines dynamischen Modells

3 Werkzeuge und Modellstrukturen

Die wohl bekanntesten Modellstrukturen der experimentellen Modellbildung sind Polynommodelle. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Ausgangsgröße und Eingangsgröße(n) mit Hilfe von Polynomen beschrieben.

In vielen Fällen ist es aber mit dieser Methode nur schwer möglich, über den Betriebsbereich variierendes, nichtlineares Verhalten gesamthaft abzubilden. In diesen Fällen werden oft Neuronale Netze verwendet, wie zum Beispiel das in der vorliegenden Arbeit genauer betrachtete LOLIMOT - Netz.

3.1 Polynommodelle

Bei Polynommodellen bzw. Regressionsmodellen werden die Parameter eines postulierten Modells durch Minimierung geeignet definierter Fehler zwischen Modell- und Messwerten angepasst. Das wohl bekannteste Verfahren dafür ist die Methode der kleinsten Fehlerquadrate [12].

Die Vorgehensweise soll anhand eines statischen Prozesses kurz erläutert werden. Zwischen der gemessenen Reaktion y_k des Prozesses und der Eingangsgröße u_k besteht ein nichtlinearer Zusammenhang. Dieser wird als Polynom von einem festgelegten Grade n approximiert:

$$y_k = a_0 + a_1 u_k + a_2 u_k^2 + \dots + a_n u_k^n \quad (1)$$

Für eine kompakte Schreibweise fasst man die N (bekannten) Werte der Eingangsgröße u_k in der Messmatrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^n \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_{N-1} & u_{N-1}^2 & \dots & u_{N-1}^n \end{pmatrix}$$

sowie die N gemessenen Werte der Prozessantwort y_k zum Vektor

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

zusammen. Definiert man gemäß Abbildung 6 den Fehler e_k als Differenz zwischen Messwert y_k und Modellwert \hat{y}_k , so erhält man nach einigen Rechenoperationen die im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimale Lösung für den geschätzten Parametervektor

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \dots & \hat{a}_n \end{pmatrix}^T = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{y} \quad (2)$$

Auf ähnliche Art und Weise kann die Methode der kleinsten Fehlerquadrate auch zur Parameterschätzung von dynamischen zeitdiskreten Systemen verwendet werden. Die Messmatrix enthält dann auch gemessene Werte der Prozessantwort von vorangegangenen Zeitpunkten. Im Parametervektor sind die gesuchten Systemparameter zusammengefasst.

Polynommodelle sind konzeptuell leicht verständlich und schnell zu berechnen, weisen aber auch einige Nachteile auf. So steigt zum Beispiel die Anzahl der Parameter exponentiell mit der Anzahl der Eingangsgrößen und der Systemordnung.

3.2 LOLIMOT

3.2.1 Einleitung

Im folgenden Abschnitt soll der LOLIMOT-Algorithmus (LOcal LInear MOdel Tree) erklärt werden. Er basiert auf der Idee, eine nichtlineare Funktion durch mehrere stückweise lineare Funktionen (Teilmodelle) zu approximieren [10].

Der Modelltrainingsalgorithmus besteht aus einer äußeren Schleife, in der die Bereiche für die einzelnen Teilmodelle bestimmt werden, und einer inneren Schleife, in welcher die Parameter der Teilmodelle geschätzt werden. Jedem Bereich ist außerdem eine so genannte Gewichtungsfunktion zugeordnet. Der Ausgang \hat{y} des LOLIMOT ergibt sich aus der Summe aller Teilmodelle multipliziert mit den jeweiligen Gewichtungsfunktionen.

Der prinzipielle Ablauf ist in Abbildung 10 anhand eines Beispiels dargestellt. Es wird eine quadratische Funktion durch drei lineare Teilmodelle nachgebildet. Dabei sind w_{0i} und w_{1i} die beiden Parameter des i -ten Teilmodells, u die Eingangsgröße und ϕ_i die Gewichtungsfunktionen (normierte Gaußsche Glockenfunktionen) für das i -te Teilmodell.

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^M (w_{0i} + w_{1i}u_1 + \dots + w_{pi}u_p) \cdot \phi_i(\mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) \quad (3)$$

Das Zentrum einer Gaußschen Glockenfunktion ϕ_i wird jeweils in der Mitte eines Bereiches platziert, die Standardabweichungen werden in jeder Raumrichtung proportional zur Ausdehnung des Hyperquaders gewählt.

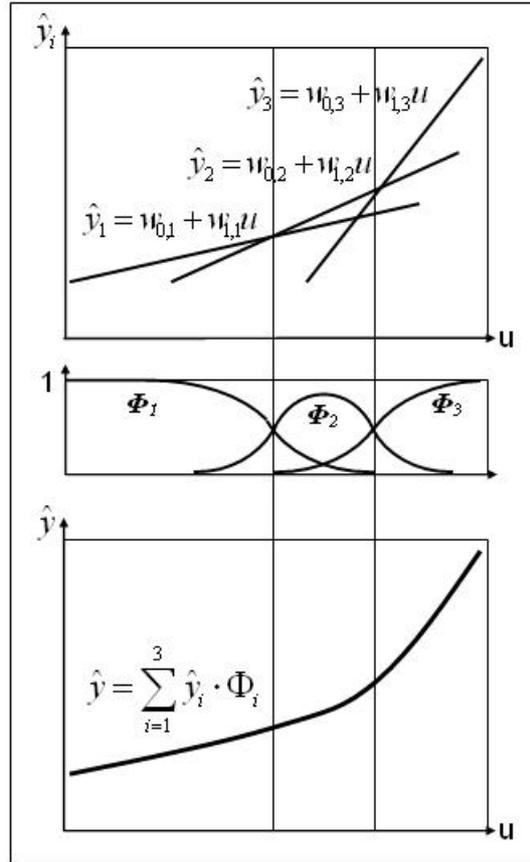


Abbildung 10: Approximation einer quadratischen Funktion durch drei lineare Teilmodelle (drei Iterationen) und deren Gewichtungsfunktionen [10]

$$\phi_i(\mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \sigma_i) = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^M z_j} \quad (4)$$

$$z_j = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^p \left[\frac{u_\nu - c_{\nu j}}{\sigma_\nu}\right]^2\right) \quad (5)$$

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_i := \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{pi} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_i := \begin{pmatrix} \sigma_{1i} \\ \vdots \\ \sigma_{pi} \end{pmatrix}$$

\mathbf{u} ... Eingangsgrößen

\mathbf{c}_i ... Zentrumskoordinaten

$\boldsymbol{\sigma}_i$... Standardabweichungen

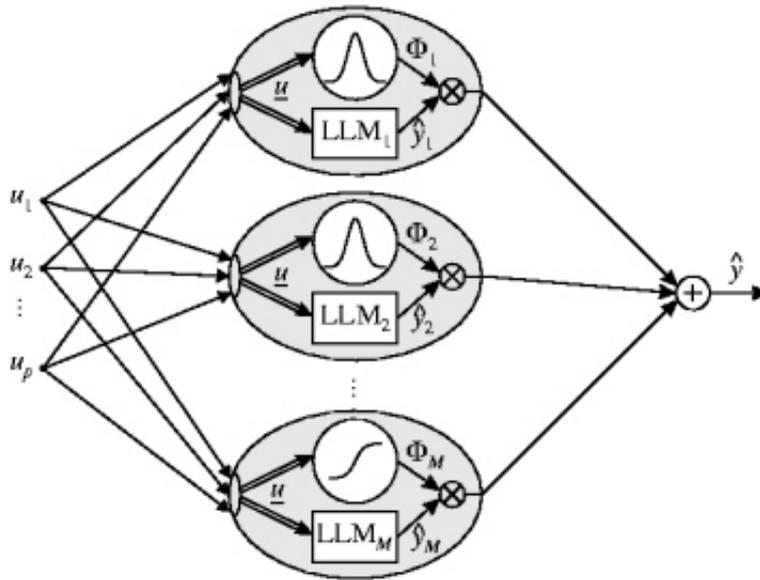


Abbildung 11: LOLIMOT - Struktur für p Eingänge u und M lineare Teilmodelle (LLM) [Quelle: IAT Darmstadt]

In Abbildung 11 ist die allgemeine Struktur für p Eingangsgrößen und M lineare Teilmodelle dargestellt.

3.2.2 Modelltrainingsalgorithmus

Grundlage für den Trainingsalgorithmus sind Messdaten des zu identifizierenden Systems (Ein- und Ausgangsgrößen). Im ersten Schritt wird für den gesamten Eingangsraum ein einziges (gesamtes), lineares Modell geschätzt und die Gewichtungsfunktion zugeordnet (Abbildung 12). Im zweiten Schritt wird dieser Bereich jeweils entlang einer Dimension orthogonal in zwei Hälften geteilt. In jedem der beiden neuen so entstandenen neuen Teilbereiche wird wieder eine Gewichtungsfunktion platziert und ein lineares Teilmodell geschätzt. Für das neu entstandene Gesamtmodell Y wird dann der Ausgangsfehler (= Messwerte - Modellwerte) berechnet. Es wird die Teilung jener Dimension ausgewählt, die zum kleinsten Ausgangsfehler führt. Erfüllt das Modell jetzt ein gegebenes Abbruchkriterium, bricht der Algorithmus ab und das Training ist beendet. Ansonsten erfolgen die nächsten Teilungen (für alle Dimensionen) in dem Teilbereich, in welchem das lineare Teilmodell den größten „lokalen“ Fehler ergibt.

In jeder Iteration wird somit das schlechteste Teilmodell durch neue Teilmodelle ersetzt. Dadurch wird sowohl die lokale als auch die globale Komplexität des Modells sehr genau an das zu identifizierende System angepasst. In Abbildung 13 wird ein nichtlineares Kennfeld mit zwei Eingangsgrößen durch sechs lineare Teilmodelle nachgebildet. Die

Ellipsen und Kreise in den Teilbereichen sind Höhenlinien der Gaußglocken, die kleinen Kreise in den Kennfeldern kennzeichnen Messdaten.

Vorteile gegenüber anderen neuronalen Netzen liegen vor allem in der Übersichtlichkeit und Verständlichkeit. LOLIMOT kann dabei erheblich zum besseren Verständnis eines Systems beitragen. Durch die Ansätze für lineare Teilmodelle kann die Anzahl der notwendigen Modellparameter niedrig gehalten werden. Die Trainingsgeschwindigkeiten gestalten sich somit kürzer. Auch das „schwingende“ Verhalten von Polynomen höheren Grades kann dadurch vermieden werden. Dies bringt nicht nur Vorteile bei der Interpolation, sondern auch bei der Extrapolation, falls diese überhaupt gewünscht bzw. zugelassen wird.

3.2.3 FNN und INN

Weiterentwickelte bzw. ähnliche Varianten des LOLIMOT sind das FNN (Fast Neural Network) [1] und das INN (Intelligent Neural Network) [7]. Beim FNN können für die Teilmodelle auch Polynome höheren Grades verwendet werden. Dadurch wird vor allem die Anzahl der Teilmodelle verringert, der Übergang zwischen den Teilmodellen kann „weicher“ gestaltet werden. Die Anzahl der Parameter steigt jedoch.

Beim INN erfolgt die Unterteilung des Eingangsraumes nicht achsenorthogonal. Die Achsen der Zugehörigkeitsfunktionen können dabei beliebig gedreht bzw. ausgerichtet werden, auch „Überlappungen“ sind möglich (Abbildung 14). Außerdem wird ein anderer Teilungsalgorithmus eingesetzt, der auf statistischen Kenngrößen basiert. Auch hier können Polynome höheren Grades für die Teilmodelle angesetzt werden.

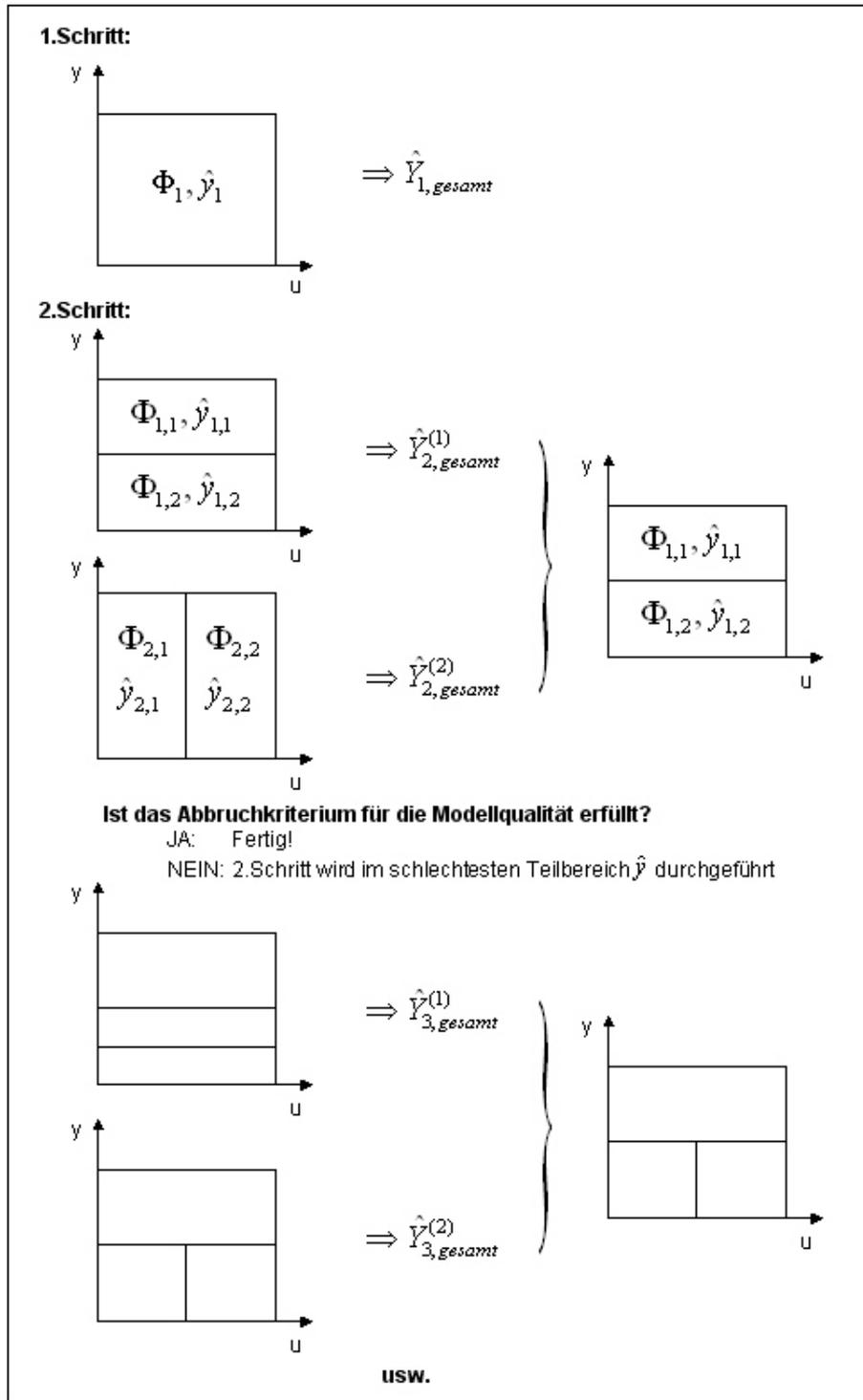


Abbildung 12: Skizze des LOLIMOT-Trainingsalgorithmus

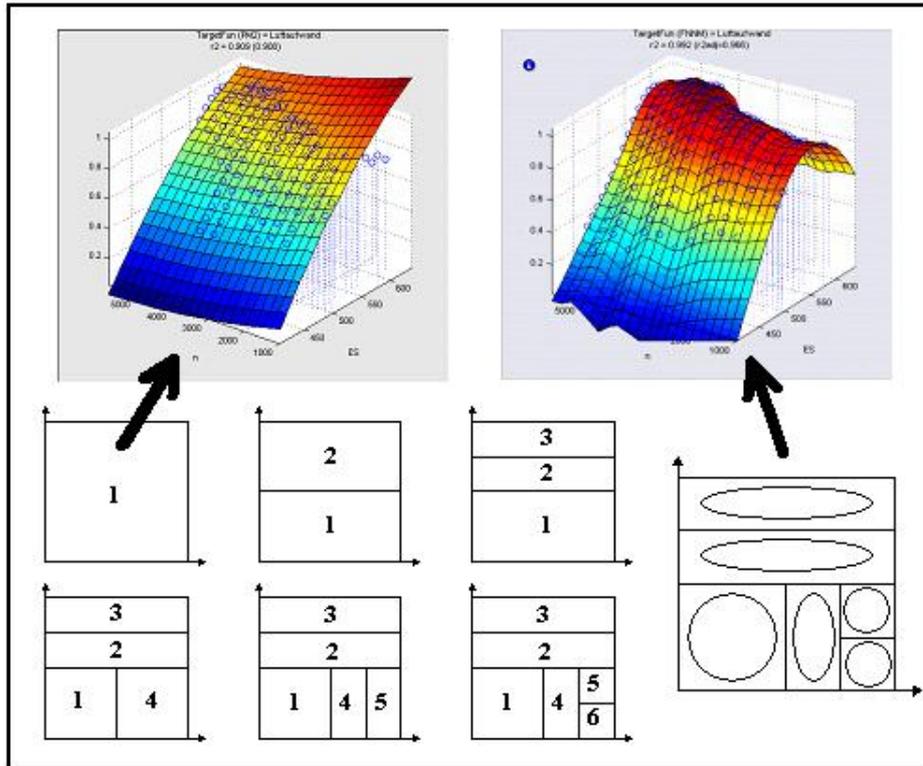


Abbildung 13: Approximation eines nichtlinearen Kennfeldes mit zwei Eingangsgrößen durch sechs lineare Teilmodelle (sechs Iterationen)

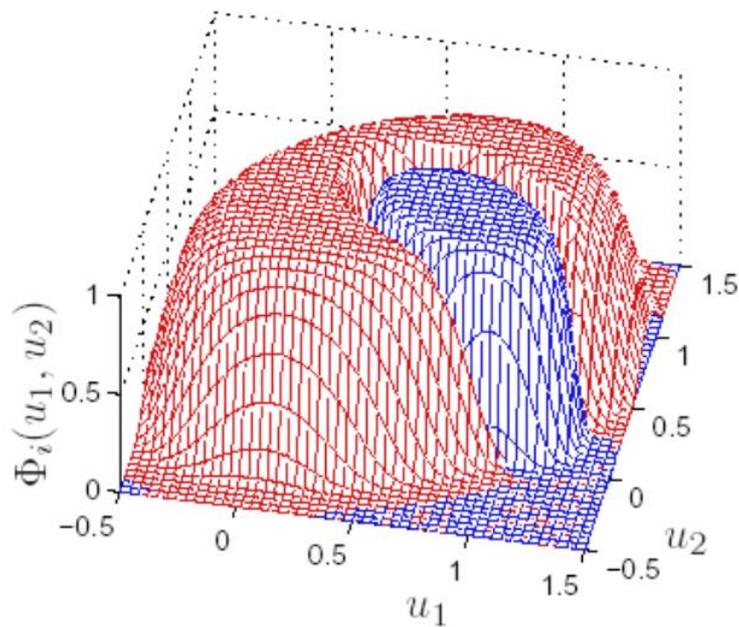


Abbildung 14: Gewichtungsfunktionen für zwei Teilmodelle beim INN [7]

4 Beispiel

Am folgenden Beispiel der Emissionsauslegung des dieselmotorischen Fahrzeugantriebs mittels DoE und Simulationsrechnung [2] sollen die beschriebenen Methoden erläutert werden.

Speziell in der Anfangsphase der Serienentwicklung eines Motors sind wichtige Bauteilentscheidungen (z.B. Einspritzdüsen) zu treffen, um zukünftige Emissionsanforderungen zu erfüllen. Das Problem bei der Bauteilentscheidung besteht darin, dass die Parameter in der Motorsteuerung für einen Motor mit bestimmten Bauteilen „optimal“ eingestellt sind. Werden Bauteile am Motor ausgetauscht, kann das Potential der neuen Bauteilvarianten nur durch neuerliche „Optimierung“ der Parameter im Steuergerät erfolgen, während sich der Motor am Prüfstand befindet. Dies bedeutet aber einen enormen Prüfstandsaufwand und hat hohe Kosten zur Folge.

Eine weitere Forderung besteht darin, den gleichen Motor in mehreren verschiedenen Fahrzeugtypen einzusetzen. Diese stehen allerdings in einer frühen Phase der Serienentwicklung nicht immer zur Verfügung. Zur Bestätigung eines Motorkonzepts sind aber bereits zu diesem Zeitpunkt Aussagen über Verbrauch und Emissionen notwendig. Der Motor soll zu Beginn der Serienentwicklung so vermessen werden, dass diese Daten als Grundlage für die Bedatung der Motorsteuergeräte in *sämtlichen* Fahrzeugen verwendet werden können.

Im folgenden Beispiel wurden mit einem einzigen Versuchsdurchlauf verschiedene Aufgaben wie Bauteilentscheidung und Beurteilung von Fahrzeugvarianten durchgeführt. Für die Bauteilentscheidung wurden vier Betriebspunkte ermittelt, welche für die zu untersuchenden Fahrzeug- und Getriebevarianten repräsentativ sind. Für die spätere Bildung globaler Modelle wurden weitere acht Betriebspunkte hinzugefügt (Abbildung 15). In diesen insgesamt zwölf Betriebspunkten wurden Messpläne mit sechs Verstellparametern erstellt und der Motor am Prüfstand stationär lokal vermessen. Dies ergab insgesamt eine Messpunktliste von ca. 700 Punkten.

4.1 Bewertung von Bauteilvarianten mit lokalen Modellen

Anhand der vorliegenden Messdaten kann nun am Computer mit Hilfe lokaler Modelle das Verbesserungspotential einzelner Bauteilvarianten untersucht werden. Am Prüfstand erfolgt nur mehr die Vermessung der einzelnen Varianten.

Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass durch die mathematische Formulierung der diversen (teilweise konträr wirkenden) Zielvorgaben in eine zu optimierende Zielfunktion auch geänderte Wechselwirkungen der einzelnen verbrennungsrelevanten Parameter im gesamten Variationsbereich bei der Findung des Optimums berücksichtigt werden können. Die Qualität der Beurteilung wird somit erheblich gesteigert. Das Ergebnis der Potentialermittlung am Computer ist in Abbildung 16 dargestellt.

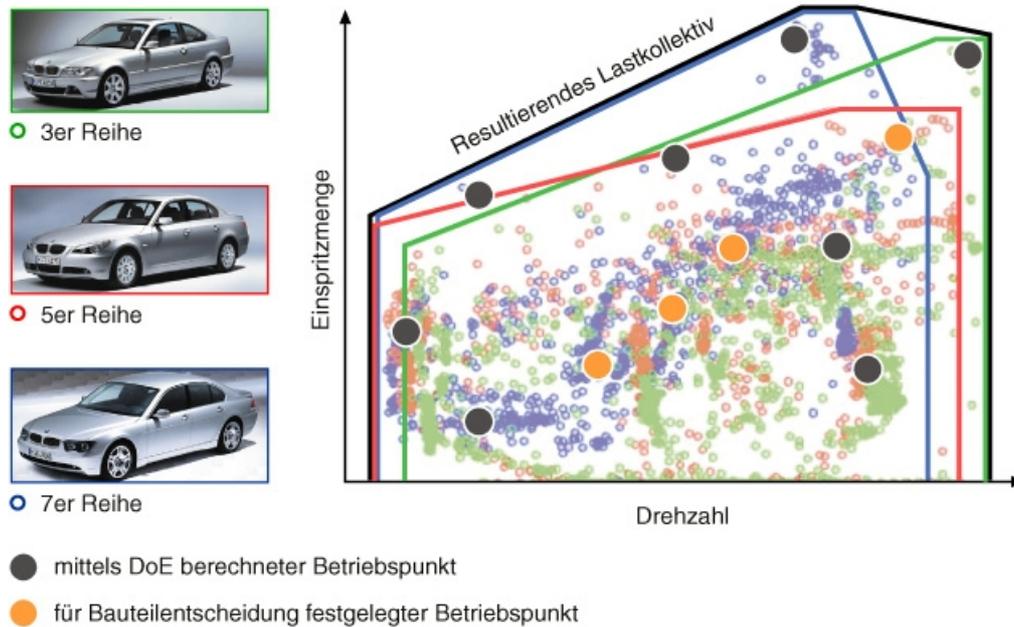


Abbildung 15: Resultierende Lastkollektive für verschiedene Fahrzeugtypen mit ausgewählten Betriebspunkten [2]

Zielfunktion war hier der NO_x-Gehalt bei mindestens gleich bleibendem Rauchwert und Verbrauch für eine Variante mit geänderten Einspritzdüsen. Das linke Teilbild zeigt die Empfindlichkeit der Varianten hinsichtlich einer Luftmassenvariation in den jeweiligen Optimaleinstellungen. Es zeigt sich, dass für die neue Bauteilvariante neben der Verminderung der NO_x Emissionen zusätzlich ein Rauchwertvorteil erzielt werden konnte.

4.2 Bewertung von Fahrzeugvarianten mit globalen Modellen

Die Emissionsüberprüfung einer Fahrzeugvariante erfolgt meist experimentell am Abgasrollenprüfstand. Durch die Anwendbarkeit der globalen Modelle über den Last- und Drehzahlbereich des Motors ergibt sich die Möglichkeit der Beurteilung von Fahrzeugvarianten durch rechnerische Gesamtfahrzeug-Simulation (Abbildung 17). Eine Beurteilung hinsichtlich Emissionen ist somit bereits möglich, bevor ein entsprechendes Getriebe bzw. Fahrzeug tatsächlich zur Verfügung steht.

Exemplarisch sind in Abbildung 18 die Ergebnisse eines Ausschnitts des MVEG-Warmtest für zwei Varianten von Schaltpunktauslegungen mit einem NO_x Modell vom Typ FNN dargestellt. Die jeweiligen Messungen stammen von einem Abgasrollenprüfstand. Durch die spätere Hochschaltung in der Beschleunigungsphase zeigt sich eine deutliche Verbesserung der NO_x-Emissionen.

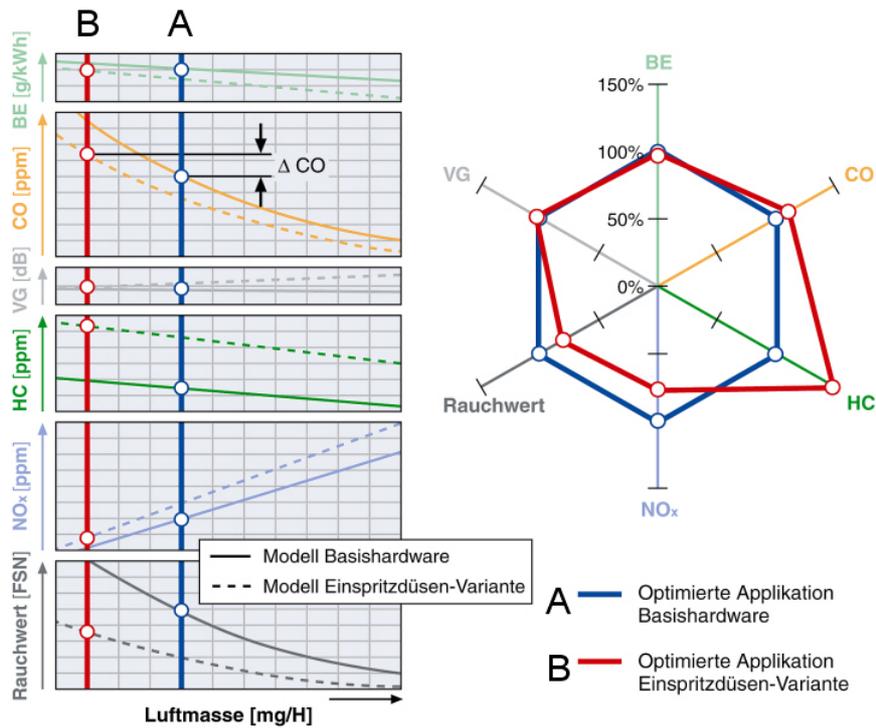


Abbildung 16: Potentialermittlung von Bauteilvarianten durch Optimierung mit lokalen Modellen [2]

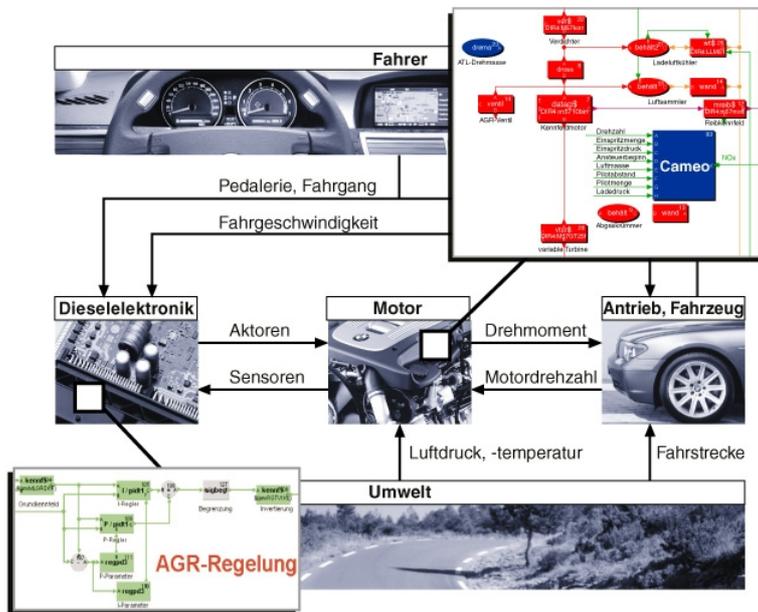


Abbildung 17: Simulationsumgebung mit Gesamtfahrzeugmodell und globalem Motormodell [2]

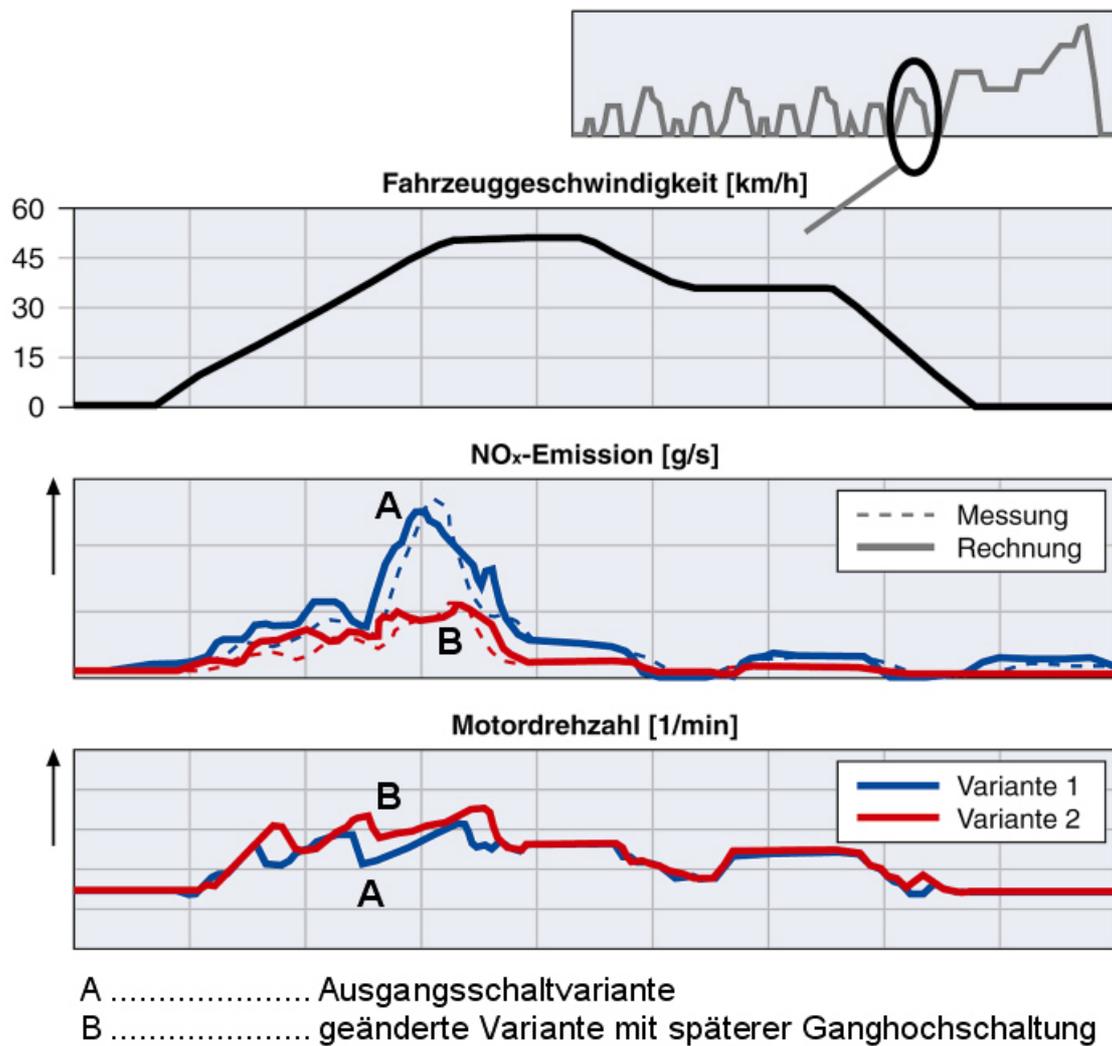


Abbildung 18: Messungen und Rechenergebnisse für zwei Schaltungsvarianten in einem Ausschnitt des MVEG-Zyklus [2]

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die beschriebenen Ansätze zur experimentellen Modellbildung dienen als Grundlage für die Erstellung eines Motormodells im Rahmen einer Gesamtfahrzeugsimulation (vgl. Abbildung 3). Dieses wird beispielsweise zur Optimierung hinsichtlich Verbrauch oder Emissionen herangezogen.

Entscheidend bei der Lösung einer praktischen Aufgabe mit Hilfe von Optimierungsmethoden ist neben der Wahl eines geeigneten Optimierungsalgorithmus die Formulierung eines sinnvollen Gütekriteriums und die adäquate Einbeziehung der diversen Nebenbedingungen, wie z.B. Emissionen, Beschränkungen der Motorstellgrößen oder Fahrbarkeit.

Der Einsatz von *lokalen Modellen* ist heute Stand der Technik. Die Beschränkungen für die Motorstellgrößen und die weiteren Nebenbedingungen können relativ leicht vorgegeben werden. Je nach Problemstellung können verschiedene Optimierungsalgorithmen gezielt eingesetzt werden [4].

Aufgrund der Last- und Drehzahlabhängigkeiten verschiedener Motorstellgrößen gestaltet sich die Formulierung der Rand- und Nebenbedingungen bei *globalen Modellen* bereits wesentlich schwieriger.

Eine weitere Steigerung der Schwierigkeit ergibt sich beim Einsatz von *dynamischen Modellen*. Aufgrund der teilweise komplizierten und nichtlinearen Zusammenhänge zwischen den Momentanwerten und vergangenen Werten von Eingangs- und Ausgangsgrößen ist es besonders schwierig, optimale Einstellungen für die Motorstellgrößen zu finden. Ein weiteres Problem stellt die Beantwortung der Frage dar, wie berechnete „optimale“ Stellgrößenverläufe in der Motorsteuerung (ECU) mit Hilfe von stationären Motorkennfeldern „abgelegt“ werden können. Trotz aller genannten Schwierigkeiten wird eine Optimierung der transienten Motoreffekte mittels dynamischer Modelle unumgänglich sein, um die zukünftigen noch strengeren Emissionsgrenzwerte einhalten zu können.

Literatur

- [1] AVL OPTIMIZATION TECHNOLOGIES. *Application Guide CAMEO V2.4, ID.No.: AT1947E*. Handbuch erstellt und gedruckt von AVL List GmbH Graz, Jänner 2005.
- [2] BITTERMANN, A., KRANAWETTER, E., KRENN, J., LADEIN, B., EBNER, T., ALTENSTRASSER, H., KOEGELER, H.-M., AND GSCHEITL, K. Emissionsauslegung des dieselmotorischen Fahrzeugantriebs mittels DoE und Simulationsrechnung. *MTZ Motortechnische Zeitschrift* 65(6) (2004), 466–474.
- [3] EYKHOFF, P. *System Identification*. John Wiley and Sons, 1979.
- [4] FORTUNA, T., MAYER, M., PFLÜGL, H., AND GSCHEITL, K. Optimierung von Motorsteuerungen am Motorenprüfstand. In *Modellgestützte Steuerung, Regelung und Diagnose von Verbrennungskraftmaschinen* (2003), R. Isermann, Ed., Springer, pp. 251–274.
- [5] HAFNER, M., SCHÜLER, M., AND ISERMANN, R. Einsatz schneller neuronaler Netze zur modellbasierten Optimierung von Verbrennungsmotoren - Teil 1: Modellbildung des Motor- und Abgasverhaltens. *MTZ Motortechnische Zeitschrift* 61(10) (2000), 798–805.
- [6] ISERMANN, R. *Identifikation dynamischer Systeme 1*. Springer, 1992.
- [7] JAKUBEK, S., AND KEUTH, N. Improved neuro-fuzzy models for design processes and simulation in automotive applications. *Automatisierungstechnik*, at (Sept. 2005).
- [8] KLEPPMANN, W. *Taschenbuch Versuchsplanung*. Hanser, 2001.
- [9] KRANAWETTER, E., BITTERMANN, A., KRENN, J., GSCHEITL, K., EBNER, T., AND ALTENSTRASSER, H. Neue Methoden zur Applikation mit globalen Modellen: Versuch und Modellbildung mit besonderer Berücksichtigung der Emission am Dieselmotor. In *Messtechnik und Simulation in der Motorenentwicklung* (2004), E. Steinmetz and C. Beidl, Eds.
- [10] NELLES, O. Lokale, lineare Modelle zur Identifikation nichtlinearer, dynamischer Systeme. *Automatisierungstechnik* 45 (1997), 163–174.
- [11] NELLES, O. *Nonlinear System Identification*. Springer, 2001.
- [12] PAPAGEORGIOU, M. *Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Oldenbourg, 1991.
- [13] VOGELS, M. S., MARTINI, E., GSCHEITL, K., MATHIS, P., ALTENSTRASSER, H., AND BÜCHEL, M. Dynamic Powertrain Calibration: Using Transient Doe and Modelling Techniques. In *Design of Experiments (DoE) in Engine Development II* (2005), vol. 49 of *Haus der Technik Fachbuch*, Expert Verlag, pp. 66 – 76.

Stabilisierung rückwärtsfahrender Fahrzeugkombinationen

Helmut Waser, Wolfgang Hirschberg
Technische Universität Graz

Institut für Fahrzeugtechnik, Steyrergasse 17/6, 8010 Graz
helmut.waser@tugraz.at*, wolfgang.hirschberg@tugraz.at†

Zusammenfassung

Der Einsatz von X-by-Wire Systemen in Fahrzeugen dient als Grundlage für die Implementierung einer Vielzahl neuer Funktionalitäten, die sich auf die Fahr-sicherheit und den Fahrkomfort beziehen. Der vorliegende Beitrag behandelt die Vorstellung eines neuen Rückfahrassistenten für Fahrzeugkombinationen, welcher mittels Steer-by-Wire realisiert werden kann. Dieser Ansatz bezieht sich nicht nur auf ein rein kinematisches Modell, sondern ist um die Dynamik der Fahrzeug- Anhängerkombination erweitert. Der dynamische Ansatz wurde gewählt, weil dieser nicht nur die Dynamik resultierend aus den Fahrzeuggeschwindigkeiten, sondern auch zum Beispiel Einflüsse wie eine geneigte Fahrbahn richtig abbildet und somit das Systemverhalten realistischer beschreibt. Dieses Beispiel eines Rückfahrassistenten mittels Steer-by-Wire stellt eine zusätzliche Funktion für X-by-Wire vor. Ein solches System nimmt dem Fahrer die schwierige Aufgabe des Rückwärtsrangierens von Fahrzeug und Anhänger ab und verhindert das ungewollte Einknicken der Fahrzeugkombination. Der Fahrer greift dabei nicht mehr direkt auf den Lenkwinkel stabilisierend ein, sondern gibt mit dem Lenkrad-Einschlag nur mehr die gewünschte Bahnkrümmung vor.

1 Einleitung

Es gibt viele Situationen, in denen Fahrzeuge mit geringen Geschwindigkeiten rückwärtsfahren. Denkt man zum Beispiel an einen Gliederzug, der bei einer Rampe eines Kaufhauses seine Ware ab-laden muss. Sehr oft ist der nötige Platz

beschränkt und ein Rangieren ist nicht vermeidbar. Das Rangieren von Fahrzeugen stellt auch für geübte Fahrzeuglenker eine gewisse Herausforderung dar. Diese Schwierigkeit erhöht sich um ein Vielfaches, wenn man nicht nur das Fahr-

*Dipl.-Ing. Helmut Waser, Technische Universität Graz

†Univ.-Prof. Dr.techn. Wolfgang Hirschberg, Technische Universität Graz

zeug, sondern ganze Fahrzeugkombinationen wie zum Beispiel einen PKW mit Wohnwagenanhänger bzw. Nutzfahrzeug-Gliederzüge betrachtet. Insbesondere ist die unregelmäßige Rückwärtsfahrt von Gliederzügen grundsätzlich instabil.

Elektronische Assistenzsysteme auf der Grundlage eines *Steer-by-Wire* Systems bieten das Potenzial, solche Fahraufgaben derart zu unterstützen, dass die Manöver für den Fahrer leicht durchführbar werden. Das hier vorgestellte System nimmt dem

Fahrer die Aufgabe der Stabilisierung der Fahrzeugkombination durch gezielte Lenkbewegungen ab.

Unter Zuhilfenahme von Modellbildung und Simulation ist es bereits im Anfangsstadium möglich Berechnungsmodelle zu erstellen, welche die Physik solcher Systeme hinreichend genau abbilden. Erst wenn die Ergebnisse durch Simulation der Systeme im virtuellen Raum zufriedenstellend sind, soll an eine Implementierung im realen Versuchsfahrzeug gedacht werden.

2 Modellbildung

Die Modellbildung erfolgt für einen Fahrzeug mit Einachsanhänger siehe Abb.(1). Das sogenannte *Referenzmodell*, das sich auf rein kinematische Zusammenhänge bezieht und das *dynamisches Modell*, das aus den wirkenden Kräften und Momenten abgeleitet wird, bilden die Grundlage der Modellbildung. Dieser Ansatz hat den

Vorteil, dass außer der Instabilität beim Rückwärtsfahren, die auf rein kinematische Zusammenhänge zurückgeführt werden kann, noch zusätzliche Effekte wie zum Beispiel die Dynamik des Fahrzeuges, der Schlupf zwischen Reifen und Fahrbahn oder auch schiefe bzw. geneigte Fahrbahnen berücksichtigt werden können.

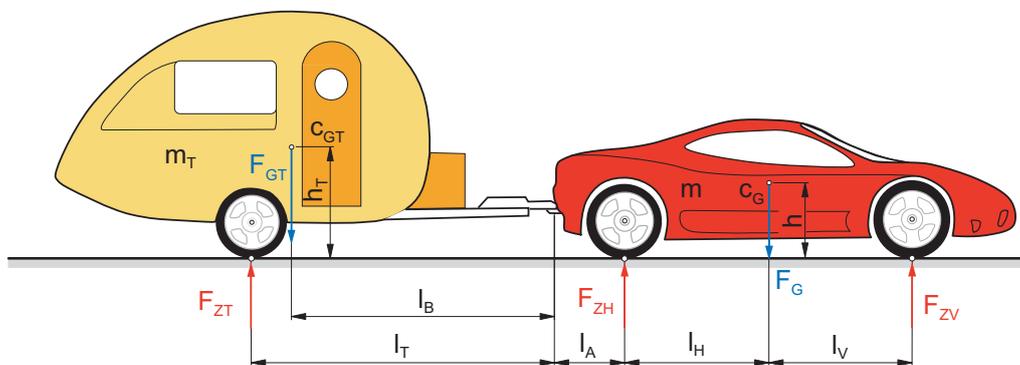


Abb. 1: PKW mit Einachsanhänger

2.1 Referenzmodell nach Ackermann

Diesem Modell unterliegen kinematische Gleichungen, die zur Kursberechnung herangezogen werden. Fährt ein Fahrzeug mit

geringer Geschwindigkeit ($v \Rightarrow 0$) durch die Kurve, so sind zur Kurshaltung geringe Seitenkräfte nötig. An den Rädern tritt

kaum Querschleupf auf. Im Idealfall bewegen sich die Räder nur in Reifenlängsrichtung. Die Geschwindigkeitskomponente in Querrichtung im Kontaktpunkt K_T verschwindet, siehe Abb.(2).

$${}_T\mathbf{v}_{Ty} = {}_T\mathbf{e}_y^T {}_T\mathbf{v}_T = 0 \quad (1)$$

2.1.1 Ackermanngeometrie angewandt auf ein Einspurmodell

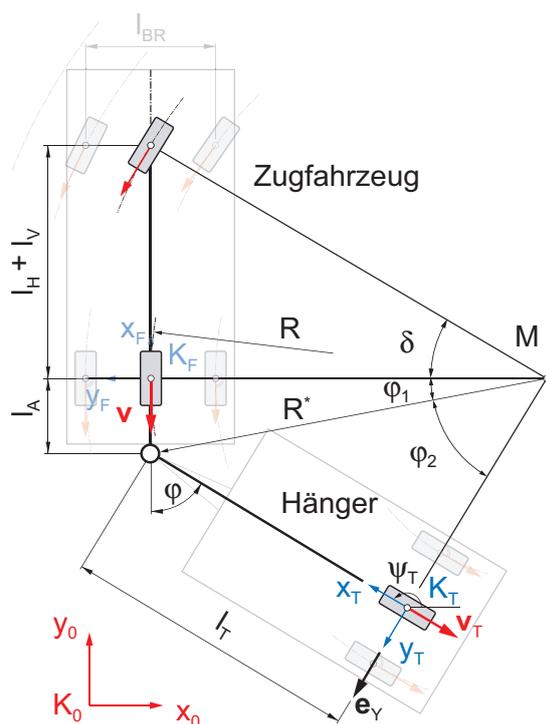


Abb. 2: Ackermann- Lenkgeometrie an einem Fahrzeug mit Einachsanhänger

- ${}_T\mathbf{e}_y$... Einheitsvektor in y- Richtung des Anhängerkoordinatensystems K_T
- ${}_T\mathbf{v}_T$... Geschwindigkeitsvektor im Latsch des Anhängerrades

Mit Gleichung (1) ist die Bedingung für das kinematische Reifenmodell bzw. die Beziehung nach Ackermann definiert.

$l_V + l_H$...	Achsabstand [m]
l_A	...	Abstand Fzg.-Hinterachse - Anhängerkupplung [m]
l_T	...	Anhängerlänge [m]
l_{BR}	...	Spurweite [m]
M	...	Momentanpol

Die folgende Herleitung zeigt die kinematischen Zusammenhänge nach Ackermann zwischen dem Lenkwinkel δ und dem Anhängerknickwinkel φ . Aus dem Lenkwinkel δ ergibt sich der Krümmungsradius an der Hinterachse zu

$$R = \frac{l_V + l_H}{\tan \delta} \quad (2)$$

Der Krümmungsradius R^* der Anhängerkupplung setzt sich wie folgt zusammen:

$$R^* = \sqrt{R^2 + l_A^2} \quad (3)$$

Der Knickwinkel besteht aus 2 Anteilen φ_1 und φ_2

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arcsin\left(\frac{l_A}{R^*}\right) \\ \varphi_2 &= \arcsin\left(\frac{l_T}{R^*}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Mit den Gleichungen (2) bis (5) lässt sich diese nichtlineare Funktion $\delta \rightarrow \varphi$ wie folgt anschreiben:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{l_A}{\sqrt{\left(\frac{l_V + l_H}{\tan \delta}\right)^2 + l_A^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{l_T}{\sqrt{\left(\frac{l_V + l_H}{\tan \delta}\right)^2 + l_A^2}}\right) \quad (6)$$

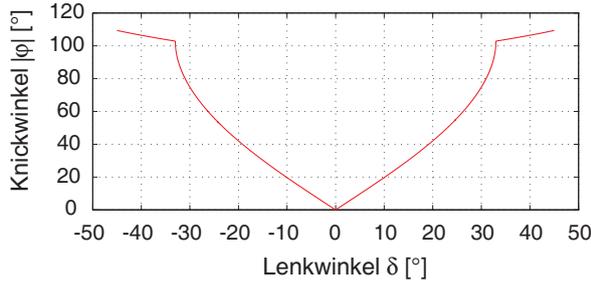


Abb. 3: Lenkwinkel δ über Absolutbetrag des Knickwinkels $|\varphi|$

In Abb. (3) ist für eine ausgewählte Fahrzeug-Anhängerkombination der Knickwinkel als Funktion des Lenkwinkels dargestellt.

$$\begin{aligned} l_V &= 1.39 \text{ [m]} & l_H &= 1.46 \text{ [m]} \\ l_A &= 1.00 \text{ [m]} & l_T &= 4.50 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Ein Knickwinkel von $\varphi = 90^\circ$ ergibt einen Lenkwinkel von:

$$\delta = \arctan\left(\frac{l_V + l_H}{l_T}\right) = 32.35^\circ \quad (7)$$

2.1.2 Gleichungen des kinematischen Modells

Die Gleichungen lauten:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{\psi}_T \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \left(\cos \varphi + \frac{l_A}{l_V + l_H} \tan \delta \sin \varphi \right) \cos \psi_T \\ v \left(\cos \varphi + \frac{l_A}{l_V + l_H} \tan \delta \sin \varphi \right) \sin \psi_T \\ v \left(\frac{\sin \varphi}{l_T} - \frac{l_A}{(l_V + l_H) l_T} \tan \delta \cos \varphi \right) \\ -v \left(\frac{\sin \varphi}{l_T} - \frac{l_A}{(l_V + l_H) l_T} \tan \delta \cos \varphi \right) + \frac{v \tan \delta}{l_V + l_H} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Variablen

- v ... Längs-Geschwindigkeit des Fahrzeugs [m/s]
- \dot{x}_T ... Längs-Geschwindigkeit an der Anhängerhinterachse [m/s]
- \dot{y}_T ... Quer-Geschwindigkeit an der Anhängerhinterachse [m/s]
- ψ_T ... Gierwinkel des Anhängers [°]
- φ ... Knickwinkel [°]
- δ ... Lenkwinkel [°]

Die Linearisierung des Knickwinkels φ für eine Fahrt entlang einer Gerade mit $\varphi_R =$

0 , $\psi_{TR} = 0$, $\delta_R = 0$ ergibt

$$\Delta \dot{\varphi} = -\frac{v}{l_T} \Delta \varphi + \frac{v l_T + v l_A}{(l_V + l_H) l_T} \Delta \delta \quad (9)$$

mit dem Eigenwert λ

$$\lambda = -\frac{v}{l_T} \quad (10)$$

Aus Gleichung (10) erkennt man, dass für Vorwärtsfahrt der Realteil des Eigenwerts negativ, d.h. das System stabil und für die Rückwärtsfahrt der Realteil des Eigenwerts positiv und somit instabil ist.

2.2 Dynamisches Modell

Das Einspurmodell mit Anhänger besitzt 4 Freiheitsgrade, die Geschwindigkeit des Fahrzeuges v_x und v_y in Längs- und Querrichtung, die Gierrate $\dot{\psi}$ und die relative Knickwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, siehe

Abb. (4). Mit diesen verallgemeinerten Geschwindigkeiten ergibt sich der Zustandsvektor zu

$$\mathbf{z} = [v_x \ v_y \ \dot{\psi} \ \dot{\varphi}]^T. \quad (11)$$

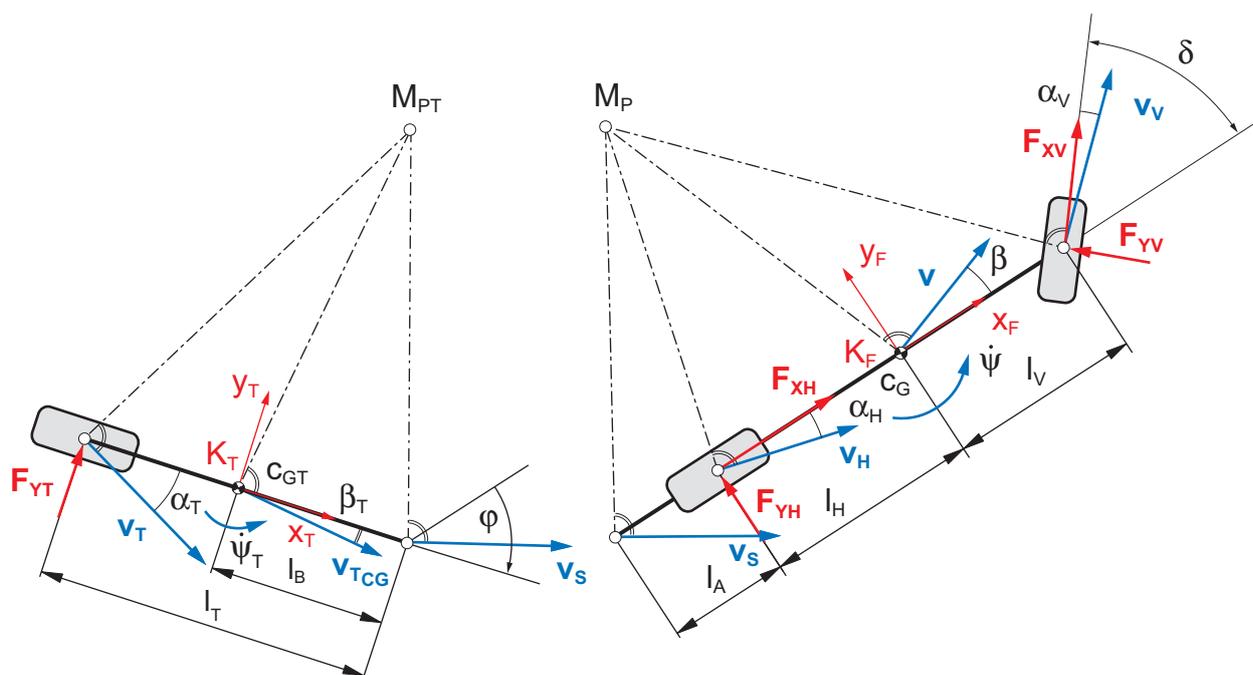


Abb. 4: Einspurmodell mit Einachsanhänger

Systemvariablen

v_x	... Fahrzeuglängsgeschwindigkeit [m/s]
v_y	... Fahrzeugquergeschwindigkeit [m/s]
$\dot{\psi}$... Gierrate [1/s]
$\dot{\varphi}$... Knickwinkelgeschwindigkeit [1/s]
$\dot{\psi}_T$... Anhängergierrate [1/s]
δ	... Lenkwinkel [°]
φ	... Knickwinkel [°]
\mathbf{v}	... Geschw.-Vektor Fahrzeug [m/s]
\mathbf{v}_{TCG}	... Geschw.-Vektor Anhänger [m/s]
\mathbf{v}_V	... Geschw.-Vektor Vorderrad [m/s]
\mathbf{v}_H	... Geschw.-Vektor Hinterrad [m/s]
\mathbf{v}_T	... Geschw.-Vektor Anhängerrad [m/s]
\mathbf{v}_S	... Geschw.-Vektor Kupplungspunkt [m/s]

Fahrzeuggrößen

m	... Fahrzeugmasse [kg]
m_T	... Anhängermasse [kg]
l_V	... Schwerpunktsabstand vorne [m]
l_H	... Schwerpunktsabstand hinten [m]
l_A	... Abstand HA Kupplungspunkt [m]
l_T	... Anhängerränge [m]
l_B	... Anhängerschwerpunkt [m]
β	... Schwimmwinkel [°]
β_T	... Schwimmwinkel Anhänger [°]
α_V	... Schräglaufwinkel vorne [°]
α_H	... Schräglaufwinkel hinten [°]
α_T	... Schräglaufwinkel Anhänger [°]
Θ_{FZZ}	... Trägheitsmoment Fahrzeug [kgm^2]
Θ_{TZZ}	... Trägheitsmoment Anhänger [kgm^2]

2.2.1 Bewegungsgleichungen des dynamischen Modells

$$\mathbf{M}(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix},$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} m + m_T & 0 & m_T l_B \sin \varphi & m_T l_B \sin \varphi \\ 0 & m + m_T & m_T (-l_A - l_H - b \cos \varphi) & -m_T l_B \cos \varphi \\ m_T l_B \sin \varphi & m_T (-l_A - l_H - l_B \cos \varphi) & M_{(3,3)} & M_{(3,4)} \\ m_T l_B \sin \varphi & -m_T l_B \cos \varphi & M_{(4,3)} & m_T b^2 + \Theta_{Tzz} \end{bmatrix},$$

$$M_{(3,3)} = m_T (\sin^2 \varphi^2 l_B^2 + (-l_A - l_H - l_B \cos \varphi)^2) + \Theta_{Tzz} + \Theta_{Fzz}$$

$$M_{(3,4)} = M_{(4,3)} = m_T l_B (l_B + \cos \varphi (l_A + l_H)) + \Theta_{Tzz}$$

dem Vektor der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte

$$\mathbf{k}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} -(m + m_T) \dot{\psi} v_y + m_T \dot{\psi}^2 (l_A + l_H + l_B \cos \varphi) + 2 m_T l_B \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \varphi + m_T l_B \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ (m + m_T) v_x \dot{\psi} + m_T l_B (\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + 2 m_T l_B \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \\ -m_T (v_y l_B \dot{\psi} \sin \varphi + v_x \dot{\psi} (l_A + l_H + l_B \cos \varphi) + l_A l_B \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2 l_A l_B \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi + l_H l_B \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2 l_H l_B \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ m_T l_B \dot{\psi} (\dot{\psi} (l_A + l_H) \sin \varphi - v_y \sin \varphi - v_x \cos \varphi) \end{bmatrix}$$

und dem Vektor der verallgemeinerten eingepägten Kräfte:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} F x_h + F x_v \cos \delta - F y_v \sin \delta + F x_t \cos \varphi - F y_t \sin \varphi \\ F y_h + F x_v \sin \delta + F y_v \cos \delta + F x_t \sin \varphi + F y_t \cos \varphi \\ (F x_t \sin \varphi - F y_t \cos \varphi) (-l_H - l_A) + (F x_v \sin \delta + F y_v \cos \delta) l_V - F y_h l_H - F y_t l_T \\ - F y_t l_T \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Reifenparameter

Der Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte setzt sich aus den Reifenkräften an den Vorderrädern, an den Hinterrädern und an den Rädern des Anhängers mit ihren kinematische Beziehungen zusammen.

Der Latsch ist die Kontaktfläche des Reifens mit der Fahrbahn. Reifenkräfte können erst übertragen werden, wenn im Latsch eine Gleitgeschwindigkeit herrscht. Die Gleitgeschwindigkeit in Längsrichtung ist definiert durch den Längsschlupf s_L , der sich wie folgt zusammensetzt:

$$s_L = \frac{-(v_x - r_D \Omega)}{v_x} = -\frac{v_x^G}{v_x} \quad (12)$$

Analog ist für die Gleitgeschwindigkeit in Querrichtung der Schräglaufwinkel α definiert [5, 6].

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y^W}{v_x}\right) \quad (13)$$

- r_D ... dynamischer Rollradius [m]
- Ω ... Raddrehzahl [1/s]
- v_x ... Geschwindigkeit in Reifenlängsrichtung [m/s]
- v^W ... Geschwindigkeit im Punkt W [m/s]

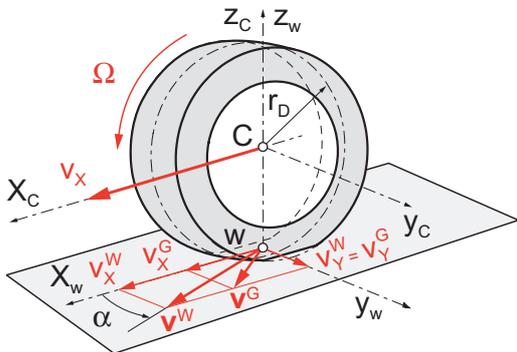


Abb. 5: Geschwindigkeiten im Latsch

Abb. (6) und Abb. (7) zeigen die Längskraft- und Querkraftcharakteristik

eines typischen PKW- Reifens. Bei den ersten Grundlagenuntersuchungen des Fahrzeuges ist im Reifenmodell nur die Querkraftcharakteristik implementiert, da man die Vereinfachung einer konstanten Fahrzeuglängsgeschwindigkeit $v_x = const$ annehmen kann. Sobald ein beliebiges Geschwindigkeitsprofil eines Fahrers als Sollverlauf dient, ist diese Vereinfachung nicht mehr gültig. Es muss die kombinierte Längs- und Querkraftcharakteristik des Reifens berücksichtigt werden.

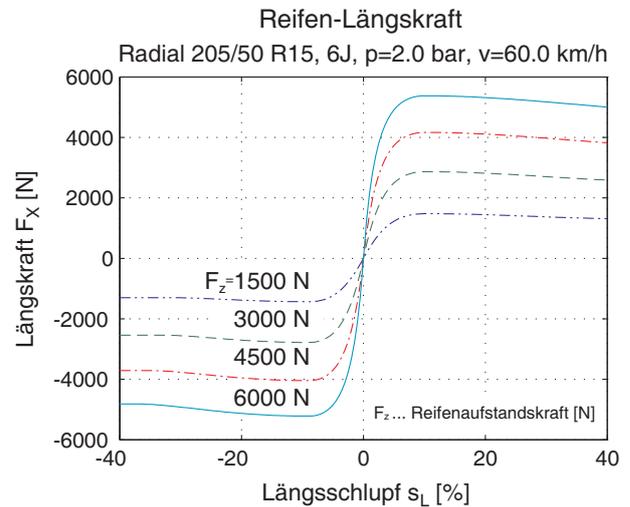


Abb. 6: Reifen- Längskraftcharakteristik

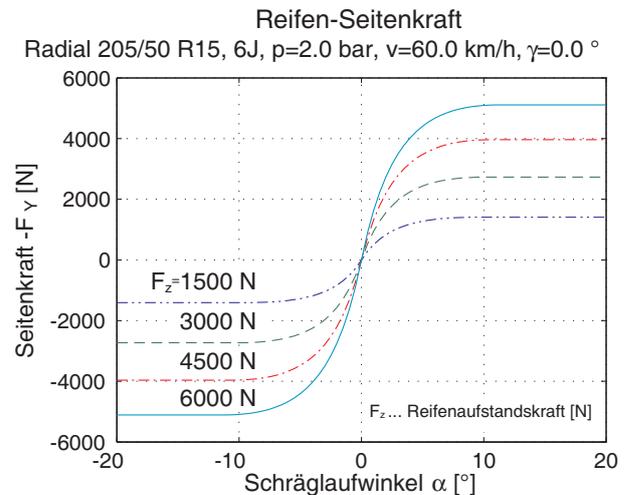


Abb. 7: Reifen- Seitenkraftcharakteristik

3 Regelstrategie

3.1 Stabilisierung des kinematischen Modells

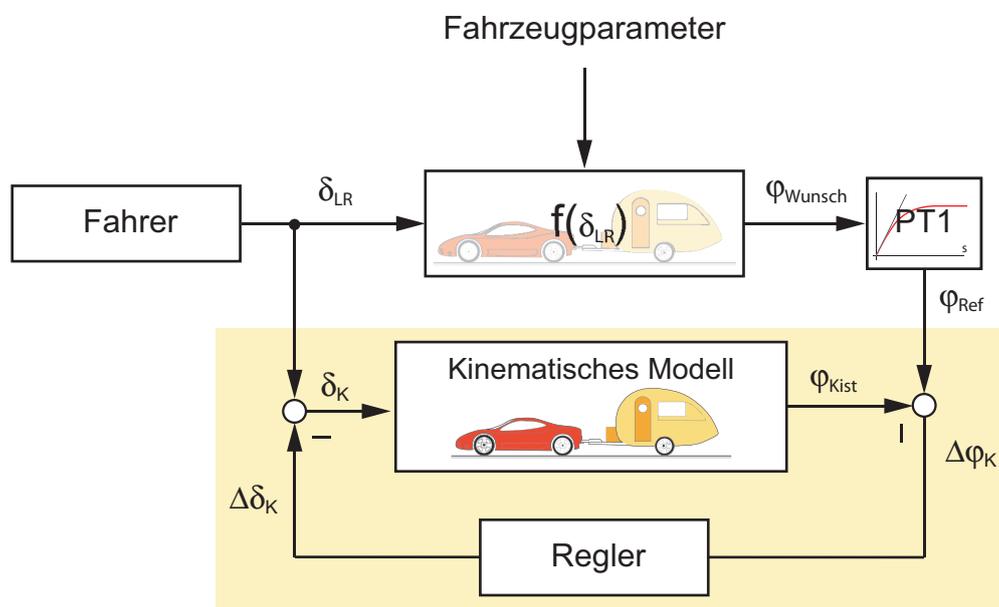


Abb. 8: Stabilisierung der Rückwärtsfahrt beim kinematischen Modell

Der erste Schritt ist die Stabilisierung des für die Rückwärtsfahrt instabilen kinematischen Modells, gemäß Glg. (10). Der Lenkraddrehwinkel δ_{LR} des Fahrers ist die Eingangsgröße auf das System. Zunächst wird aus δ_{LR} mittels der Gleichung (6) der gewünschte Knickwinkel φ_{Wunsch} nach Ackermann berechnet.

Dieser Wunschknickwinkel des Fahrers wird mit einem Verzögerungsglied erster Ordnung (PT1-Glied) beaufschlagt, um das Verhalten der Fahrzeugkombination sehr gut nachbilden zu können. Dieses Verzögerungsverhalten resultiert daraus, dass ein Lenkwinkelsprung nicht sofort einen Knickwinkelsprung hervorruft. Aus φ_{Wunsch} wird somit φ_{ref} , der dem Sollwert des Knickwinkels für das Modell ent-

spricht.

Gleichzeitig wird der Lenkraddrehwinkel δ_{LR} dem kinematischen Modell aufgeschaltet. Es stellt sich ein Knickwinkel φ_{Kist} ein. Der Regelfehler $\Delta\varphi_K$ resultiert aus der Differenz zwischen φ_{ref} und φ_{Kist} .

Der Regler, der die Fahrzeugkombination stabilisiert, ist hier als PI-Regler ausgeführt, dessen Parameter durch Simulation bestimmt werden. Der auf die Knickwinkeldifferenz $\Delta\varphi_K$ bezogene P-Anteil ist um den Faktor 10 größer gewählt als der I-Anteil, um ein starkes Überschwingen des Knickwinkels zu vermeiden. Die Summe von Zusatzlenkwinkel $\Delta\delta_K$ und Lenkraddrehwinkel δ_{LR} ist der kinematische Lenkwinkel δ_K .

3.2 Stabilisierung des dynamischen Modells

Dieser Ansatz ist die Erweiterung der kinematischen Stabilisierung (Kap. 3.1) um den dynamischen Anteil. Der kinematische Lenkwinkel δ_K , der dem kinematischen Modell als Eingangsgröße dient, wird gleichzeitig dem dynamischen Modell aufgeschaltet. Durch Schlupf und Schräglauf im Reifen (Dynamik) ergibt sich ein vom kinematischen Knickwinkel φ_{Kist}

unterschiedlicher dynamischer Knickwinkel φ_{Dist} . Die geometrischen Beziehungen des dynamische Modells widersprechen der Ackermann-Bedingung. Der dynamische Regler *Regler** regelt die Abweichung $\Delta\varphi_D = \varphi_{Kist} - \varphi_{Dist}$ aus und zwingt dem dynamischen Modell die Ackermann-Bedingung auf.

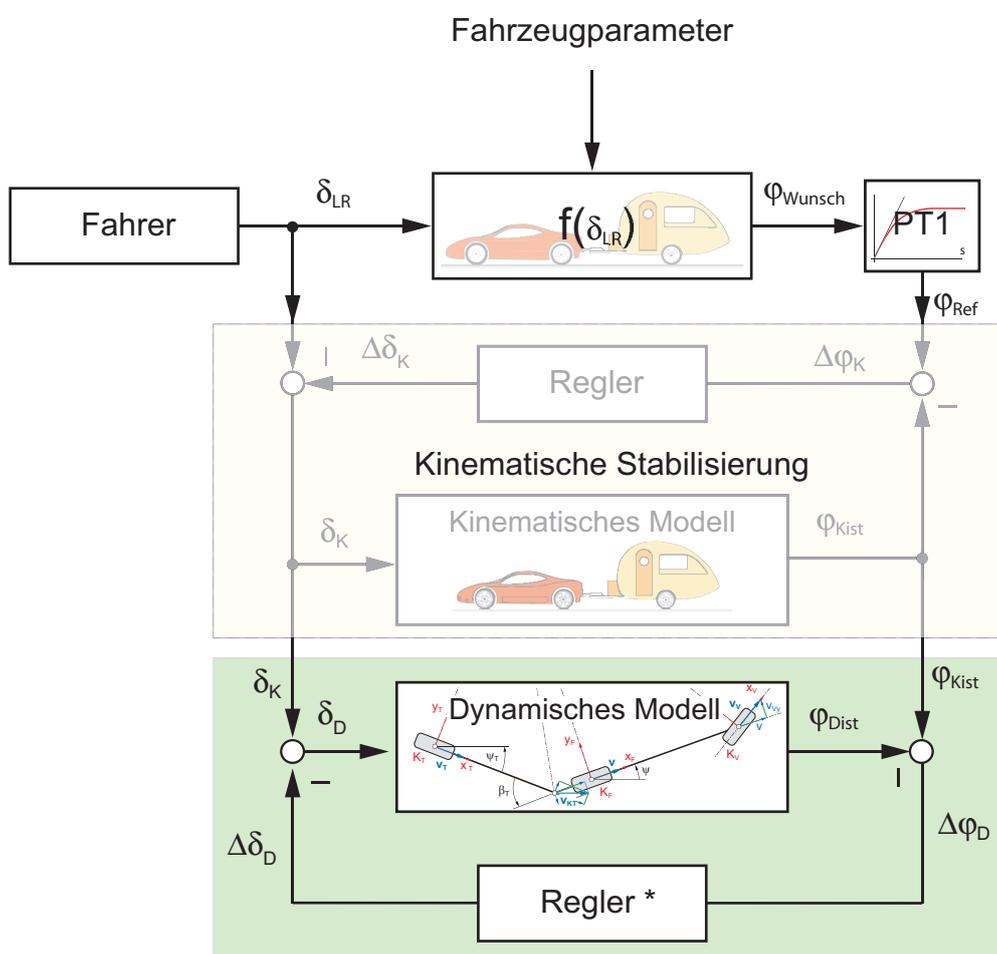


Abb. 9: Stabilisierung der Rückwärtsfahrt beim dynamischen Modell

4 Ergebnisse

4.1 Stabilisierung des kinematischen Modells

Abbildung (10) zeigt das Resultat des Fahrzeuggespannes bei Vorwärtsfahrt mit einer Geschwindigkeit von $v = 5 \text{ m/s}$ und einem Lenkwinkelsprung bei $t = 1.0 - 1.5$ Sekunden auf 10° . Durch die Kinematik des Systems erreicht der Knickwinkel φ_T nach einer gewissen Verzögerung den Endwert und erfüllt die Ackermann-Bedingung.

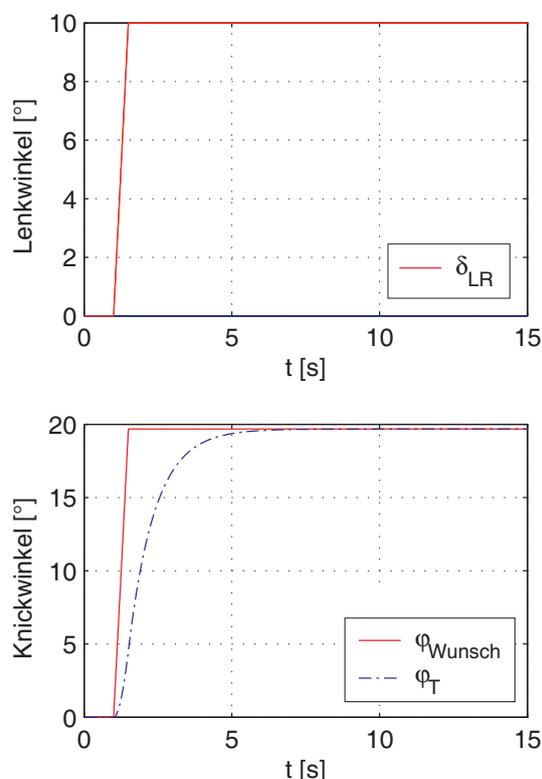


Abb. 10: Vorwärtsfahrt beim kinematischen Modell

Im Vergleich dazu zeigen die Diagramme in Abbildung (11) die Stabilisierung des kinematischen Modells bei Rückwärtsfahrt mit $v = -5 \text{ m/s}$. Der Fahrer fährt zunächst entlang einer Geraden und zwischen $t = 1.0$ und 1.5 Sekunden lenkt er auf einen Lenkwinkel von 10° .

Über die Ackermann-Beziehung stellt sich sprunghaft ein gewünschter Knickwinkel φ_{Wunsch} von $\approx 20^\circ$ ein. Eine reale Fahrzeug- Anhänger- Kombination kann diesen Wunsch aber nicht sofort erreichen. Mit Hilfe des PT1-Gliedes wird dieser Wunschknickwinkel verzögert, sodass der Fahrer ungefähr das gleiche kinematische Verhalten wahrnimmt, wie bei der Vorwärtsfahrt. Durch den Regler lenkt das System anfangs in die negative Drehrichtung, um das Gespann auszulenken und dem Referenzknickwinkel φ_{Ref} zu folgen. Nach einer gewissen Zeitspanne erreicht der Lenkwinkel δ_K den Wunschlenkwinkel δ_{LR} bzw. der Knickwinkel φ_{Kist} den Wunschknickwinkel φ_{Wunsch} . Das System erfüllt nun die Ackermann-Bedingung.

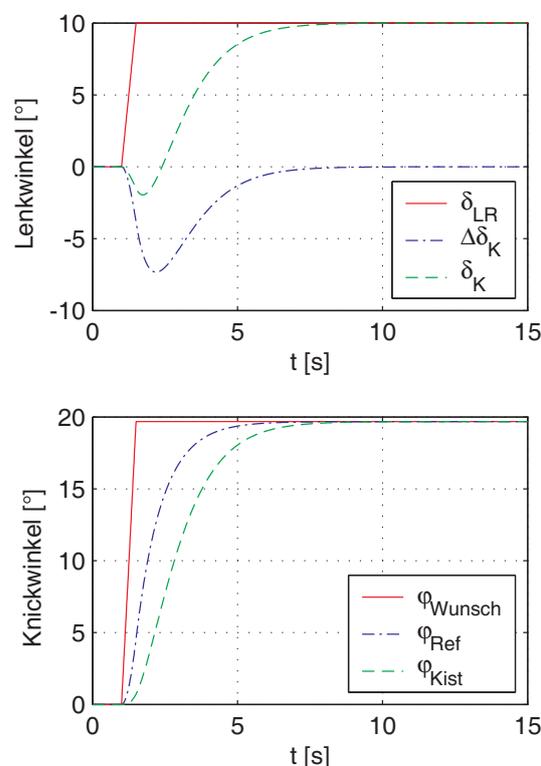


Abb. 11: Stabilisierung der Rückwärtsfahrt beim kinematischen Modell

4.2 Stabilisierung des dynamischen Modells

Als Test-Manöver dient eine Rückwärtsfahrt eines J-Turns. Abbildung (12) zeigt die Auswirkungen der Fahrzeugkombination wenn man nur den kinematischen Stabilisierungswinkel δ_K auf das dynamische System aufschaltet. Sobald der dynamische Knickwinkel φ_{Dist} vom kinematischen Knickwinkel φ_{Kin} abweicht, beginnt sich das System zu destabilisieren

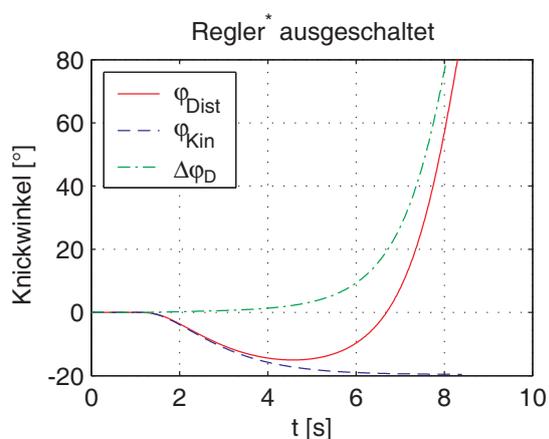


Abb. 12: Ohne Stabilisierung des dynamischen Modells

und nach ca. 8 Sekunden ist ein Knickwinkel von 90° erreicht. Im Vergleich ist in Abbildung (13) der dynamische Regler eingeschaltet. Man sieht, dass durch den Regler*, der als PI Regler ausgeführt ist, der dynamische Knickwinkel φ_{Dist} dem kinematischen Knickwinkel φ_{Kin} sehr gut folgt. Der Regler zwingt dem dynamischen Modell die Ackermann-Bedingung auf.

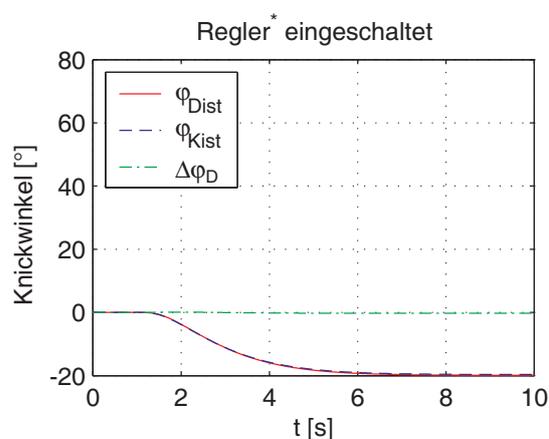


Abb. 13: Mit Stabilisierung des dynamischen Modells

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Berechtigung des hier vorgestellten Ansatzes mit der Erweiterung um das dynamische Verhalten wird gezeigt. Obwohl aufgrund der geringen Geschwindigkeiten beim Rückwärtsfahren die zeitliche Dynamik gering ist, kann man das System nicht auf rein kinematische Zusammenhänge reduzieren.

Aus Abb. (12) erkennt man, dass die rein kinematische Stabilisierung für das reale System, hier durch das vereinfachte dynamische Modell beschrieben, nicht ausreicht. Weiters ist anzuführen, dass die Dy-

namik nicht nur rein aus der Geschwindigkeit, sondern auch zum Beispiel durch eine unebene Fahrbahn, die ein kinematischer Ansatz nicht abbilden kann, resultiert.

Die ersten Ergebnisse dieses Ansatzes deuten auf eine vielversprechende Anwendung. Es lässt sich schon jetzt sagen, dass diese neue Funktionalität, welche mittels Steer-by-Wire aber prinzipiell auch durch eine Überlagerungslenkung realisiert werden kann, den Fahrer spürbar entlastet. Nicht nur der Fahrer hat Vorteile, auch in

Speditionshöfen könnte dieses System automatisch eingesetzt werden, um ferngesteuert von außen den LKW- Zug an die gewünschte Laderampe zu pilotieren.

Die begonnenen Arbeiten werden intensiv weiterverfolgt und die nächsten Aufgaben sind die Implementierung von unebenen bzw. geneigten Fahrbahnen und

die Anwendung auf Gliederzüge. Die Modellierung soll schrittweise vom noch sehr einfachen Einspurmodell auf ein Zweispurmodell und schlussendlich auf ein komplexes Mehrkörpersystem erfolgen. Sind die Ergebnisse durch Simulation befriedigend, ist an eine Implementierung des Verfahrens in ein Versuchsfahrzeug gedacht.

Literatur

- [1] ALTAFINI, C., A. SPERANZON und K. JOHANSSON: *Hybrid Control of a Truck and Trailer Vehicle*.
In: *HSCC '02: Proceedings of the 5th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, Seiten 21–34, London, UK, 2002. Springer-Verlag.
- [2] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1994.
- [3] HOEPKE, E., W. APPEL, H. BRÄHLER, U. DAHLHAUS, T. ESCH und J. GRÄFENSTEIN: *Nutzfahrzeugtechnik*. Vieweg, 2. überarbeitete Auflage Auflage, 2002.
- [4] HORN, M. und N. DOURDOUMAS: *Regelungstechnik*. Pearson, 2004.
- [5] MITSCHKE, M. und H. WALLENTOWITZ: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer Verlag, 2004.
- [6] PACEJKA, HANS B.: *Tire and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2002.
- [7] SCHUMACHER, W.: *Stabilisierung der Rückwärtsfahrt von LKW- Aufliegern und Gliederzügen durch einen Regler*.
In: *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 460*, 2001.

Optimale nichtlineare Regelung mit garantierter Robustheitsgrenze am Beispiel eines Motorenprüfstandes

E. Gruenbacher
JK-Universität Linz,
Institut für Design und Regelung
mechatronischer Systeme
Altenbergerstraße 69, 4040 Linz
engelbert.gruenbacher@lcm.at*

Zusammenfassung

Regelung von Motorenprüfständen ist meist ein Problem, welches sich vor allem aus einem sehr geringen Modellwissen über das Verhalten einer Verbrennungskraftmaschine ableitet. Das Motorverhalten ist dabei stark nichtlinear und ändert sich darüber hinaus während der Parametrierphase ständig. Da die Performance der Regelung wichtig ist, muss ein "Trade Off" zwischen robuster und optimaler Regelung gefunden werden.

Zur Lösung dieses Problems wird das Motorverhalten durch ein vereinfachtes mathematisches Motormodell beschrieben und dieses dann in die Struktur eines Extending Hammerstein Systems gebracht. Für diese Systemklasse wird ein Fehlermodell erstellt, welches zur Reglerauslegung verwendet wird. Für die Reglerauslegung wird theoretisch die Auslegung eines optimalen L_2 Reglers untersucht, wobei ein Theorem zur Abschätzung des H_∞ Attenuation Levels gegenüber Eingangsstörungen angegeben wird.

Simulationsergebnisse runden die theoretischen Ergebnisse ab und zeigen die Effizienz der gezeigten Methode.

1 Einleitung

In den meist sehr komplexen Motorsteuerungen von Verbrennungskraftmaschinen sind eine Vielzahl von Regelstrukturen, Variablen und Parametern vorhanden, welche in irgendeiner Form bei der Inbetriebnahme einer Verbrennungskraftmaschine eingestellt werden

*Engelbert Grünbacher ist Mitarbeiter des LCM Linz und am Institut für Design Regelung mechatronischer System tätig

müssen. Zu diesem Zweck werden Motorenprüfstände verwendet. Eine Vielzahl der Parameter wird in stationären Versuchen ermittelt. Dabei werden bestimmte Betriebspunkte der Verbrennungskraftmaschine, welche über Drehzahl und Drehmoment des Motors gekennzeichnet sind, angefahren, und die Motorparameter in diesem Arbeitspunkt eingestellt. Während der Parametrierung der Motorelektronik verändert sich das Motorverhalten ständig, sodaß der verwendete Regler auf unterschiedliche Strecken wirkt. Die wesentliche Arbeit des Reglers ist dabei die Stabilisierung des Regelkreises in den bestimmten Arbeitspunkten, zusätzlich muss aber auch eine bestimmte Performance gewährleistet sein. Der Einschwingvorgang soll dabei so kurz und die Abweichung so gering wie möglich sein.

Robuste nichtlineare Regelung ist eine Thematik, welche in der Literatur eine hohe Aufmerksamkeit findet. Als Beispiele können hier die Artikeln [1] und [2] genannt werden, wo das Hamilton - Jacobi Setup betrachtet wird. Dabei wird für die robuste nichtlineare Regelung der Designparameter γ eingeführt, welcher als Begrenzung der L_2 -Verstärkung zwischen der Performance Variablen und der Störung anzusehen ist. Zur Auslegung eines robusten Reglers wird dabei immer ein Worst Case Szenario untersucht. Dabei wird angenommen, dass sich die Störung immer maximal gegen den Regler, welcher versucht die Störung zu kompensieren, auswirkt. Bei der optimalen Regelung wird dabei auf eine Berücksichtigung der Störung verzichtet. Der Regler wird so ausgelegt, daß eine skalierte quadratische Funktion in Abhängigkeit der Performancevariablen minimiert wird. Wie aus der linearen Theorie bekannt ist, ist dieser optimale Regler auch robust. Die Robustheit eines optimalen Reglers für lineare Systeme entspricht einer Phasenreserve von $\geq 60^\circ$ oder einer L_2 -Verstärkung von ≤ 2 ([3]). Wie gezeigt wird, ergibt sich diese Tatsache auch für den nichtlinearen Fall. Damit kann eine Auslegung eines optimalen L_2 Reglers zur Lösung des robusten Regelungsproblems führen.

Neben der regelungstechnischen Frage der robusten nichtlinearen Regelung stellt sich aber auch die Frage, wie das System des Prüfstandsmodell mathematisch angeschrieben werden kann. Ein mathematisches Modell ist natürlich die Grundlage eines modellbasierten robusten Reglers. Allerdings kann das Motorverhalten nicht exakt mathematisch nachgebildet werden. Weiters ist das Verhalten, bedingt durch die komplexen Vorgänge in der ECU (Engine Control Unit), nicht durch glatte Funktionen beschreibbar. Auf Grund linearer Interpolationen innerhalb der ECU ist das Verhalten auch nicht durch ein Differenzialgleichungssystem mit differenzierbaren Funktionen beschreibbar. Um das Problem trotzdem theoretisch zu betrachten, wird das System durch eine spezielle Systemklasse approximiert. Diese Systemklasse ist in Abbildung 1 dargestellt. Durch eine solche Darstellung kann die stationäre nichtlineare Abbildung, sofern sie invertierbar ist, für die Reglerauslegung, wie noch gezeigt wird, vernachlässigt werden. Ist die stationäre nichtlineare Abbildung nicht differenzierbar und damit das "Implicit Function Theorem" nicht anwendbar, dann kann die Abbildung durch eine differenzierbare Funktion approximiert werden. Der Approximierungsfehler addiert sich dann zum Modellfehler und wird somit das Regelproblem nicht erschweren.

Die Reglerauslegung findet also nur auf dem dynamischen Teil des Systems statt. Dieser Systemteil ist somit eingangsaffine, was die Reglerauslegung erleichtert. Die Lösung des Problems führt zur Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung, wobei eine Lösung dieser

Gleichung in der Praxis nur für einzelne Systeme möglich ist. Meist wird eine Lösung über einen Reihenansatz gesucht und damit nur eine approximative Lösung gefunden. Für das gezeigte Beispiel wird der Weg der inversen optimalen Regelung bestritten. Dabei wird ein Ansatz für eine Lösung der HJB gewählt und für diesen das dazugehörige Gütekriterium gesucht. Entspricht das Gütekriterium dann den Vorstellung, kann die Lösung der HJB als hinreichend angesehen werden.

Der Artikel ist folgenderweise strukturiert: Zu Beginn erfolgt eine kurze Einführung in die Systemklasse, wobei deren wesentlichen Eigenschaften behandelt werden. Weiters wird die Frage nach der Anwendbarkeit dieser Systemklasse gestellt. Zusätzlich zur Systemklasse wird ein Fehlermodell diskutiert, welches dann zur Reglerauslegung verwendet wird. Dabei wird kurz auf die approximierete Invertierung der stationären nichtlinearen Abbildung eingegangen. Im weiteren Kapitel wird dann das regelungstechnische Problem definiert, ehe es an Hand eines Beispiels verifiziert wird. Zum Schluss folgt eine Zusammenfassung mit einem Ausblick über zukünftige Ideen und Schritte.

2 Extended Hammerstein Systeme

Diese Systemklasse ist eine erweiterte Form von Hammerstein Systemen. Das System entspricht dabei einer Kaskade einer stationären nichtlinearen Abbildung, welche von den Zuständen und Eingängen abhängt, und einem eingangsaffinen System.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)m(x, u) \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

wobei $x \in \mathfrak{R}^n$ den Zustand, $u \in \mathfrak{R}^m$ den Eingangsvektor und $y \in \mathfrak{R}^p$ den Ausgangsvektor des Systems darstellen. $v \in \mathfrak{R}^p$ wird als interne Eingangsgröße bezeichnet. Als Eingangsgröße deswegen, da im weiteren Verlauf bei der Reglerauslegung die stationäre nichtlineare Abbildung unter der Annahme der Invertierbarkeit vernachlässigt wird. Dadurch schränkt sich allerdings die Systemklasse ein.

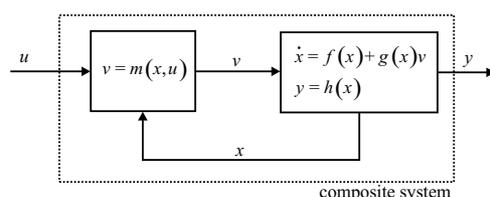


Abbildung 1: Struktur der betrachteten Systemklasse

2.1 Anwendbarkeit der Systemklasse

Grundsätzlich stellt sich die Frage der Anwendbarkeit der Systemklasse. Unter welchen Voraussetzungen kann ein ganz allgemeines nichtlineare System der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

in der Struktur eines EHS (siehe Abbildung 1) dargestellt werden? Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten.

- Physikalische Modellbildung resultiert in einer EHS-Struktur
- Transformation eines allgemeinen nichtlinearen Modells in die Normalform
- Extrapolation der nichtlinearen stationären Abbildung
- Trennen der Systemdynamik in ein schnelles und ein langsames Systemverhalten

Auf den ersten Punkt muss nicht näher eingegangen werden. Viele Systeme, insbesondere mechatronische Systeme können in einer derartigen Systemstruktur dargestellt werden. Als Beispiel dafür lässt sich die Verbrennungskraftmaschine nennen. Die Dynamik einer Verbrennungskraftmaschine kann dabei als nichtlinear aber eingangsaffin angesehen werden (siehe [10]). Nichtlineare Funktionen der ECU können über die stationären nichtlineare Abbildung dargestellt werden. Die gezeigte Systemklasse findet auch Anwendung für diverse Momentenschätzer im automotiven Bereich ([8],[9]).

Es ist weiters einfach zu verstehen, wie durch Transformation eines allgemeinen nichtlinearen Modells in dessen Normalform eine EHS-Struktur erzielt werden kann. Zur Transformation eines allgemeinen nichtlinearen Modells in dessen Normalform wird die Definition des vektoriellen relativen Grad verwendet ([4]).

$$\left. \begin{array}{l} y_i = h_i(x) \\ \dot{y}_i = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} f(x, u) = L_f h_i(x) \\ \vdots \\ y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{array} \right\} \forall i = 1 \dots p$$

Mit dieser Definition lässt sich relativ einfach die Transformationsvorschrift $z = \Phi(x)$ angeben. Definiert man den neuen Zustandsvektor mit

$$z = \left(\xi_{1,1} \quad s \quad \xi_{1,r_1} \quad s \quad \xi_{p,1} \quad s \quad \xi_{p,r_p} \quad \eta \right)^T$$

und die Transformationsvorschriften mit

$$\begin{aligned} \Phi_{i,1}(x) &= h_i(x) \\ \Phi_{i,2}(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \Phi_{i,r_i}(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{aligned}$$

dann gilt es nur mehr $n - r$ Funktionen Φ_η zu finden, sodass gilt

$$\text{span} \left\{ \Phi_{1,1}, \Phi_{1,2}, \dots, \Phi_{1,r_1}, \dots, \Phi_{p,1}, \Phi_{p,2}, \dots, \Phi_{p,r_p}, \Phi_\eta \right\} \in \mathfrak{R}^n.$$

Es kann nun einfach gezeigt werden, dass das System genau dann in einer EHS Struktur angegeben werden kann, wenn für das resultierende System

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_{i,1} &= \xi_{i,2} \\ \dot{\xi}_{i,2} &= \xi_{i,3} \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{i,r_i} &= \alpha_i(\xi, \eta) + \beta_i(\xi, \eta, u) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta, u) \\ y_i &= \xi_i, \quad \forall i = 1, \dots, p\end{aligned}$$

gilt, dass $\kappa(\xi, \eta, u) = 0$. Die stationäre nichtlineare Abbildung kann dann beispielsweise durch den Eingangsvektor

$$m(\xi, \eta, u) = \begin{pmatrix} \beta_1(\xi, \eta, u) \\ \vdots \\ \beta_p(\xi, \eta, u) \end{pmatrix}$$

angegeben werden, ist aber bei Weitem nicht eindeutig. Für SISO - Systeme ist eine solche Transformation immer dann möglich, wenn ein relativer Grad existiert. Der Trivialfall ist außerdem dann gegeben, wenn der relative Grad (vektorielle relative Grad) gleich der Systemordnung ist. Dann kann immer eine EHS Struktur angegeben werden.

Die Möglichkeit, die stationäre nichtlineare Abbildung aus den Systemgleichungen zu extrapolieren, ist dann gegeben, wenn die Eingangsabhängigkeit bei allen eingangsabhängigen Zuständen identisch ist. Es ist dann möglich die stationäre nichtlineare Abbildung zu extrapolieren (siehe [5]).

Die letzte angesprochene Möglichkeit ist in der praktischen Anwendung sehr bedeutungsvoll. Dabei handelt es sich nicht um eine genaue Abbildung, sondern vielmehr um eine Approximation. Dabei wird die Systemdynamik, wie es aus der Singular Perturbation Theorie bekannt ist [6], in ein schnelles Teilsystem und ein langsames Teilsystem getrennt. Hat dieses System dann die Struktur von

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \tilde{f}(\eta) + \tilde{g}(\eta) \xi \\ \varepsilon \dot{\xi} &= g(\eta, \xi, u),\end{aligned}$$

dann kann der Grenzübergang zu $\varepsilon \rightarrow 0$ gemacht werden. Ist die Funktion $g(\eta, \xi, u)$ invertierbar, dann hat das entstehende System exakt die Struktur eines EHS.

Natürlich ist es nicht immer einfach eine Transformation $(\eta \ \xi)^T = \Phi(x)$ zu finden. Meist ergibt sich die Trennung aber bereits bei der Modellbildung, oder sie kann durch eine Approximation durchgeführt werden.

Die Systemklasse eignet sich also gut zur Darstellung von physikalischen, insbesondere mechatronischen Systemen. Eine Vielzahl von mechatronischen Systemen besteht aus einer oder mehreren schnellen Antriebsmaschinen, welche oft auch nichtlineares Verhalten zeigen, und einer langsamen Dynamik. Als ein gutes Beispiel kann hier der Antriebsstrang eines Fahrzeuges genannt werden. Es ist leicht zu verstehen, dass die Verbrennungskraftmaschine, das Antriebsmoment im Vergleich zur übrigen Dynamik sehr schnell ändern kann. Gleiches gilt auch für den dynamischen Motorenprüfstand.

2.2 Regelbarkeit der Systemklasse

Für die Regelung der Klasse muss Regelbarkeit vorausgesetzt werden, wobei im weiteren vorausgesetzt wird, dass die Zustände des Systems messbar sind und somit Beobachtbarkeit nicht behandelt werden muss. Durch die Kaskadierung eines dynamischen, eingangsaффinen Systems mit einer stationären nichtlinearen Abbildung kann die Eigenschaft der Regelbarkeit verloren gehen. Da die Regelung, wie bereits erwähnt, auf die Regelung des dynamischen Systems reduziert wird, wird angenommen, dass das dynamische System, mit der internen Eingangsvariablen v , regelbar ist. D.h., der Raum welcher durch

$$\text{span} \{g(x), ad_{-f}g(x), \dots, ad_{-f}^{n-1}g(x)\} \quad (3)$$

aufgespannt wird, hat vollen Rang n für alle $x \in X$, wobei mit $X \subset \mathbb{R}^n$ der betrachtete Zustandsraumbereich angenommen wird. Für das hier behandelte Problem ist eine globale Betrachtung nicht notwendig. Um Regelbarkeit garantieren zu können, können die folgenden zwei Bedingungen angegeben werden.

Lemma 1 *Das kaskadierte System (1) und (2) ist lokal regelbar im Bereich von $x \in X$ und $u \in U$, wobei $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ und $U = \{u \in U \mid \|u - u_0\| < \delta\}$ ist, wenn das unterlagerte dynamische System lokal regelbar in $x \in X$ ist, und wenn für hinreichend kleine ε und δ folgende Bedingungen erfüllt sind.*

$$m(x, u) \neq 0, \quad \forall x \in X \wedge \forall u \neq 0 \quad (4)$$

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial m(x, u)}{\partial u} \right\} = \mathbb{R}^p, \quad \forall x \in X \wedge \forall u \in U \quad (5)$$

Beweis: Die erste Bedingung ist leicht einzusehen und muss auch nicht näher bewiesen werden. Um die zweite Bedingung zu prüfen wird die stationäre nichtlineare Abbildung untersucht. Weiters gilt auf Grund von (3), dass $g(x)$ im gesamten Raum $x \in X$ vollen Rang (Rang p) besitzt. Für den Beweis wird für die stationäre nichtlineare Funktion eine Taylorreihenentwicklung um $u_0 \in U$ durchgeführt.

$$m(x, u) = m(x, u'_0) + \left. \frac{\partial m(x, u)}{\partial u} \right|_{x, u=u'_0} \Delta u + O(u^2)$$

Mit $\hat{f}(x) = f(x) + g(x) m(x, u'_0)$ kann nun das System neu angeschrieben werden. Für eine hinreichend kleine Umgebung Δu von u ergibt sich somit das approximierte System

$$\dot{x} \approx \underbrace{\hat{f}(x) + g(x) \left. \frac{\partial m(x, u)}{\partial u} \right|_{x, u=u'_0}}_{\hat{g}(x)} \Delta u$$

Es ist nun klar ersichtlich, dass, falls die zweite Bedingung von Lemma 1 erfüllt ist, der neue Eingangsvektor $\hat{g}(x)$ des approximierten Systems nicht an Rang verliert. Damit ist bewiesen, dass die zweite Bedingung eine hinreichende Bedingung der stationären nichtlinearen Funktion für die Regelbarkeit eines EHS ist. ■

2.3 Approximierte Invertierung und Fehlermodell

Wie bereits erwähnt wird der Reglerentwurf so durchgeführt, dass dabei nur das dynamische Teilsystem betrachtet wird. Als Eingangsgröße dient somit die interne Eingangsgröße v . Dies ist aber nur dann möglich, wenn die stationäre nichtlineare Abbildung invertiert werden kann, d.h., dass bei gegebenem bzw. gemessenem Zustand und einer aus dem Regleralgorithmus berechneten internen Stellgröße der tatsächliche Streckeneingang berechnet werden kann. Ist die zweite Bedingung von Lemma 1 erfüllt, dann kann mittels implizitem Funktionentheorem bewiesen werden, dass eine Invertierung möglich ist. Nun ist aber diese Bedingung nur hinreichend und bei weitem nicht notwendig. Erfüllt kann diese Bedingung nur dann werden, wenn die stationäre nichtlineare Abbildung differenzierbar ist, was in vielen Fällen nicht gewährleistet ist. Um diese Problematik zu umgehen, wird eine approximierte Invertierung durchgeführt. Dabei wird die nichtlineare Abbildung in jedem Berechnungsschritt durch eine differenzierbare Funktion approximiert. Für das hier gezeigte Beispiel wird in jedem Abtastschritt eine lokale SOHS (Second Order Hyper Surface) der Form

$$\tilde{m}(x, u) = P_1x + P_2x [\otimes] x + Rx \otimes u + S_1u + S_2u [\otimes] u$$

berechnet, wobei die Berechnungspunkte um den aktuellen Betriebspunkt so gewählt werden, dass die Parameter eindeutig bestimmt werden können. Die Matrix (6) muss invertierbar sein.

$$M = \begin{pmatrix} x_1^T & x_1^{[2]T} & x_1 [\otimes] u_1 & u_1 & u_1^{[2]T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\#par}^T & x_{\#par}^{[2]T} & x_{\#par} [\otimes] u_{\#par} & u_{\#par} & u_{\#par}^{[2]T} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Vorteil dieser Methode ist, dass aus einer möglicherweise nicht differenzierbaren Funktion eine differenzierbare Funktion entsteht, und dass diese invertierbar ist. Zwar gibt es dann immer zwei mögliche Lösungen (der Eingang geht quadratisch ein) allerdings ist im praktischen Anwendungsfall immer leicht zu entscheiden, welche Lösung verwendet werden soll. Ein weiterer Vorteil ist, dass die nichtlineare Abbildung durch die lokale Berechnung einer SOHS geglättet wird. Weiters ist der stationäre Fehler, vorausgesetzt die nichtlineare Abbildung ist exakt, immer Null.

Natürlich kann durch diese Vorgangsweise die nichtlineare Abbildung nicht exakt invertiert werden. In Abbildung 2 ist ein Problemfall für den zweidimensionalen Fall näher dargestellt. Mit \tilde{v} ist dabei die gewünschte und vom Regleralgorithmus berechnete Stellgröße gemeint. Durch die lokale SOHS kann der Bildbereich der nichtlinearen Funktion verringert werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Lösung der Invertierung komplex ist. Die bestmögliche Stellgröße, welche den Abstand minimiert, ergibt sich dann wie eingezeichnet. Ob dieser Fall auftritt hängt natürlich von der Wahl der Punkte ab, mit Hilfe dessen die SOHS berechnet wird. Die Wahl der Punkte kann somit als weiterer Freiheitsgrad der Regelung angegeben werden.

Mit dieser Vorgehensweise wird die nichtlineare Abbildung, welche unter Umständen nicht differenzierbar ist, durch eine glatte invertierbare Funktion approximiert.

$$m(x, u) = m_s(x, u) + \Delta m(x, u)$$

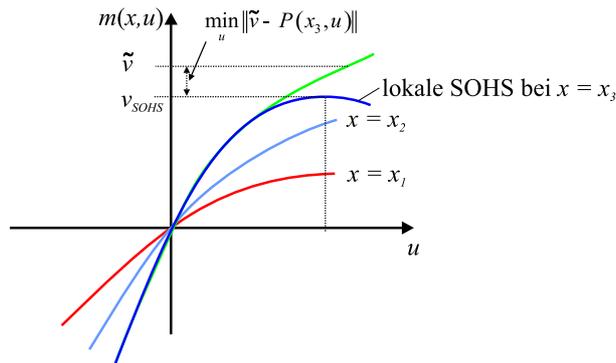


Abbildung 2: Lokale Approximation durch SOHS

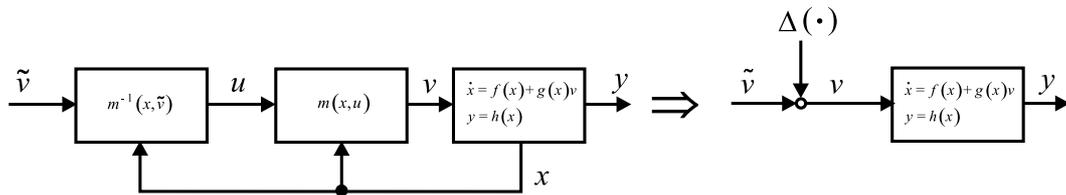


Abbildung 3: Fehlermodell des Systems mit approximierter Invertierung

wobei die Funktion $m_s(x, u)$ die lokale SOHS beschreibt, welche in jedem Punkt berechnet wird. Wie erwähnt kann diese Funktion auch invertiert werden. Zur Auslegung der Regelung wird somit ein System untersucht, welches sich aus dem Gesamtsystem (Abbildung 1) und der Inversen der lokalen SOHS zusammensetzt (siehe Abbildung 3). Wie man erkennen kann, wird der Approximierungsfehler als eine dem Eingang überlagerte Störung betrachtet.

$$\begin{aligned}
 u &= m\left(x, m_s^{-1}\left(x, \bar{u}\right)\right) \\
 &= \underbrace{m_s\left(x, m_s^{-1}\left(x, \bar{u}\right)\right)}_{\bar{u}} + \underbrace{\Delta m\left(x, m_s^{-1}\left(x, \bar{u}\right)\right)}_w
 \end{aligned}$$

Damit ist auch das Fehlermodell festgelegt. Der Regler muss nun so entworfen werden, dass er die Strecke gegenüber Eingangsstörungen robust stabilisiert. Dabei soll die Abhängigkeit des Störvektors von den Systemzuständen und vom aktuellen erwünschten internen Eingang \tilde{v} vernachlässigt werden. Für den weiteren Verlauf wird angenommen, dass die Eingangsstörung quadratisch integrierbar ist und keinen Offset besitzt. Da zur Berechnung der lokalen SOHS immer der aktuelle Arbeitspunkt verwendet wird, verschwindet der Approximierungsfehler im aktuellen Arbeitspunkt. Hat man nun einen stabilisierenden Regler dann wird der Fehler immer gegen Null konvergieren. Die Annahme der quadratischen Integrierbarkeit ist daher nicht unvernünftig.

Für das angegebene und in Abbildung 3 gezeigte Fehlermodell soll nun eine robuste Regelung entworfen werden. Dazu wird als erster Ansatz ein optimaler Regleransatz gewählt.

Gelingt es zu zeigen, dass diese optimale Regelung genügend Robustheit aufweist, dann kann der optimale Regler eingesetzt werden.

3 Robustheit eines optimalen L_2 - Reglers

In diesem Kapitel wird das nichtlineare aber eingangsaффine System betrachtet, wobei darauf hingewiesen wird, dass der dynamische Teil der betrachteten Systemklasse ebenfalls ein nichtlineares eingangsaффines System ist. Weiters gilt das System als eingangsgestörtes System. D.h., die Störung w wirkt in die gleiche Richtung wie der Eingang u . Das ergibt dann das folgende System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u + w) \quad (7)$$

$$z = h_2(x) + d_2(x)u \quad (8)$$

wobei $x \in R^n$ den Zustand, $u \in R^m$ den Stellgrößenvektor und $z \in R^p$ die Performancevariable des Systems angeben. Die Eingangsstörung w hat natürlich gleiche Dimension wie der Stellgrößenvektor. Weiters wird ohne Einschränkung angenommen, dass $x = 0$ eine Ruhelage darstellt und dafür gilt, dass $f(0) = 0$ und $h_2(0) = 0$ ist. Das Vektorfeld $f(x)$ sowie die Abbildungen $g(x)$, $h_2(x)$, und $d_2(x)$ werden als hinreichend glatt angenommen. Wie bei der optimalen Regelung üblich, wird angenommen, dass $d_2(x)$ für alle $x \in X$ vollen Rang besitzt. Diese Annahme ist notwendig, um kein singuläres Optimierungsproblem zu bekommen. Ohne auf die Probleme der Lösbarkeit eines nichtlinearen optimalen Reglerproblems Rücksicht zu nehmen, sei angenommen, das optimale Regelungsgesetz $u = k_2(x)$ existiert, sodass das Gütekriterium

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty z(t)'z(t)dt$$

minimal wird falls $w = 0$ ist. Um diesen Regler zu berechnen, wird eine Hamilton-Jacobi Gleichung gelöst. Diese ist aber in den meisten Fällen nicht exakt lösbar. Wie erwähnt soll hier aber angenommen werden, dass eine Lösung existiert. Um die Robustheit des optimalen L_2 Reglers $u = k_2(x)$ zu ermitteln wird nun das H_∞ Attenuation Level von $\|T_{z,w}\|_\infty$ zwischen der Eingangsstörung w und der Performancevariable z des geschlossenen Systems berechnet. Das geschlossene System lautet somit

$$\dot{x} = f(x) + g(x)k_2(x) + g(x)w \quad (9)$$

$$z = h_2(x) + d_2(x)k_2(x). \quad (10)$$

Das Ganze läuft darauf hinaus, dass ein positiver Parameter γ so bestimmt werden soll, dass für alle quadratisch integrierbaren Störungen ($w \in L_2$) gilt,

$$J_\infty = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) \right) dt < 0. \quad (11)$$

Für die Robustheit eines optimalen L_2 Reglers kann folgendes Theorem angegeben werden.

Satz 1 Das optimale L_2 Regelgesetz $k_2(x)$ garantiert ein Attenuation Level $\|T_{z,w}\|_\infty \leq \gamma$ wobei

$$\gamma = 2 \max_x \|d_2(x)\| \quad (12)$$

Beweis: Für den Beweis wird zuerst die Hamilton Funktion für das optimale Regelungsproblem angegeben.

$$\begin{aligned} h_2(x, u, \lambda) &= \frac{1}{2} h_2(x)' h_2(x) + \frac{1}{2} u' d_2(x)' d_2(x) u + \lambda' f(x) \\ &+ (\lambda' g(x) + h_2(x)' d_2(x)) u \end{aligned} \quad (13)$$

Verwendet man für λ den Ansatz $\lambda = \frac{\partial V_2}{\partial x}$, wobei mit V_2 eine positive definite Funktion ($V_2(x) > 0, \forall x \neq 0$ und $V_2(0) = 0$) gemeint ist, dann kann das optimale Regelgesetz im allgemeinen Fall einfach angegeben werden.

$$k_2(x) = - (d_2(x)' d_2(x))^{-1} \left(g(x)' \frac{\partial V_2}{\partial x} + d_2(x)' h_2(x) \right) \quad (14)$$

V_2 ist dabei die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V_2}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h_2(x)' h_2(x) - \frac{1}{2} r_2(x) r_2(x)' \\ r_2(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} g(x) + h_2(x)' d_2(x) \right) (d_2(x)' d_2(x))^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Es ist durchaus bekannt, dass im Falle der Existenz eines optimalen Reglers immer auch eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung existiert. Diese zu finden ist allerdings üblicherweise schwierig. Um jetzt die Robustheit des Reglers zu zeigen wird nun die Hamilton Funktion für das Gütefunktional (11) und den dynamischen Grenzen (9) angeschrieben.

$$\begin{aligned} h_\infty(x, w, \mu) &= \mu' (f(x) + g(x)k_2(x) + g(x)w) - \frac{\gamma^2}{2} w' w \\ &+ \frac{1}{2} (h_2(x) + d_2(x)k_2(x))' (h_2(x) + d_2(x)k_2(x)) \end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung wird eine ‘‘Worst-Case‘‘ Abschätzung der Eingangsstörung gemacht.

$$\mu' g(x)w - \frac{\gamma^2}{2} w' w \leq \frac{1}{2\gamma^2} \mu' g(x)g(x)' \mu$$

Damit lässt sich eine obere Grenze der Hamilton Funktion abschätzen.

$$\begin{aligned} h_\infty(x, w, \mu) &\leq \frac{1}{2\gamma^2} \mu' g(x)g(x)' \mu + \mu' (f(x) + g(x)k_2(x)) \\ &+ \frac{1}{2} (h_2(x) + d_2(x)k_2(x))' (h_2(x) + d_2(x)k_2(x)) \end{aligned} \quad (15)$$

Für das geschlossene System ergibt sich für die Hamilton Funktion $h_2(x, w, \lambda)$ von (13) dann

$$h_2(x, k_2(x), \lambda) = \lambda' (f(x) + g(x)k_2(x)) + \frac{1}{2} (h_2(x) + d_2(x)k_2(x))' (h_2(x) + d_2(x)k_2(x))$$

Mit dieser Funktion kann nun die obere Grenze der Hamilton Funktion $h_\infty(x, w, \mu)$ weiter abgeschätzt werden. Dazu wird für μ ein ähnlicher Ansatz wie für λ gewählt.

$$\mu = \frac{\partial V_\infty'}{\partial x}$$

wobei V_∞ wiederum eine positiv definite Funktion ist. Ist die obere Grenze der Hamilton Funktion negativ oder zumindest ≤ 0 dann ist Stabilität des geschlossenen Kreises gewährleistet und die Übertragungsfunktion $\|T_{z,w}\|_\infty$ hat ein Attenuation Leven ≤ 0 . Eine Idee ist nun, die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung für das optimale Reglergesetz in skaliert Form als Ansatz zu verwenden, d.h.,

$$V_\infty(x) = \frac{1}{\alpha} V_2(x), \quad 0 < \alpha < 1$$

Damit ist auf jeden Fall sichergestellt, dass die Funktion V_∞ positiv definit ist. Unter welchen Voraussetzungen sie auch eine Lösung von (15) ist soll nun gezeigt werden. Natürlich gilt auch

$$\mu = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Berücksichtigt man, dass für $\lambda = \frac{\partial V_2}{\partial x}$ gilt, dass $h_2(x, k_2(x), \lambda) = 0$ ist, dann erhält man

$$\begin{aligned} h_\infty(x, w, \mu) &\leq \frac{1}{2\gamma^2\alpha^2} \lambda' g(x) g(x)' \lambda \\ &+ \frac{1 - \alpha^{-1}}{2} (h_2(x) + d_2(x)k_2(x))' (h_2(x) + d_2(x)k_2(x)) \end{aligned}$$

Setzt man nun für $k_2(x)$ den Ausdruck (14) ein, dann folgt nach einigen Rechnungsschritten

$$h_\infty(x, w, \mu) \leq \frac{1}{2} \lambda' g(x) \Gamma(x) g(x)' \lambda + \frac{1}{2} (1 - \alpha^{-1}) h_2(x)' \Pi(x) h_2(x) \quad (16)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (1 - \alpha^{-1})(d_2(x)' d_2(x))^{-1} + \gamma^{-2} \alpha^{-2} I \\ \Pi(x) &= (I - d_2(x) (d_2(x)' d_2(x))^{-1} d_2(x)') \end{aligned}$$

Es ist einfach zu zeigen, dass die Eigenwerte der Matrix $\Pi(x)$ entweder 1 oder 0 sind. Da aber $0 \leq \alpha \leq 1$ angenommen wurde muss der zweite Term von (16) immer ≤ 0 sein. Somit gilt für die obere Grenze von $h_\infty(x)$

$$h_\infty(x, w, \mu) \leq \frac{1}{2} \lambda' g(x) \Gamma(x) g(x)' \lambda$$

Es muss also nur mehr gezeigt werden, dass $\Gamma(x)$ zumindest negativ definit ist, dann ist sichergestellt dass die obere Grenze von (16) negativ ist. Die Matrix $\Gamma(x)$ kann durch folgende Matrixungleichung abgeschätzt werden.

$$\Gamma(x) \leq \frac{\max_x \|d_2(x)\|^2 - (\alpha - \alpha^2)\gamma^2}{\max_x \|d_2(x)\|^2 \gamma^2 \alpha^2} I, \quad \forall x$$

Damit ergibt sich eine hinreichende Bedingung für das H_∞ Attenuation Level

$$\gamma^2 \geq \frac{\max_x \|d_2(x)\|^2}{\alpha - \alpha^2}$$

Nun kann α zwischen 0 und 1 so variiert werden, dass γ ein Minimum wird (Je kleiner γ , desto höher der gesicherte Robustheitsgrad). Man erkennt schnell, dass dies bei $\alpha = \frac{1}{2}$ der Fall ist. Somit kann ein H_∞ Attenuation Level von $\gamma \leq 2 \max_x \|d_2(x)\|$ bei Anwendung einer optimalen Regelung garantiert werden. ■

Als Ergebnis zeigt sich also eine Robustheitseigenschaft des optimalen L_2 Reglers, welche *a priori* und unabhängig vom System abgeschätzt werden kann. Dieses Ergebnis ist von linearen Systemen her bekannt und die Robustheit entspricht für lineare Systeme einer Phasenreserve von mindestens 60° . Im folgenden wird dieses Ergebnis für die Prüfstandsregelung ausgenutzt, wobei die angesprochenen approximierten Invertierung verwendet wird und der Approximationsfehler als Eingangsstörung betrachtet wird. Wie sich zeigen wird, genügt die Robustheitseigenschaft des optimalen Reglers auch zur robusten Regelung gegenüber dieser Eingangsstörung.

4 Nichtlineare MIMO - Prüfstandsregelung

Die gewonnenen Erkenntnisse sollen nun an Hand eines Anwendungsbeispiels gezeigt werden. Das dazu betrachtete System, der dynamische Motorenprüfstand, setzt sich im Wesentlichen aus drei Komponenten zusammen.

- Elektrische Leistungsbremse
- Verbindungswelle
- Verbrennungskraftmaschine

Das System kann dabei als ein Zwei-Massen-Schwinger aufgefasst werden. Die Eingangsgrößen sind dabei die Momente auf beiden Seiten. Auf der einen Seite treibt das Motormoment der Verbrennungskraftmaschine die Welle an, auf der anderen Seite wird dies von der elektrischen Leistungsbremse bewerkstelligt. Die Verbindungswelle darf nicht starr sein, sondern muss so ausgelegt sein, dass sie durch Verbrennungsstöße nicht angeregt wird. Weiters befindet sich im Antriebsstrang ein Dämpfungselement. Die Resonanzfrequenz des gesamten Aufbaus liegt somit unterhalb der niedrigsten Frequenz der, durch Verbrennungsstöße erzeugten, Drehmomentschwankungen.

4.1 Mittelwertsmotormodell

Für die Regelung des Prüfstandes genügt ein Mittelwertmodell der Verbrennungskraftmaschine. Da das Motormodell nur sehr ungenau bekannt sein wird, und dieses unbekannte Motormodell auch starken Schwankungen unterliegt, ist es auch nicht sinnvoll ein genaues Modell zu erstellen. Also wird ein nichtlineares Modell erster Ordnung verwendet. Dieses setzt sich aus einer stationäre nichtlinearen Abbildung, welche von der Drehzahl des Motors und von der Gaspedalstellung abhängt, und einem LPV Modell, einem linearen aber parameterabhängigen Modell, zusammen.

$$\begin{aligned}\dot{T}_E &= -\rho(T_{Estat}, \omega_E) T_E + \rho(T_{Estat}, \omega_E) T_{Estat} \\ T_{Edyn} &= T_E\end{aligned}$$

Die Struktur ist dabei in Abbildung 4 gezeigt. Das gezeigte Motormodell kann aber nicht ohne weitere Betrachtung als EHS klassifiziert werden, da das nichtlineare dynamische Modell, welches hier als LPV- Modell dargestellt wird, nicht glatt ist. Daher wird die Systemdynamik durch einen Polynomansatz approximiert.

$$\begin{aligned}\rho_{appr}(T_{Estat}, \omega_E) &= c_0 + c_1\omega_E + c_2\omega_E^2 + c_3T_{Estat} + c_4\omega_ET_{Estat} \\ &+ c_5\omega_E^2T_{Estat} + c_6T_{Estat}^2 + c_7\omega_ET_{Estat}^2 + c_8\omega_E^2T_{Estat}^2 + \\ &+ c_9T_{Estat}^3 + c_{10}\omega_ET_{Estat}^3 + c_{11}\omega_E^2T_{Estat}^3\end{aligned}$$

Die Parameter können mittels Least-Squares Ansatz berechnet werden. Damit kann das Motormodell wie folgt angeschrieben werden.

$$\begin{aligned}\dot{T}_E &= -\left(c_0 + c_1\omega_E + c_2\omega_E^2\right) T_E + \hat{\rho}_{appr}(T_{Estat}, \omega_E, T_E) T_E + \\ &+ \rho_{appr}(T_{Estat}, \omega_E) T_{Estat} + \Delta\rho_{appr}(T_{Estat0}, \omega_{E0}) \\ T_{Edyn} &= T_E\end{aligned}$$

wobei

$$\hat{\rho}_{appr}(T_{Estat}, \omega_E, T_E) = \rho_{appr}(T_{Estat}, \omega_E) - \left(c_0 + c_1\omega_E + c_2\omega_E^2\right) T_E$$

ist, und $\Delta\rho_{appr}(T_{Estat0}, \omega_{E0})$ den Approximationsfehler in der Ruhelage beschreibt. Das Motormodell kann somit in einer EHS Struktur dargestellt werden. Die stationäre nichtlineare Abbildung ist dabei

$$\begin{aligned}m(\omega_E, T_E, \alpha) &= \hat{\rho}_{appr}(T_{Estat}(\omega_E, \alpha), \omega_E, T_E) T_E + \\ &+ \rho_{appr}(T_{Estat}(\omega_E, \alpha), \omega_E) T_E + \Delta\rho_{appr}(T_{Estat}(\omega_{E0}, \alpha_0), \omega_{E0})\end{aligned}$$

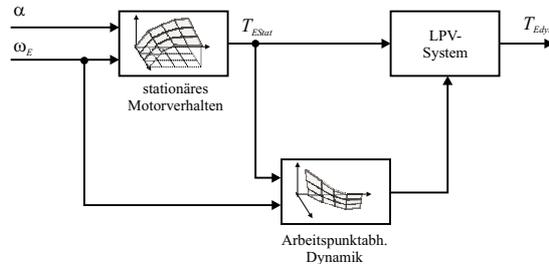


Abbildung 4: Struktur des Motormodells

und das dynamische System lautet damit

$$\begin{aligned}\dot{T}_E &= -\left(c_0 + c_1\omega_E + c_2\omega_E^2\right)T_E + m(\omega_E, T_E, \alpha) \\ T_{Edyn} &= T_E\end{aligned}$$

Als erwähnenswert gilt dabei, dass die stationäre nichtlineare Funktion lokal invertierbar ist.

4.2 Vereinfachtes Modell der Leistungsbremse

Die Leistungsbremse verfügt über einen internen Regelkreis, welcher eine sehr gute Performance aufweist. Das Übertragungsverhalten ist bis zum Feldschwäcbereich annähernd linear und besitzt eine Grenzfrequenz von etwa 250Hz. Für die Prüfstandsregelung heißt dies, dass das Übertragungsverhalten der Leistungsbremse mit 1 angenommen werden kann. Die Abweichung davon muss durch eine Robustheitsforderung berücksichtigt werden.

4.3 Modell des Hardwareaufbaus

Der Hardwareaufbau setzt sich aus den Trägheiten und der Welle zusammen. Da ein 2-Massen-Schwinger angenommen wird, werden sämtliche Massen auf zwei Seiten aufgeteilt. Die beiden Trägheitsmassen sind somit die Trägheitsmasse auf der Seite der Leistungsbremse Θ_D und die Trägheitsmasse auf der Motorenseite Θ_E . Das übertragene Wellenmoment berechnet sich aus der Verdrehung (Torsion) und der Differenz der Drehzahl (Motordrehzahl und Drehzahl der Leistungsbremse).

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\varphi} &= \omega_E - \omega_D \\ T_{ST} &= c\Delta\varphi + d(\omega_E - \omega_D)\end{aligned}$$

wobei mit d die Dämpfung und mit c die Steifigkeit der Welle gemeint ist. ω_E stellt die Drehzahl der Verbrennungskraftmaschine dar und ω_D die Drehzahl der Leistungsbremse.

4.4 Gesamtmodell des Prüfstandssystems

Das Gesamtmodell wird nun in normierter Form angeschrieben. Dabei wird die Ruhelage, also der zu stabilisierende Arbeitspunkt, an die Stelle $x = 0$ gesetzt. Der Zustandsbereich X wird für jeden Zustand von -1 bis 1 betrachtet, wobei -1 jeweils dem Minimum des zu erwartenden Zustandes entspricht und 1 dem Maximum. Das Gesamtsystem lautet somit

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\left(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1x_3 + \tilde{c}_2x_3^2\right)x_1 - \gamma_1x_3 - \gamma_2x_3^2 + \tilde{m}(x_3, x_1, \alpha) \\ \dot{x}_2 &= \beta(x_3 - x_4) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{\theta_E}\left(\frac{c}{\beta}x_1 - \frac{c}{\beta}x_2 - d(x_3 - x_4)\right) \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\theta_D}\left(\frac{c}{\beta}x_2 + d(x_3 - x_4) - \tilde{T}_{DSet}\right)\end{aligned}$$

wobei x_1 dem normierten Motormoment, x_2 der normierten Verdrehung, x_3 der normierten Motordrehzahl und x_4 der normierten Drehzahl der Leistungsbremse entspricht. Die Systemkonstanten ergeben sich aus der Normierung und sollen hier nicht näher angeführt werden.

4.5 Entwurf eines optimalen L_2 -Reglers

Wie bereits oben erwähnt, muss zur Auslegung eines optimalen Reglers eine Hamilton-Jacobi Gleichung gelöst werden. Diese kann allerdings selbst für dieses einfache nicht-lineare System nicht ohne weiteres gelöst werden. Daher wird ein etwas anderer Weg gewählt. Anstatt nach einer Lösung der Hamilton-Gleichung zu suchen, wird ein Ansatz gewählt und für diesen Ansatz dann betrachtet, welche Performance sich damit erzielen lässt. Dieser Ansatz wird in der Literatur [7] inverse Optimalität genannt und führt dann zum Ziel, wenn die gewünschte Performance erreicht wird. Zur Lösung der Hamilton-Gleichung sei für dieses Beispiel angemerkt, dass die Gewichte des Eingangs, genauer die Gewichte der internen Eingangsvariablen mit 1 gewählt werden. Damit ergibt sich für das Gütekriterium

$$J_2 = \int_0^{\infty} h^T(x) h(x) dt + \int_0^{\infty} u^T u dt$$

folgende Hamilton Funktion

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) g^T(x) \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) = 0.$$

und damit folgendes Reglergesetz

$$u = -g^T(x) \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T$$

Für die Lösung der Hamilton Funktion wird nun der Ansatz

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^3 + k_4 x_4^2 + k_5 x_2 x_4$$

gewählt. Das Reglergesetz ist somit linear und lautet

$$\begin{aligned} v &= -g^T(x) \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T = \begin{pmatrix} -2k_1 x_1 \\ \frac{1}{\theta_D} (2k_4 x_4 + k_5 x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_5}{\theta_D} & 0 & \frac{2k_4}{\theta_D} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Unter Angabe der Gewichte h_1 , h_2 , h_3 und h_4 lassen sich nun die Parameter von $V(x)$ und die Parameter der Performancematrix eindeutig lösen. Es muss allerdings darauf geachtet werden, dass die Performancevariable positiv ist, da ansonsten die Stabilität nicht

gesichert ist.

Das Regelgesetz liefert also die interne Stellgröße, welche noch über die Invertierung der stationären nichtlinearen Abbildung in die tatsächliche Stellgröße umgewandelt werden muss. Nun zeigt sich bei näherer Betrachtung, dass diese nichtlineare Abbildung global gesehen nicht invertierbar ist. Im lokalen Bereich liegt es aber in der Natur der Strecke, dass diese Funktion invertierbar sein muss. Tatsächlich ist eine globale Betrachtung gar nicht notwendig, da die aktuelle Gaspedalposition immer stark mit dem aktuellen Arbeitspunkt zusammenhängt. Damit genügt eine lokale Invertierung der stationären nichtlinearen Abbildung. Diese Invertierung wird wie angegeben mittels approximierter Invertierung durchgeführt.

Für das untersuchte System ergeben sich die in Abbildung 5 gezeigten Teilfunktionen der Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung. Die Teilfunktionen der Performancevariablen sind in Abbildung 6 dargestellt. In Abbildung 7 und 8 ist ein Einschwingvorgang des geschlossenen Kreises angegeben. Abbildung 9 und 10 zeigen die dazu benötigten Stellgrößen. Um zu zeigen, dass der Regler auch robust gegenüber Eingangstrungen sein muss, ist in Abbildung 11 die aus dem Reglergesetz berechnete Stellgre, sowie die tatsächlich gestellte interne Stellgre dargestellt. Abbildung 12 zeigt den Approximationsfehler.

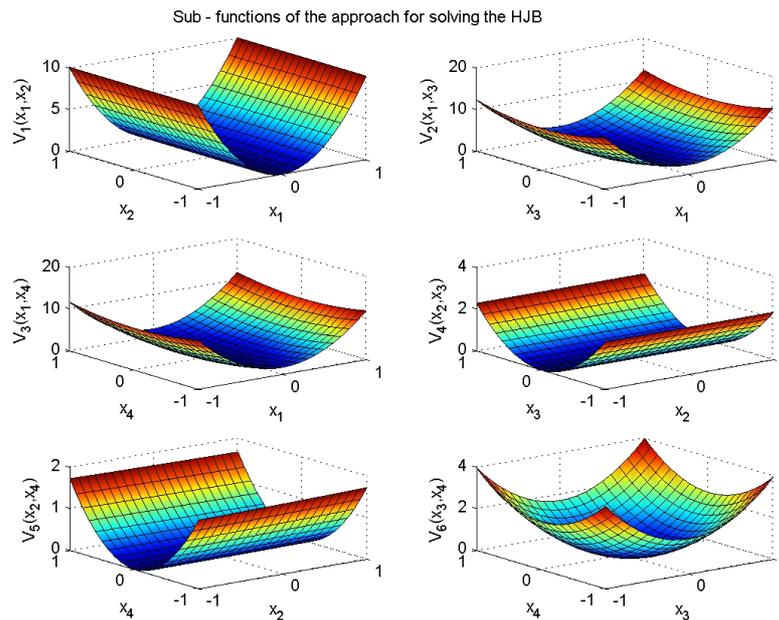


Abbildung 5: Teilfunktionen der Lösung der Hamiltongleichung

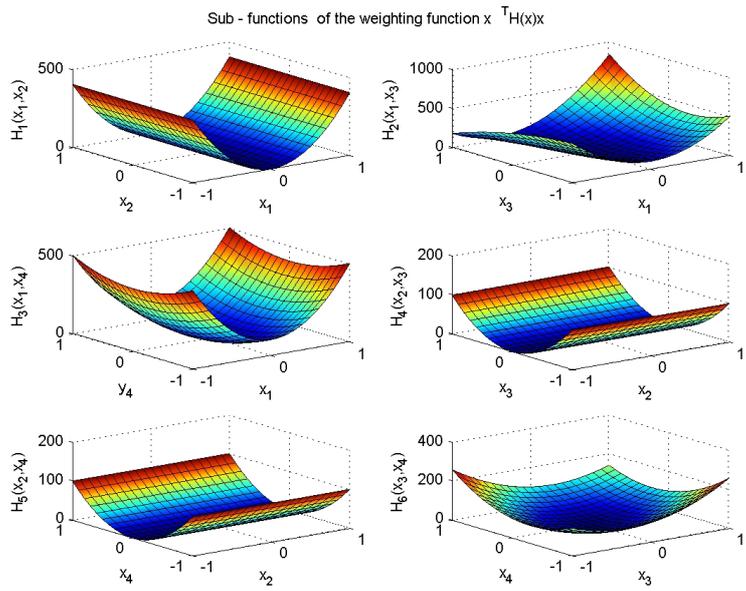


Abbildung 6: Teilfunktionen der Performancevariablen

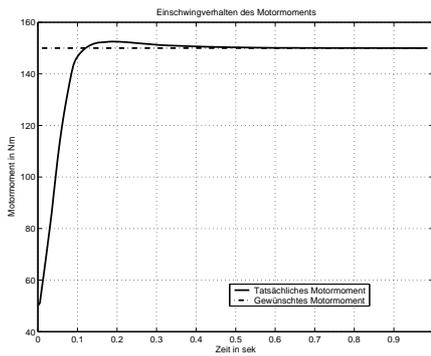


Abbildung 7: Einschwingvorgang des Motormomentes

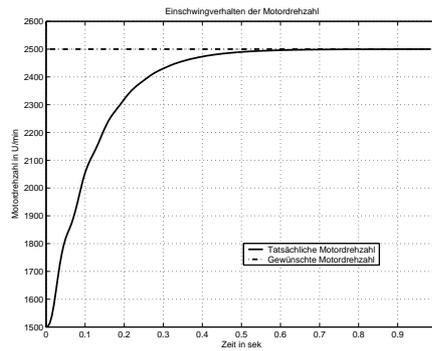


Abbildung 8: Einschwingvorgang der Motordrehzahl

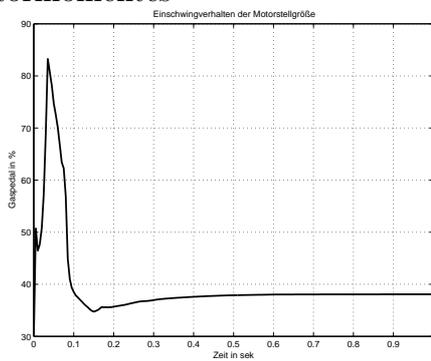


Abbildung 9: Einschwingvorgang der Motorstellgröße

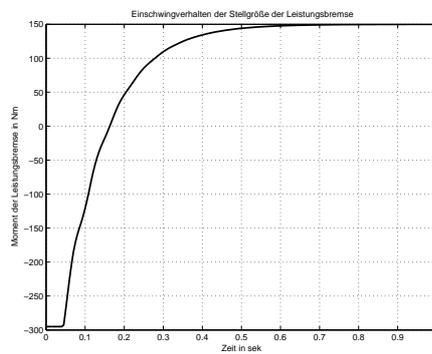


Abbildung 10: Einschwingvorgang der Stellgröße der Leistungsbremse

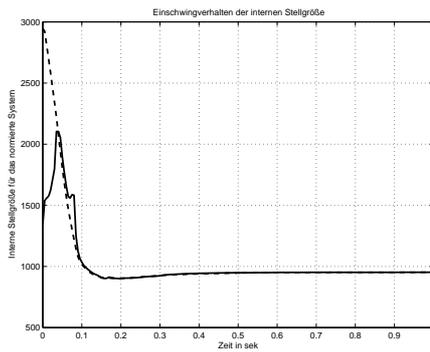


Abbildung 11: Einschwingvorgang der internen Stellgröße v

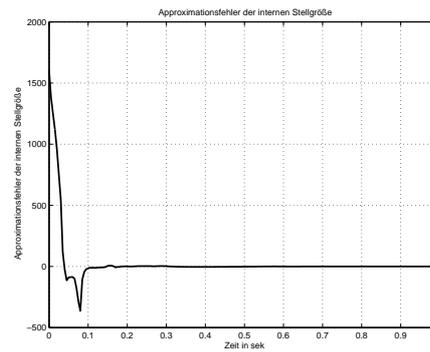


Abbildung 12: Approximationsfehler der lokalen approximierten Invertierung

5 Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde die Systemklasse EHS vorgestellt. Dabei handelt es sich um eine Systemklasse, welche für den praktischen Anwendungsfall sehr brauchbar ist. Viele reale und vor allem mechatronische System können in dieser Systemklasse angegeben oder durch diese Systemklasse approximiert werden. Wird eine Approximation durchgeführt, dann muss auch mit einem Approximationsfehler gerechnet werden. Damit muss die Regelung robust ausgelegt werden.

Zu diesem Zweck wird ein Theorem behandelt und bewiesen. Dabei zeigt sich dass auch ein nichtlinearer optimaler L_2 Regler ein gewisses Maß an Robustheit besitzt, welches *a priori* abgeschätzt werden kann. Diese Maß entspricht im linearen Fall exakt einer Phasenreserve von mindestens 60° . Damit eignet sich der optimale L_2 Regler auch für unsichere Systeme.

Zum Schluss wird als Beispiel die Prüfstandsregelung gebracht, wobei für den Entwurf eines optimale L_2 Reglers der Ansatz der inversen Optimalität gewählt wird. Das Resultat zeigt dabei hinreichende Performance, sodass der entwickelte Regler als optimaler Regler angesehen werden kann. Wie an Hand eines Simulationsbeispiels gezeigt ist, ist die Robustheit des geschlossenen Systems gegenüber Eingangsstörungen hinreichend.

5.2 Ausblick

Die gezeigten Ergebnisse werden in Zukunft noch ergänzt, und die Regelung auch am realen System getestet. Außerdem wird noch eine weitere Regelungsaufgabe neben der Stabilisierung eines Arbeitspunktes betrachtet werden. Ein dynamischer Prüfstand eignet sich vor allem für die Simulation von dynamischen Belastungsfällen. Dazu müssen bestimmte und gegebene Trajektorien von Drehzahl und Moment nachgefahren werden. Es entsteht somit eine Trackingaufgabe, welcher mittels robuster Invertierung gelöst werden

soll. Dabei werden die hier gezeigten Ergebnisse verwendet und für die neue Aufgabe adaptiert.

Literatur

- [1] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H-inf Control Via Measurement Feedback in Nonlinear Systems", *IEEE Trans. on Automatic control*, 37, pp. 1283-1293, 1992.
- [2] Van der Schaft, A. J., " L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control", *IEEE Trans. Automat. Control*, 37, pp. 770-784, 1992.
- [3] A. E. Bryson, Y. -C. Ho, "Applied optimal control", Wiley, ISBN 0-89116-228-3, New York, 1975.
- [4] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", Springer, ISBN 3-540-19916-0, Heidelberg, 1995.
- [5] E. Gruenbacher, L. del Re, "Output Tracking of Non Input Affine Systems using Extended Hammerstein Models", to be published at ACC 2005.
- [6] P. Kokotovic, H. K. Khalil, J.O'Reilly, "Singular Perturbation Methodes in Control, Analysis and Design", SIAM, London ISBN 0-89871-444-3, 1986.
- [7] M. Jankovic, R. Sepulchre, P. V. Kokotovic, "CLF based designs with robustness to dynamic input uncertainties" *Systems & Control Letters* 37, 1999.
- [8] E. Gruenbacher, P. Kefer, L. del Re, "Estimation of the Mean Value Engine Torque using an Extended Kalman filter", SAE world congress, 2005.
- [9] E. Gruenbacher, D. Alberer, L. del Re, M. Schinnerl, C. Ertl, "Dynamical Drag Torque Adaptation for Combustion Engines using High Gain Observer", SAE world congress, 2005.
- [10] E. Gruenbacher, P. Langthaler, G. Steinmaurer, del Re L., H. Kokal. "Adaptive inverse torque control of a diesel engine using adaptive mapping update", Proceedings of the SAE World Congress 2003.

Design eines virtuellen Sensors für Partikelmessung am Dieselmotor

Peter Langthaler, Daniel Alberer, Stephan Winkler, Luigi Del Re
Altenberger Straße 69, A-4040 Linz, Austria
{Peter.Langthaler, Daniel.Alberer, Stephan.Winkler, Luigi.DelRe}@jku.at

Kurzfassung

Immer strengere Abgasvorschriften zwingen die Automobilhersteller ihre Motor-, Partikelfilter- und Katalysatorsteuerungen zu optimieren. Dies kann entweder durch heuristische Verfahren, oder durch eine Erfassung der Zielgrößen geschehen, sodass die heutigen Vorsteuerungen durch Regler ersetzt werden können. Da der Einsatz von Sensoren einiger essentieller Zielgrößen (vor allem der Abgaskomponenten) in kommerziellen Kraftfahrzeugen oftmals nicht möglich ist, weil sie zu teuer, zu ungenau sind, oder eine zu kurze Lebensdauer aufweisen.

Als Vorgehensweise erscheint es sinnvoll einen virtuellen Sensor für Emissionen am Prüfstand zu entwickeln, an dem Messungen leicht möglich sind, und ihn dann im Fahrzeug einzusetzen. Des Weiteren ist es auch möglich diese Sensoren für Fehlerdetektion zu verwenden oder für die Kompensation gewisser Nachteile üblicher Sensoren (z.B. Kreuzempfindlichkeit).

Aufgrund der komplizierten Natur des Verbrennungsprozesses mit zugehöriger Generierung der Emissionen gibt es keine „first principle“ Modelle mit ausreichender Genauigkeit. Somit finden datenbasierte Modelle verbreiteten Einsatz. Hierbei handelt es sich hauptsächlich um universelle Approximatoren (z.B. Neuronale Netzwerke, bilineare Systeme) welche üblicherweise Information ordnen können, aber keine hinterlegte Modellmuster detektieren. Das drückt sich in einer sehr bescheidenen Extrapolations-, aber teilweise sogar minderwertigen Interpolationsfähigkeit aus, die sich auf Grund formaler Elemente leicht erklären lässt.

In dieser Arbeit beschreiben wir einen anderen, vielversprechenden Weg, der im Wesentlichen aus einer Strukturidentifikation (oder –approximation) im Funktionen- und nicht im Parameterraum besteht. Dazu wird Genetische Programmierung verwendet. Prinzipiell kann somit ein aussagekräftiges physikalisches Muster erkannt werden. In der Praxis hat sich jedoch gezeigt, dass es vorteilhaft ist, Vorwissen in diese Modellbildung einfließen zu lassen und so die Freiheitsgrade einzuschränken.

Ziel dieser Arbeit ist es nun physikalisches Vorwissen mit genetischen Programmen (welche rein datenbasiert sind) zu kombinieren und so Sensoren für Partikeln an einen PKW Dieselmotor zu entwickeln.

Im ersten Abschnitt wird zuerst ganz allgemein die Problemstellung von Emissionen und virtuellen Sensoren beschrieben. Danach wird die Sensordesign-Methode erklärt mit den zugehörigen Ergebnissen, evaluiert durch Opazitätsmessungen (Abgastrübung) auf einem Prüfstand.

1 Einleitung

1.1 Emissionen

Dieselmotoren als Antriebsquelle für Personenkraftwagen erlangen besonders im europäischen Raum immer größere Beliebtheit. Die Hauptgründe hierfür sind das bereits bei niedrigen Drehzahlen hohe Drehmoment und der sparsame Kraftstoffverbrauch. Für Nutzkraftwagen ist er durch seinen Verbrauchsvorteil gegenüber anderen internen Verbrennungskraftmaschinen schon seit langer Zeit die dominierende Antriebsform. Allerdings trägt der Dieselmotor somit auch nicht unbedeutend zur Umweltbelastung bei. Vor allem die Stickoxid- und Partikelemissionen sind ein Kritikpunkt, weshalb hoher Aufwand zur Reduktion getroffen wird. Die Auflagen der Gesetzgebung werden sukzessive verschärft, weshalb Emissionen mit Sicherheit noch eine Zeit lang ein wichtiges Themengebiet bleiben wird.

Das Motormoment kann bereits mit einer für die Regelung ausreichenden Genauigkeit geschätzt werden. Wäre nun noch zusätzlich das Emissionsverhalten bekannt, so könnte eine optimale Regelung des Motors durchgeführt werden. Weiters könnte die Regenerationsstrategie des Partikelfilters angepasst werden. Eine serienreife Sensorik ist allerdings zum heutigen Zeitpunkt noch nicht einsatzfähig, weshalb Anstrengungen für eine Modellierung getroffen werden. Obwohl die NO_x-Formierung weitestgehend verstanden ist (Zeldovich-Mechanismus), ist die Berechnung in Echtzeit während des dynamischen Motorbetriebs noch zu ungenau um für die Regelung verwertbar zu sein. Bei Ruß ist die Situation noch bedeutend schwieriger. Man unterscheidet zwei Vorgänge, einerseits die Rußbildung und auf der anderen Seite Rußoxidation, welche „konkurrierend“ während des Verbrennungszyklus auftreten. Dies hat zur Folge, dass der gebildete Rußanteil fast zur Gänze wieder oxidiert wird [1] (siehe Abbildung 1). Die Schwierigkeit liegt nun darin, dass man im Abgas nur die Differenz messen kann, wobei beide Phänomene höchst nichtlinear sind.

Die bisher in der Literatur vorgestellten Modelle beschränken sich auf eine Darstellung des stationären Verhaltens. Um eine hohe Genauigkeit zu erhalten ist

der Aufwand enorm. Trotzdem kann man solche Modelle nicht dazu verwenden, um die Emissionen des dynamischen Betriebs abzubilden. Durch die Verwendung dynamischer Modelle ist eine „Online“-Prädiktion der Emissionen während des transienten Betriebs des Verbrennungsmotors bereitzustellen.

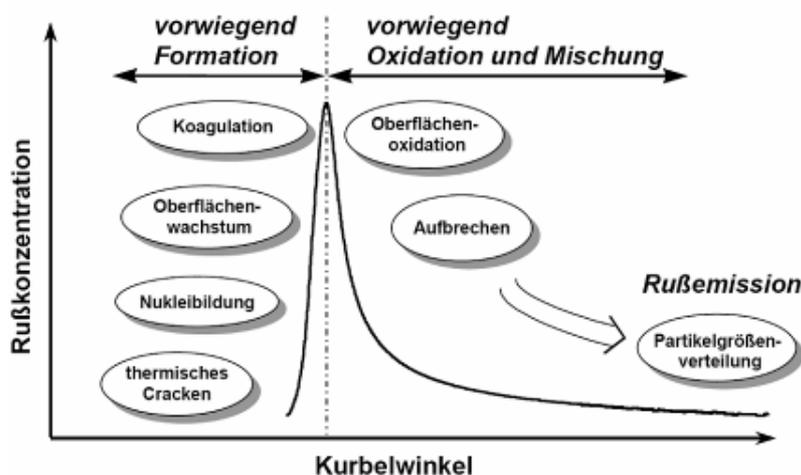


Abbildung 1: Rußbildung und -oxidation im Dieselmotor [1]

Schon in früheren Arbeiten [2] und insbesondere in [3] wurden datenbasierte dynamische Modelle für die Entstehung von NO_x Emissionen und Opazität eines Dieselmotors, basierend auf Genetischem Programmieren, entwickelt. Es hat sich hierbei herausgestellt, dass diese Methoden noch nicht „straight-forward“ eingesetzt werden können, da die sehr komplexe Dynamik der Rußentwicklung einen gewissen Anteil an Vorwissen in Form von physikalischen Zusammenhängen benötigt.

1.2 Virtuelle Sensoren

Da virtuelle Sensoren das Verhalten des Referenzsystems nachbilden müssen, sind sie im Wesentlichen Modelle des Systems. Die naheliegende Vorgehensweise für die Modellermittlung ist deshalb in vielen Fällen die Aufstellung der physikalischen Gleichungen sowie die Bestimmung der entsprechenden Messungen. Eine solche Methode hat auch den Vorteil, dass keine Unterscheidung zwischen Validation und Extrapolation nötig ist: ist das Modell „richtig“, so ist es dies im gesamten Gültigkeitsbereich der physikalischen Annahmen, welcher meist sehr viel größer ist, als der Wertebereich der für die Identifikation herangezogenen Daten.

Es ist aber eine allgemeine Erfahrung, dass diese Ansätze nur für eine beschränkte Klasse technischer Systeme möglich sind, und dies auch nur näherungsweise, da wesentliche Information in den „Schmutzeffekten“ (z.B. Reibungen, Quervereinflüsse usw.) enthalten ist. Aus diesem Grund hat es große Anstrengungen gegeben, rein datenbasierte Verfahren zu entwickeln. Am

einfachsten sind statistische Verfahren, wie es beispielsweise für die Nachbildung von NO_x in [4] verwendet wurde. Die bekanntesten beruhen aber auf die Verwendung von neuronalen Netzwerken, deren „universellen“ Approximationseigenschaften durch das Stone-Weierstrass-Theorem nachgewiesen werden können [5]. Es existieren aber andere Klassen mathematischer Funktionen, so zum Beispiel die bilinearen Systeme, die dieselben Forderungen erfüllen [6]. Bei diesen Ansätzen geht es darum, das Ein-/Ausgangsverhalten eines zu modellierenden Systems (1.1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u)\end{aligned}\tag{1.1}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, durch ein Ersatzsystem (1.2) nachzubilden:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \Phi(z,u) \\ y_z &= \eta(z,u)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Idealerweise gilt: $y_z(t) = y(t) \forall u(t) \in U$, wobei U eine Menge erlaubter Eingangswertverläufe (zum Beispiel mit beschränkter Maximalbetrag und endlicher Dauer) ist. In der Praxis lässt sich dieser ideale Zustand nicht erreichen, aber beliebig gut approximieren, allerdings mit dem Preis einer rasant zunehmenden Dimension von z . Um die Parameter des hochdimensionalen Ersatzmodells zu bestimmen benötigt man entsprechend viele Messpunkte mit ausreichendem Informationsgehalt.

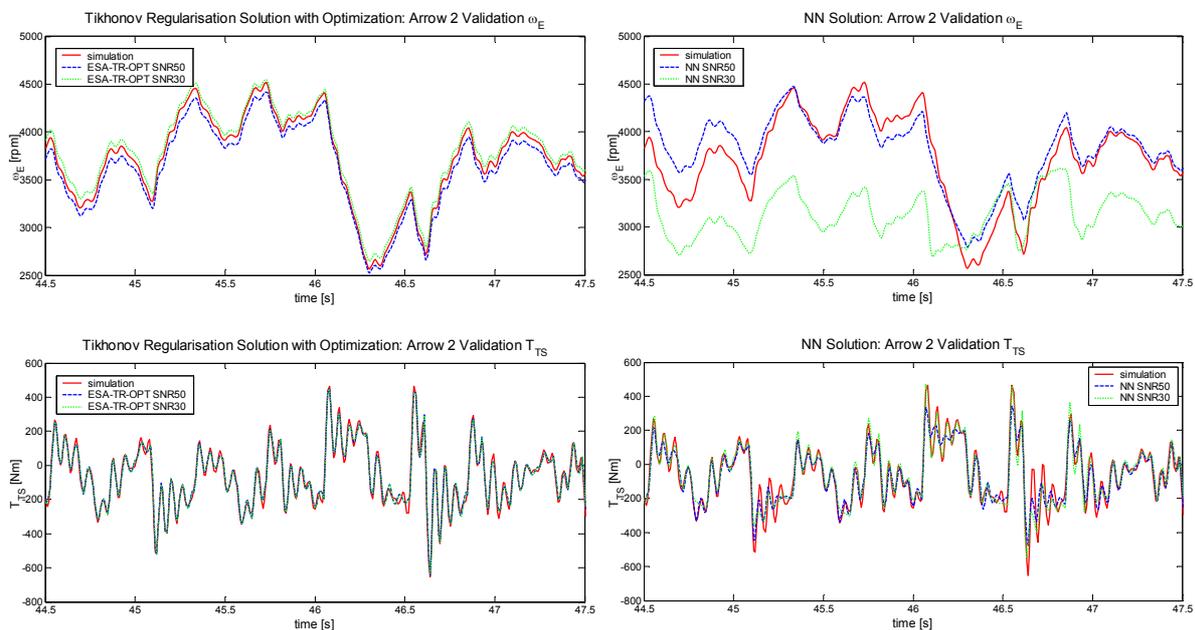
Dies lässt sich leicht verstehen, bedenkt man dass die zur Bildung von $\Phi(z,u)$ und von $\eta(z,u)$ verwendeten Funktionen die mathematischen Eigenschaften besitzen, die eine universelle Approximation erlauben, aber im echten System meist entweder gar nicht (zum Beispiel Sigmoiden) oder „an der falschen Stelle“ vorkommen (bilineare Realisierungen bilden z.B. alle Nichtlinearitäten auch vom Driftterm in den Eingangsterm ab). Je weiter die echte interne Systembeschreibung von deren „universellen“ Nachbildung abweicht, umso mehr Datenbedarf ist erforderlich, um Fehler nicht nur im Extrapolations-, sondern auch im Interpolationsbedarf zu vermeiden.

Es ist deshalb nahe liegend, sich entweder um Ansätze zu bemühen welche die universellen Approximationseigenschaften behalten, aber auf Strukturen und Funktionen beruhen (die sogar eine endlich dimensionale Darstellung vieler Systeme erlauben) [7], oder aber das Thema der „richtigen“ Modellbildung auch aus einer datenbasierten Sicht anzugehen.

Eine mögliche Lösung des ersten Weges wird in [8] durch Extended State-Affine Systems (ESA) beschrieben. Dabei wurde folgende zeitdiskrete Systemklasse (1.3) betrachtet:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Nf(u(k), Cx(k)) \otimes x(k) + Bu(k) + Mg(u(k)) \\
 y(k) &= Cx(k)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Diese Klasse enthält zwar die bilinearen Systeme als Unterklasse, behält also die universellen Approximationseigenschaften bei, enthält aber eine Nichtlinearität im Driftterm, wodurch endliche Darstellungen vieler üblicher nichtlinearer Modellklassen möglich sind. Bei der experimentellen Untersuchung [9] zu Klasse (1.3) zeigten sich geringe Vorteile im Vergleich zu künstlichen Neuronalen Netzwerken (ANN) für die Identifikation, aber deutliche Vorteile bei der Extrapolation. Abbildung 2 zeigt den Vergleich zwischen einem ESA und einem ANN Modell bei der Simulation eines Prüfstands systems.



*Abbildung 2 Links: Prüfstandsmodell – Vergleich Messung mit ESA Modell
Rechts: Prüfstandsmodell – Vergleich Messung mit ANN Modell*

In dieser Arbeit geht es um einen weiteren Schritt: Es wird keine Struktur angenommen, sondern gemeinsam mit den Parametern aus den Daten bestimmt. Anders als selbst-organisierende Ansätze geht es hier um eine Suche im Funktions- und nicht im Parameterraum.

2 Entwurf virtueller Sensoren mittels GP

Damit der zu entwickelnde virtuelle Sensor auch wirklich online einsetzbar ist, erscheinen folgende Forderungen für die Modellierung sinnvoll:

1. Geringer Online-Rechenaufwand (Im Gegensatz hierzu steht die sehr komplexe und aufwendige Offline-Bestimmung der Modellstruktur mit Parametern, welche den Einsatz von Adaptionalgorithmen bis jetzt fast unmöglich gemacht hat).
2. Keine Fehler-Akkumulierung (Autoregressive Modelle neigen aufgrund nicht modellierter nichtlinearer Effekte zum Aufintegrieren des Fehlers).
3. Vollständigkeit (sodass möglichst alle relevanten Effekte abgebildet werden).
4. Extrapolationsfähigkeit: Der Fehler bezüglich Validationsdaten (andere Wertebereiche als die Identifikationsdaten) soll möglichst „klein“ sein.

Die erste Bedingung wird von den meisten generierten Modellen erfüllt, für die zweite Bedingung wurde dazu übergegangen, nur FIR Strukturen zu verwenden, das heißt der Modellausgang hängt nur von Modelleingängen, aber nicht von früheren Modellausgängen ab.

Die Frage der Vollständigkeit klärt sich bei der vorgestellten Methode von selbst. Vorausgesetzt der Datensatz enthält alle nötigen Kanäle, dann versucht die Methode die wichtigsten Verteilungen zu identifizieren und sie analytisch (auch durch deren Kombinationen) zu beschreiben. Somit entsteht automatisch schrittweise ein Modell, welches immer die am meisten relevante Information zuerst verwendet.

Die letzte Forderung ist schwer analytisch zugänglich, was aber ihre zunehmend große Bedeutung nicht verringert. Prüfen lässt sich dies vor allem experimentell (siehe [11] den Silverbox-Ansatz).

Abbildung 3 zeigt das Schema des Entwurfsprozesses eines virtuellen Sensors, welches aus Struktur- und Parameteridentifikation besteht. Im Wesentlichen gibt es einen Suchbaum, dessen Elemente die Funktionalbasis darstellen (welche analytische Zusammenhänge werden zugelassen), eine Evaluierungsfunktion (z.B. Akaike) und eine Schleife für die Optimierung, welche die Funktional Kandidaten auf ihre Eignung testet. Somit bestimmt das System Kandidaten für Modelle und testet sie mit den zur Verfügung stehenden Daten. Hierbei ist es wichtig zu erwähnen, dass die Parameteridentifikation und die Modellevaluierung an unterschiedlichen Datensätzen durchgeführt werden, damit das Modell evaluiert werden kann.

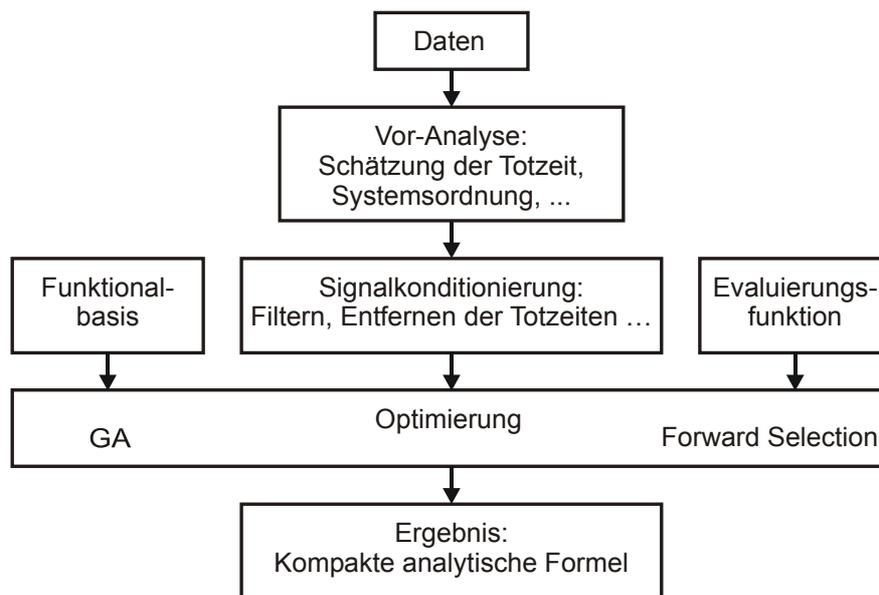


Abbildung 3: Schema Sensor-Design

GP ist hierbei nicht die einzige Modellierungsvariante, beispielsweise wäre es auch möglich statistische Methoden zu verwenden. Jedoch hat sich gezeigt, dass solche Methoden im praktischen Einsatz weniger verlässlich sind. Falls Standard-Autoregressionsmodelle Verwendung finden ist eine Strukturinformation nötig um die Parameteridentifikation durchzuführen.

Der Aufwand und das Potential dieser Methode hängen stark von der Strategie der Generierung der Kandidaten und deren Bewertung ab. An der Johannes Kepler Universität Linz wurde eine Identifikationsprozedur basierend auf genetischer Programmierung (GP) entwickelt. Hierbei generiert GP dynamisch Modelle, indem es Basisfunktionen kombiniert und unterschiedliche Modellpopulationen für genetische Eignung testet.

Basierend auf der Theorie des Genetischen Algorithmus (GA) arbeitet GP durch Imitation unterschiedlicher Aspekte der natürlichen Evolution, um eine Lösung zu finden welche eine Kostenfunktion maximiert (oder minimiert). Eine Population von Lösungskandidaten entwickelt sich über viele Iterationsschritte, auch „Generationen“ genannt, unter Verwendung von evolutionären Operatoren und einem „survival of the fittest“ Schema. Der Hauptunterschied zwischen GAs und GP besteht darin, dass ein GA als Lösung des vorliegenden Problems eine Zeichenkette bzw. ein Array von Integer-Werten liefert, während im Zusammenhang mit GP das Ziel des Optimierungsprozesses darin besteht, ein Computerprogramm oder eine Formel zu finden.

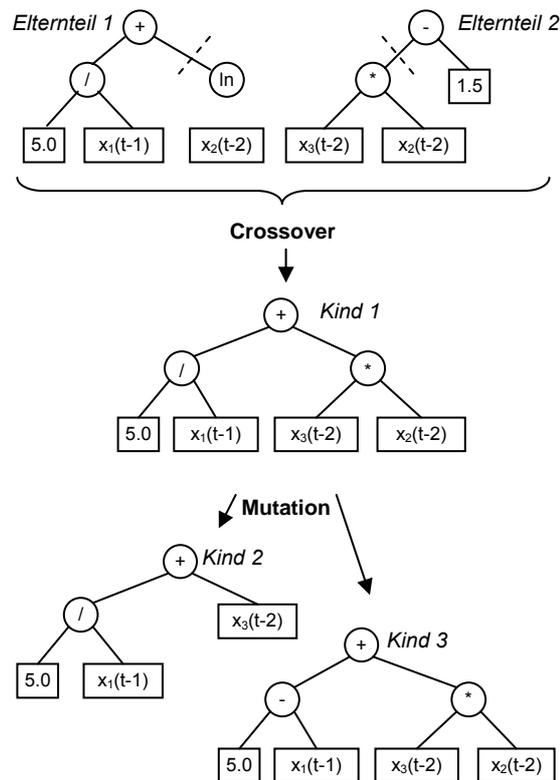


Abbildung 5: Crossover von den Elternteilen 1 und 2 führt zu Kind 1, Mutation: Kind 2 und Kind 3 sind mögliche Mutanten von Kind 1

Die Rekombination, graphisch angedeutet in Abbildung 5, entspricht einer Mischung der genetischen Information zweier Bäume, wobei die Äste zufällig aufgetrennt und an dieser Stelle mit dem Ast des anderen Baumes neu verknüpft werden. Somit entsteht ein neues „Kind“. Im Kontext von genetischen Algorithmen bedeutet Mutation, dass ein Lösungskandidat zufällig geändert wird und so ein neues Individuum entsteht. Hierbei kann ein Funktionssymbol geändert oder gelöscht, oder auch der Wert einer Konstante oder eines Zeitoffsets geändert werden. Diese Vorgehensweise fördert nicht unbedingt die spezifische Struktur, hilft allerdings, die genetische Vielfalt zu erhalten.

Detaillierte Informationen bezüglich der Implementation des Ansatzes und des verwendeten erweiterten Genetischen Algorithmus sind in [13], [14, 15] und [16] zu finden. Der für die Identifikation verwendete Algorithmus SASEGASA („Self Adaptive SEgregative Genetic Algorithm with Simulated Annealing) stellt eine bereits sehr ausgereifte Erweiterung eines Standard GA dar und wird im Zuge der hier beschriebenen Untersuchungen als dem GP-Prozess zugrundeliegender Algorithmus eingesetzt.

Ohne Einschränkungen des Lösungsraumes würde dies die Methode sehr verlangsamen und möglicherweise zu falschen Lösungen konvergieren. Ein wichtiges Element stellt hierbei die Auswahl der Funktionenbasis, der erlaubten Modellordnung, Baumtiefe und maximal möglicher Totzeiten dar.

Zusätzlich sollte noch wie bei jeder anderen Identifikation eine Datenaufbereitung bestehend aus Filterung, Downsampling, Totzeitbestimmung bzw. –eliminierung und einer Kompensation der Sensordynamik erfolgen:

Filterung ist zur Reduktion der Modellordnung eines datenbasierten Modells und für die Verminderung des Rauschanteils wichtig. Dies geschieht mittels einer Analyse des Leistungsspektrums zur Bestimmung der Grenzfrequenz automatisch oder durch den Anwender.

Die Down-Sampling Rate kann mit Hilfe der Grenzfrequenz gewählt werden. Diese Reduktion des Trainings-Datensatzes führt zu einer drastischen Reduktion des Rechenaufwands.

Falls große Totzeiten vorab nicht berücksichtigt werden vergrößert sich dadurch die Modellordnung ohne dass dadurch mehr Information zu gewinnen ist.

Bei Messungen mit Sensoren unterschiedlicher Dynamik sollte versucht werden, diese Abweichungen zu kompensieren, da ansonsten Fehler bei der Identifikation der Modelldynamik auftreten. Insbesondere Temperatursensoren in Gasen weisen eine hohe Ansprechzeit auf. Falls deren Übertragungsfunktion $G(s)$ (2.1) bekannt ist und $PT1$ Verhalten aufweist, besteht eine Möglichkeit in der Verschiebung („Kompensation“) des Pols mittels $H(s)$ (2.2). Mit $T_N < T_d$ kann eine realisierbare Differentiation der Messung durchgeführt werden [17].

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT_d} \quad (2.1)$$

$$H(s) = \frac{1 + sT_d}{1 + sT_N} \quad (2.2)$$

3 Ergebnisse

Alle dargestellten Abbildungen der verschiedenen Methoden zeigen Validationsdaten. Um einen objektiven Vergleich zu bieten (insbesondere bei GP – ANN) wurde Wert auf gleiche Voraussetzungen bei der Identifikation gelegt, d.h. selber Identifikationsdatensatz, Eingangsvariablen, Abtastzeit, uvm.

Die ersten Tests mittels GP zur Identifikation von Emissionen wurden an der JKU für NOx durchgeführt [2]. Die Entstehung von Stickoxiden ist eine gut bekannte

Thematik. Hierfür ist auch die Arbeit [4] besonders herauszuheben. Unterschiedliche Messungen eines Standardzyklus (FTP) mit Standard-ECU wurden zur Erzeugung von Datensätzen für Identifikation und Validation durchgeführt. In diesen Experimenten standen die Messdaten der Motorelektronik (Frischluffmasse, Ladedruck...) zur Verfügung. Zusätzlich wurde eine HORIBA Mexa 7000 für die Aufzeichnung der Emissionen verwendet.

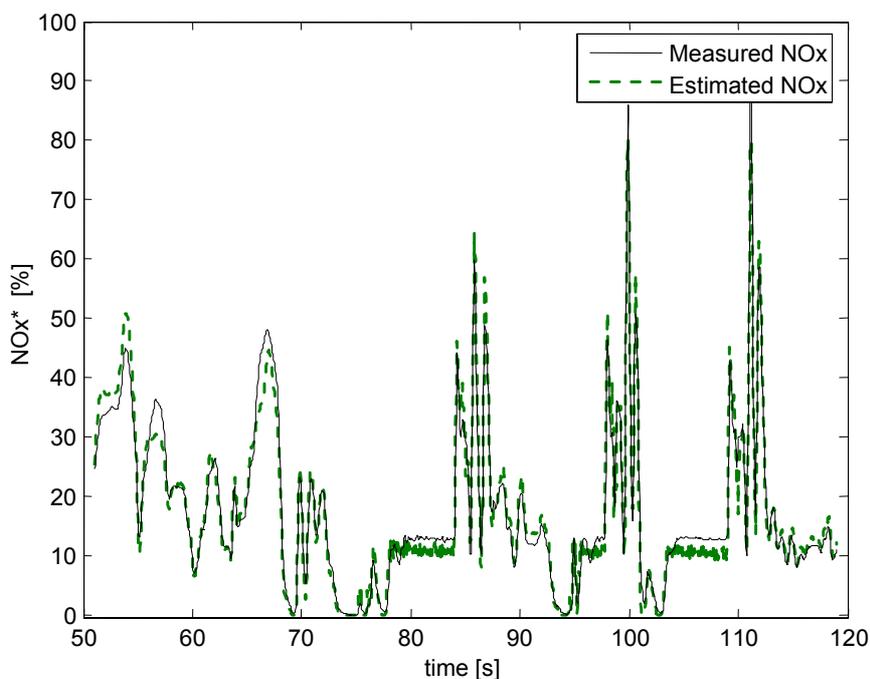


Abbildung 6: Vergleich einer Messung mit dem Ausgang eines virtuellen NOx Sensors

Abbildung 6 zeigt einen Ausschnitt der gemessenen und modellierten NOx Emissionen. Es hat sich gezeigt, dass die entwickelten Modelle eine sehr hohe Genauigkeit besitzen, wobei hier nur ein spezielles ECU Setup getestet wurde.

Basierend auf diesen guten Ergebnissen bei der NOx Modellbildung wurde versucht diese Vorgehensweise auch für die Rußbildung zu verwenden. Jedoch stellte sich hier heraus, dass ohne Einschränkungen im Suchraum, GP unter Verwendung von Standardrechnern nur sehr langsam zu annehmbaren Lösungen konvergierte. Deswegen erscheint es vom jetzigen Standpunkt sinnvoll, eine Strategie in zwei Schritten zu verwenden:

1. Zuerst wird eine Analyse von statischen Messungen durchgeführt, wobei Vorwissen und statistische Untersuchungen zu einem ersten statischen Modell führen. Der Vorteil solch eines Modells liegt im Wegfall des Einflusses der Sensordynamik. Dennoch kann dieses statische Modell den Anforderungen hochdynamischer Prozesse eines Verbrennungsmotors nicht genügen.
2. Somit ist im Anschluss an die statische Modellbildung mit Expertenwissen die GP Identifikation durchzuführen. Das statische Modell kann hiermit als

Initialisierung des GP oder als zusätzlicher Messkanal verwendet werden (siehe Abbildung 7).

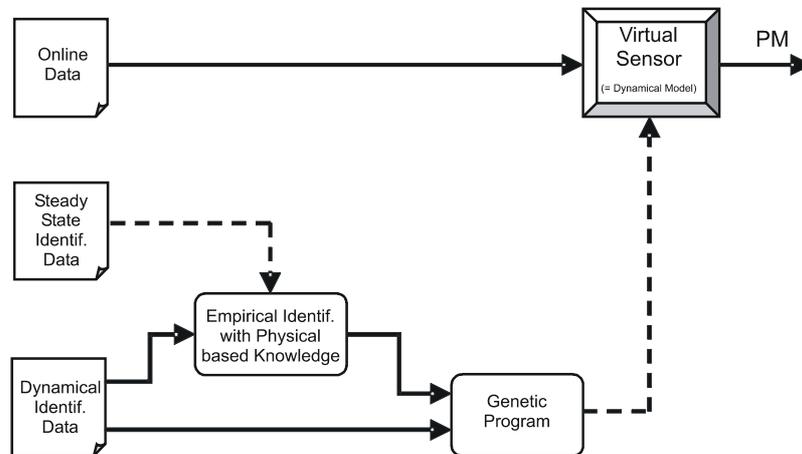


Abbildung 7: Identifikationsschema

Diese Vorgehensweise widerspricht der Philosophie von GP, da dort die freie Evolution im Vordergrund steht. Jedoch stellt aufgrund begrenzter Rechenleistung diese Zwei-Schritt Strategie einen annehmbaren Kompromiss dar.

Abbildung 8 zeigt den Design-Ablauf von statischem und dynamischem Modell angewendet auf eine dynamische Messung. Der GP erweitert hier das statische zu einem dynamischen Modells.

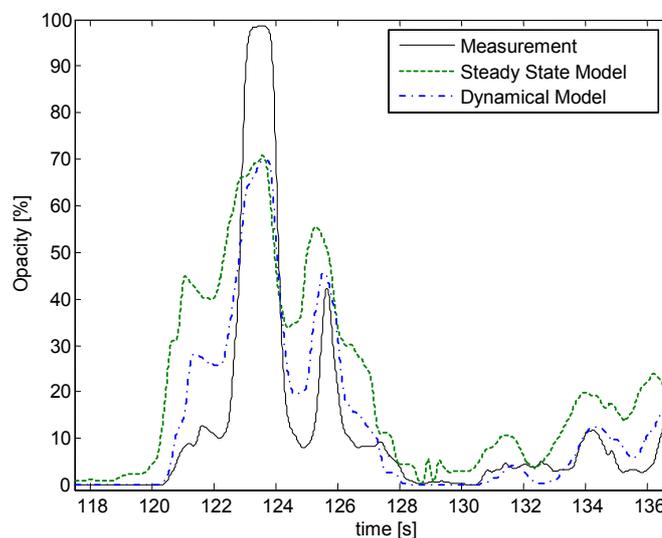


Abbildung 8: Vergleich statisches & dynamisches Modell

Für die Modellierung der Partikelemissionen wurden zunächst nicht nur ECU Messgrößen herangezogen, sondern auch der Maximalwert des indizierten Zylinderdrucks und Lambda des Luftsammlkastens.

Ausgehend von diesen Messkanälen wird das zugehörige stationäre Modell (3.1) als zusätzlicher Eingang für das dynamische Modell (3.2) und gleichzeitig auch als Initialwert für dessen Bestimmung verwendet.

$$\begin{aligned}
 20 \log(OP_{stat} + 1) = & a_1 \log(p_{CA}/a_2)/T_W - a_3 \log(a_4/p_{CA})/m_{air}^* \\
 & - a_5 p_{max}^*/m_E + a_6 ((m_f/a_7)/(p_{CA}/a_8)a_9)^{a_{10}} + a_{12} T_{CA}/p_{max}^* \\
 & - a_{13} (m_f/a_{14})/(T_{exh}/a_{15}) + a_{16} (n/a_{17})(m_f/a_{18})/(m_{air}^*/a_{19})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 OP_k = & m_{f,k-8} b_1 \frac{\sqrt{(T_{exh,k} - b_2)OP_{stat,k} b_3 - \sqrt{m_{air,k-8}^* b_4}}}{(U_{lin,k-7} - b_5) b_6 + OP_{stat,k-4} b_7} \\
 & \cdot \frac{SOFD_{k-2} b_8 - U_{lin,k-5} b_9 + m_{f,k-1}}{(T_{exh,k} - b_{10}) b_{11} + (p_{amb,k-1} - b_{12}) b_{13} + m_{air,k-8}^* b_{16}} b_{17} \\
 & \frac{(U_{lin,k-3} - b_{14}) b_{15}}{+ \sqrt{(p_{amb,k}^* - b_{18}) b_{19} - b_{20}}}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die zugehörigen Kanäle sind:

OP_k	Virtueller Sensor der Partikelemissionen
OP_{stat}	Stationärwert virtueller Sensor PM
m_f	Einspritzmenge (von ECU)
T_{exh}	Abgastemperatur (nach der Turbine)
T_W	Kühlwassertemperatur
m_{air}^*	Normierte Frischluftmasse
U_{lin}	Normierter Lambda Wert Luftsammelkasten
SOFD	Förderbeginn
p_{amb}^*	Normierter Atmosphärendruck
p_{CA}	Ladedruck
p_{max}^*	Normierter Maximalwert je Zyklus des Indizierdrucks

In Abbildung 9 wird der Vergleich von Sensor (3.2) mit einer Messung an einem Validationsdatensatz gezeigt. In weiterer Folge wurde ein virtueller Sensor erstellt, welcher nur Standard ECU-Messgrößen als Eingang verwendet.

Bis zum jetzigen Zeitpunkt finden hauptsächlich künstliche Neuronale Netze (ANN) bei der Emissionsmodellbildung Anwendung. Somit wird auch hier ein ANN als Referenz verwendet. Um einen möglichst fairen Vergleich zwischen ANN und GP zu gewährleisten wurde die Struktur des ANN durch Experimente bestimmt und die Anzahl der Parameter ähnlich dem GP gewählt. Dies führt zu einem ANN mit hyperbolischen und linearen Funktionen, 25 Knoten für einen Layer, zwei „Hidden Layer“ und natürlich denselben Eingangskanälen.

Abbildung 10 zeigt wiederum einen Ausschnitt aus einem FTP Zyklus mit dem Vergleich der virtuellen Sensoren mittels Standard ECU-Messgrößen. Erwähnt sei

hierbei, dass die Identifikation an einem vom Zyklus weitgehend differierenden Datensatz erfolgte. Abbildung 11 stellt die Fehlerverteilung während des gesamten Zyklus dar. Der Fehler mittels GP ist beinahe symmetrisch, was für ein gutes Modell spricht. Der Großteil der Abweichung von GP bleibt in einem Bereich von 5% im Gegensatz zu ANN mit 15%.

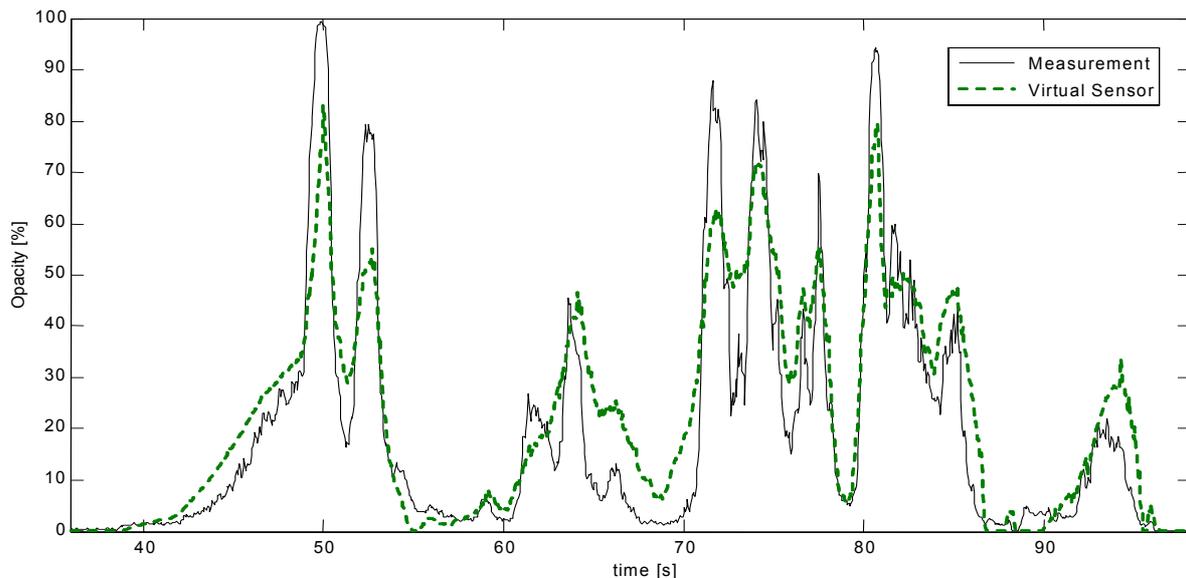


Abbildung 9: Validation Opazität

Vergleicht man die Entwicklung der beiden Schätzer mit der Messung dann ist eine Bewertung der Fehler von großem Interesse. Ein sehr wichtiger Indikator ist hierbei der kumulierte Fehler (Integralfehler). Abbildung 10 rechts zeigt diesen Verlauf. Es ist klar ersichtlich, dass beide Schätzer (GP und ANN) zu stationären Werten konvergieren, was dem mittleren Fehler entspricht.

	MAXIMALER FEHLER %	KUMULIERTER FEHLER %
GP	55,1	5,6
ANN	93	-60,8

Tabelle 1: Fehler GP – ANN

Der kumulierte Fehler von GP beträgt lediglich 5,6% im Gegensatz zu -60,8% bei ANN. Auch der größte absolute Fehler ist bei ANN deutlich höher als bei GP (siehe Tabelle 1).

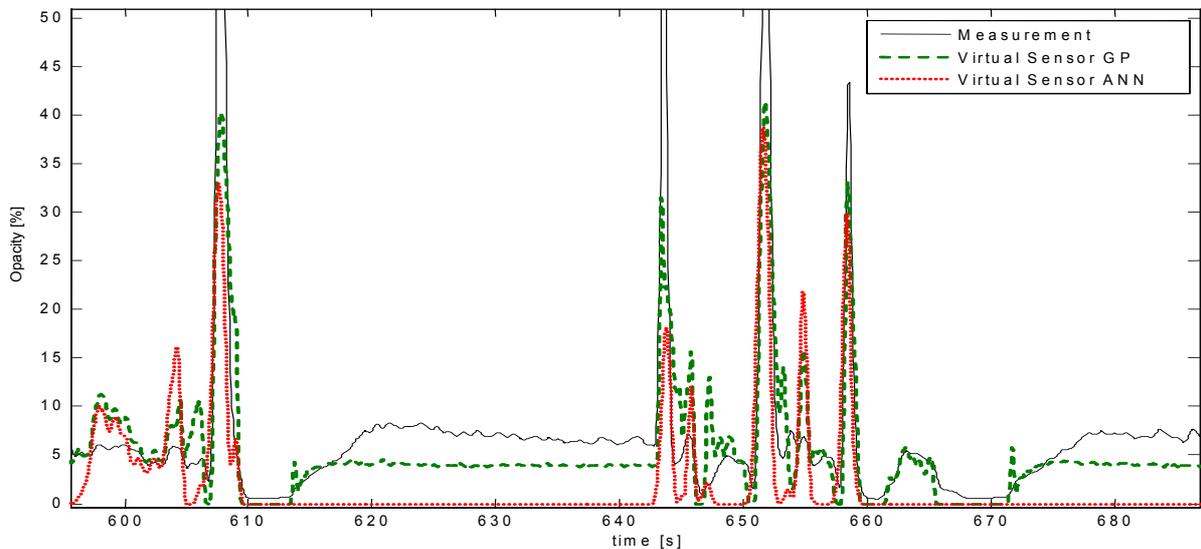


Abbildung 10: Vergleich GP – ANN (Modell mit Standard ECU-Messgrößen)

4 Schlussfolgerungen

Trotz anfänglicher Skepsis führt die Identifikation von Emissionen mittels GP zu sehr guten Ergebnissen. Die Erklärung hierfür liegt darin, dass es sich bei GP um ein systematisches Testen von Hypothesen handelt. Man stellt eine Hypothese in Form einer mathematischen Beziehung auf. Besteht Relevanz zu den Identifikationsdaten, so wird die Formulierung beibehalten; Anderenfalls wird sie durch eine neue ersetzt. Der nötige Rechenaufwand durch Struktur- und Parameteridentifikation ist zwar hoch, stellt aber einen winzigen Bruchteil der Arbeit dar, die eine physikalische Modellbildung erfordern würde.

Dadurch stellt die vorgestellte Methode praktisch einen Kompromiss zwischen klassischen „first principle“ – Modellen und datenbasierter Modellbildung dar. Genau wie bei physikalischer Modellbildung werden analytische Beziehungen ermittelt, welche zumindest teilweise das Systemverhalten wiedergeben. Das erhaltene Modell kann für Reglerentwicklung verwendet werden, was mit auf Thermodynamik basierenden Prozessmodellen aufgrund deren Komplexität nicht möglich ist.

Physikalisches Vorwissen hat dennoch eine zentrale Bedeutung, weil erst die Auswahl der richtigen Kanäle und möglicher Funktionen der vorgestellten Methode zum Durchbruch verhelfen.

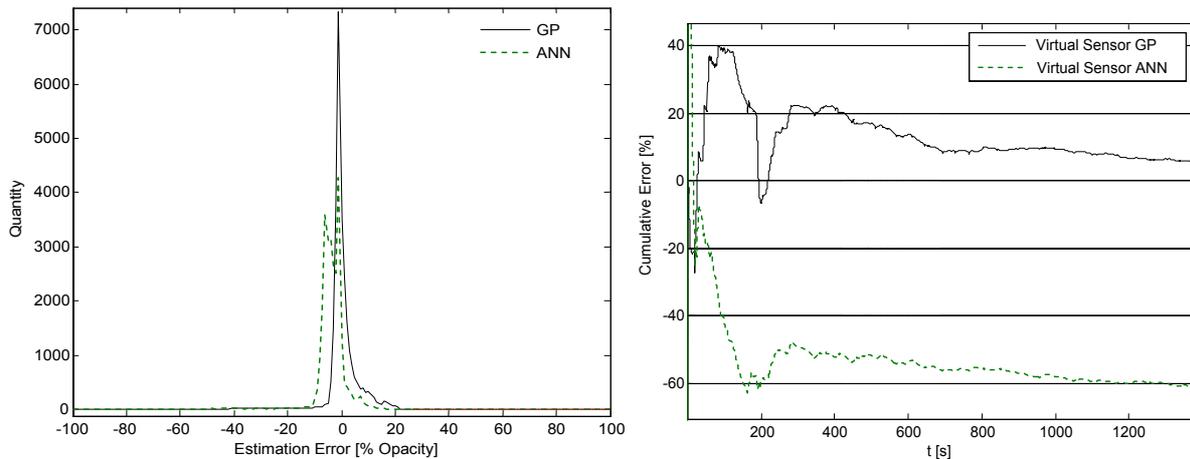


Abbildung 11 Links: Fehlerverteilung von GP und ANN bei einem FTP Zyklus
Rechts: Verlauf des kumulierten Fehlers GP, ANN

Die Zwei-Schritt Strategie stellt einen adäquaten Kompromiss zwischen der eigentlichen Idee von GP und klassischer Identifikation dar. Mit der derzeit zur Verfügung stehenden Rechenleistung muss in diesem Fall von einer reinen GP Lösung abgesehen werden.

Es gibt zur Zeit noch Einschränkungen, die in weiteren Arbeiten behandelt werden sollen:

1. Wie bei jeder andern Identifikation hat sich gezeigt dass auch GP bei zu großer Parameterzahl zu Overfitting neigt. Deswegen sollten auch hier noch experimentell unterschiedliche Komplexitäten getestet werden.
2. Die Durchführung einer GP Identifikation liefert bei jedem Durchlauf eine unterschiedliche Lösung (Modellstruktur). Eine zukünftige Arbeit könnte sich mit der Bestimmung eines „Modellkerns“ beschäftigen, indem Lösungen welche aus identischen Initialbedingungen entstanden sind, verglichen werden.

Referenzen

- [1] M. Hopp, "Untersuchungen der Rußoxidation unter dieselmotorischen Randbedingungen," in *Fakultät für Maschinenwesen*, PhD: Rheinischen - Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2001.
- [2] L. Del Re, P. Langthaler, C. Furtmueller, S. Winkler, and M. Affenzeller, "NOx Virtual Sensor Based on Structure Identification and Global Optimization," in *SAE*. Detroit: SAE, 2005.

- [3] D. Alberer, L. Del Re, S. Winkler, and P. Langthaler, "Virtual Sensor Design of Particulate and Nitrid Oxide Emissions in a DI Diesel Engine" in *SAE*. Capri, 2005.
- [4] U. Gärtner, "Die Simulation der Stickoxid-Bildung in Nutzfahrzeug-Dieselmotoren" PhD: TU Darmstadt, 2001.
- [5] D. Schröder, "Erstellung eines Gesamtfahrzeugmodells für EOBD-Untersuchungen" am *Institut for Design and Control of Mechatronical Systems*. Linz: Kepler University Linz, 2002.
- [6] A. J. Krener, "Bilinear and nonlinear Realizations of Input-Output maps," *Siam Journal of Control*, vol. 13, pp. 827-833, 1975.
- [7] R. Starkl and L. Del Re, "Finite Order Representations of Infinite Dimensional Bilinear Models of Nonlinear Systems," presented at Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, 2003.
- [8] A. Schrempf, "Identification of Extended State-Affine Systems" am *Institut for Design and Control of Mechatronical Systems*, PhD. Linz: Kepler University Linz, 2004.
- [9] C. Märzinger, "Nonlinear Identification: Extended State Affine Systems" am *Institut for Design and Control of Mechatronical Systems*, Master. Linz: Kepler University Linz, 2005.
- [10] L. Ljung, *System Identification - Theory For the User*. Upper Saddle River, N.J.: PTR Prentice Hall, 1999.
- [11] J. Schoukens, J. G. Nemeth, P. Crama, Y. Rolain, and R. Pintelon, "Fast Approximate Identification of Nonlinear Systems," *Automatica*, vol. 39, pp. 1267-1274, 2003.
- [12] W. Langdon and R. Poli, *Foundations of Genetic Programming*. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 2002.
- [13] S. Wagner and M. Affenzeller, "HeuristicLab: A Generic and Extensible Optimization Environment," presented at Proceedings of the International Conference on Adaptive and Natural Computing Algorithms (ICANNGA), 2005.
- [14] S. Winkler, M. Affenzeller, and S. Wagner, "Identifying Nonlinear Model Structures Using Genetic Programming Techniques," *Cybernetics and Systems*, pp. 689-694, 2004.
- [15] S. Winkler, M. Affenzeller, and S. Wagner, "New Methods for the Identification of Nonlinear Model Structures Based Upon Genetic Programming Techniques," presented at Proceedings of the 15th International Conference on Systems Science, 2004.
- [16] M. Affenzeller and S. Wagner, "SASEGASA: A New Generic Parallel Evolutionary Algorithm for Achieving Highest Quality Results," *Journal of Heuristics - Special Issue on New Advances on Parallel Meta-Heuristics for Complex Problems*, vol. 10, pp. 239-263, 2004.
- [17] C. De Petris, S. Diana, V. Giglio, and G. Police, "Some Problems in the Improvement of Measurement of Transient Emission," in *SAE*. Detroit, 1994.

Verteilt-parametrische PCHD-Systeme

KURT SCHLACHER UND HELMUT ENNSBRUNNER

email: kurt.schlacher@jku.at

helmut.ennsbrunner@jku.at

Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

Johannes Kepler Universität Linz

Altenbergerstraße 69, 4040 Linz

Zusammenfassung

PCHD-Systeme haben sich bei der physikalisch orientierten Modellierung konzentriert-parametrischer Systeme bereits sehr bewährt, da diese Modellierung oftmals den Entwurf der Regelung sehr vereinfacht. Dieser Beitrag stellt eine mögliche Übertragung dieses Ansatzes vom konzentriert auf den verteilt-parametrischen Fall vor. Diese Erweiterung erfordert den Ersatz wohleingeführter Strukturen, wie Zustandsraum, Eingangs- oder Ausgangsraum, etc., durch neue differentialgeometrische Strukturen wie Bündel und Jet-Mannigfaltigkeiten. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, man gewinnt eine Beschreibung verteilt-parametrischer Systeme, die die Grundideen des konzentrierten Falles so gut als möglich kopiert und damit viele Vorteile dieser Beschreibungsform erhält.

1 Einleitung

Die Klasse der „Port Controlled Hamiltonian Systems with Dissipation“, oder kurz PCHD-Systeme, hat sich zur Beschreibung konzentriert-parametrischer Systeme insbesondere dann bewährt, wenn physikalische Aspekte hervorgehoben werden sollen. Denn zusätzlich zum mathematischen Modell erhält man eine Beschreibung struktureller Eigenschaften und dissipativer Effekte. Darüber hinaus können Elemente dieser Systemklasse mit ihren Toren im Sinne der Netzwertheorie einfach zu komplexen Modellen kombiniert werden. Vom Standpunkt der Regelungstheorie ist von Interesse, dass man auf zahlreiche Entwurfsverfahren für diese Klasse nichtlinearer dynamischer Systeme zurück greifen kann. Der interessierte Leser findet z.B. in [6] ausführliche Informationen hierzu.

Dieser Beitrag stellt nun eine Erweiterung dieser Modellierung vom konzentriert-parametrischen auf den verteilt-parametrischen Fall vor. Verteilt-parametrische Hamiltonsche Systeme bilden ein aktives Forschungsgebiet, wobei ihre strukturellen Eigenschaften noch nicht vollständig geklärt sind, siehe dazu z.B. [1, 3]. Hier wird nun ein Ansatz vorgeschlagen, der dem konzentriert-parametrischen Fall möglichst nahe kommt. Dazu werden im Abschnitt 2 die wichtigsten strukturellen Eigenschaften konzentriert-parametrischer PCHD-Systeme mit Hinblick auf die Erweiterung auf verteilt-parametrische Systeme zusammengefasst. Der Unterabschnitt 2.1 behandelt noch die Menge der strukturerhaltenden Transformationen. Der Abschnitt 3 befasst sich dann mit dem verteilt-parametrischen Fall, wobei gezeigt wird, wie durch konsequente geometrische Modellierung eine von der Wahl spezieller Koordinaten unabhängige Beschreibung dieser Systemklasse gewonnen werden kann. Wie bereits erwähnt, sind verschiedene Erweiterungen möglich, die vorgestellte ist daher nur eine von vielen. Der Unterabschnitt 3.1 beschreibt nun wieder die Menge der strukturerhaltenden Koordinatentransformationen, wobei gezeigt wird, dass nur die Einschränkung der Koordinatentransformationen auf Bündelisomorphismen zusätzlich zu jenen des konzentriert-parametrischen Falles auftritt.

Dieser Beitrag benutzt die Sprache der Differentialgeometrie sowie ihre Standardnotation, wie man sie z.B. in [1, 3] oder [5] findet. Die geometrische Strukturen von Bündel und Jet-Mannigfaltigkeiten findet man z.B. in [1], [5]. Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention wird versucht, die mathematischen Ausdrücke so kurz als möglich zu halten. Auch wird von allen Funktionen, wenn nicht anders darauf hingewiesen wird, angenommen, dass sie glatt sind, um so zahlreiche Fallunterscheidungen zu vermeiden.

2 Konzentriert-parametrische PCHD Systeme

Die Modellierung eines konzentriert-parametrischen Systems in Form eines Systems von expliziten Differentialgleichungen beginnt mit der Wahl der Zustandsmannigfaltigkeit. Hier wird mit \mathcal{X} die q -dimensionale Zustandsmannigfaltigkeit bezeichnet. Es seien (x^α) , $\alpha = 1, \dots, q$ lokale Koordinaten von \mathcal{X} , dann werden die Koordinaten des Tangential- $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ und Kotangentialbündels $\mathcal{T}^*(\mathcal{X})$ bezüglich der holonomen Basen $\{\partial_\alpha\}$, $\{dx^\alpha\}$ mit $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$, $(x^\alpha, \dot{x}_\alpha)$ bezeichnet.

Es sei $J : \mathcal{T}^*(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X})$ eine schiefsymmetrische Abbildung $J : \dot{x}^\alpha = J^{\alpha\beta}(x) \dot{x}_\beta$, dann beschreibt

$$\dot{x}^\alpha = v_H^\alpha = J^{\alpha\beta}(x) \partial_\beta H(x) \quad (1)$$

ein autonomes Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion $H \in C^\infty(\mathcal{X})$ ¹. Das

¹Mit $C^\infty(M)$ wird die Menge der glatten Funktionen auf M bezeichnet.

Vektorfeld $v_H = v_H^\alpha \partial_\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{X}))^2$ wird auch als Hamiltonsches Vektorfeld bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$v_H(H) = v_H \rfloor dH = 0, \quad (2)$$

wobei $d : \wedge^r(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) \rightarrow \wedge^{r+1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$, $r \geq 0$ die äußere Ableitung und $\rfloor : \mathcal{T}(\mathcal{X}) \times \wedge^r(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) \rightarrow \wedge^{r-1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$, $r \geq 0$ das innere Produkt bezeichnen. Man beachte noch, dass aus $dH = 0$ folgt $H = \text{const.}$ Mit Hilfe der Klammer $\{ \}$,

$$\{a, b\} = (J \rfloor db) da = \partial_\alpha a J^{\alpha\beta} \partial_\beta b,$$

folgt noch $v_H(F) = \{F, H\}$. Bei klassischen Hamiltonschen Systemen genügt die Strukturmatrix J zusätzlich der Bedingung

$$[v_F, v_G] = v_{\{G, F\}}. \quad (3)$$

In diesem Fall sind die Distributionen $\text{im}(J)$, $\ker(J)$ involutive. Um dies zu zeigen, beachte man, dass mit $v_{x^\beta} = J^{\alpha\beta} \partial_\alpha$ folgt, $[v_{x^\beta}, v_{x^\gamma}] = v_{\{x^\gamma, x^\beta\}}$. Folglich ist $\text{im}(J)$ involutiv. Da noch gilt $(\text{im}(J))^\perp = \ker(J)$, ist auch $\ker(J)$ involutiv oder vollständig integrierbar. Aus (3) folgt

$$\begin{aligned} [J^{\alpha\gamma} \partial_\alpha, J^{\beta\delta} \partial_\beta] &= J^{\alpha\beta} \partial_\beta J^{\gamma\delta} \partial_\alpha \\ J^{\alpha\gamma} \partial_\alpha J^{\beta\delta} \partial_\beta - J^{\alpha\delta} \partial_\alpha J^{\beta\gamma} \partial_\beta &= J^{\alpha\beta} \partial_\beta J^{\gamma\delta} \end{aligned}$$

oder

$$J^{\gamma\alpha} \partial_\alpha J^{\beta\delta} \partial_\beta + J^{\beta\alpha} \partial_\alpha J^{\gamma\delta} + J^{\delta\alpha} \partial_\alpha J^{\gamma\beta} \partial_\beta = 0. \quad (4)$$

Letztere Beziehung ist die notwendige und lokal hinreichende für die Strukturmatrix J , damit (3) gilt.

Um dissipative Effekte zu beschreiben, wählt man eine positiv semidefinite Abbildung $R : \mathcal{T}^*(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\dot{x}^\alpha = -R^{\alpha\beta}(x) \dot{x}_\beta$ und ersetzt (1), (2) durch die nachstehenden Beziehungen

$$\dot{x}^\alpha = v_H^\alpha = (J^{\alpha\beta}(x) - R^{\alpha\beta}(x)) \partial_\beta H(x) \quad (5)$$

$$v_H(H) = -\partial_\alpha H R^{\alpha\beta} \partial_\beta H \leq 0. \quad (6)$$

Um nun obiges System mit Toren zu erweitern, wählt man einen linearen Vektorraum $\mathcal{U} = \text{span}\{e_\zeta\}$ mit Koordinaten (u^ζ) , $\zeta = 1, \dots, m$ als Eingangsraum sowie eine lineare Abbildung $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\dot{x}^\alpha = B_\zeta^\alpha(x) u^\zeta$. Man überzeugt sich nun leicht, dass das System

$$\dot{x}^\alpha = v_H^\alpha = (J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \partial_\beta H + B_\zeta^\alpha u^\zeta, \quad (7)$$

$$y_\zeta = B_\zeta^\alpha \partial_\alpha H \quad (8)$$

²Mit $\Gamma(B)$ wird die Menge der glatten Schnitte des Bündels B bezeichnet.

die Beziehung

$$v_H(H) = -\partial_\alpha(H) R^{\alpha\beta} \partial_\beta H + y_\zeta u^\zeta \leq y_\zeta u^\zeta \quad (9)$$

mit dem Ausgangsraum $\mathcal{Y} = \mathcal{U}^* = \text{span} \{e^\zeta\}$ und Koordinaten (y_ζ) erfüllt. Da v_H jetzt kein Vektorfeld mehr ist, wird v_H als Hamiltonscher Operator bezeichnet. Wählt man aber einen Schnitt σ des Bündels $\mathcal{U} \times \mathcal{X} \xrightarrow{\rho} \mathcal{X}$, dann gilt $(v_H^\alpha \circ \sigma) \partial_\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \rho^*(\mathcal{T}(\mathcal{X})) & \xrightarrow{\tau^*(\rho)} & \mathcal{T}(\mathcal{X}) & & (x^\alpha, u^\zeta, \dot{x}^\alpha) & \xrightarrow{\tau^*(\rho)} & (x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \\ \downarrow \rho^*(\tau) & & \downarrow \tau & & \uparrow v_H(x, u) & & v^* \uparrow v_H \circ g(x) \\ \mathcal{U} \times \mathcal{X} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{X} & & (x^\alpha, u^\zeta) & \xleftarrow{g(x)} & (x^\alpha) \end{array} \quad (10)$$

zeigt nun, dass $v_H \in \Gamma(\rho^*(\tau))^3$ gilt mit $\rho^*(\mathcal{T}(\mathcal{X})) \xrightarrow{\rho^*(\tau)} \mathcal{U} \times \mathcal{X}$ als das mit ρ zurückgezogene Bündel $\mathcal{T}(\mathcal{X})$.

2.1 Koordinatentransformation

Man überzeugt sich am einfachsten durch Nachrechnen, dass die Struktur des Systems (7,8) invariant gegenüber Koordinatentransformationen des Typs

$$\begin{aligned} \bar{x}^{\bar{\alpha}} &= \varphi^{\bar{\alpha}}(x) \\ \bar{u}^{\bar{\zeta}} &= M_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}}(x) (u^\zeta + f^\zeta(x)) \\ \bar{y}_{\bar{\zeta}} &= \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}}(x) (y_\zeta + \partial_\alpha H_f B_\zeta^\alpha), \quad M_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}} = \delta_{\bar{\zeta}}^{\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (11)$$

mit dem Kroneckersymbol δ ist, sofern eine Funktion $H_f \in C^\infty(\mathcal{X})$ so existiert, dass die Gleichung

$$(J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \partial_\beta H_f + B_\zeta^\alpha f^\zeta = 0 \quad (12)$$

erfüllt wird. Die weiteren Größen des Systems transformieren sich gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} \bar{H} &= (H + H_f) \circ \varphi^{-1} \\ \bar{J}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \left(\partial_\alpha \varphi^{\bar{\alpha}} J^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi^{\bar{\beta}} \right) \circ \varphi^{-1} \\ \bar{R}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \left(\partial_\alpha \varphi^{\bar{\alpha}} R^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi^{\bar{\beta}} \right) \circ \varphi^{-1} \\ \bar{B}_{\bar{\zeta}}^{\bar{\alpha}} &= \left(\partial_\alpha \varphi^{\bar{\alpha}} B_\zeta^\alpha \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}} \right) \circ \varphi^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

³Ein Bündel wird von jetzt an durch die Angabe seiner totalen Mannigfaltigkeit oder seiner Projektion charakterisiert, wenn die weiteren Komponenten vom Zusammenhang her festliegen. So kann die Menge der Schnitte des Tangentialbündels $\mathcal{T}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\tau} \mathcal{X}$ mit $\Gamma(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$, wie meist, aber auch mit $\Gamma(\tau)$ bezeichnet werden.

Man beachte, dass Ein- und Ausgänge affine transformiert werden, allerdings gilt nicht mehr $y_\zeta u^\zeta = \bar{y}_\zeta \bar{u}^\zeta$. Ebenso sieht man, dass man jede Funktion H_f , die (12) mit $f^\zeta = 0$ erfüllt, zu H addieren kann ohne die Hamiltonschen Gleichungen zu ändern. Solche Funktionen H_f werden auch Casimir-Funktionen genannt.

Eine wichtige Anwendung dieser Beziehung ist die Transformation auf Koordinaten relativ zu einer Ruhelage \hat{x} , \hat{u} . Die vollständigen Beziehungen lauten in diesem Fall dann

$$\begin{aligned}\bar{x}^\alpha &= x^\alpha - \hat{x}^\alpha \\ \bar{u}^\zeta &= u^\zeta - \hat{u}^\zeta \\ \bar{y}_\zeta &= y_\zeta - \partial_\alpha H_f B_\zeta^\alpha\end{aligned}$$

mit

$$(J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \partial_\beta H_f - B_\zeta^\alpha \hat{u}^\zeta = 0$$

und

$$\begin{aligned}\bar{H}(\bar{x}) &= (H + H_f)(\bar{x} + \hat{x}) \\ \bar{J} &= J(\bar{x} + \hat{x}) \\ \bar{R} &= R(\bar{x} + \hat{x}) \\ \bar{B} &= B(\bar{x} + \hat{x}) .\end{aligned}$$

Der interessierte Leser sei hier auf [4] verwiesen, wo man eine alternative Diskussion und Darstellung hierzu findet.

Verbleibt noch die lokale Lösbarkeit der Gleichung (12) zu untersuchen. Notwendig ist offensichtlich, dass das lineare System

$$(J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \omega_\beta + B_\zeta^\alpha f^\zeta = 0$$

nach ω auflösbar ist. Von den Beziehungen

$$n_\alpha (J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \partial_\beta H_f = 0, \quad n_\alpha B_\zeta^\alpha f^\zeta = 0$$

erhält man die Distribution $\Delta = \text{span} \{n_\alpha (J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \partial_\beta\}$. Gilt nun $\dim(\tilde{\Delta}) < q$ für den involutiven Abschluss $\tilde{\Delta}$ von Δ , dann ist die lokale Lösbarkeit von (12) wegen der vorigen Bedingung gegeben.

3 Verteil-parametrische PCHD Systeme

Die Übertragung der Überlegungen des konzentriert-parametrischen Falles auf den verteilt-parametrischen beginnt mit der Wahl der Zustandsmannigfaltigkeit. Es sei \mathcal{B} eine orientierbare glatte p -dimensionale Mannigfaltigkeit mit lokalen Koordinaten (X^i) , $i = 1, \dots, p$, die in vielen Anwendungen den unabhängigen

Ortskoordinaten entsprechen. Die kompakte glatte p -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ sei orientierbar und besitze die Volumensform dX . Die Inklusionsabbildung $\partial\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ wird ι , die Koordinaten des Randes $(\bar{X}^{\bar{i}})$, $\bar{i} = 1, \dots, p-1$ und die Volumensform am Rand mit $d\bar{X}$ bezeichnet.

Betrachtet man nun das Bündel $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{D}$ mit lokalen Koordinaten (X^i, x^α) , $\alpha = 1, \dots, q$, die Größen x^α werden auch als abhängige Koordinaten bezeichnet, dann sieht man, dass ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(\mathcal{X})$ geeignet ist einen Zustand eines verteilt-parametrischen Systems zu repräsentieren. Der erste Jet $j(\sigma)$ von σ , also σ zusammen mit den Funktionen $\partial_i \sigma^\alpha$, ist ein Schnitt der ersten Jet-Mannigfaltigkeit $J(\mathcal{X})$ von \mathcal{X} , für die hier die lokalen Koordinaten $(X^i, x^\alpha, x_I^\alpha)$ verwendet werden. In analoger Weise wird der n -te Jet $j^n(\sigma)$ von σ mit $\partial_I \sigma^\alpha$, $\#I \leq n$ eingeführt. Der Index $I = i_1, \dots, i_p$ ist ein geordneter Multiindex mit $\#I = \sum_{j=1}^p i_j$. Weiter gilt $I + J = i_1 + j_1, \dots, i_p + j_p$ und $1_i = i_1, \dots, i_j, \dots, i_p$, $i_j = \delta_j^i$ sowie die Abkürzung

$$\partial_I = (\partial_1)^{i_1} \dots (\partial_p)^{i_p} .$$

Die Jet-Koordinaten von $J^n(\mathcal{X})$ werden mit (X^i, x_I^α) , $0 \leq \#I \leq n$ bezeichnet. Mit Hilfe der Projektionen $\pi_m^n(X^i, x^\alpha, x_I^\alpha) = (X^i, x^\alpha, x_J^\alpha)$, $0 \leq \#I \leq n$, $0 \leq \#J \leq m$, $n > m \geq 0$, erhält man die weiteren Strukturen $J^n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\pi_m^n} J^m(\mathcal{X})$, wobei noch $J^0(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ gesetzt wird. Mit der Projektion $\pi_m^n(X^i, x^\alpha, x_I^\alpha) = (X^i, x^\alpha)$ erhält man noch das Bündel $J^n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\pi^n} \mathcal{D}$. Auf den Jet-Mannigfaltigkeiten $J^n(\mathcal{X})$ existiert nun ein spezieller Differentialoperator $d_i : C^\infty(J^n(\mathcal{X})) \rightarrow C^\infty(J^{n+1}(\mathcal{X}))$, die totale Ableitung d_i nach der Koordinate X^i ,

$$d_i = \partial_i + x_{I+1_i}^\alpha \partial_\alpha^I, \quad \partial_\alpha^I = \partial_{x_I^\alpha} . \quad (14)$$

Sie erfüllt die Beziehung

$$\partial_i(f \circ j^n(\sigma)) = (d_i f) \circ j^{n+1}(\sigma)$$

für alle $f \in C^\infty(J^n(\mathcal{X}))$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{X})$. Im Weiteren werden Bündel mittels der Projektion π^n , π_m^n zurückgezogen, siehe dazu (10). Diese Operation wird in der Notation unterdrückt, falls sie vom Zusammenhang her offensichtlich ist.

Man beachte, dass ein Schnitt ς von $J(\pi)$ nicht notwendiger Weise der erste Jet eines Schnittes $\sigma \in \Gamma(\pi)$ von \mathcal{X} ist, da die Integrabilitätsbedingung $\varsigma_I^\alpha = \partial_i \varsigma^\alpha$ erfüllt sein muss. Wie erwähnt, kann ein Schnitt σ einen Zustand festlegen. Offensichtlich liegt mit σ auch die Prolongation $j(\sigma)$ fest. Soll nun ein Schnitt $\varsigma \in \Gamma(\pi^1)$ der Bedingung $j(\sigma) = \varsigma$ genügen, kann man auch Funktionen $f_i^\alpha \in C^\infty(\mathcal{D})$, $\varsigma_{1_i}^\alpha = f_i^\alpha$ mit $\partial_j f_i^\alpha = \partial_i f_j^\alpha$ und einen Schnitt ϑ des auf den Rand eingeschränkten Bündels $\iota^*(\pi)$ wählen. Offensichtlich liegt dann der

Zustand $\sigma = \pi \circ \varsigma$ ebenfalls fest, denn die Funktionen $\sigma^\alpha = f^\alpha$ sind Lösungen des Systems partieller Differentialgleichungen $\partial_i f^\alpha = f_i^\alpha$ mit den durch ϑ gegebenen Randbedingungen. Offensichtlich tritt diese Möglichkeit aber erst im verteilt-parametrischen Fall auf. Hier wird nur der einfachere Fall betrachtet, dass der Zustand durch einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(\pi)$ festgelegt wird.

Vom Bündel $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{D}$ gewinnt man mittels Standardkonstruktionen weitere wichtige Bündel, wie die Tangentialbündel $\mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ und die Kotangentialbündel $\mathcal{T}^*(\mathcal{X})$, $\mathcal{T}^*(\mathcal{D})$. Das spezielle Unterbündel $\mathcal{V}(\mathcal{X}) = \ker(\pi_*) \subset \mathcal{T}(\mathcal{X})$ wird das vertikale Tangentialbündel von \mathcal{X} genannt. Das horizontale Kotangentialbündel $\mathcal{H}^*(\mathcal{X}) = \pi^*(\mathcal{T}^*(\mathcal{D})) \subset \mathcal{T}^*(\mathcal{X})$ ist der Annulator von $\mathcal{V}(\mathcal{X})$, denn es gilt $\mathcal{V}(\mathcal{X}) \rfloor \mathcal{H}^*(\mathcal{X}) = \{0\}$. Von diesen Vektorbündel lassen sich einfach die Bündel $\wedge_r^0(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) = \wedge_r(\mathcal{H}^*(\mathcal{X}))$, $r \leq p$ und $\wedge_p^1(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) = (\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) \wedge (\wedge_p(\mathcal{H}^*(\mathcal{X})))$ ableiten, wobei gilt $\mathcal{V}(\mathcal{X}) \rfloor \wedge_r^1(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) = \wedge_r^0(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$. Das innere Produkt $\rfloor : \mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \wedge_p^1(\mathcal{T}^*(\mathcal{X})) \rightarrow \wedge_p^0(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$ oder in Koordinaten $r = \dot{x}^\alpha \dot{r}_\alpha$ mit den Koordinaten (X^i, x^α, r) , $(X^i, x^\alpha, \dot{r}_\alpha)$ für $\wedge_p^0(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$ und $\wedge_p^1(\mathcal{T}^*(\mathcal{X}))$ ersetzt nun das kanonische Produkt des konzentriert-parametrischen Falls.

Neben der totalen Ableitung d_i , siehe (14) wird noch das horizontale Differential d_h mit dem Koordinatenausdruck

$$d_h = dX^i \wedge d_i \quad (15)$$

benötigt. Es genügt der Beziehung

$$j^{n+1}(\sigma)^*(d_h \omega) = d(j^n(\sigma)^*(\omega))$$

für alle $\sigma \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\omega \in \Gamma(\wedge \mathcal{T}^*(J^n(\mathcal{X})))$. Mit Hilfe von $d_h : \pi^{n,*}(\wedge_r(\mathcal{H}^*(\mathcal{X}))) \rightarrow \pi^{n+1,*}(\wedge_{r+1}(\mathcal{H}^*(\mathcal{X})))$ gewinnt man einfach eine Version des Satzes von Stokes, die auf die Bündelstruktur angepasst ist, denn es gilt offensichtlich

$$\int_{\partial \mathcal{D}} j^n(\sigma)^*(\omega) = \int_{\mathcal{D}} j^{n+1}(\sigma)^*(d_h \omega)$$

für alle $\sigma \in \Gamma(\mathcal{X})$, $\omega \in \Gamma(\pi^{n,*}(\wedge_{p-1}(\mathcal{T}^*(\mathcal{D}))))$.

Die Hamiltonfunktion des konzentriert-parametrischen Falls wird jetzt durch die Hamiltonsche Dichte $HdX \in \pi_0^{1,*}(\wedge_p^0(\mathcal{T}^*(\mathcal{D})))$ ersetzt. Da die Hamiltonsche Dichte nur die erste Ableitung beinhaltet, ist das Nachfolgende auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt. Die vorgestellten Methoden erlauben aber eine einfache Erweiterung auf Gleichungen höherer Ordnung. Mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} d(HdX) &= \partial_\alpha H dx^\alpha \wedge dX + \partial_\alpha^i H dx_{1_i}^\alpha \wedge dX \\ &= \partial_\alpha H dx^\alpha \wedge dX + \partial_\alpha^i H d_i(dx^\alpha \wedge dX) \\ &= \underbrace{((\partial_\alpha - d_i \partial_\alpha^i) H)}_{\delta_\alpha} dx^\alpha \wedge dX + d_h(\partial_\alpha^i H d_i] dx^\alpha \wedge dX) \end{aligned}$$

erhält man zwei neue Abbildungen. Die Variationsableitung δ tritt hier als Abbildung

$$\delta : \pi_0^{1,*} (\wedge_p^0 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))) \rightarrow \pi_0^{2,*} (\wedge_p^1 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))) \quad (16)$$

auf. Es seien $(X^i, x^\alpha, \dot{r}_\alpha)$ Koordinaten von $\wedge_p^1 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))$ dann gilt $\dot{r}_\alpha = \delta_\alpha (H)$ mit $\delta_\alpha = \partial_\alpha - d_i \partial_\alpha^i$. Die Rolle des Bündels $\wedge_p^1 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))$ am Rand $\partial \mathcal{D}$ übernimmt das Bündel $\wedge_{p-1}^1 (\mathcal{T}^* (\iota^* (\mathcal{X})))$ mit den Koordinaten $(\hat{X}^i, \hat{x}^\alpha, \hat{r}_\alpha)$. Mit Hilfe der Beziehung $\iota^* (\partial_\alpha^i H \partial_i] dx^\alpha \wedge dX) = \iota^* (\partial_\alpha^i H) \gamma_i dx^\alpha \wedge d\bar{X}$, $\gamma_i \in C^\infty (\partial \mathcal{D})$, erhält man die zweite Abbildung

$$\zeta : \pi_0^{1,*} (\wedge_p^0 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))) \rightarrow \pi_0^{1,*} (\wedge_{p-1}^1 \mathcal{T}^* (\iota^* (\mathcal{X}))) , \quad (17)$$

die in Koordinaten durch $\hat{r}_\alpha = \iota^* (\zeta_\alpha (H))$, $\zeta_\alpha = \gamma_i \partial_\alpha^i$ gegeben ist. Man sieht also, dass die äußere Ableitung der Hamiltonschen Form sich in die Abbildungen δ und ζ in natürlicher Art aufspaltet.

Wählt man nun eine schiefsymmetrische Abbildung $J : \pi_0^{2,*} (\wedge_p^1 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))) \rightarrow \pi_0^{2,*} (\mathcal{V} (\mathcal{X}))$ oder in Koordinaten $\dot{x}^\alpha = J^{\alpha\beta} \dot{r}_\beta$, $J^{\alpha\beta} \in C^\infty (J^2 (\mathcal{X}))$, dann erhält man die evolutionären Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{x}^\alpha = v^\alpha , \quad v^\alpha = J^{\alpha\beta} \delta_\beta (H) \quad (18)$$

mit dem Hamiltonschen Operator $v \in \pi_0^{2,*} (\mathcal{V} (\mathcal{X}))$, siehe auch [3]. Für die Änderung von $\int_{\mathcal{D}} H dX$ entlang einer Lösung von (18) folgt

$$\int_{\mathcal{D}} j(v) (H dX) = \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\delta_\alpha (H) J^{\alpha\beta} \delta_\beta (H)}_{=0} dX + \int_{\partial \mathcal{D}} v^\alpha (\partial_\alpha^i H) \gamma_i d\bar{X} .$$

Man sieht also, dass man geeignete Randbedingungen mit $v^\alpha (\partial_\alpha^i H) \gamma_i = 0$ mit wählen muss, damit $\int_{\mathcal{D}} H dX$ eine Erhaltungsgröße wird, sowie dass das innere Produkt $\mathcal{V} (\iota^* (\mathcal{X})) \times \wedge_{p-1}^1 \mathcal{T}^* (\iota^* (\mathcal{X})) \rightarrow \wedge_{p-1}^0 \mathcal{T}^* (\iota^* (\mathcal{X}))$ den Leistungsfluss über den Rand in das System misst. Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass man die Abbildung J durch einen schiefsymmetrischen Differentialoperator der Art, siehe auch [3],

$$J^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta I} d_I , \quad \#I \leq r , \quad d_I = (d_1)^{i_1} \circ \dots \circ (d_1)^{i_1} \quad (19)$$

ersetzen kann, dieser Weg wird hier jedoch nicht weiter verfolgt, da er zu sehr komplexen Randbedingungen führen kann.

Mit Hilfe einer positiv semidefiniten Abbildung $R : \pi_0^{2,*} (\wedge_p^1 (\mathcal{T}^* (\mathcal{X}))) \rightarrow \pi_0^{2,*} (\mathcal{V} (\mathcal{X}))$ können dissipative Effekte berücksichtigt werden. Die evolutionären Gleichungen lauten dann

$$\dot{x}^\alpha = v^\alpha , \quad v^\alpha = (J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \delta_\beta (H) , \quad (20)$$

und man erhält noch die Bilanz

$$\int_{\mathcal{D}} j(v)(HdX) = - \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\delta_{\alpha}(H) R^{\alpha\beta} \delta_{\beta}(H)}_{\geq 0} dX + \int_{\partial\mathcal{D}} v^{\alpha} (\partial_{\alpha}^i H) \gamma_i d\bar{X} .$$

Wählt man noch Randbedingung so, dass der Randterm verschwindet, dann nimmt $\int_{\mathcal{D}} HdX$ entlang einer Lösung von (20) nicht zu. Auch hier könnte man die Abbildung R durch einen symmetrischen Differentialoperator, analog zu (19) ersetzen.

Um das System (20) mit Toren zu erweitern, wird als Eingangsraum das Vektorbündel $(\mathcal{U}, \rho, \mathcal{D})$ mit den Koordinaten (X^i, u^{ς}) , $\varsigma = 1, \dots, m$ gewählt. Das Ausgangsbündel $(\mathcal{Y}, \rho^*, \mathcal{D})$ ist das zum Eingangs Bündel duale bezüglich des Produktes $\rho \times \rho^* \rightarrow \wedge_p(\mathcal{T}^*(\mathcal{D}))$, und in Koordinaten gilt $r = u^{\varsigma} y_{\varsigma}$. Mit Hilfe der linearen Eingangsabbildung $B : \mathcal{U} \rightarrow \pi^{2,*}(\mathcal{V}(\mathcal{X}))$ erhält man dann das System

$$\dot{x}^{\alpha} = v_H^{\alpha} = (J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \delta_{\beta} H + B_{\varsigma}^{\alpha} u^{\varsigma} \quad (21)$$

$$y_{\varsigma} = B_{\varsigma}^{\alpha} \delta_{\alpha} H , \quad (22)$$

das das verteilt-parametrische Gegenstück zu den Gleichungen (7,8) ist. Ebenso ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} j(v)(HdX) &= - \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\delta_{\alpha}(H) R^{\alpha\beta} \delta_{\beta}(H)}_{\geq 0} dX + \int_{\mathcal{D}} y_{\varsigma} u^{\varsigma} dX \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} v^{\alpha} (\partial_{\alpha}^i H) \gamma_i d\bar{X} \leq \int_{\mathcal{D}} y_{\varsigma} u^{\varsigma} dX \end{aligned}$$

das Pendant zu (9), sofern der Randterm durch geeignete Randbedingungen zum verschwinden gebracht wird. Durch konsequentes Fortsetzen dieses Weges können auch Tore am Rand eingeführt werden. Wegen der umfangreichen Möglichkeiten wird hier jedoch darauf verzichtet, und der interessierte Leser sei z.B. auf [2] verwiesen.

3.1 Koordinatentransformation

Die bisherigen Betrachtungen benutzten die Sprache der Differentialgeometrie mit der Intention eine gegenüber der Wahl spezieller Koordinaten unabhängige Beschreibungsform Hamiltonscher Systeme zu finden. Zu beachten ist, dass der Kern der Variationsableitung δ , siehe (16) nicht trivial ist, denn $\delta_{\alpha} H = 0$ ist für alle Funktionen $H = d_i \tilde{H}$, $H \in C^{\infty}(\mathcal{X})$ erfüllt. Ein wichtiger Sonderfall ist durch

$$d_h \tilde{H}^i \partial_i \rfloor dX = d_i \tilde{H}^i dX , \quad \tilde{H}^i \in C^{\infty}(\mathcal{X})$$

mit d_h von (15) gegeben, oder Hamiltonsche Dichten dieser Art beeinflussen nur die Randbedingung.

Man überzeugt sich am einfachsten durch Nachrechnen, dass die Struktur der Systeme (18,5) invariant gegenüber Bündelisomorphismen (ψ, φ) des Typs

$$\begin{aligned}\bar{X}^{\bar{i}} &= \psi^{\bar{i}}(x) \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}} &= \varphi^{\bar{\alpha}}(X, x)\end{aligned}\quad (23)$$

sind. Die weiteren Größen des Systems transformieren sich gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned}\bar{H} &= H_0 \circ j(\psi, \varphi)^{-1} \\ \bar{J}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \left(\partial_{\alpha} \varphi^{\bar{\alpha}} J^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \varphi^{\bar{\beta}} \right) \circ j^2(\psi, \varphi)^{-1} \\ \bar{R}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \left(\partial_{\alpha} \varphi^{\bar{\alpha}} R^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \varphi^{\bar{\beta}} \right) \circ j^2(\psi, \varphi)^{-1},\end{aligned}\quad (24)$$

wobei $j(\psi, \varphi)$, $j^2(\psi, \varphi)$ die Prolongationen der Bündelmorphismus (ψ, φ) auf die erste bzw. zweite Jet-Mannigfaltigkeit sind. So folgt z.B. $j(\psi, \varphi)$ aus der Beziehung

$$\bar{x}_{1_{\bar{i}}}^{\bar{\alpha}} \partial_i \psi^{\bar{i}} = d_i \varphi^{\bar{\alpha}}.$$

Für den Ein- und Ausgang des Systems (21,22) erhält man als Klasse der zulässige Transformationen

$$\begin{aligned}\bar{u}^{\bar{\zeta}} &= M_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}}(u^{\zeta} + f^{\zeta}) \\ \bar{y}_{\bar{\zeta}} &= \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\zeta}(y_{\zeta} + \delta_{\alpha}(H_f) B_{\zeta}^{\alpha}), \quad M_{\sigma}^{\bar{\zeta}} \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\sigma} = \delta_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}}\end{aligned}\quad (25)$$

mit $M_{\bar{\zeta}}^{\bar{\zeta}}, f^{\zeta} \in C^{\infty}(J^2(\mathcal{X}))$, sofern eine Funktion $H_f \in C^{\infty}(J^2(\mathcal{X}))$ so existiert, dass die Gleichung

$$(J^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}) \delta_{\beta} H_f + B_{\zeta}^{\alpha} f^{\zeta} = 0 \quad (26)$$

erfüllt wird. Für die Eingangsmatrix B gilt noch

$$\bar{B}_{\bar{\zeta}}^{\bar{\alpha}} = \left(\partial_{\alpha} \varphi^{\bar{\alpha}} B_{\zeta}^{\alpha} \bar{M}_{\bar{\zeta}}^{\zeta} \right) \circ j^2(\psi, \varphi)^{-1}. \quad (27)$$

Man beachte, dass Ein- und Ausgänge wieder affine transformiert werden. Erfüllt eine Funktion H_f die Beziehung (26) mit $f = 0$, dann führt die Hamiltonfunktion $H + H_f$ zwar auf die selben Bewegungsgleichungen wie H , man muss jedoch prüfen, ob sich die Randbedingungen ändern. Wegen (17) lässt z.B. jede Funktion $H_f \in C^{\infty}(\mathcal{X})$ die Randbedingungen unverändert. Ebenso sieht man, dass (26) der Beziehung (12), dass (23,25) den Gleichungen von (11), und dass (24,27) den Vorschriften von (13) entsprechen.

4 Schlussbemerkungen

Ziel dieses Beitrages war es, eine mögliche Erweiterung der Klassen der PCHD-Systeme vom konzentriert- auf den verteilt-parametrischen Fall zu präsentieren. So ist es nun möglich, Analyse- und Entwurfsmethoden für die präsentierte Systemklasse zu entwickeln, die die Ansätze und Ideen des konzentriert-parametrischen Falles weiter entwickeln. Man darf nun feststellen, dass das Gebiet der Regelung verteilt-parametrischer Systeme derzeit sehr aktiv erforscht wird. Dieser Artikel soll nun ein Beitrag sein, der versucht die physikalisch orientierte Modellierung auch im verteilt-parametrischen Fall für die Analyse und Regelung bestmöglichst zu nutzen.

Literatur

- [1] G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily: *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, 1997).
- [2] H. Ennsbrunner, K. Schlacher: *On the geometrical representation and interconnection of infinite dimensional port controlled Hamiltonian systems* (accepted for publication in proceedings, CDC-ECC conference, Seville 2005)
- [3] P.J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer Verlag, 1993).
- [4] R. Ortega, A. J. van der Schaft, I. Mareels, B. Maschke: *Lecture notes - Putting energy back in control* (IEEE Contr. Syst. Mag., vol. 21, pp. 18 - 33, April 2001)
- [5] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles* (Cambridge University Press, 1989).
- [6] A. J. van der Schaft: *L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control* (Springer Verlag, 2000).

GRADIENTS FOR DECOUPLING CONTINUOUS-TIME CONTROL SYSTEMS USING THE CONTROLLABILITY GRAMIAN

Alexander Weinmann, OVE, Senior Member IEEE

Vienna University of Technology, Institute of Automation and Control

Gusshausstrasse 27-29/376

A-1040 Vienna / Austria

Phone: +43 1 58801 37611, Fax: +43 1 58801 37699

email: `weinmann@acin.tuwien.ac.at`

Manuscript received March 16, 2005

Keywords:

Decoupling, interaction, gradients, differential sensitivity, multivariable control, state controller, output state controller, disturbance rejection

Abstract

Reducing the interaction in a multivariable control system based on a dialog between computer design support and system technology practitioner is the objective of this paper. Decoupling is based on matricial gradients of Gramian-oriented measures of interaction. The method is carried out for state controllers, output controllers and dynamic state controllers. Numerical examples illustrate the application.

1 Introduction

The design of decoupled control systems in most cases is based on transfer matrices aiming at diagonal structures. Compensation of the interaction is reached if the matrix-valued transfer function in s -domain is exactly a diagonal matrix (*Korn, U., and Wilfert, H.-H., 1982; Goodwin, G.C., et al., 2000*). Approximations lead to near-by solutions. Steady-state or low-frequency decoupling can be achieved with less effort.

The Relative Gain Array is a useful measure for decoupling (*Bristol, E.H., 1966; Chiu, M.S., and Arkun, Y., 1991*). Singular values of the closed-loop transfer matrix are used in *Gagnon, E., et al., 1999*.

Based on generalized Gramians, the optimum sensor and actuator location is investigated in *Marx, B., et al., 2004*. In *Salgado, M.E., and Conley, A., 2004*, the interaction is studied with the help of a so-called participation matrix. A Gramian decomposition is used in *Conley, A., and Salgado, M.E., 2000*. By means of singular value analysis and Gramian balancing, highly flexible systems are considered by *Jonckheere, E.A., 1984*.

Decoupling for set-point tracking under steady-state conditions can be easily obtained via a prefilter. Decoupling can also be realized for measurable disturbances when the point of influence is known.

This paper addresses the problem of decoupling based on the gradients of energy interrelations between inputs and outputs of a control system using the controllability Gramian. In addition, emphasis is put on gradients for straightforward decoupling or reducing the interaction and for balancing the benefit of decoupling and the actuating effort in a direct dialog.

For single-input single-output systems, the controllability Gramian \mathbf{L}_c leads to the autocovariance of the output $y(t)$ as $R_{yy}(0) = \|G(j\omega)\|_2^2 = \text{tr}[\mathbf{C}\mathbf{L}_c\mathbf{C}^T]$ when the input $u(t)$ is white noise.

2 Attenuating the Interaction for Output State Controllers

Consider a dynamic system with fundamental matrix $\Phi(s) = \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$ resulting from the state space model $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} = \mathbf{0}$, with input $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ and output $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^{r \times 1}$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) . \quad (1)$$

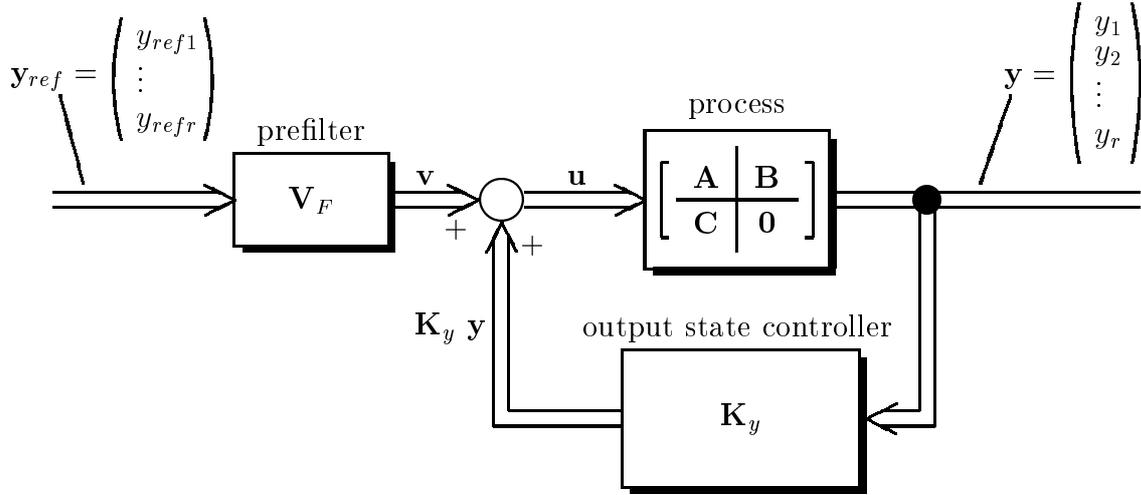


Figure 1: Output state controller

Select $m = r$. The energy of a single scalar output signal $y_i(t)$ of the system when excited only by a single $u_k(t) = \delta(t)$ is given by

$$I_{G,ik} = \int_0^{\infty} y_i^2 dt = \int_0^{\infty} \mathbf{c}_i^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{c}_i^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_k dt \quad (2)$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbf{c}_i^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_k \cdot (\mathbf{c}_i^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_k)^T dt = \mathbf{c}_i^T \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{L}_{ck} \mathbf{c}_i \quad (3)$$

(Glover, K., 1984; Weinmann, A., 1991; Franklin, G.F., et al., 2002).

The controllability Gramian \mathbf{L}_{ck} for the single input via \mathbf{b}_k results from Eq.(57)

$$\mathbf{A} \mathbf{L}_{ck} + \mathbf{L}_{ck} \mathbf{A}^T + \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T = \mathbf{0} . \quad (4)$$

For the closed-loop system of Fig. 1 with output controller \mathbf{K}_y and prefilter \mathbf{V}_F , one has

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{V}_F \mathbf{y}_{ref}(s) . \quad (5)$$

From the input $y_{ref,k} = 1$ to the output $y_i(s)$, the impulse response is

$$y_i(s) = \mathbf{c}_i^T (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{cl})^{-1} \mathbf{w}_k \quad (6)$$

where \mathbf{w}_k is the corresponding column of $\mathbf{W} \triangleq \mathbf{B}\mathbf{V}_F$.

In the Lyapunov Eq.(4), \mathbf{A} has to be replaced by $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}$ and \mathbf{b}_k by \mathbf{w}_k .

To design a system with low interaction, the output y_i should be influenced as low as possible by $y_{ref,k}$ for $k \neq i$. Hence, for unequally enumerated reference and output signals the entire energy associated with the interaction should obey to

$$\sum_{i=1, k=1; i \neq k}^r \mathbf{c}_i^T \mathbf{L}_{ck} \mathbf{c}_i \rightarrow \min_{\mathbf{K}_y} . \quad (7)$$

The controller \mathbf{K}_y is used to drive the system to a low interaction level. (For $i = k$ the output energy $\|y_i\|_2^2$ would be obtained when the control system is excited by the appropriate $y_{ref,i}$.)

Investigating the increments $\Delta\mathbf{L}_{ck}$ caused by $\Delta\mathbf{K}_y$ when referring to the Lyapunov equation Eq.(4)

$$\mathbf{B}\Delta\mathbf{K}_y \cdot \mathbf{C}\mathbf{L}_{ck} + \mathbf{A}_{cl}\Delta\mathbf{L}_{ck} + \mathbf{L}_{ck}(\mathbf{B}\Delta\mathbf{K}_y\mathbf{C})^T + \Delta\mathbf{L}_{ck}\mathbf{A}_{cl}^T = \mathbf{0} . \quad (8)$$

Using the correspondence Eq.(76) (*Weinmann, A., 1991; 2001*)

$$[(\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})^T \otimes \mathbf{B}]\text{col}\Delta\mathbf{K}_y + [\mathbf{B} \otimes (\mathbf{L}_{ck}\mathbf{C}^T)]\text{col}\Delta\mathbf{K}_y^T + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl} \otimes \mathbf{I}_n)\text{col}\Delta\mathbf{L}_{ck} = \mathbf{0} . \quad (9)$$

Abbreviating

$$\mathbf{E}_1 \triangleq (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl} \otimes \mathbf{I}_n)^{-1} \in \mathcal{R}^{n^2 \times n^2} \quad (10)$$

$$\text{col}\Delta\mathbf{L}_{ck} = -\mathbf{E}_1\{[(\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})^T \otimes \mathbf{B}]\text{col}\Delta\mathbf{K}_y + [\mathbf{B} \otimes (\mathbf{L}_{ck}\mathbf{C}^T)]\text{col}\Delta\mathbf{K}_y^T\} \quad (11)$$

$$\Delta I_{G,ik} = \Delta\|y_i(t)\|_2^2 = \mathbf{c}_i^T \Delta\mathbf{L}_{ck}\mathbf{c}_i = (\mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{c}_i^T)\text{col}\Delta\mathbf{L}_{ck} . \quad (12)$$

Combining and changing the order yields

$$(\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})^T \otimes \mathbf{B} \stackrel{(77)}{=} \mathbf{U}_{nn}[\mathbf{B} \otimes (\mathbf{L}_{ck}\mathbf{C}^T)]\mathbf{U}_{rm} \quad (13)$$

with use of the (orthogonal) permutation matrices \mathbf{U}_{nn} and \mathbf{U}_{rm} from Eq.(79). By differentiating,

$$\frac{\partial I_{G,ik}}{\partial \mathbf{K}_y} \stackrel{(80),(83)}{=} -\{\mathbf{I}_m \otimes [(\mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{c}_i^T)\mathbf{E}_1(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})[\mathbf{B} \otimes (\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})^T]]\}[(\text{col}\mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r] \quad (14)$$

$$\frac{\partial I_{G,ik}}{\partial \mathbf{K}_y} \stackrel{(86)}{=} -\{\text{loc}_r[\mathbf{B}^T \otimes (\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})](\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})\mathbf{E}_1^T(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i)\}^T \in \mathcal{R}^{m \times r} \quad (15)$$

where loc_r is a command for decolumnizing a column such that a matrix with r rows is produced.

Defining \mathbf{X}_1 via

$$\mathbf{E}_1^T(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i) \triangleq \text{col}\mathbf{X}_1 , \quad (16)$$

one has from Eq.(15)

$$(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})\mathbf{E}_1^T(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i) \triangleq \text{col}\mathbf{Y}_1 = \text{col}\mathbf{X}_1 + \mathbf{U}_{nn}\text{col}\mathbf{X}_1 = 2\text{col}\mathbf{X}_1 . \quad (17)$$

Referring to Eq.(10), Eq.(16) is rewritten

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl}^T + \mathbf{A}_{cl}^T \otimes \mathbf{I}_n)^{-1}(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i) = \text{col}\mathbf{X}_1 \quad (18)$$

$$(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}_i) = \text{col}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i^T) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl}^T + \mathbf{A}_{cl}^T \otimes \mathbf{I}_n)\text{col}\mathbf{X}_1 \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i^T . \quad (20)$$

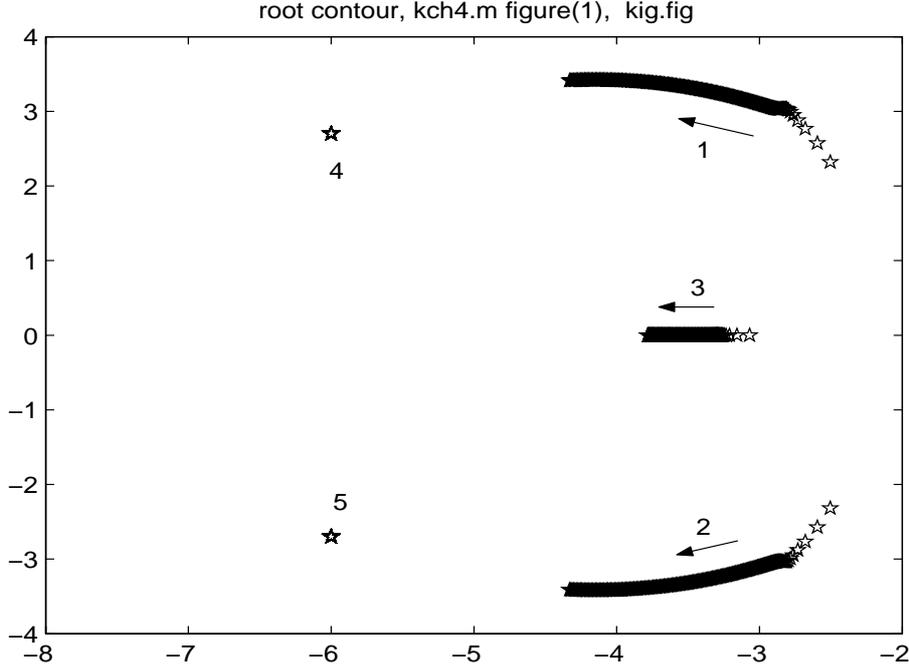


Figure 2: Root contour for $\lambda_i[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_y\mathbf{C}]$ for stepwise increase of \mathbf{K}_y

Combining Eqs.(15) and (17) finally,

$$\frac{\partial I_{G,ik}}{\partial \mathbf{K}_y} = -\{\text{loc}_r[\mathbf{B}^T \otimes (\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})] 2 \text{col}\mathbf{X}_1\}^T \quad (21)$$

$$= -2\{\text{loc}_r \text{col}(\mathbf{C}\mathbf{L}_{ck})\mathbf{X}_1\mathbf{B}\}^T = -2\mathbf{B}^T\mathbf{X}_1\mathbf{L}_{ck}\mathbf{C}^T \quad (22)$$

where \mathbf{X}_1 and \mathbf{L}_{ck} result from Eqs.(20) and (4), respectively.

Example 1. Static output controller:

For a control system of sixth order and $r = m = 2$, both $I_{G,12}$ and $I_{G,21}$ are added. The sum is termed I_G . The matricial increments of \mathbf{K}_y are chosen as $\alpha \frac{\partial I_G}{\partial \mathbf{K}_y}$. In Fig. 2 the root contour is depicted for the dominant five poles and for all the incremental steps of \mathbf{K}_y , following the arrow. Only poles 1 through 3 are in move, 4 and 5 are not influenced. In Fig. 3 the step response demonstrates both decoupling and increasing the dynamics. Finally, in Fig. 4 the maximum real part of the closed-loop eigenvalues, the selected α and the required controller norm and actuating energy are given.

In Fig. 5, the step size is reduced automatically if the actuating energy approaches a given limit.

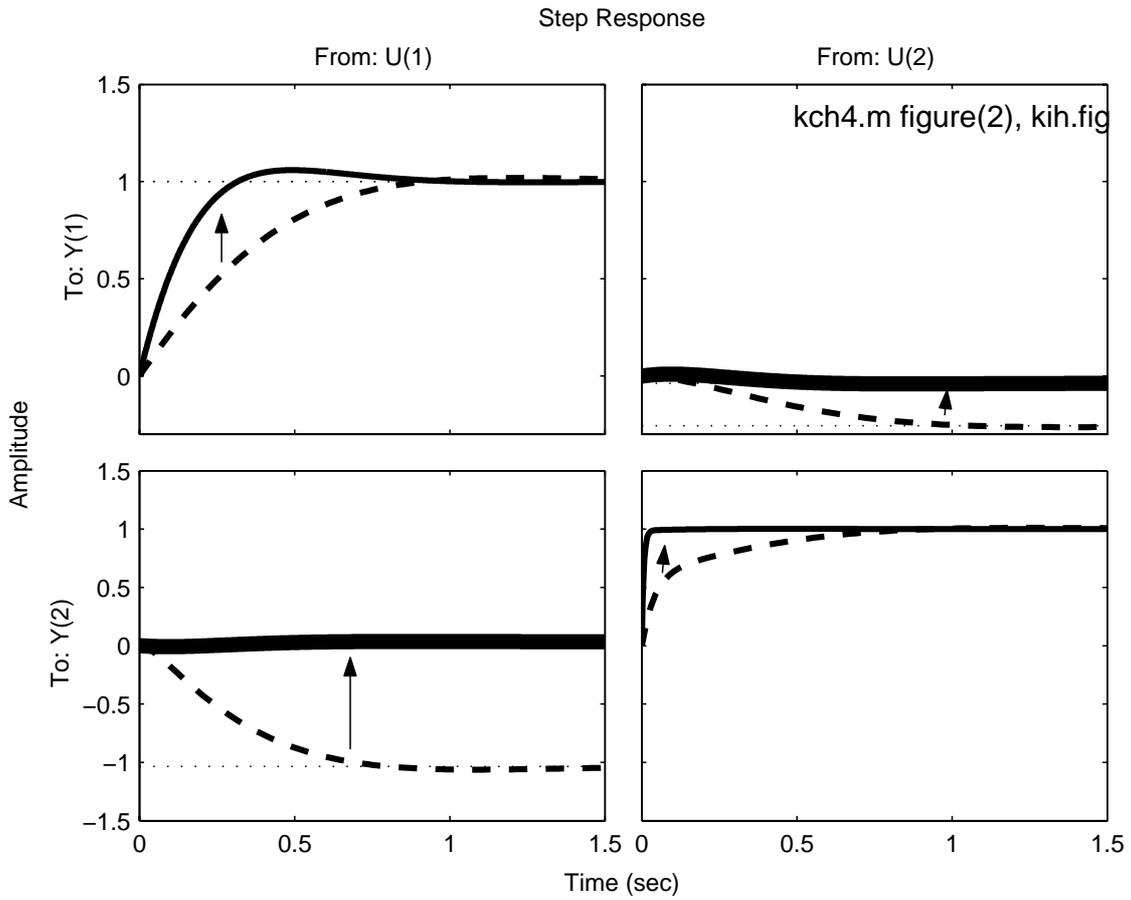


Figure 3: Step responses from both inputs to both outputs

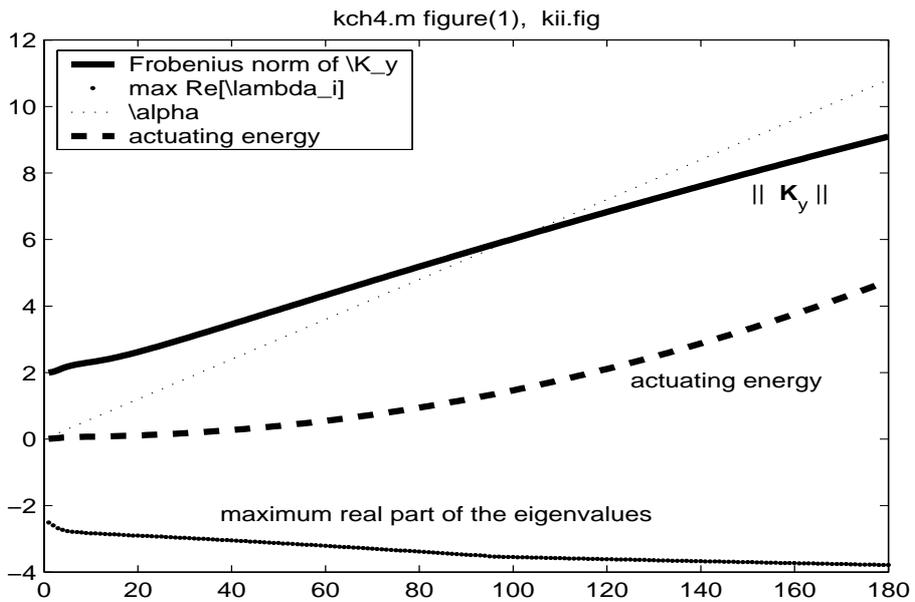


Figure 4: Properties for decoupling using the static output controller

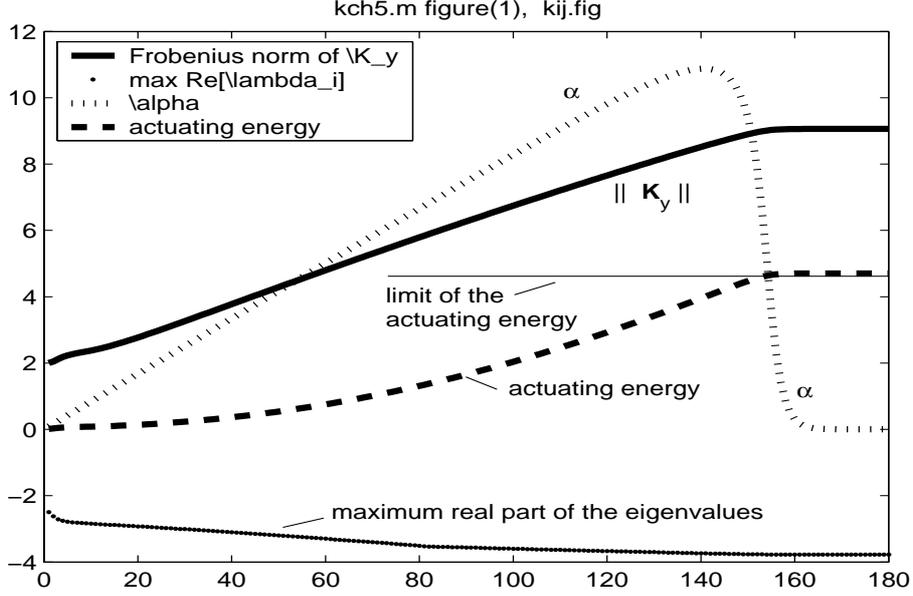


Figure 5: As Fig. 4, nevertheless with an additional limitation of the actuating energy

3 Attenuating the Interaction for Dynamic State Controllers

Consider a plant in state space termed with index 1, \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ and a dynamic output state controller with index 2, \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{D}_2 . Note Fig. 6 and the dimensions $\mathbf{y}_{ref}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \in \mathcal{R}^{r_1 \times 1}$, $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{R}^{r_2 \times 1}$, $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{R}^{m_1 \times 1}$, $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{R}^{m_2 \times 1}$, $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_1}$ and $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{R}^{n_2 \times n_2}$ of the signals and matrices involved.

Suppose an overall state variable \mathbf{x} partitioned into state variable \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 for the process and dynamic controller, respectively. For conformity the set-up is $r_2 = m_1$ and $r_1 = m_2$.

Referring to the resulting input \mathbf{u} and output \mathbf{y} , the state-space representation of the closed loop is given by

$$\left[\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \\ \hline (\mathbf{C}_1 & \mathbf{0}) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{clg} & \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \\ \hline (\mathbf{C}_1 \ : \ \mathbf{0}) & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (23)$$

$$\text{where } \mathbf{M}_2 \triangleq \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}_2^{(n_2 \times n_2)} & \mathbf{B}_2^{(n_2 \times m_2)} \\ \mathbf{C}_2^{(r_2 \times n_2)} & \mathbf{D}_2^{(r_2 \times m_2)} \end{array} \right) \in \mathcal{R}^{(n_2+r_2) \times (n_2+m_2)} \quad (24)$$

is the state representation of the dynamic controller and $\mathbf{A}_{clg} \in \mathcal{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ is the partitioned coefficient matrix of the resulting control system.

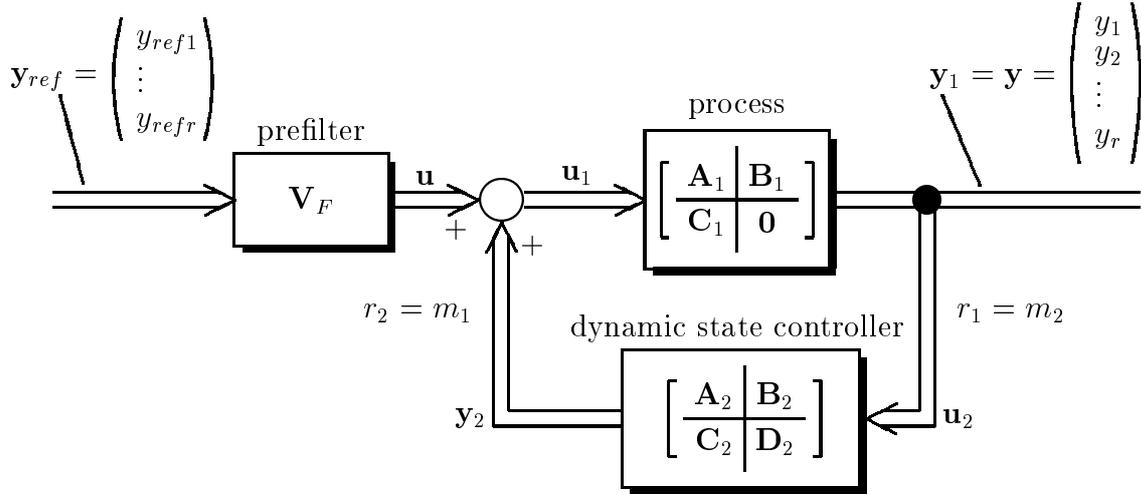


Figure 6: Dynamic output state controller

Referring to Fig. 6, the reference \mathbf{y}_{ref} commands the control system via a prefilter \mathbf{V}_F at the plant's input \mathbf{u}_1 added to the dynamic controller's output \mathbf{y}_2 .

Following classical state space manipulations based on a combined state vector $(\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T)^T$, the state space model of the entire system is given in Eq.(23), with \mathbf{B}_1 replaced by $\mathbf{B}_1 \mathbf{V}_F$. The state space transition presents the output \mathbf{y} excited by the input \mathbf{y}_{ref} .

The input matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \triangleq (\mathbf{W}^T \ \mathbf{0})^T$ consists of r_1 input vectors in $\mathcal{R}^{(n_1+n_2) \times 1}$ corresponding to the inputs $\mathbf{y}_{ref} = (y_{ref1} : y_{ref2} : \dots)^T$. The output matrix $(\mathbf{C}_1 : \mathbf{0})$ comprises r_1 rows $(\mathbf{c}_i^T \ \mathbf{0}^T)$ and determines the output vector \mathbf{y} out of the combined state vector. The 2-norm of each output y_i corresponds to its energy when the system is excited separately by reference impulses.

Consider the system excited only by the impulse reference inputs $y_{ref,k}$ and select the outputs y_i for $i \neq k$. We focus our interest only on the interaction and we utilize the controllability Gramian \mathbf{L}_{ck} of the system

$$\mathbf{L}_{ck} : \quad \mathbf{A}_{clk} \mathbf{L}_{ck} + \mathbf{L}_{ck} \mathbf{A}_{clk}^T + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T = \mathbf{0} \quad \forall k = 1 \dots r_1 \quad (25)$$

$$\|y_i\|_2^2 = (\mathbf{c}_i^T \ \mathbf{0}^T) \mathbf{L}_{ck} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{L}_{ck,1} \mathbf{c}_i \quad \forall i = 1 \dots r_1, k = 1 \dots r_1, i \neq k. \quad (26)$$

Now, $\mathbf{L}_{ck,1} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_1}$ terms the northwest partition of \mathbf{L}_{ck}

$$\mathbf{L}_{ck} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{ck,1} & \mathbf{L}_{ck,2} \\ \mathbf{L}_{ck,3} & \mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \begin{pmatrix} n_1 \times n_1 & n_1 \times n_2 \\ n_2 \times n_1 & n_2 \times n_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Expanding \mathbf{A}_{clk} and \mathbf{L}_{ck} into $\mathbf{A}_{clk} + \Delta\mathbf{A}_{clk}$ and $\mathbf{L}_{ck} + \Delta\mathbf{L}_{ck}$, respectively, we obtain

$$\Delta\mathbf{A}_{clk}\mathbf{L}_{ck} + \mathbf{A}_{clk}\Delta\mathbf{L}_{ck} + \mathbf{L}_{ck}\Delta\mathbf{A}_{clk}^T + \Delta\mathbf{L}_{ck}\mathbf{A}_{clk}^T = \mathbf{0}. \quad (28)$$

In detail,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{C}_2 \\ \Delta\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \Delta\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{ck,1} & \mathbf{L}_{ck,2} \\ \mathbf{L}_{ck,3} & \mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{L}_{ck,1} & \Delta\mathbf{L}_{ck,2} \\ \Delta\mathbf{L}_{ck,3} & \Delta\mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{ck,1} & \mathbf{L}_{ck,2} \\ \mathbf{L}_{ck,3} & \mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^T\Delta\mathbf{D}_2^T\mathbf{B}_1^T & \mathbf{C}_1^T\Delta\mathbf{B}_2^T \\ \Delta\mathbf{C}_2^T\mathbf{B}_1^T & \Delta\mathbf{A}_2^T \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{L}_{ck,1} & \Delta\mathbf{L}_{ck,2} \\ \Delta\mathbf{L}_{ck,3} & \Delta\mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_1^T\mathbf{D}_2^T\mathbf{B}_1^T & \mathbf{C}_1^T\mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{C}_2^T\mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}_2^T \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (29)$$

The aforementioned system is a set of four matrix equations in $\Delta\mathbf{L}_{ck,\mu}$ presenting the influence of the increments $\Delta\mathbf{A}_2$, $\Delta\mathbf{B}_2$, $\Delta\mathbf{C}_2$, $\Delta\mathbf{D}_2$ of the controller on to the observability Gramian submatrix increments $\Delta\mathbf{L}_{ck,\mu} \forall \mu = \{1 \dots 4\}$. Referring to Eq.(26), only $\Delta\mathbf{L}_{ck,1}$ is needed.

Due to different matrix order, the equations of matrix variables in $\Delta\mathbf{L}_{ck,\mu}$ have to be rewritten to vector variables $\mathbf{col}\Delta\mathbf{L}_{ck,\mu}$. The result is an inhomogeneous system of algebraic equations in $(n_1 + n_2)^2$ variables represented by the elements of $\mathbf{col}\Delta\mathbf{L}_{ck,\mu}$, assuming given increments of $\mathbf{col}\Delta\mathbf{A}_2$ up to $\mathbf{col}\Delta\mathbf{D}_2$.

Expanding the northwest elements of Eq.(29) and using Kronecker algebra, one has

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1\mathbf{L}_{ck,1} + \mathbf{B}_1\Delta\mathbf{C}_2\mathbf{L}_{ck,3} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1)\Delta\mathbf{L}_{ck,1} + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2\Delta\mathbf{L}_{ck,3} + \\ & \mathbf{L}_{ck,1}\mathbf{C}_1^T\Delta\mathbf{D}_2^T\mathbf{B}_1^T + \mathbf{L}_{ck,2}\Delta\mathbf{C}_2^T\mathbf{B}_1^T + \Delta\mathbf{L}_{ck,1}(\mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_1^T\mathbf{D}_2^T\mathbf{B}_1^T) + \Delta\mathbf{L}_{ck,2}\mathbf{C}_2^T\mathbf{B}_1^T = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_3\mathbf{col}\Delta\mathbf{L}_{ck,1} + [(\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2) \otimes \mathbf{I}_{n_1}]\mathbf{col}\Delta\mathbf{L}_{ck,2} + [\mathbf{I}_{n_1} \otimes (\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2)]\mathbf{col}\Delta\mathbf{L}_{ck,3} = \\ & = (\mathbf{L}_{ck,3}^T \otimes \mathbf{B}_1)\mathbf{col}\Delta\mathbf{C}_2 + (\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{L}_{ck,2})\mathbf{col}\Delta\mathbf{C}_2^T \\ & \quad + [(\mathbf{C}_1\mathbf{L}_{ck,1})^T \otimes \mathbf{B}_1]\mathbf{col}\Delta\mathbf{D}_2 + [\mathbf{B}_1 \otimes (\mathbf{L}_1\mathbf{C}_1^T)]\mathbf{col}\Delta\mathbf{D}_2^T \end{aligned} \quad (31)$$

where $\mathbf{H}_3 \triangleq \mathbf{I}_{n_1} \otimes (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1) \otimes \mathbf{I}_{n_1}$.

The northeast elements yield

$$\mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{L}_{ck,2} + \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{C}_2 \mathbf{L}_{ck,4} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1) \Delta \mathbf{L}_{ck,2} + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \Delta \mathbf{L}_{ck,4} \quad (32)$$

$$+ \mathbf{L}_{ck,1} \mathbf{C}_1^T \Delta \mathbf{B}_2^T + \mathbf{L}_{ck,2} \Delta \mathbf{A}_2^T + \Delta \mathbf{L}_{ck,1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{B}_2^T + \Delta \mathbf{L}_{ck,2} \mathbf{A}_2^T = \mathbf{0}. \quad (33)$$

The southwest elements are

$$\Delta \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{L}_{ck,1} + \Delta \mathbf{A}_2 \mathbf{L}_{ck,3} + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \Delta \mathbf{L}_{ck,1} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{L}_{ck,3} \quad (34)$$

$$+ \mathbf{L}_{ck,3} \mathbf{C}_1^T \Delta \mathbf{D}_2^T \mathbf{B}_1^T + \mathbf{L}_{ck,4} \Delta \mathbf{C}_2^T \mathbf{B}_1^T + \Delta \mathbf{L}_{ck,3} (\mathbf{A}_1^T + \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{B}_1^T) + \Delta \mathbf{L}_{ck,4} \mathbf{C}_2^T \mathbf{B}_1^T = \mathbf{0}. \quad (35)$$

The southeast elements yield

$$\Delta \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{L}_{ck,2} + \Delta \mathbf{A}_2 \mathbf{L}_{ck,4} + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \Delta \mathbf{L}_{ck,2} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{L}_{ck,4} \quad (36)$$

$$+ \mathbf{L}_{ck,3} \mathbf{C}_1^T \Delta \mathbf{B}_2^T + \mathbf{L}_{ck,4} \Delta \mathbf{A}_2^T + \Delta \mathbf{L}_{ck,3} \mathbf{C}_1^T \mathbf{B}_2^T + \Delta \mathbf{L}_{ck,4} \mathbf{A}_2^T = \mathbf{0}. \quad (37)$$

Extending the columnizing operations as aforementioned to all the four matrix elements $\Delta \mathbf{L}_{ck,\mu}$ in an abbreviated denotation, one has

$$\mathbf{S}_M \begin{pmatrix} \text{col } \Delta \mathbf{L}_{ck,1} \\ \text{col } \Delta \mathbf{L}_{ck,2} \\ \text{col } \Delta \mathbf{L}_{ck,3} \\ \text{col } \Delta \mathbf{L}_{ck,4} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{Ak} \text{col} \Delta \mathbf{A}_2 + \mathbf{S}_{Bk} \text{col} \Delta \mathbf{B}_2 + \mathbf{S}_{Ck} \text{col} \Delta \mathbf{C}_2 + \mathbf{S}_{Dk} \text{col} \Delta \mathbf{D}_2. \quad (38)$$

The dimensions are systematically $(n_1 + n_2)^2$ rows and n_2^2 , $n_2 m_2$, $r_2 n_2$, $r_2 m_2$ columns for \mathbf{S}_{Ak} through \mathbf{S}_{Dk} , respectively.

In MATLAB, \mathbf{S}_M and \mathbf{S}_{Ak} through \mathbf{S}_{Dk} (with L1 abbreviated for $\mathbf{L}_{ck,1}$ etc.) are

```

SM=[H3, kron(B1*C2,eye(n1)), kron(eye(n1),B1*C2), zeros(n1^2,n2^2);...
    kron(B2*C1,eye(n1)),kron(A2,eye(n1))+kron(eye(n2),...
    A1+B1*D2*C1),zeros(n1*n2,n1*n2),kron(eye(n2),B1*C2);...
    kron(eye(n1),B2*C1), zeros(n1*n2,n1*n2),...
    kron(eye(n1),A2)+ kron(A1+B1*D2*C1,eye(n2)),kron(B1*C2, eye(n2)) ;...
    zeros(n2^2,n1*n1),kron(eye(n2),B2*C1),...
    kron(B2*C1,eye(n2)),kron(eye(n2),A2)+kron(A2,eye(n2))]
SA=[zeros(n1^2,n2^2); kron(eye(n2),L2)*Uperm(n2,n2); kron(L3',eye(n2));...
    kron(eye(n2),L4)*Uperm(n2,n2)+kron(L4',eye(n2))]
SB=[zeros(n1^2,n2*m2); kron(eye(n2),L1*C1')*Uperm(n2,m2); kron(L1'*C1',...
    eye(n2)); kron(eye(n2),L3*C1')*Uperm(n2,m2)+kron(L2'*C1',eye(n2))]
SC=[kron(L3',B1)+ kron(B1,L2)*Uperm(r2,n2); zeros(n1*n2, n2*r2);...
    kron(B1,L4)*Uperm(r2,n2); zeros(n2^2,n2*r2)]
SD=[kron(L1'*C1',B1)+kron(B1,L1*C1')*Uperm(r2,m2); kron(L2'*C1', B1);...
    kron(B1,L3*C1')*Uperm(r2,m2); zeros(n2^2,r2*m2)]

```

Since in Eq.(26) only the northwest submatrix is needed, a matrix $\mathbf{H}_{Ak} \in \mathcal{R}^{n_1^2 \times n_2^2}$ is selected corresponding to the first n_1^2 rows of $\mathbf{S}_M^{-1}\mathbf{S}_{Ak}$. Then the entire cross energy for increments $\Delta\mathbf{A}_2$ only, and its matricial gradient (differential sensitivity) are considered. Summing up all the outputs i excited by all the cross inputs k yields

$$\Delta I = \left[\sum_{i=1, k=1, i \neq k}^{r_1, r_1} (\mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{c}_i^T) \mathbf{H}_{Ak} \right] \text{col} \Delta \mathbf{A}_2 \triangleq \mathbf{h}_A^T \text{col} \Delta \mathbf{A}_2 . \quad (39)$$

Employing Eqs.(80), (83), (82) and (86) one finds

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{A}_2} = (\mathbf{I}_{n_2} \otimes \mathbf{h}_A^T) \frac{\partial \text{col} \Delta \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{A}_2} \quad (40)$$

$$\stackrel{(83)}{=} (\mathbf{I}_{n_2} \otimes \mathbf{h}_A^T) (\mathbf{I}_{n_2} \otimes \mathbf{U}_{n_2 n_2}) [(\text{col} \mathbf{I}_{n_2}) \otimes \mathbf{I}_{n_2}] \quad (41)$$

$$\stackrel{(82)}{=} [\mathbf{I}_{n_2} \otimes (\mathbf{h}_A^T \mathbf{U}_{n_2 n_2})] [(\text{col} \mathbf{I}_{n_2}) \otimes \mathbf{I}_{n_2}] \quad (42)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{A}_2} \stackrel{(86)}{=} \left\{ \text{loc}_{n_2} [\mathbf{U}_{n_2 n_2}^T \mathbf{h}_A] \right\}^T . \quad (43)$$

Similarly,

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{B}_2} = \left\{ \text{loc}_{m_2} [\mathbf{U}_{m_2 n_2}^T \mathbf{h}_B] \right\}^T \quad (44)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{C}_2} = \left\{ \text{loc}_{n_2} [\mathbf{U}_{n_2 r_2}^T \mathbf{h}_C] \right\}^T \quad (45)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{D}_2} = \left\{ \text{loc}_{m_2} [\mathbf{U}_{m_2 r_2}^T \mathbf{h}_D] \right\}^T . \quad (46)$$

Summation above can also be restricted to those parts where interaction is of interest. Occasionally, not all the cross elements are required.

With the definition of \mathbf{M}_2 in Eq.(24), the entire matricial gradient is

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{M}_2} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{A}_2} & \frac{\partial I}{\partial \mathbf{B}_2} \\ \frac{\partial I}{\partial \mathbf{C}_2} & \frac{\partial I}{\partial \mathbf{D}_2} \end{pmatrix} . \quad (47)$$

In order to reduce the interaction, follow the gradient

$$\Delta \mathbf{M}_2 = -\alpha \frac{\partial I}{\partial \mathbf{M}_2} . \quad (48)$$

In parallel, the prefilter is evaluated only for the sake of error-free steady state, not to reduce dynamic interaction

$$(\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0})(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A}_{clg})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Big|_{s=0} = \mathbf{I}_{2n} \quad (49)$$

$$\mathbf{V}_F = -[\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1) \mathbf{B}_1]^{-1} . \quad (50)$$

Alternatively, if inserting a (different) prefilter matrix $\bar{\mathbf{V}}_F$ (excited by the reference) with the output acting on the input of \mathbf{K} , the only difference is another resulting input matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \bar{\mathbf{V}}_F \\ \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{V}}_F \end{pmatrix}$. Without a prefilter the inputs can be considered as disturbances.

Example 2. Reducing the interaction by a dynamic state controller:

For a plant and controller of order $n_1 = 4$ and $n_2 = 3$, respectively, the results of Eqs.(48) and (43) through (47) are applied. Two strides of the step response result are shown in Fig. 7, demonstrating the effect of decoupling, and improving the tracking performance as well.

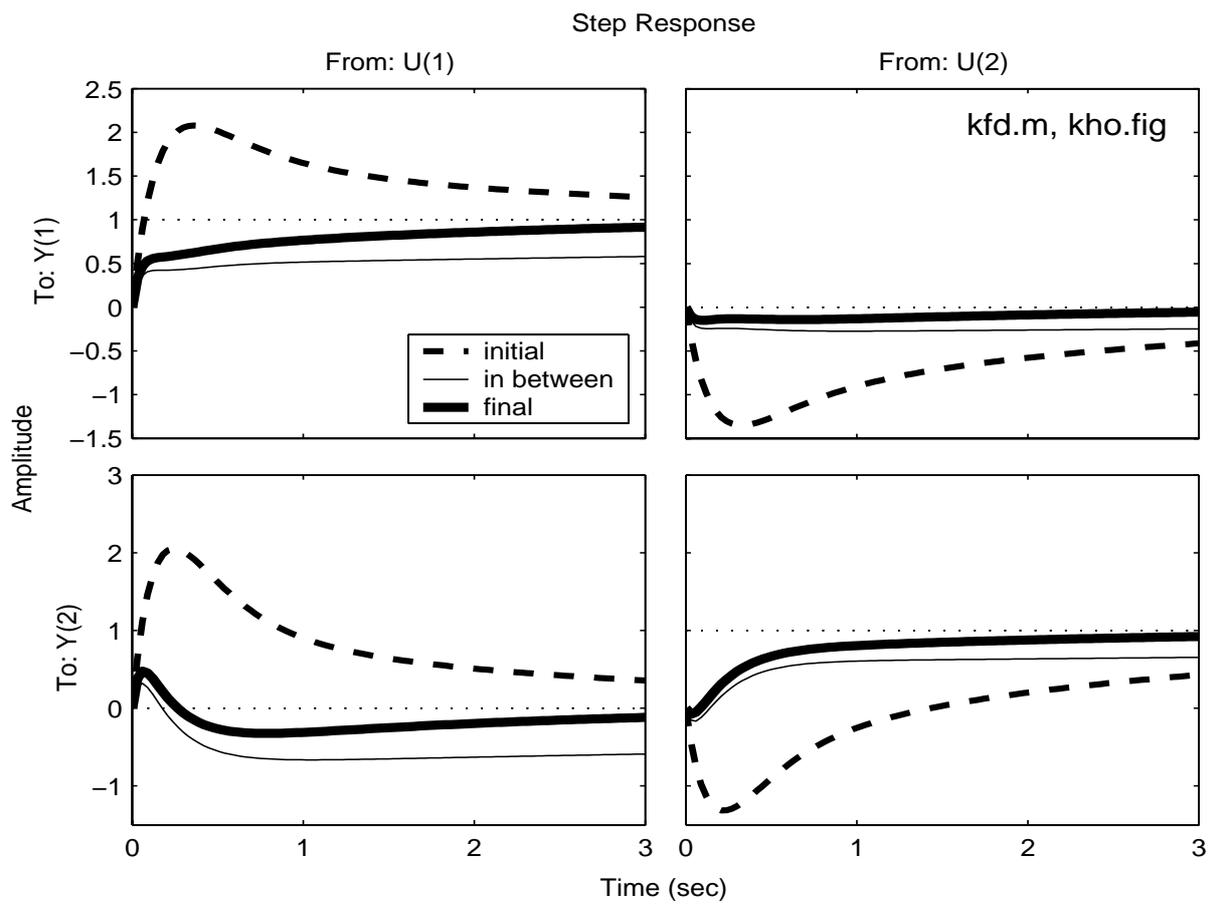


Figure 7: Step responses of a dynamic state controller with two gradient steps improving the controller

4 Disturbance Rejection

Consider the dynamic system influenced by the disturbance \mathbf{w}_d

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{w}_d, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}_y\mathbf{y}. \quad (51)$$

For impulse excitation by the k -th disturbance w_{dk} , the corresponding column \mathbf{f}_k of \mathbf{F} is relevant. Then the controllability matrix \mathbf{L}_{wk} is derived from Eq.(4), replacing \mathbf{L}_{ck} by \mathbf{L}_{wk} and \mathbf{w}_k by \mathbf{f}_k . The i -th output y_i yields an output energy $I_{wi} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{L}_{wk} \mathbf{c}_i$. Eventually, the matricial gradient results from Eq.(15) with \mathbf{L}_{ck} and I_{Gi} replaced by \mathbf{L}_{wk} and I_{wi} , respectively.

5 Conclusion

To reduce the interaction in multivariable control systems, concise gradient formulas were derived. The methods are based on the controllability Gramian and matricial gradients versus controller state matrix. Balancing the benefit of decoupling versus actuation effort in an interactive way is the main field of application. Two numerical examples of medium-size complexity illustrate the efficiency of the proposed method.

References

- Bristol, E.H., 1966, On a new measure of interaction for multivariable process control, *IEEE-Trans.* **AC-11**, pp. 133-134
- Chiu, M.-S., and Arkun, Y., 1991, A new result on relative gain array, Niederlinski index and decentralized stability condition: 2×2 plant cases, *Automatica* **27**, pp. 419-421
- Conley, A., and Salgado, M.E., 2000, Gramian based interaction measure, *39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney*, pp. 5020-5022
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A., 2002, Feedback Control of Dynamic Systems (Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey)
- Gagnon, E., Desbiens, A., and Pomerleau, A., 1999, Selection of pairing and constrained robust decentralized PI-controllers, *American Control Conference, San Diego*, pp. 4343-4347
- Goodwin, G.C., Graebe, S., and Salgado, M.E., 2000, Control System Design (Prentice-Hall)
- Korn, U., und Wilfert, H.-H., 1982, Mehrgrößenregelungen (Verlag Technik, Berlin, und Springer, Wien - NewYork)
- Jonckheere, E.A., 1984, Principal component analysis of flexible systems – open loop case, *IEEE-Trans.* **AC-29**, pp. 1095-1097
- Marx, B., Koenig, D., and Georges, D., 2004, Optimal sensor and actuator location for descriptor systems using generalized gramians and balanced realizations, *American Control Conference, Boston*, pp. 2729-2734
- Salgado, M.E., and Conley, A., 2004, MIMO interaction measure and controller structure selection, *Int. J. Control* **77**, pp. 367-383
- Weinmann, A., 1991, Uncertain Models and Robust Control (Vienna and NewYork: Springer)
- Weinmann, A., 2001, Gradients of norms, traces and determinants for automatic control applications, *Int. J. Automation Austria* **9**, H.1/2, pp. 36-50
- Weinmann, A., 2003, Control systems design driven by worst-initial energy sensitivity, *Cybernetics and Systems: An International Journal* **34**, No.8, pp. 591-615
- Zhu, Z.-X. 1996, Variable pairing selection based on individual and overall interaction measures, *Industrial Engineering in Chemical Research* **35**, pp. 4091-4099

Appendix

A Controllability and Observability Gramian

The result in Eq.(3) is given by the following properties

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}e^{\mathbf{A}^T t} = \mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t} = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{A}^T . \quad (52)$$

By differentiating the product $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}$ with respect to t and by using

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_1(t)\mathbf{F}_2(t) = \frac{\partial\mathbf{F}_1(t)}{\partial t}\mathbf{F}_2(t) + \mathbf{F}_1(t)\frac{\partial\mathbf{F}_2(t)}{\partial t} \quad (53)$$

where $\mathbf{F}_1 \triangleq e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ and $\mathbf{F}_2 \triangleq \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}$, one finds

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{A}^T . \quad (54)$$

Integrating both sides of Eq.(54) with the integration bounds 0 and ∞ , defining the controllability Gramian \mathbf{L}_C and combining yields

$$\mathbf{L}_c \triangleq \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (55)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \Big|_0^\infty = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c\mathbf{A}^T . \quad (56)$$

Hence, the matrix \mathbf{L}_c is proved to be the unique solution of the Lyapunov equation

$$\mathbf{A}\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} . \quad (57)$$

An asymptotically stable system \mathbf{A} , \mathbf{B} is controllable if the controllability matrix is nonsingular.

Physically speaking, \mathbf{L}_c is the covariance of the state if the input to the system is white noise. In MATLAB the command is `gram(A, B)`.

For the sake of not confusing with, the observability Gramian \mathbf{L}_o for an asymptotically stable system containing \mathbf{A} , \mathbf{C} results from `gram(A', C')` and

$$\mathbf{A}^T\mathbf{L}_o + \mathbf{L}_o\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (58)$$

$$\mathbf{L}_o = \int_0^\infty \exp(\mathbf{A}^T\tau)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\exp(\mathbf{A}\tau)d\tau . \quad (59)$$

B Incremental Actuating Energy

For the matricial gradient of the actuating energy I_u with respect to \mathbf{K}_y (*Weinmann, A., 2003*), one finds

$$I_u \triangleq \int_0^\infty \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{K}_y^T \mathbf{R} \mathbf{K}_y \mathbf{C} \mathbf{x}(t) dt \quad (60)$$

$$I_u = \mathbf{x}_0^T \int_0^\infty e^{\mathbf{A}_{cl}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{K}_y^T \mathbf{R} \mathbf{K}_y \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_{cl} t} dt \mathbf{x}_0 \triangleq \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_{Ry} \mathbf{x}_0 \quad (61)$$

$$\mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P}_{Ry} + \mathbf{P}_{Ry} \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}_y^T \mathbf{R} \mathbf{K}_y \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (62)$$

$$\frac{\partial I_u}{\partial \mathbf{K}_y} = -\{\mathbf{I}_m \otimes [(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0)^T \mathbf{E}_1^T \times (\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{C}^T)]\} \{(\mathbf{col} \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r\} \quad (63)$$

$$\stackrel{(86)}{\equiv} -(\mathbf{loc}_r[(\mathbf{E}_2^T \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0)])^T \quad (64)$$

$$\equiv -\mathbf{E}_2^T \{\mathbf{loc}_n[(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{U}_{nn})\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0)]\}^T \mathbf{C}^T \quad (65)$$

$$\stackrel{(70)}{\equiv} -\mathbf{E}_2^T \{\mathbf{loc}_n[\mathbf{col} \mathbf{X} + \mathbf{U}_{nn} \mathbf{col} \mathbf{X}]\}^T \mathbf{C}^T \quad (66)$$

$$= -2\mathbf{E}_2^T \mathbf{X} \mathbf{C}^T \quad (67)$$

$$\text{where } \mathbf{X} \triangleq \text{lyap}(\mathbf{A}_{cl}, \mathbf{A}_{cl}', -\mathbf{x}_0 * \mathbf{x}_0'), \quad \mathbf{A}_{cl} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_{cl}^T = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \quad (68)$$

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{col} \mathbf{X} = \mathbf{col}(\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T) \quad (69)$$

$$\mathbf{col} \mathbf{X} = (\mathbf{A}_{cl} \oplus \mathbf{A}_{cl})^{-1}(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0) = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0) . \quad (70)$$

C Abbreviations and Correspondences

$$\frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial e} = \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e} \text{adj} \mathbf{A} \right]; \quad (71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial e} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e} \mathbf{A}^{-1}; \quad (72)$$

$$\text{Kronecker matrix } \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial K_{y,ij}} = \mathbf{E}_{ij} \triangleq \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \text{ with unit vector } \mathbf{e}_i; \quad (73)$$

$$\text{tr}[\mathbf{M} \mathbf{E}_{ij}] = M_{ji} = (\mathbf{M}^T)_{ij}; \quad (74)$$

$$\text{tr}[\mathbf{M}^{(n \times n)}] \equiv (\mathbf{col} \mathbf{I}_n)^T \mathbf{col} \mathbf{M}; \quad (75)$$

$$\mathbf{col}(\mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{G}) \equiv (\mathbf{G}^T \otimes \mathbf{H}) \mathbf{col} \mathbf{F}; \quad (76)$$

$$\mathbf{G}^{(k \times l)} \otimes \mathbf{H}^{(n \times m)} \equiv \mathbf{U}_{kn} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{G}) \mathbf{U}_{ml}; \quad (77)$$

$$\mathbf{col} \mathbf{K}^T = \mathbf{U}_{mr} \mathbf{col} \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times r}; \quad (78)$$

$$\text{permutation matrix } \mathbf{U}_{kl}^{(kl \times kl)} \triangleq \sum_i^k \sum_j^l \mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)} \otimes (\mathbf{E}_{ij}^{(k \times l)})^T; \quad (79)$$

matrix product differential for the matrix product $\in \mathcal{R}^{nr \times ms}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \mathbf{A} \mathbf{B}^{(n \times m)}(\mathbf{M}) = (\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{M}}; \quad (80)$$

$$\text{decolumning } \mathbf{h} \in \mathcal{R}^{1 \times mr} \quad \text{loc}_m[\mathbf{h}] = \sum_{i=1}^r (\mathbf{e}_i^{(r \times 1)})^T \otimes \{[(\mathbf{e}_i^{(r \times 1)})^T \otimes \mathbf{I}_m] \cdot \mathbf{h}\}; \quad (81)$$

$$\text{mixed product rule } (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{G}) = (\mathbf{A} \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{B} \mathbf{G}); \quad (82)$$

$$\text{for } \mathbf{K}_y \in \mathcal{R}^{m \times r} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_y} \text{col } \mathbf{K}_y = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{U}_{r,m}) [(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r] \in \mathcal{R}^{m^2 r \times r} \quad (83)$$

$$\text{and } \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_y} \text{col } \mathbf{K}_y^T = (\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r \in \mathcal{R}^{m^2 r \times r}, \quad \text{col } \mathbf{I}_n \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i; \quad (84)$$

$$\text{col}(\mathbf{c} \mathbf{c}^T) = \text{col}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{c}^T) = \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \text{loc}_n(\mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T; \quad (85)$$

$$[\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{X}^{(1 \times mr)}] [(\text{col } \mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_r] \equiv [\text{loc}_r \{\mathbf{X}^T\}]^T. \quad (86)$$

Polvorgaberegler für Regelstrecken mit begrenzter Stellgröße

Mikuláš Huba

Slovakische Technische Universität in Bratislava, Fak. Elektrotechnik und
Informationstechnik

Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slowakei

email: mikulas.huba@stuba.sk

Kurzfassung: In diesem Beitrag werden neue Verfahren zum Entwurf von Polvorgabereglern mit beschränkter Stellgröße für Regelstrecken mit einer dominanten Dynamik erster und zweiter Ordnung betrachtet. Die Verfahren liefern einfache und zugleich zuverlässige Entwurfsergebnisse. Sie sind vor allem für die Regelung von instabilen Regelstrecken und für hohe Qualitätsansprüche an das dynamische Verhalten und an den stationären Zustand des Regelkreises bestimmt.

Bei der Regelung von Strecken erster Ordnung mit einem P-Regler führt die Stellgrößenbeschränkung zu keinen Nebenwirkungen wie Überschwingen, Oszillationen oder Instabilität führt. Probleme sind hier aber schon mit einem PI-Regler gekoppelt. Die dauernde Regelabweichung kann man deshalb besser anhand einer Rekonstruktion und Kompensation einer Streckenstörung basiertes I-Anteiles bekämpfen ohne den Windup-Effekt zu verursachen. Im Fall von Strecken höherer Ordnung versucht man weiter, die Regelungsaufgabe auf mehrere Teilaufgaben erster Ordnung zurückzuführen. Die Lösung dieser Aufgabe ist im Fall von reellen Polen möglich (obwohl nicht eindeutig). Auch hier kann man einen windupfreien I-Anteil durch Rekonstruktion und Kompensation einer Störung entwerfen.

Kombiniert man solche Reglerentwürfe, die für den doppelten Integrator durchgeführt wurden, mit einer Approximation der Regelstrecken durch I_2T_1 -Glieder, dann erhält man eine einfache und leicht benutzbare Methode für den Reglerentwurf mit Berücksichtigung von Begrenzungen und Zeitverzögerungen, die als eine Erweiterung des Verfahrens nach Ziegler und Nichols angesehen werden kann.

1. Einleitung

Wozu braucht man immer noch neue Methoden für den Reglerentwurf? Weshalb sind die in letzter Zeit oft betrachteten Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen von Interesse? Die Antwort

ist einfach: Die lineare Regelungstheorie reicht nicht für alle Anwendungen. Neue Motivation resultiert meistens aus der Regelung von instabilen Regelstrecken und von Strecken mit hohen Qualitätsansprüchen sowohl an das dynamische Verhalten als auch an den stationären Zustand. Bei derartigen Aufgaben, bei denen die traditionellen linearen Methoden meist versagen, kann man nicht auf die Stellgrößenbeschränkung durch einen langsameren Übergangsprozess und eine Verkleinerung der Reglerverstärkung ausweichen. Auch die üblichen Anti-(Reset)-Windup Maßnahmen (siehe z.B. [19]) führen hier zu Überschwingen und Instabilität, falls für die Stellgröße die Beschränkungen wirksam werden. Seit Jahren werden daher immer neue Lösungen vorgeschlagen ([2], [6], [20-23]), die immer komplexer werden und oft eine spezielle Optimierungsverfahren benötigen. Dies bereitet nicht nur Probleme bei ihrem Einsatz für die Regelung schneller und nichtlinearer Regelstrecken, sondern verhindert auch ihre breite Akzeptanz in der Praxis. Im Folgenden wird gezeigt, dass im Fall von einfachen Regelstrecken die Aufgabe auch mit entsprechend einfachen Mitteln und durch einfaches und transparentes Vorgehen, das aus den linearen Methoden der Polvorgabe abgeleitet wird, gelöst werden kann.

2. Begrenzter P-Polvorgaberegler

Zuerst wird eine Strecke erster Ordnung

$$\frac{dy(t)}{dt} = K_s u(t) - ay(t) \quad \text{Gl (1)}$$

mit einem Sollwert $w(t)$ betrachtet, wobei es abschnittsweise $w=\text{konst.}$ gilt. Bei einem linearen Polvorgaberegler wird gefordert, dass die Abnahme der Regelabweichung proportional zum augenblicklichen Wert der Abweichung sein soll

$$\frac{d(w-y)}{dt} = \alpha(w-y); \text{ mit } \alpha < 0 \quad \text{Gl (2)}$$

Der Quotient α - der Pol des geschlossenen Regelkreises - muss $\alpha < 0$ erfüllen. Aus dem Vergleich der rechten Seiten von Gl (1) und Gl (2) folgt dann der P-Regler mit statischer Vorsteuerung:

$$u = K_R (w-y) + aw/K_s ; \text{ mit } K_R = -(a + \alpha)/K_s \quad \text{Gl (3)}$$

In realen Regelkreisen muss der Reglerausgang immer in einem vorgegebenen Bereich gehalten werden, was z.B. durch

$$u_r = \text{sat}(u) = \begin{cases} U_1 & u < U_1 \\ u & U_1 \leq u \leq U_2 \\ U_2 & u > U_2 \end{cases} \quad \text{Gl (4)}$$

berücksichtigt werden kann. Unter diesen Bedingungen ist aber der regelmäßige Abbau der Abweichung nach Gl (2) nur in einem begrenzten Bereich um die gewünschte Lage $y_w=0$ zu erzielen. Außerhalb dieses Bereiches wird die Regelabweichung zwar zeitoptimal, aber langsamer als im Fall der Polvorgaberegung nach Gl (2) abnehmen (Bild 1).

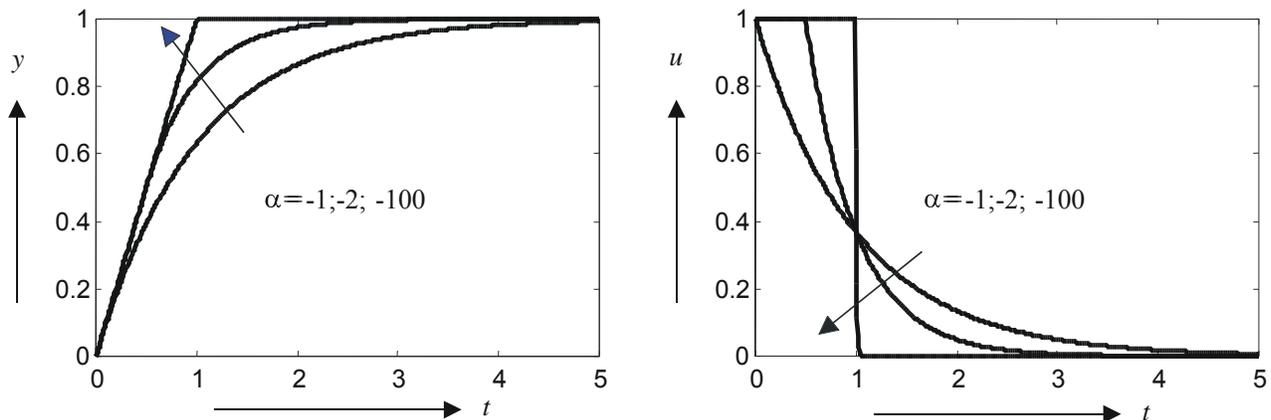


Bild. 1. P-Regler mit Begrenzung der Stellgröße für verschiedene Polen – die Übergangsprozesse reichen von der völlig linearen bis zu den zeitoptimalen. $a = 0; U_1 = -1; U_2 = 1; K_s = 1$.

Umgekehrt nimmt die Regelabweichung des Polvorgabereglers im Proportionalbereich langsamer ab als eine entsprechende zeitoptimale Regelung. Der P-Polvorgaberegler nach Gl (3) mit der Stellgrößenbeschränkung nach Gl (4) kann also im Grenzfall als zeitoptimaler Regler bezeichnet werden. Er nähert sich dem zeitoptimalen Regler für hinreichend großes α , falls für seine Ausgangsgröße die zusätzliche Bedingung

$$\left| \frac{dy(t)}{y(t)} \right| \leq |\alpha| \quad \text{Gl (5)}$$

erfüllt ist. Es ist leicht zu zeigen (z.B. mit Hilfe der Lyapunov-Funktion $V=y^2$, vgl. [5]), dass ein solcher Regelkreis mit Stellgrößenbeschränkung immer stabil bleibt. Der Regelvorgang wird nur entsprechend der Begrenzung mehr oder weniger verlangsamt, ganz im Sinne des Mottos „was du heut‘ nicht kannst besorgen, das verschiebe auf morgen“ [20].

3. P-Regler mit einem I-Anteil

Die Probleme der Regelungstechnik beginnen im Augenblick, wenn man über Beseitigung möglicher Störungen sprechen will. Dazu wird meistens automatisch ein paralleler PI-Regler benutzt, der zurzeit eine Mehrheit von 95% aller industriellen Anwendungen vorstellt. Geht man aber aus einem beobachterbasierten Reglerentwurf aus, dann bekommt man eine andere Lösung! Hat es Sinn sich mit diesem Detail zu beschäftigen, wenn die Interesse der Praxis so deutlich sind? Wahrscheinlich nicht, obwohl die lineare parallele PI-Regler bringen auch andere mehr fühlbare Probleme mit: Sie können sehr oft nicht direkt eingesetzt werden, weil sie einen s.g. Windupdefekt verursachen. Daher werden sie zusätzlich durch verschiedene Anti-Reset-Windup Maßnahmen ergänzt, um das unerwünschte Integrieren zu stoppen. Durch diese Maßnahmen sind letztlich ihre Eigenschaften wesentlich verändert. Bei dem beobachterbasierten Reglerentwurf gibt es dieses Problem nicht. Ein Vergleich beider dieser Lösungen (siehe z.B. [8]) zeigt souverän bessere Eigenschaften des beobachterbasierten Entwurfs, weil er keine zusätzlichen Maßnahmen braucht. Dies ist dann vorteilhaft besonders bei Verallgemeinerungen zur Strecken höherer Ordnung, zur Strecken mit der Totzeit, usw.

Wie war es aber möglich, dass diese Unvollkommenheit so lange nicht bemerkt geblieben ist? Die Antwort ist sehr einfach: es gibt zwei dynamische Klassen der PI-Regler. Der lineare PI-Regler stellt eine optimale Lösung für die dominante Dynamik erster Ordnung in der Rückkopplung (eine Sensor- oder Filterdynamik) vor. Diese ist aus einer statischen Vorsteuerung entwickelt (Bild. 2) und kann benutzt werden, wenn es um stabile Strecke erster Ordnung geht. Diese mehr robuste und weniger rauchensensitive Lösung liefert aber langsamere Dynamik, die nach einem Führungssprung mit einem exponentiellen Stellgrößenverlauf reagiert.

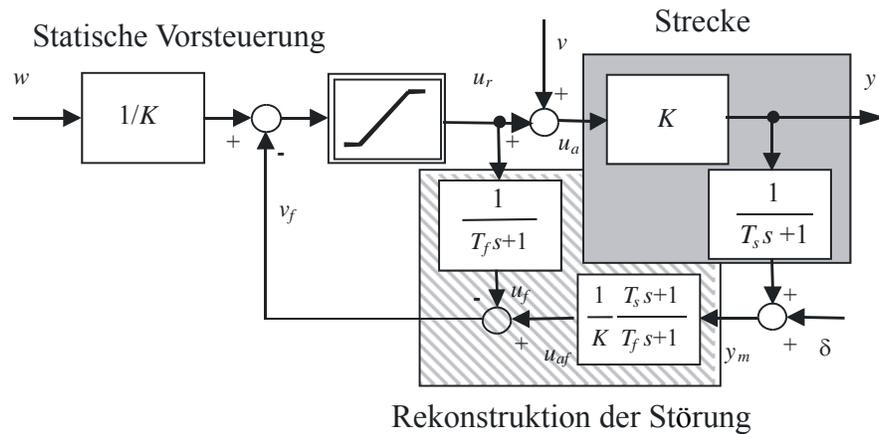


Bild 2. PI_0 -Regler: Statische Vorsteuerung mit Rekonstruktion und Kompensation einer Störung.

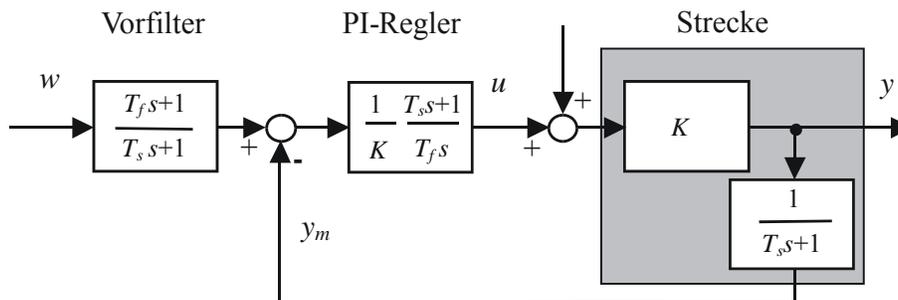


Bild 3. Äquivalente Struktur zum Bild 2 mit einem linearen PI-Regler und einem Vorfilter.

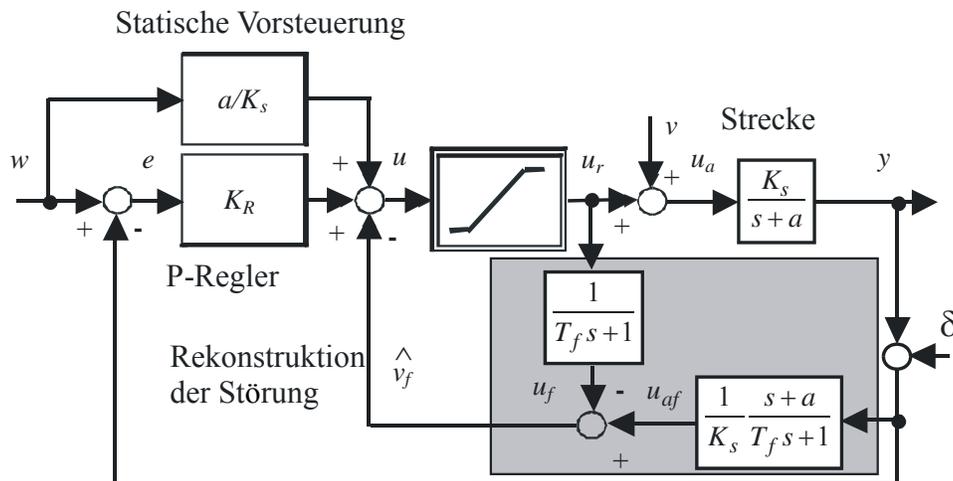


Bild 4. PI_1 -Regler: Einführung des I-Anteils durch Rekonstruktion und Kompensation einer Eingangsstörung der Strecke erster Ordnung.

Die zweite dynamische Klasse stellt eine optimale Lösung für eine Strecke erster Ordnung vor und stimmt mit dem beobachterbasierten Reglerentwurf ein (Bild.4). Hier ist schon eine Phase des Stellgrößenverlaufes auf der Begrenzung typisch. Bild 4 zeigt dann diese Struktur nach einer Umformung. Die Schleife rundum die Begrenzung gibt im Proportionalbereich die Übertragungsfunktion eines PI-Reglers. Es ist zu bemerken (siehe z.B. [2, 18]), dass die industriellen PI-Regler schon lange solche Lösung (Rückkopplung vom Begrenzungsausgang mit einem Filter) beinhalten. Zur optimalen Lösung fehlt aber die Übertragungsfunktion in der Rückkopplung.

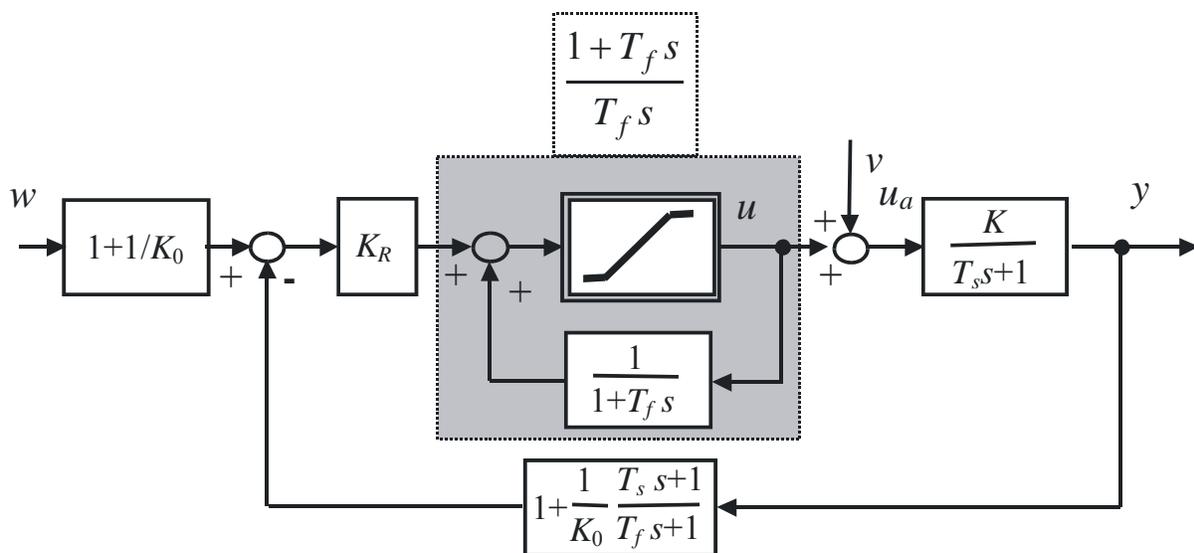


Bild.5. Umformung der Struktur aus dem Bild 4 mit $T_s = 1/a$; $K = K_s/a$; $K_0 = K_R K$.

Kombiniert man den Reglerentwurf, der für einen Integrator realisiert wurde, mit der Approximation von Regelstrecken durch $I_1 T_t$ -Glieder, dann erhält man eine Version [7, 14] des Verfahrens nach Ziegler und Nichols [23], die sich durch monotone Übergangsprozesse auszeichnet. Bevorzugt man eine Einfachheit der Einstellung, dann ist es genug mit einzigem einstellbaren Parameter c zu arbeiten, wenn

$$K_R = 1/(cT_t K_s) ; T_f = cT_t \text{ mit } c = 4.3 \quad \text{Gl (6)}$$

Der Betrag der Reglerparameter muss aber auch dem Messrauschen angepasst werden.

Bei größeren Werten der Totzeit kann diese in die Regelstruktur hineingebildet sein. Einfacher geht es bei dem PI_0 -Regler (Bild. 6). Ein Teil dieser Struktur (Bild 6) wird schon lange unter Namen λ -tuning [2] benutzt.

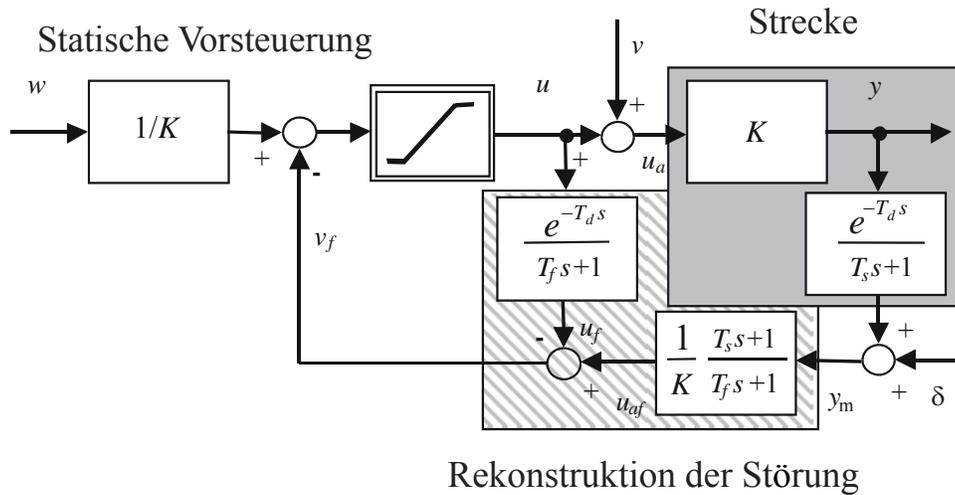


Bild 6. Prädiktiv PI_0 -Regler (PPI_0) mit Kompensation der Totzeit.

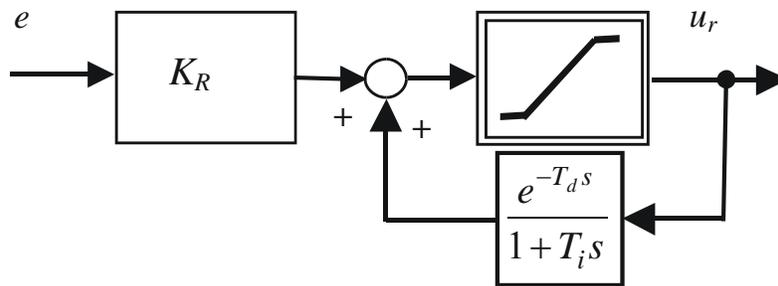


Bild 7. Prädiktiv PI -Regler nach [2], Fig.15

Bei dem PI_1 -Regler kann die Totzeit im einen Kanal, aber auch in beiden (Bild 8) kompensiert werden.

Dieser modularen Aufbau kann man auch auf weitere mögliche Situationen ausdehnen, z.B. für Kompensation einer weiteren Zeitkonstante (Bild 9), wenn man einen PID_1 -Regler bekommt.

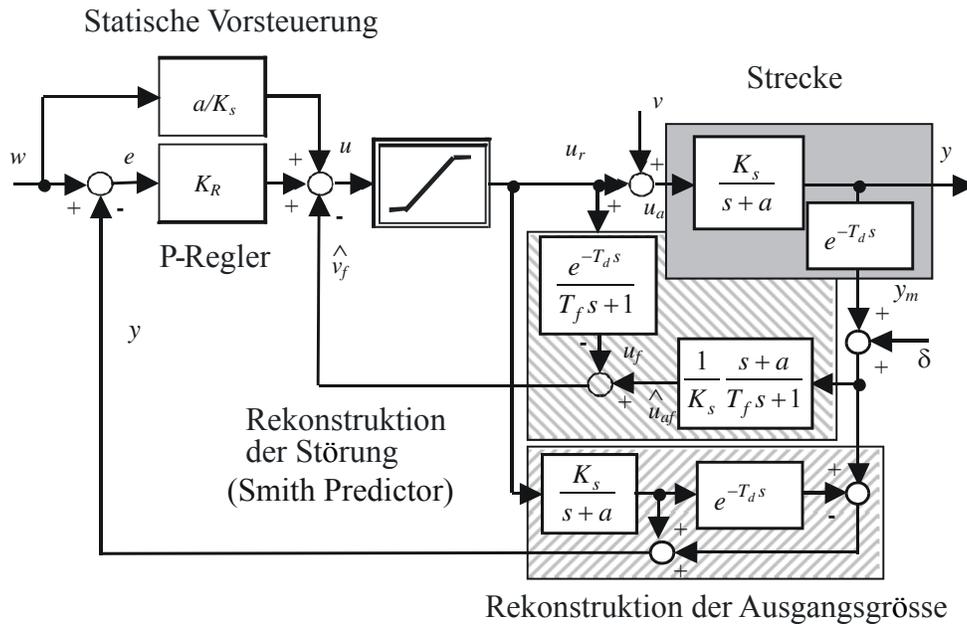


Bild 8. PPI1: Prädiktiv-PI₁-Regler mit Kompensation der Totzeit im Kanal der Störung und im Kanal der Ausgangsgröße.

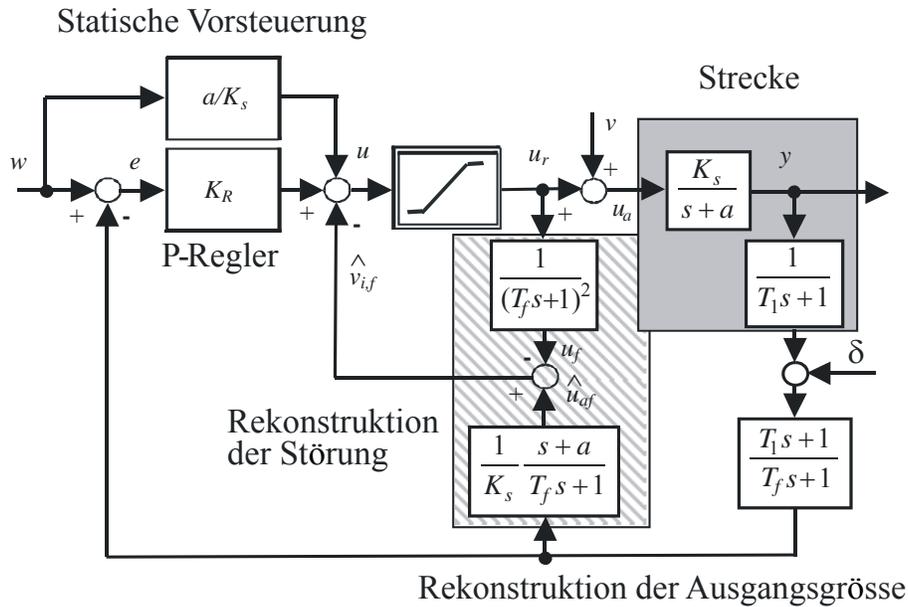


Bild 9. PID₁-Regler, der aus dem PI₁-Regler durch Kompensation der zusätzlichen Zeitkonstante T_1 entwickelt wurde.

4. Linearer Polvorgaberegler für die I2-Strecke

Im nächsten Schritt wird eine Verallgemeinerung des Polvorgabeverfahrens für Strecken zweiter Ordnung beschrieben. Der Einfachheit halber wird nur ein doppelter Integrator

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = K_S u(t) \quad \text{Gl (7)}$$

betrachtet, wobei K_S durch eine Transformation der Stellgröße immer zu $K_S=1$ normiert werden kann. Wählt man den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)=[y(t) \quad d(t)]$ mit $d(t)=dy(t)/dt$, so erhält man die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u; \quad y = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}' = [1 \quad 0] \end{aligned} \quad \text{Gl (8)}$$

Verschiebt man bei einem abschnittsweise konstanten oder einem linear wachsenden Referenzsignal $w(t)$ die gewünschte Lage durch eine Koordinatentransformation in den Ursprung des Koordinatensystems, so wird der lineare Polvorgaberegler durch

$$u = \mathbf{r}'\mathbf{x}; \quad \mathbf{r}' = [r_0 \quad r_1] \quad \text{Gl (9)}$$

beschrieben. Dabei können die Parameter (r_0, r_1) durch die gewünschten reellen Pole (α_1, α_2) z.B. nach Ackermann [1] durch

$$\mathbf{r}' = [r_0 \quad r_1] = [-\alpha_1\alpha_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2] \quad \text{Gl (10)}$$

ausgedrückt werden.

In [7, 9-14] wurde gezeigt, dass der Polvorgaberegler $u=\mathbf{r}'\mathbf{x}$ zwei Aufgaben erfüllt:

- a) Er verkleinert den Abstand

$$\rho = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}'\mathbf{x}; \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} \quad \text{Gl (11)}$$

des Zustandspunktes \mathbf{x} von einer durch α_1 definierten Geraden

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} = 0; \mathbf{a}' = [a_0 \quad a_1]\} \quad \text{Gl (12)}$$

mit der „Geschwindigkeit“

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha_2 \rho \quad \text{Gl (13),}$$

die proportional zum zweiten Pol α_2 ist. Substituiert man Gl (11) in Gl (13), so erhält man unter Berücksichtigung von Gl (8)

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{a}' \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}' [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u] = \mathbf{a}' \mathbf{A}_R \mathbf{x} ; \quad \mathbf{A}_R = \mathbf{A} + \mathbf{r}' \mathbf{b} \quad \text{Gl (14).}$$

Dabei ist \mathbf{A}_R die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises und \mathbf{a}' der linke Eigenvektor der Matrix \mathbf{A}_R zum Eigenwert α_2 , da unabhängig von \mathbf{x}

$$\mathbf{a}' [\alpha_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}_R] \mathbf{x} = 0 \quad \text{Gl (15)}$$

gilt. Gl (13) und Gl (14) können auch zur Bestimmung des Reglers benutzt werden, denn es gilt

$$u = -\frac{\mathbf{a}' (\mathbf{A} - \alpha_2 \mathbf{I})}{\mathbf{a}' \mathbf{b}} \mathbf{x} = \mathbf{r}' \mathbf{x} ; \quad \mathbf{r}' = -\frac{\mathbf{a}' (\mathbf{A} - \alpha_2 \mathbf{I})}{\mathbf{a}' \mathbf{b}} \quad \text{Gl (16).}$$

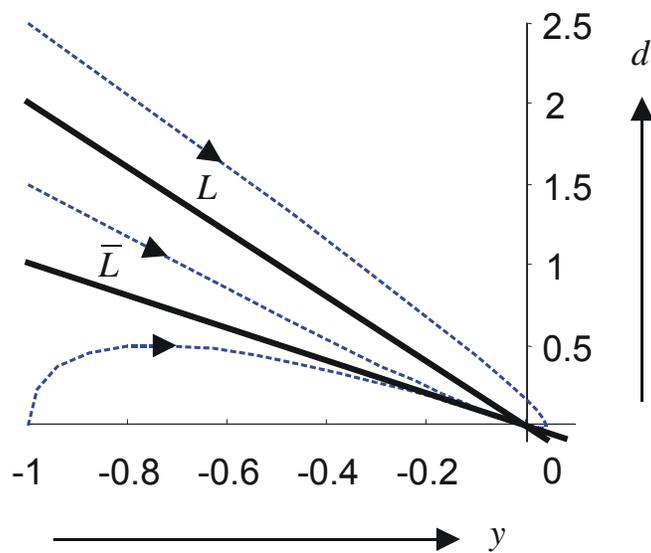


Bild 10. Die durch die Eigenvektoren definierte Bremslinien der linearen Polvorgaberegungen mit reellen Polen.

b) Für die Punkte der Geraden L mit $\rho\{\mathbf{x}\}=0$ garantiert der Polvorgaberegler eine regelmäßige Abnahme des Abstandes vom Ursprung $\rho_0\{\mathbf{x}\}=\|\mathbf{x}\|=\sqrt{y^2+d^2}$. Da die Bewegung entlang einer Geraden verläuft, kann man mit Gl (17) auch einfacher

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\alpha_1\mathbf{x}; \quad \alpha_1<0; \quad \rho=\mathbf{a}'\mathbf{x}=0 \quad \text{Gl (17)}$$

schreiben. Daraus folgt

$$[\alpha_1\mathbf{I}-\mathbf{A}_R]\mathbf{x}=0 \cup \mathbf{a}'\mathbf{x}=0 \quad \text{Gl (18)}.$$

Dies bedeutet, dass die Gleichungen für die Punkte $\mathbf{x}=q\mathbf{v}$; $q\in(-\infty,\infty)$ der Geraden L erfüllt sind, die durch den rechten Eigenvektor \mathbf{v} der Matrix \mathbf{A}_R zum Eigenwert α_1 definiert sind. Es ist bekannt (siehe z.B. [4]), dass \mathbf{a} und \mathbf{v} zueinander orthogonal sind, also $\mathbf{a}'\mathbf{v}=0$ gilt. Für $\mathbf{x}=q\mathbf{v}$ folgt aus Gl (18)

$$[\alpha_1\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{v}=\mathbf{b}\mathbf{r}'\mathbf{v} \quad \text{Gl (19)}.$$

Wählt man nun für den Eigenvektor \mathbf{v} eine Länge, die durch $\mathbf{r}'\mathbf{v}=1$ festgelegt wird, dann gilt

$$\mathbf{v}=(\alpha_1\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1/\alpha_1^2 \\ 1/\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{Gl (20)}$$

Anhand von Gl (20) und $\mathbf{a}'\mathbf{v}=0$ kann jetzt der Normalenvektor \mathbf{a} berechnet werden. Man erhält z.B. $\mathbf{a}'=[1 \quad -1/\alpha_1]$ Damit kann der Reglervektor nach Gl (16) bestimmt werden, ohne die Formel nach Ackermann zu benutzen.

Man kann leicht zeigen, dass es zu einem gewünschten Polpaar (α_1,α_2) zwei Geraden L und L' gibt (Bild 10), die durch die entsprechenden Eigenvektoren \mathbf{v} und

$$\bar{\mathbf{v}}=(\alpha_2\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad \text{Gl (21)}$$

definiert sind.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Reglerparameter unabhängig von der Reihenfolge der Pole sind. Mit anderen Worten: durch Vertauschen der Reihenfolge der Pole kann die lineare Polvorgabedynamik nicht beeinflusst werden. Die Zustandstrajektorien können die Geraden L

und L' nie schneiden (siehe z.B. [15]). D.h., dass die mit der Geschwindigkeit 0 startenden Trajektorien nie die Gerade mit der größeren Neigung erreichen können, sondern immer gegen die flachere Gerade konvergieren.

5. Das Proportionalband und optimale Bremstrajektorien

Alle Punkte, für die die zugehörige Stellgröße innerhalb der Begrenzungen liegt, werden im Folgenden als Proportionalband P_b bezeichnet. Die Grenzen des Proportionalbandes P_b sind parallel zum Vektor \mathbf{z} , der orthogonal zum Reglervektor ist ($\mathbf{r}^t \mathbf{z}=0$). Solche Vektoren können mit Gl (9) bestimmt werden. Man erhält z.B.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{Gl (22)}$$

Wenn man einen Punkt der Phasenebene mit

$$\mathbf{x} = x_v \mathbf{v} + x_z \mathbf{z} \quad \text{Gl (23)}$$

Bezeichnet, dann gilt für das Proportionalband wegen $\mathbf{r}^t \mathbf{z}=0$ die Beziehung

$$P_b = \{ \mathbf{x} = x_v \mathbf{v} + x_z \mathbf{z} \mid x_v \in \langle U_1, U_2 \rangle \} \quad \text{Gl (24)}$$

Die Grenzpunkte X_0^j der Geraden L des Proportionalbandes sind mit $\mathbf{r}^t \mathbf{x} = \mathbf{r}^t q \mathbf{v} = U_j$ durch

$$X_0^j = \begin{bmatrix} y_0^j \\ d_0^j \end{bmatrix} = \mathbf{v} U_j \quad \text{Gl (25)}$$

definiert (Bild 11). Es ist interessant zu bemerken, dass die Bewegung entlang einer Bremsgeraden L formal durch die gleiche Gl (17) beschrieben wird wie bei Strecken 1. Ordnung nach Gl (2). Dasselbe gilt auch für die Abhängigkeit der Stellgröße, die entlang L proportional zur Abweichung von der gewünschten Lage wächst. Für die Trajektorien, deren Anfangspunkte auf der Geraden L außerhalb des Proportionalbandes P_b liegen, ist es jedoch nicht mehr möglich, entlang L in den Ursprung zu fahren. Diese Teile der Geraden können also nicht mehr als optimale Bremskurven und damit als Ziel der Beschleunigungsphase betrachtet werden. D.h., die Bremstrajektorien müssen hier neu konzipiert werden.

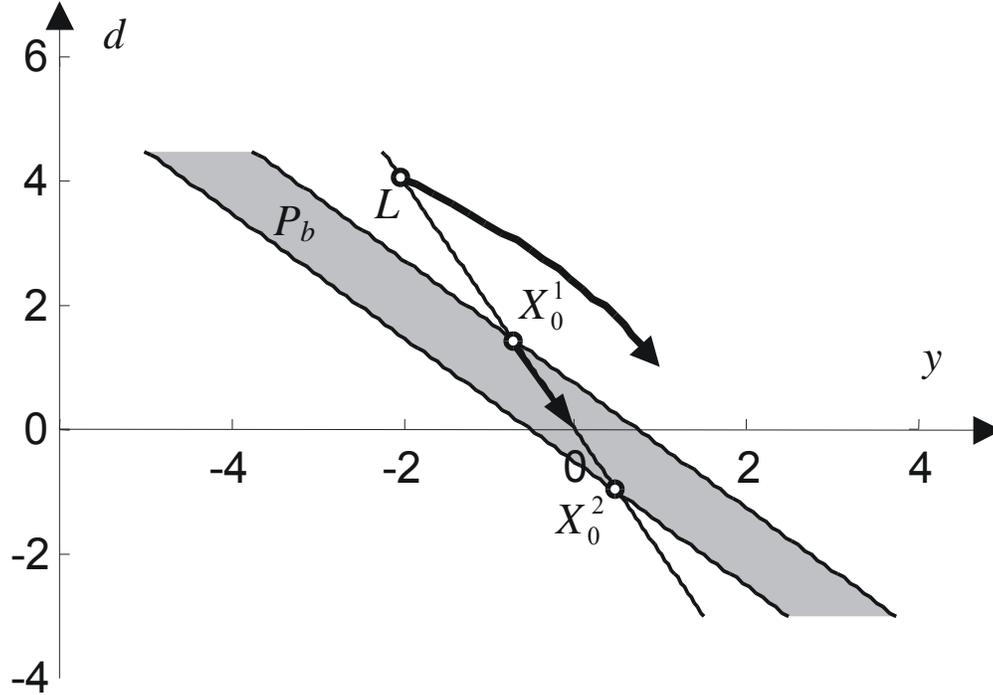


Bild 11. Die Teile der linearen Bremslinien, die außerhalb des Proportionalbereichs liegen, können nicht als Ziel der Beschleunigungsphase benutzt werden.

Geht man von X_0^j aus in der Zeit zurück aus dem Proportionalband heraus und versucht dann, eine Analogie zu den Strecken 1. Ordnung zu finden, so muss das Abbremsen mit einem Grenzwert der Stellgröße U_j voraussetzen. Der Zustandspunkt bewegt sich dann aus dem Anfangszustand X_0^j mit der Zeit τ zurück in die Vergangenheit durch die Punkte

$$\mathbf{x}(\tau)^j = e^{\Lambda(-\tau)} X_0^j + U_j \int_0^{-\tau} e^{\Lambda(-\tau-\vartheta)} \mathbf{b} d\vartheta; \quad j=1,2 \quad \text{Gl (26).}$$

Für den doppelten Integrator kann man dann schreiben (siehe z.B. [4])

$$\mathbf{x}(\tau)^j = \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_0^j + \begin{bmatrix} \tau^2/2 \\ -\tau \end{bmatrix} U_j; \quad j=1, 2 \quad \text{Gl (27).}$$

Für jede durch α_1 definierte Bremsstrecke X_0^j ; $j=1, 2$ erhält man einen zusätzlichen Ast (Bild 12). Die beiden Äste bilden dann zusammen eine optimale Bremskurve (OBK^j), die (nach Elimination der Zeit) auch in der Form

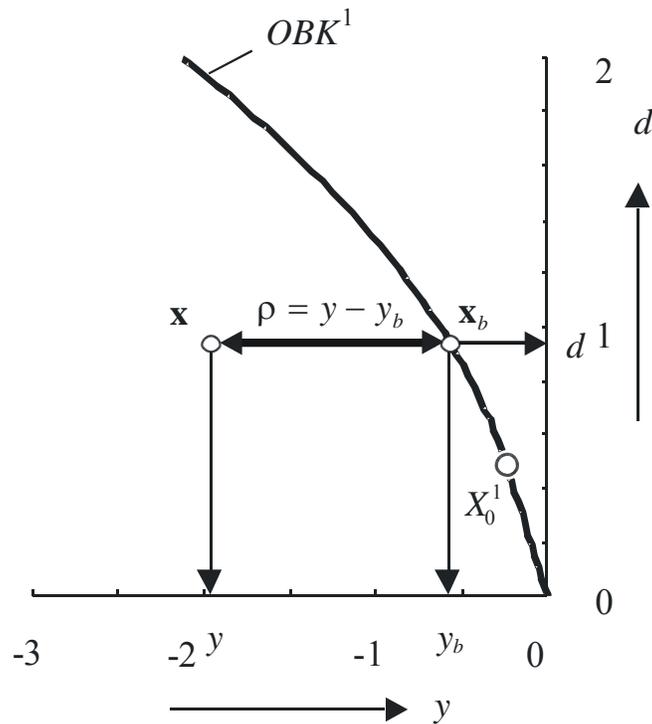


Bild 12. Optimale Bremstrajektorie eines Systems mit Begrenzung der Stellgröße.

$$y_b = \left\langle \begin{array}{l} \frac{d}{\alpha_1}; \\ d \in \left(\frac{U_2}{\alpha_1}, \frac{U_1}{\alpha_1} \right) \end{array} \right. \quad \text{Gl (28)}$$

$$\frac{d^2 - (d_0^j)^2}{2U_j} + y_0^j = \frac{d^2 + \left(\frac{U_j}{\alpha_1} \right)^2}{2U_j}; \quad d \notin \left(\frac{U_2}{\alpha_1}, \frac{U_1}{\alpha_1} \right) \quad j=1, 2$$

dargestellt werden kann. Für die Bewegung entlang der Kurve OBK^j erhält man einen Stellgrößenverlauf, der identisch mit dem Stellgrößenverlauf der begrenzten Polvorgaberegung bei Strecken 1. Ordnung ist. Berücksichtigt man die Anmerkung zur Aufteilung der Phasenebene, dann kann U_j in Gl (28) durch

$$U_j = \left\langle \begin{array}{l} U_1; \quad y < 0 \\ U_2; \quad y > 0 \end{array} \right. \quad \text{Gl (29)}$$

berechnet werden.

6. Zeitoptimale Dynamik der Polvorgabe-Akzelleration

Es wird nun versucht, ein Steuergesetz zu finden, das den Abstand ρ des Zustandspunktes \mathbf{x} von der Kurve OBK^j entsprechend Gl (2) mit dem Quotienten α_2 systematisch verkleinert. Eine der unendlich vielen Möglichkeiten, den Abstand zu messen, besteht darin, den Abstand parallel zur y -Achse zu definieren (Bild 12):

$$\rho = y - y_b \quad \text{Gl (30)}$$

Weil für $d \in (U_2/\alpha_1, U_1/\alpha)$ der entsprechende Regler durch Gl (10) bzw. Gl (16) und Gl (20) gegeben ist (Bild 13), erhält man für größere Geschwindigkeiten d das Steuergesetz aus der Forderung

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial d} \frac{dd}{dt} = d - \frac{d}{U_j} u = \alpha_2 \rho \quad \text{Gl (31)}$$

mit

$$u = \left[1 - \alpha_2 \frac{y - y_b}{d} \right] U_j = \left[1 - \alpha_2 \frac{y - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{U_j} + \frac{U_j}{\alpha_1^2} \right)}{d} \right] U_j; d \notin \left(\frac{U_2}{\alpha_1}, \frac{U_1}{\alpha_1} \right) \quad \text{Gl (32)}$$

In beiden Algorithmen muss noch die Begrenzung $u_r = \text{sat}(u)$ berücksichtigt werden. Wählt man relativ langsame Pole ($\alpha_{1,2} \rightarrow 0^-$, Bild 13 oben), dann ist der Proportionalbereich relativ breit. Relativ kleine Störungen bringen dann den Zustand nie aus der Arbeitszone des linearen Reglers (grau). Für schnellere Pole wird der Proportionalbereich und damit auch der Arbeitsbereich des linearen Reglers schmaler (Bild 13 unten). Im Grenzfall $\alpha_{1,2} \rightarrow -\infty$ geht P_b in die Schaltkurve des zeitoptimalen Reglers über. Der Arbeitsbereich des linearen Reglers verschwindet dann völlig. Der neue Regler umfasst also sowohl lineare Polvorgaberegler als auch zeitoptimale Zweipunktregler, die jeweils Grenzfälle darstellen.

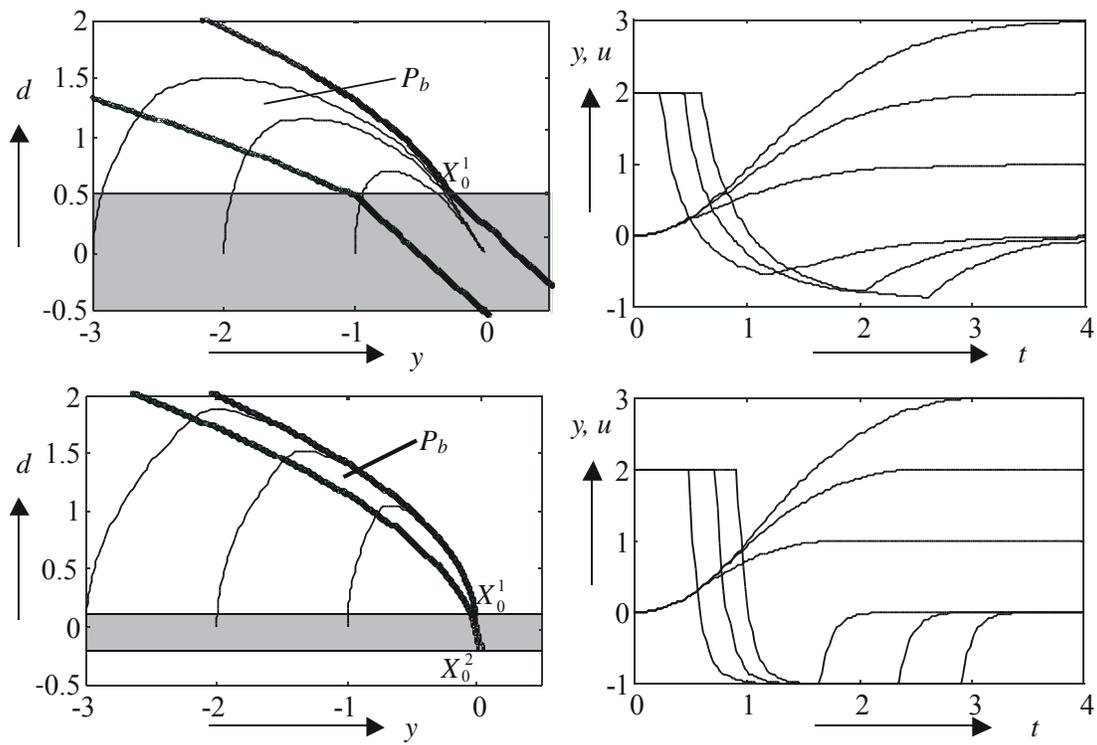


Bild 13. Lineare und parabolische Teile des Proportionalbereichs für verschiedene Polen. Oben $\alpha_{1,2} = -2$; unten $\alpha_{1,2} = -10$.

Wir haben schon früher bemerkt, dass das lineare Steuergesetz unabhängig von der Anordnung des Polpaares ist. Im nichtlinearen Fall gibt es jedoch zwei komplementäre nichtlineare Regelalgorithmen. Die Anordnung der Pole bei der Synthese ist dann nicht mehr beliebig und kann zweckmäßig dafür ausgenutzt werden, um z.B. die unterschiedlichen Begrenzungen der Geschwindigkeit der Stellgrößenänderungen zu berücksichtigen.

Der zweite neuen Faktor bei der Polvorgabe für Systeme mit Begrenzungen ist die Definition des Abstandes eines Zustandspunktes von der Kurve OBK. Im linearen Fall scheint es natürlich, diesen Abstand von der Gerade L in Richtung ihrer Normalen zu messen. Man kann aber leicht zeigen, dass der lineare Regler sich nicht ändert, wenn der Abstand in einer beliebigen Richtung, die nicht parallel zu L ist, gemessen wird. Dasselbe gilt für den Fall, dass der Abstand durch die in der Literatur üblichen Beziehung

$$\rho = \inf_{\mathbf{x}_b \in OBK} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_b\| \quad \text{Gl (33)}$$

definiert wird.

Im Gegensatz dazu erhält man im nichtlinearen Fall jeweils unterschiedliche Regler, die zwar zu einer ähnlichen, jedoch nicht identischen Dynamik führen. In einer solchen Situation müssen zusätzliche Kriterien für die Reglerauswahl herangezogen werden, die z.B. zu einer besonders einfachen Lösung führen.

7. PD₂-Reglereinstellungen

In mehreren Arbeiten [7, 9, 10] haben wir gezeigt, dass es möglich ist, die für den doppelten Integrator abgeleiteten Regler auch für Strecken höherer Ordnung zu benutzen. Prinzipiell kann dieses Verfahren als eine Erweiterung der Methode nach Ziegler und Nichols [17] für die Approximation von Strecken höherer Ordnung betrachtet werden.

Weil alle bisherigen Regler für $K_s = 1$ hergeleitet wurden, was einer Normierung mit $u = K_s u_r$ entspricht, wobei $u_r \in \langle U_{r1}, U_{r2} \rangle$ die reale Stellgröße ist, müssen alle diese Regler mit den Grenzwerten $U_j = K_s U_{rj}$; $j=1,2$ arbeiten und um die inverse Formel $u_r = u / K_s$ ergänzt werden. Für die Reglereinstellung braucht man nur die Parameter K_s und $\alpha_{1,2}$. Beide kann man durch Approximation der gemessenen Sprungantwort der Strecke mit Hilfe von I₂T₁- Modellen

$$S(s) = \frac{K_s e^{-T_d s}}{s^2} \quad \text{Gl (34)}$$

gewinnen. Für diese Streckenmodelle und für den PD-Regler (9) erhält man mit der Forderung eines dreifachen reellen Poles des geschlossenen Regelkreises die Reglereinstellungen

$$r_0 = -0.079 / (K_s T_d^2); \quad r_1 = -0.461 / (K_s T_d) \quad \text{Gl (35)}$$

Vergleicht man diese Werte mit den Polvorgabereglerparametern nach Gl (10), so erhält man die sogenannten äquivalenten Pole

$$\alpha_{1,2} = -(0.23 \pm j0.16) / T_d = 0.28 e^{\pm j2.53} / T_d \quad \text{Gl (36)}$$

Bei reellen Polen kann man diese „optimale“ Einstellung nur annähern, wenn man anstelle von komplexen Polen nur ihre Realteile (oder den Betrag) benutzt, was liefert z.B.

$$\alpha_{eR} = -0.23/T_d ; \text{ oder } \alpha_{eM} = -0.28/T_d \quad \text{Gl (37)}$$

8. Einführung des I-Anteils

Beseitigung der dauernden Regelabweichung erfolgt auch hier auf Basis einer Rekonstruktion und Kompensation der Störungen. Die möglichen Strukturen hängen davon ab, welche Prozessvariablen und welche Prozessparametern bekannt sind. Im Falle der messbaren Ableitung der Ausgangsgröße ist die Rekonstruktion ganz ähnlich der Strecken erster Ordnung. Der einzige Unterschied liegt darin, dass die kompensierte rekonstruierte Störung auch die effektive Grenzwerte des PD-Regler beeinflusst (Bild 14).

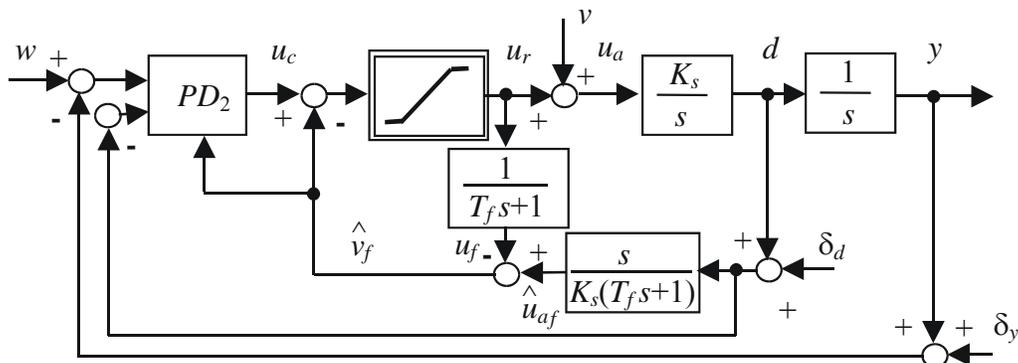


Bild 14. Rekonstruktion und Kompensation einer Eingangstörung im Falle messbarer Ableitung der Ausgangsgröße.

Für die nicht messbare Ableitung der Ausgangsgröße bleibt die Ausbauphilosophie zwar ähnlich (Bild 15), wegen des zweimaligen Ausgangsdifferenzieren man hier aber mit erhöhter Rauschensensitivität rechnen muss. Bei einer größeren Totzeit kann diese zu dem Filter am Ausgang der Begrenzung beigefügt werden, wenn

$$S_{uv}(s) = \frac{e^{-T_d s}}{(1 + T_f s)^2} \quad \text{Gl (38)}$$

Bei Entwurf des PD-Reglers ist es oft günstig, mit Approximationen der Strecke anhand der I_2T_1 -Glieder zu arbeiten, die den schon bekannten PD₂-Regler ausnutzen. Wenn man aber um eine Strecke mit Ausgleich mit bekannter Verstärkung K und bekannten größten Zeitkonstanten geht, z.B. wenn

$$S(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i s)} \quad \text{Gl (39)}$$

dann ist es vorteilhaft diese Information zu nutzen und den Rekonstruktionsblock mit Hilfe der zwei größten Zeitkonstanten zu formulieren als

$$S_{yv} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{K(T_f s + 1)^2} \quad \text{Gl (40)}$$

Im solchen Fall muss man aber auch eine statische Vorsteuerung mit Verstärkung $1/K$ zu benutzen (Bild 15).

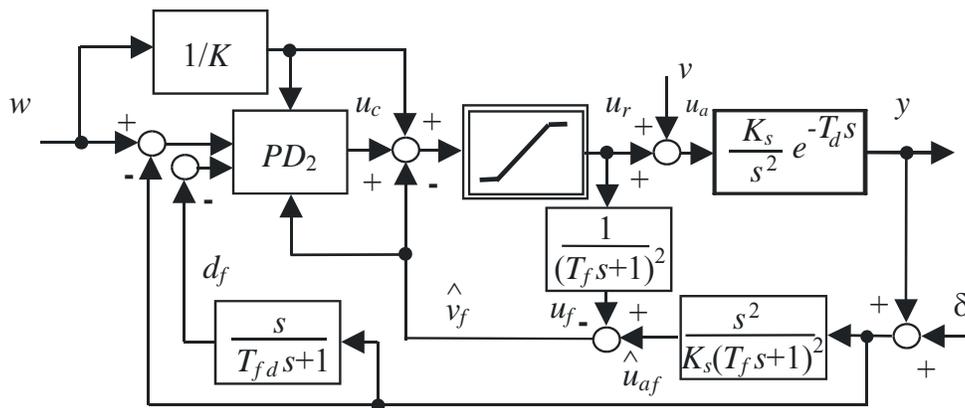


Bild 15. Rekonstruktion und Kompensation der Eingangstörung einer Strecke mit Ausgleich, die mit doppeltem Integrator und Totzeit approximiert ist.

Wie schon erwähnt, die kompensierte Störung und die Vorsteuerung, die zusammen den Betrag

$$u_0 = w/K - v_f \quad \text{Gl (41)}$$

vorstellen, beeinflussen die effektiven Grenzwerte des PD₂-Reglers (Bild 16) nach

$$U_{c1} = U_1 - u_0 ; U_{c2} = U_2 - u_0 \quad \text{Gl (42)}$$

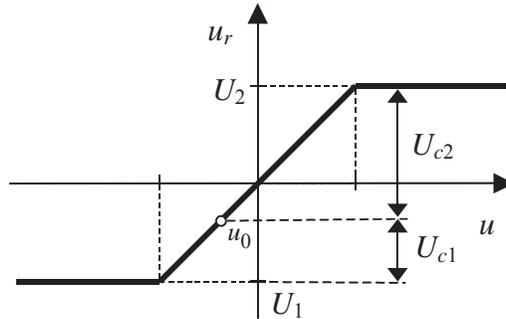


Bild 16. Transformation der Reglergrenzwerte durch ein Kompensationssignal u_0 .

Man kann nur solche Eingangsgrößen bearbeiten, bei welchen die Bedingung

$$U_{c1}U_{c2} < 0 \quad \text{Gl (43)}$$

erfüllt bleibt.

Im dem einfachsten Falle (messbare Ausgangsableitung) bekommt man aus der Forderung des vierfachen Pols ihre Position

$$s = -0.4158 \quad \text{Gl (44)}$$

die durch die äquivalenten Pole des Regler

$$\alpha_{1,2} = (-0.16 \pm j0.23)/T_d \quad \text{und mit } T_f = 5.45T_d \quad \text{Gl (45)}$$

gesichert ist. Nach ihrer Approximation mit reellen Werten

$$\alpha_{eR} = -\frac{0.16}{T_d}, \quad \text{oder } \alpha_{eM} = -\frac{0.26}{T_d} \quad \text{Gl (46)}$$

der wirklich wirkende dominante Polpaar des geschlossenen Regelkreises schiebt sich zu

$$s_R = (-0.12 \pm j0.037)/T_d \quad \text{oder } s_M = (-0.16 \pm j0.048)/T_d \quad \text{Gl (47)}$$

Das heißt, dass die Regelung wesentlich langsamer verläuft als im Falle komplexer äquivalenter Pole (45), die den dominanten Pol (44) liefern.

Mit Ziel, die Reglereinstellung möglichst zu einfach zu halten, wird es weiter nur ein freier Parameter vorausgesetzt

$$\alpha_e = -1/(cT_d); \quad T_f = cT_d \quad \text{Gl (50)}.$$

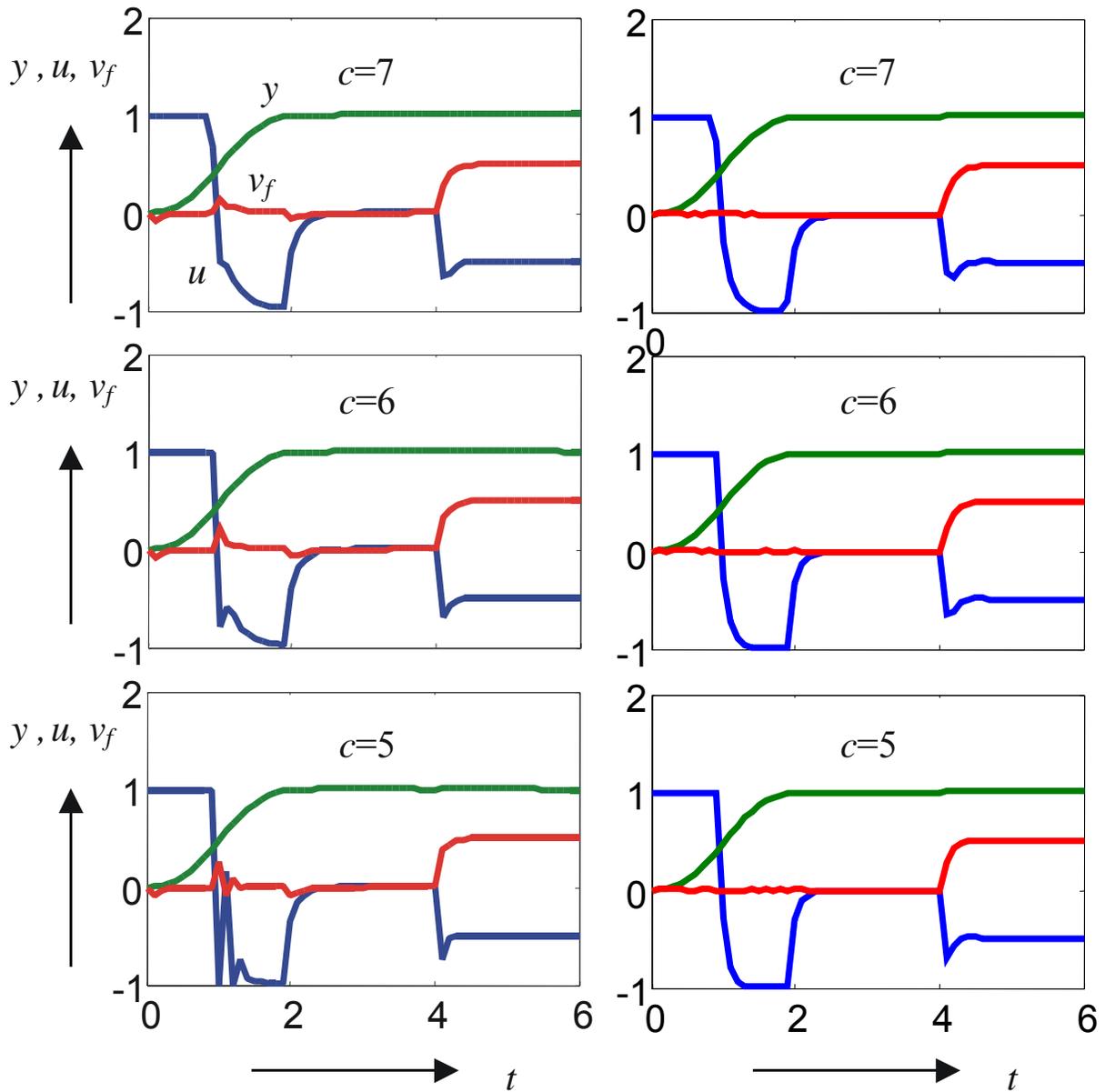


Bild 17 Regelvorgänge mit einem doppeltem Integrator und Totzeit als Strecke und mit dem PID_2 -Regler nach Bild 14 mit messbarer Ableitung der Ausgangsgröße und Einstellung nach $\alpha_e = -1/(cT_d)$; $T_f = cT_d$ (links) und mit der Totzeitkompensation nach Bild 18 (rechts). Sprung der Störung von 0 zu 0.5 für $t = 4$; $U_1 = -1$; $U_2 = 1$; $K_s = 1$; $T_d = 0.02$

Bild 17 links gibt die Regelvorgänge, die für einige Werte von c mit der Struktur nach Bild 14 bekommen sind. Rechts sind die Übergangsprozesse, die mit aktiver Kompensation der Totzeit in der Störungsrekonstruktionsschleife nach Bild 18 erzielt wurden. Es ist zu sehen, dass die Regelgüte, und damit auch die Reglereinstellung mit einfachen Maßnahmen wesentlich verbessert werden kann.

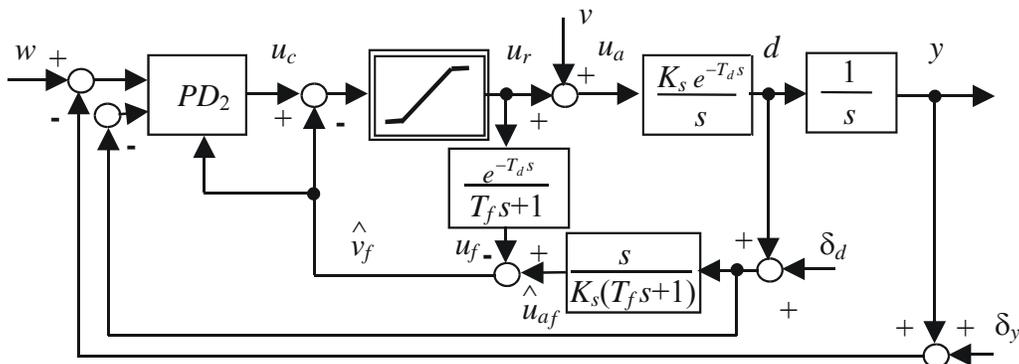


Bild 18. Modifikation der Rekonstruktionsstruktur aus dem Bild 14 mit aktiver Kompensation der Totzeit.

9. Zusammenfassung

Es wurden drei dynamische Klassen zur Synthese von Polvorgaberegler vorgestellt. Die erste Klasse, die aus einer statischer Vorsteuerung ausgeht, die durch eine Rekonstruktion und Kompensation einer Störung ergänzt ist, kann auch im Rahmen der linearen Regelungstechnik völlig behandelt werden. Diese Klasse haben wir aber nur kurz angesprochen, um gewisse Zusammenhänge zu zeigen.

Die zweite, schon typisch nichtlineare dynamische Klasse der Regler geht davon aus, dass bei Strecken erster Ordnung der Ausgang des Polvorgabereglers beliebig begrenzt werden kann, ohne dass ein Überschwingen, Oszillationen oder andere Formen der Instabilität auftreten.

Diese Eigenschaft wird dann auch bei höheren dynamischen Klassen ausgenutzt: Bei Strecken zweiter Ordnung wird z.B. das Gesamtproblem in zwei Teilprobleme mit Dynamik erster Ordnung zerlegt. So konnte man auch zu höheren dynamischen Klassen weitergehen. Es muss aber darauf hingewiesen sein, dass mit solcher Steigerung rapid auch die Komplexität der Steuerungsalgorithmen, ihre Sensitivität zur Parameteränderungen und Ansprüche auf die Qualität der gemessenen Signale wachsen. Daher wird öfter umgekehrt behandelt: Bei stabilen Strecken wird die dynamische Klasse der Regler beabsichtigt gesenkt, um ein einfacheren und robusteren Regler zu bekommen. Die breite Ausnutzung der linearen PID-Reglern, die zu den niedrigsten dynamischen Klassen gehören, gibt ein klares Signal dazu. Trotzdem bleiben noch immer Probleme, wo man so etwas nicht leisten kann! Ein schönes Beispiel stellen z.B. PKW-Regelungen vor, wo die Leute nicht bereit sind, auf volle Akzeleration und Bremsen zu verzichten und nur im linearen Bereich zu leben...

Der doppelte Integrator, der eine bewegende Masse repräsentiert, ist dann im Zentrum unserer Aufmerksamkeit bei der dynamischen Klasse 2 stehen geblieben. Die für den doppelten Integrator vorgestellten Lösungen unterscheiden sich von vielen ähnlichen Lösungen (wie z.B. [3, 17, 19, 22]) dadurch, dass sie keine zusätzlichen Parameter erfordern, was zur Vereinfachung des Reglerentwurfes und der Regelereinstellung führt. Die Einfachheit der mathematischen Beschreibung und die Verwandtschaft zu den linearen Polvorgaberegeln und gleichzeitig auch zu den zeitoptimalen Zweipunktreglern hilft sicher, die Akzeptanz und Attraktivität der Verfahren bei industriellen Anwendungen zu erhöhen. Die breiten Möglichkeiten zur Auswahl der Metrik im Fall von reellen Polen, die Regelung von Systemen mit Zeitverzögerungen und Begrenzungen, Kompensation der Störungen und die Untersuchung von Strecken höherer Ordnung werden offensichtlich noch zu einer umfangreichen weiteren Forschung auf diesem Gebiet führen.

Literatur

[1] Ackermann, J.: Einführung in die Theorie der Beobachter. *Rt* 24, 1976, H. 7, S. 217–252.

- [2] Åström, K.J., Hägglund, T. (1995). *PID controllers: Theory, design and tuning* – 2. ed. Instrument society of America, Research Triangle Park, NC.
- [3] Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. and Pistikopoulos, E.N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica* 38, 2002, S. 3–20.
- [4] Föllinger, O.: *Regelungstechnik*. 8. Aufl. Hüthig Verl. Heidelberg, 1994.
- [5] Föllinger, O.: *Nichtlineare Regelungen*. 7. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München 1993.
- [6] Hippe, P.: Windup prevention for unstable systems. *Automatica* 39, 11, 2003, S. 849–2019.
- [7] Huba, M. und andere: P- and PD-Controllers for I1 and I2 Models with Dead Time. In *6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Alghero*, 1998, S. 514–519.
- [8] Huba, M., Kul'ha, P., Bisták, P. and Skachová, Z. (1998) Two Dynamical Classes of PI Controllers for the 1st Order Loops. In: *New Trends in Design of Control Systems*. Oxford: Pergamon, 1998. - s. 189-194.
- [9] Huba, M. (1999). Dynamical Classes in the Minimum Time Pole Assignment Control. In: *Computing Anticipatory Systems - CASYS '98. Woodbury: American Institute of Physics Conf. Proc.* 465, 1999, S. 499–512.
- [10] Huba, M., Bistak, P.: Dynamic Classes in the PID Control. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego: AACC, 1999.
- [11] Huba, M.: Gain Scheduled Constrained Controller for SISO Plants. *Int. Conf. Rediscover*, Dubrovnik - Cavtat, Croatia 2004, S. 104–107.
- [12] Huba, M.: Gain Scheduled Constrained Controller for SISO Plants. *Preprints IFAC Conf. NOLCOS 2004* Stuttgart.
- [13] Huba, M.: P- und PD-Polvorgaberegler für Regelstrecken mit begrenzter Stellgröße. *Automatisierungstechnik* 53 (2005), No. 6, 273-284.
- [14] Huba, M.: Constrained pole assignment control. In: *Current Trends in Nonlinear Systems and Control in honor of Petar Kokotovic and Turi Nicosia*. Editors: L. Menini, L. Zaccarian, C. Abdallah, Birkhauser 2005.
- [15] Johnson, C.D.: Invariant hyperplanes for linear dynamical systems. *IEEE Trans. AC*, 11, 1966, S. 113–116.
- [16] Kamenský, M., Huba, M.: Constrained Magnetic Levitation Control. *IFAC Worl Congress Prague 2005*.
- [17] Kiendl, H., Schneider, G.: Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke const/s^2 aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. *at*, 20, 1972, S. 289–296.
- [18] Kothare, M.V., Campo, P.J., Morari, M., Nett, C.V. (1994) A Unified Framework for the Study of Anti-Windup Designs. *Automatica*, Vol. 30, 1869-1883.
- [19] Rönnbäck, S.: Nonlinear Dynamic Windup Detection in Anti-Windup Compensators. *Preprints CESA '96*, Lille, 1996, S. 1014–1019.
- [20] Schneider, G.: Was du heut' nicht kannst besorgen, das verschiebe halt auf morgen. *at*, 34, 1986, H.2, S. 59–65.
- [21] Schneider, G. Und Dourdoumas, N.: Systeme mit Begrenzungen. *Regelungstechnik* 25, 1977, s.A1-A40, *Regelungstechnik* 26, 1978, s.A1-A4.
- [22] Wredenhagen, G.F., Belanger, P.R.: Piecewise-Linear LQ Control for Systems with Input Constraints. *Automatica*, 30, 1994, S. 403–416.
- [23] Ziegler, J.G., Nichols, N.B.: Optimum Settings for Automatic Controllers, *Trans ASME*, November 1942, S. 759–765.

Constrained Controller Based on Dynamics Decomposition

Pavol Bisták, Peter Ťapák and Mikuláš Huba

Slovak University of Technology in Bratislava, Fac. El. Eng. & Inf. Tech.
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovak Republic
email:pavol.bistak@stuba.sk, tapak@decef.elf.stuba.sk, huba@elf.stuba.sk

Abstract: *The constrained control of triple integrator based on the modes decomposition is introduced in this paper. The design combines the well known time optimal control with the linear pole assignment control, i.e. the control consist of three phases similar to the time optimal control, however the transients between the control phases are “smooth” and the dynamics of the transients is given by the closed loop poles. The design is carried out in the phase space where corresponding switching surfaces as reference braking surfaces are derived. Then the proportional band of control is designed what finally results in control law.*

Keywords: *pole assignment control, time optimal control, constraints, nonlinear, third order system.*

1 Introduction

Recent decade in the control design is characteristic by a revival of theory of constrained systems. The minimum time control, which was dominating the control design from late 40-ties to the beginning of 70-ties in the 20th century (see e.g. Pavlov, 1966) is, however, replaced by several new approaches (see e.g. Bemporad et al., 2002; El-Farra et al., 2003) as e.g. the predictive control, different anti-windup solutions, positive invariance sets, etc. Motivation comes from different fields – from the traffic control, robot control, control of unstable systems, etc. A common feature of the new approaches is that they are rather complex - even in the case of simple control problems. So, they are not easy to understand and to apply. Traditionally, the engineering community preferred simpler solutions, as e.g. that one proposed by Kiendl and Schneider (1972), which was later used in robot control (Kunze, 1984; Patzelt, 1981).

Parallel to this, family of new not yet widely known solutions (Huba, 1990; Huba and Bisták, 1995; Huba et al., 1997; Huba, 1998; Huba et al., 1998; Huba, 1999; Huba et al., 1999; Huba and Bisták, 1999; Huba, 2003; Huba and Bisták, 2005) was developed. They are relatively simple for understanding, easy to implement and so appropriate also for extremely fast application and easy to tune by a procedure that can be considered as a generalization of the well-known method by Ziegler and Nichols.

In this paper, family of the already known approaches is extended by the control design, which is based on the decomposition of the closed loop dynamics into particular modes defined by chosen real closed loop poles.

The paper is organized as follows: Problem specification and the comparison of the linear pole assignment control design are treated in the Chapter 2. The Chapter 3 describes the design for the constrained pole assignment control based on particular modes decomposition. Nonlinear control algorithm is shown in the Chapter 4 and verified in the Chapter 5.

2 Linear Pole Assignment Control Based on Modes Decomposition

Let us consider the 3rd order integrator

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1)$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

where $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ is the representative point, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is the input vector and $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is

the system matrix.

Linear pole assignment controller fulfills three rules :

a) Decreases the distance $\rho_2\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{a}'\mathbf{x}$ of the representative point from the surface $S = \{x | \mathbf{a}'\mathbf{x} = 0, \mathbf{a}' = (a_0 \ a_1 \ a_2)\}$

b) Decreases the oriented distance $\rho_1\{\mathbf{x}(t)\}$ of the representative point lying in the

surface S from the line $L = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 q, \\ \mathbf{x} \mathbf{v}_1' = (v_{10} \ v_{11} \ v_{12}), \\ q \in \langle -\infty \ \infty \rangle \end{array} \right\}, L \in S$

c) Along the line L the controller decreases the oriented distance $\rho_0\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{x}(t)$ from the origin proportionally to the closed loop pole α_1 .

Let us consider closed loop system with $\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < 0$. Since the corresponding eigenvectors

$$\mathbf{v}_i = [\alpha_i \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_i^3} \\ \frac{1}{\alpha_i^2} \\ \frac{1}{\alpha_i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

are not collinear, they form a basis, which can be used for expressing any states as a sum of three modes

$$\mathbf{x} = q_1 \mathbf{v}_1 + q_2 \mathbf{v}_2 + q_3 \mathbf{v}_3, \quad q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Then one can write

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 + \dot{\mathbf{x}}_3 = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) + \mathbf{b}(u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned} \quad (4)$$

When assigning $\mathbf{x}_i = q_i \mathbf{v}_i$ then each subsystem could be expressed as

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}u_1 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}u_2 = \alpha_2 \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_3 + \mathbf{b}u_3 = \alpha_3 \mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (5)$$

So the 3rd order dynamics can be decomposed into the three 1st order ones. The appropriate interpretation and the appropriate choice of the oriented distance measurement from the representative point \mathbf{x} to the plane (or the line) lead to the three control phases well known from the time optimal control. All of the coordinates $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ are equivalent in this linear case. Let us assign following:

- The 1st equation describes the transient into the origin along the line given by \mathbf{v}_1 . The dynamics is given by α_1 .
- The 2nd equation describes the transient in the plane given by $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ to the line given by \mathbf{v}_1 measuring oriented distance in the direction of \mathbf{v}_2 . The dynamics of the transient is given by the second pole α_2 .
- Similarly to a) and b) the 3rd equation describes the transient to the plane using the measurement direction of \mathbf{v}_3 . The dynamics of this transient is given by α_3 .

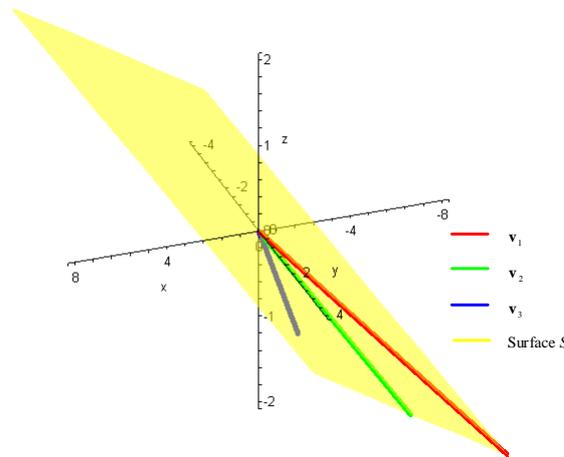


Figure 1: Linear pole placement based on modes decomposition.

The control signal can be easily gained as

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i = \sum_{i=1}^3 q_i \quad (6)$$

The control algorithm described above guarantees that all three control phases are running in parallel and this is equal to the result of the Ackerman's formula (see chapter 4). The Fig. 1 shows the new base described above.

3 Non-linear (Constrained) Pole Assignment Control Based on Modes Decomposition

Let us consider constrained control signal

$$u \in \langle U_1 \quad U_2 \rangle \quad (7)$$

The transient of the representative point with initial state on the line given by eigenvector \mathbf{v}_1 outside the proportional band does not follow this line. The particular subsystems do not change themselves only in their own coordinates \mathbf{x}_i , but also in the other subsystems coordinates. There is necessary to assign the coordinate to each of the control phases. The following assignment has been used (for more details se e.g. Kabát, 2000)

1. The transient of the representative point in the phase space to the reference braking surface (*RBS*) is given by α_3, \mathbf{v}_3 .
2. The transient along the *RBS* to the reference braking curve (*RBC*) is given by α_2, \mathbf{v}_2 .
3. The transient along the *RBC* into the origin is given by α_1, \mathbf{v}_1 .

The control phases in this control algorithm combine the time optimal control with the linear pole assignment control. Each control phase is given by particular constraint of the control signal, but the transition between the control phases is described by the chosen corresponding closed loop pole. So each control phase is given by two parameters:

α_i - describing the dynamics of the transient of the representative point \mathbf{x}_i inside the linear subsystem (proportional band)

t_i - the time, which is needed to gain the "linear" subspace using one of the constraints as the control signal.

One part of the final control phase (the linear one), corresponding to the transient into the origin, when the other coordinates \mathbf{x}_3 and \mathbf{x}_2 are zeroes, is given by the closed loop pole α_1 only along the line given by the eigenvector \mathbf{v}_1 , where the coordinate

$$\mathbf{x}_1 \in \langle U_j \mathbf{v}_1 \quad U_{3-j} \mathbf{v}_1 \rangle \quad (8)$$

Let us assign the constraint of the control signal in the final control phase as U_j where

$$j = 1, 2 \quad (9)$$

The linear control interval is restricted by

$$q_1 \in \langle U_j \quad U_{3-j} \rangle \quad (10)$$

The second part of the final control phase (non-linear) is described by the time t_1 , that represents the time of the transient of the representative point using $u = U_j$ to the border

points of the linear subsystem ${}^j X_1 = U_j \mathbf{v}_1$. The 2nd part is created by points \mathbf{x}_1 as the result of backward integration of (1) on the interval $t \in \langle 0 \ t_1 \rangle$ using $u = U_j$ and starting from the point ${}^j X_1$. One gets

$$\mathbf{x}_1(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & -t_1 & \frac{t_1^2}{2} \\ 0 & 1 & -t_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q_1 \mathbf{v}_1 + \begin{bmatrix} -\frac{t_1^3}{6} \\ \frac{t_1^2}{2} \\ -t_1 \end{bmatrix} U_j \quad (11)$$

So the \mathbf{x}_1 represents all points of the 1st subsystem, and these points are given by the parameter q_1 for points $t_1 = 0, \mathbf{x}_1 \in \langle U_j \ U_{3-j} \rangle \mathbf{v}_1$ and also by $t_1 \neq 0, q_1 = U_j$ for points outside linear part (8). So let us introduce the following generalized denotation $\mathbf{x}_1(q_1, t_1)$, i.e. the points lying in the proportional band (the control signal is not saturated) are represented as $\mathbf{x}_1(q_1, 0)$ and the points lying outside (8) with saturated control signal are represented as $\mathbf{x}_1(U_j, t_1)$. The control signal for points in the proportional band $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(q_1, 0) \in \langle U_1 \mathbf{v}_1 \ 0 \rangle$ is $u_1 = z_1 \alpha_1$. The control signal for the points outside the proportional band $\mathbf{x}_1(U_j, t_1)$ is $u = U_j$. Such a representation of these points describes the transient along the *RBC* with dynamics given by the closed loop pole α_1 with respecting the control constraints. The *RBC* is invariant set of the system $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}u_1$ with constrained control signal $u_1 \in \langle U_j \ U_{3-j} \rangle$, i.e. after approaching the *RBC*, the system remains on the *RBC*.

In the second control phase is $\mathbf{x}_3 = 0$. There is the transient in the surface given by $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ towards the *RBC* (characterized by \mathbf{x}_1) described in this phase. The goal is to approach the *RBC*, where $\mathbf{x}_2 = 0$. The dynamics of this transient is given by α_2 only in the proportional band of the second subsystem $\mathbf{x}_2 \in \langle 0 \ (U_{3-j} - q_1) \rangle \mathbf{v}_2$, i.e.

$$q_2 \in \langle 0 \ (U_{3-j} - U_j) \rangle \quad (12)$$

that gives the 1st part of the surface. The second part of the surface is given as the result of backward integration of (1) on the interval $t \in \langle 0 \ t_2 \rangle$ starting from the points where the q_2 is saturated using $u = U_{3-j}$. Using generalized denotation of *RBC* one gets

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_2((U_{3-j} - q_1), t_2) + \mathbf{x}_1(q_1, t_1) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -t_2 & \frac{t_2^2}{2} \\ 0 & 1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{x}_1(q_1, t_1) + q_2 \mathbf{v}_2) + \begin{bmatrix} -\frac{t_2^3}{6} \\ \frac{t_2^2}{2} \\ -t_2 \end{bmatrix} U_{3-j} \quad (13) \end{aligned}$$

In the starting control phase the 3rd subsystem \mathbf{x}_3 is in the proportional band for

$$\mathbf{x}_3 \in \langle (U_j - q_1 - q_2)\mathbf{v}_3 \quad (U_{3-j} - q_1 - q_2)\mathbf{v}_3 \rangle, \text{ i.e.}$$

$$q_3 \in \langle U_j - q_1 - q_2 \quad U_{3-j} - q_1 - q_2 \rangle \quad (14)$$

Similarly to the previous subsystems the result of backward integration on the interval $t \in \langle 0 \quad t_3 \rangle$ starting from points where the q_3 is saturated using $u = U_j$, gives the 3rd subsystem. Using generalized denotation $\mathbf{x}_2(q_2, t_2)$, the general point of the surface can be represented as $\mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2)$ and any point of the state space can be expressed using modes decomposition as

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_3(q_3, t_3) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + \mathbf{x}_1(q_1, t_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -t_3 & \frac{t_3^2}{2} \\ 0 & 1 & -t_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{x}_1(q_1, t_1) + \mathbf{x}_2(q_2, t_2) + q_3 \mathbf{v}_3) + \begin{bmatrix} -\frac{t_3^3}{6} \\ \frac{t_3^3}{2} \\ -t_3 \end{bmatrix} U_j \quad (15)$$

Note that the whole state space can be described by $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(q_1, t_1)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(q_2, t_2)$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3(q_3, t_3)$, using parameters $q_i, i=1,2,3$ that describe the length of the vectors in the proportional bands of the subsystems and $t_i, i=1,2,3$ describing these vectors outside their proportional bands (the control signal of the subsystem is saturated). The sequential choice of the coordinates of the subsystems guarantees, that the control signal is saturated only if the third subsystem is saturated also.

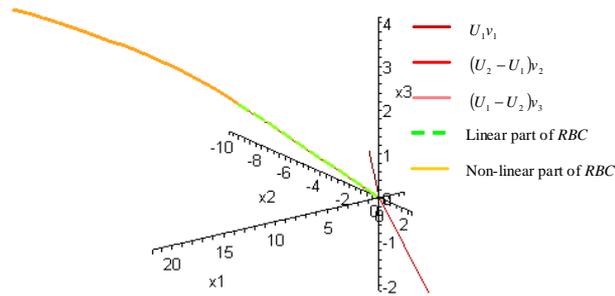


Figure 2: Eigenvectors $\mathbf{v}_i, i=1,2,3$ and RBC^1 .

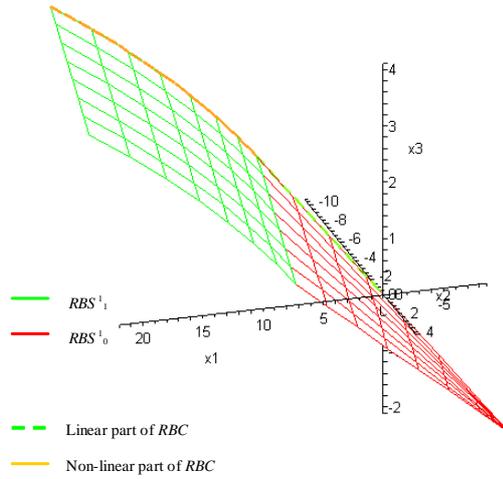


Figure 3: RBS^1_0, RBS^1_1 .

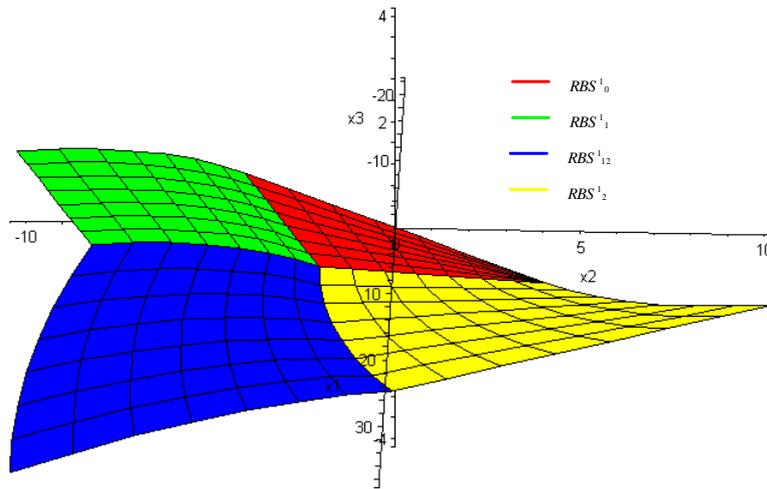


Figure 4: RBS^1

The control algorithm is the same as the linear one, but it depends on achieving the parameters $q_i, t_i, i = 1, 2, 3$ which are more difficult to obtain.

The control is

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \tag{16}$$

where u_i are control signals of particular subsystems. The RBS is given by the points where $u_3 = 0$, but we divide it according to the parameters t_1, t_2, j . Let us denote following:

RBS^j_0 - the part of RBS , where $t_1 = 0, t_2 = 0$

- RBS^{j_1} - the part of RBS , where $t_1 > 0, t_2 = 0$
- RBS^{j_2} - the part of RBS , where $t_1 = 0, t_2 > 0$
- $RBS^{j_{12}}$ - the part of RBS , where $t_1 > 0, t_2 > 0$

Figures 2-4 show RBC and RBS for $j = 1, \alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -2, u \in \langle -1 \ 1 \rangle$.

The proportional band (PB) of the system (1) is given by points where $q_3 \in \langle U_1 - q_1 - q_2 \ U_2 - q_1 - q_2 \rangle$.

Let us denote $q_{3\min} = U_1 - q_1 - q_2, q_{3\max} = U_2 - q_1 - q_2$. Fig . 5 shows the parts of PB corresponding to particular segments of RBS .

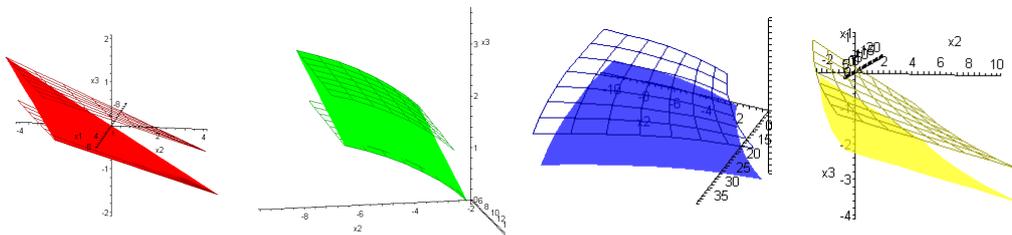


Figure 5: PB corresponding to the segments $RBS^{j_0}, RBS^{j_1}, RBS^{j_{12}}, RBS^{j_2}$.

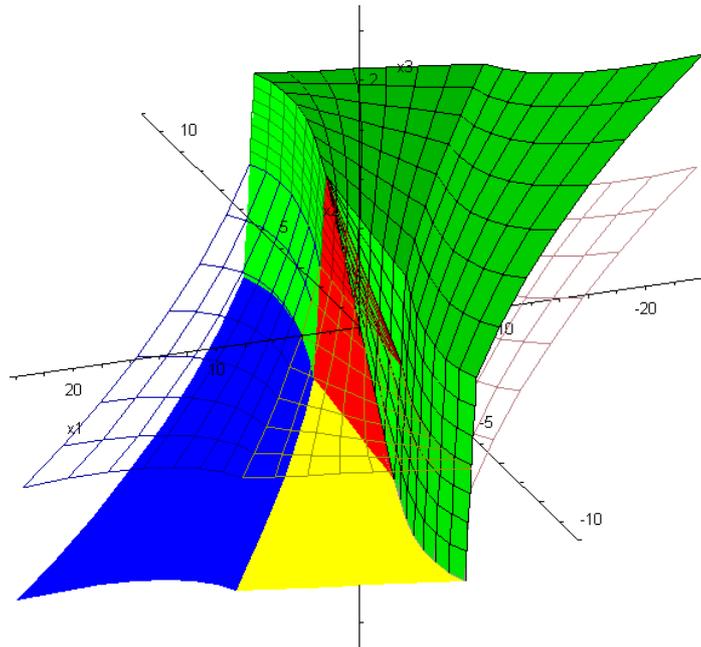


Figure 6: RBS and PB in the phase space.

4 Non-linear Control Algorithm

The control algorithm is based on achieving parameters $q_i, t_i, i = 1, 2, 3$. However, parameter t_3 is not needed, because there is enough to know whether \mathbf{x}_3 is in proportional band or saturation, so let us assign $t_3 = 0$. To find these parameters there is necessary to solve (15), however the results obtained by symbolic solutions can be used now. The formula for evaluation of \mathbf{x}_3 differs for each segment and it depends on $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, so the control algorithm can be divided into following steps:

1. START
2. RBS^{j_0}
 - a. q_1, q_2, q_3 are unknown
 - b. $t_1 = 0, t_2 = 0$
 - c. solve (15)
 - d. IF (10), (12) are not fulfilled THEN GOTO 3
 - e. $sat(q_3), u = \sum_{i=1}^3 q_i$ GOTO 6
3. RBS^{j_1}
 - a. t_1, q_2, q_3 are unknown
 - b. $q_1 = U_j, t_2 = 0$
 - c. solve (15)
 - d. IF $t_1 > 0$, (12) are not fulfilled THEN GOTO 4
 - e. $sat(q_3), u = \sum_{i=1}^3 q_i$ GOTO 6
4. RBS^{j_2}
 - a. q_1, q_3, t_2 are unknown
 - b. $q_2 = U_{3-j} - q_1, t_1 = 0$
 - c. solve (15)
 - d. IF $t_2 > 0$, (10) are not fulfilled THEN GOTO 5
 - e. $sat(q_3), u = \sum_{i=1}^3 q_i$ GOTO 6
5. $RBS^{j_{12}}$
 - a. q_3, t_1, t_2 are unknown
 - b. $q_1 = U_j, q_2 = U_{3-j} - U_j$
 - c. solve (15)
 - d. IF $t_1 > 0, t_2 > 0$ are not fulfilled THEN GOTO ERROR
 - e. $sat(q_3), u = \sum_{i=1}^3 q_i$ GOTO 6

6. If the distance of the representative point from the desired state is greater than ε
GOTO 1
7. END

5 Verifying Control Algorithm by Simulation

The following simulation verifying the control shown above has been made in MAPLE v 9.5.

Parameters of the simulation with initial state outside the *PB*:

Chosen closed loop poles

$$\alpha_1 = -1.5, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = -6$$

Initial state

$$\mathbf{x} = [14.145, -6.097, 0.833]^T$$

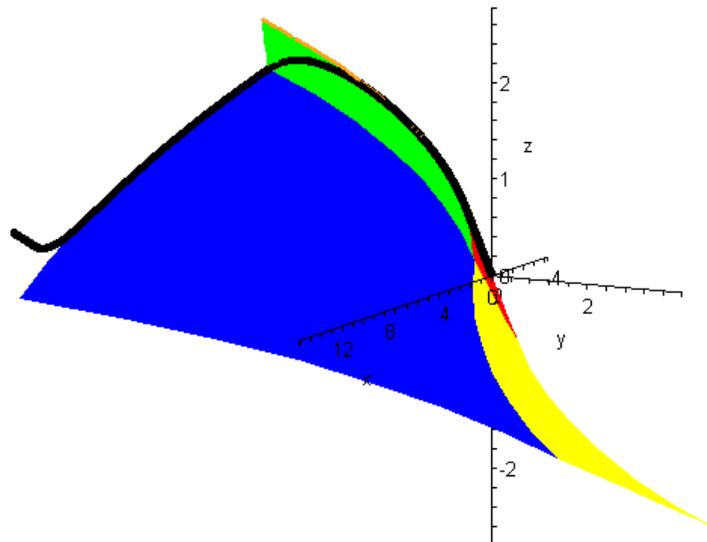


Figure 7: Trajectory in the phase space

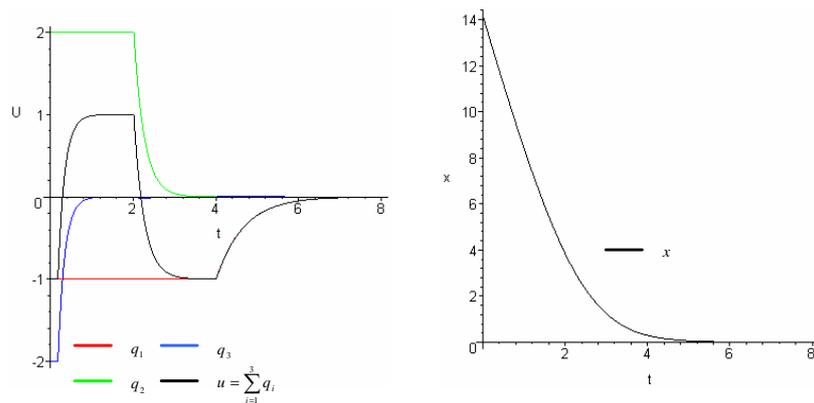


Figure 8: Control signal and output

Fig. 8 shows that the control signal approaches the constraint three times.

6 Conclusion

The simulations have shown, that designed control consists of three phases well known from time optimal control, however the transients between these phases are “smooth” and they have dynamics given by the closed loop poles that gives the advantage to this algorithm in the field of non-linear control. It can be used to control systems with parasitic transport delays etc. Due to the symbolic solutions made in computer algebra system MAPLE, the design can be used for different 3rd order systems.

Acknowledgements

This work has been supported by VEGA, Grant No. 1/0145/03.

References

- Bemporad, A., M. Morari, V. Dua and E.N. Pistikopoulos, (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, **38**, 3-20.
- Bisták, P., Huba, M., Skachová, Z. (1996). Controller design for nonlinear systems with constrained output. In: *5th Electrical and Computer Science Conference ERK'96, Vol. A*, Portorož, Slovenia
- El-Farra, N.H., P. Mhaskar and P.D. Christofides (2003). Uniting bounded control and MPC for stabilisation of constrained linear systems. *Automatica*, **40**, 101-110.
- Huba, M. (1990). Saturating Pole Assignment Control-Construction and geometrical interpretation on the phase plane, In: *1. IFAC-Workshop „NTDCS“*, Smolenice, Slovakia.
- Huba, M., Bisták, P. (1995). Saturating control algorithms for some typical motion control task. In: *IFAC Motion control*, Munich, Germany.
- Huba, M., Skachová, Z., Bisták, P. (1997), Minimum Time Pole Assignment Controllers Based on I1 and I2 Models with Dead Time. In: *International Summer School on Computer Aided Education in Automation and Control*. Bratislava. Slovak Republic, 24.8.-6.9.1997.

- Huba, M. (1998). Minimum Time Pole Assignment P- and PD-Controllers with Constrained Output, In: *International Summer School "Computer Aided Education in Nonlinear Control"*. Nantes. France, 13.-24.7.1998.
- Huba, M., P. Bisták, Z. Skachová and K. Žáková (1998). Predictive Antiwindup PI-and PID-Controllers Based on I1 and I2 Models with Dead Time. In: *6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*, Alghero.
- Huba, M. (1999). Dynamical Classes in the Minimum Time Pole Assignment Control. In: *Computing Anticipatory Systems - CASYS '98*. Woodbury: American Institute of Physics.
- Huba, M. and P. Bisták (1999). Dynamic Classes in the PID Control. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. AACC, San Diego.
- Huba, M., D. Sovišová and I. Oravec (1999). Invariant Sets Based Concept of the Pole Assignment Control. In: *European Control Conference ECC'99*. VDI/VDE, Düsseldorf.
- Huba, M. (2003). *Constrained systems design. Vol.1 Basic controllers*. STU Bratislava (in Slovak).
- Huba, M., Bisták, P. (2005). *Design of constrained controllers using nonlinear dynamics decomposition*. In: Medzinárodná konf. Kybernetika a informatika, 9.-11.2.2005, Dolný Kubín, s. 334-343.
- Kabát, M. (2000). *Minimum time pole assignment control based on modes decomposition*, in slovak Preparation for PhD thesis, Bratislava
- Kiendl, H. and G. Schneider (1972). Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke const/s^2 aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. *at* **20**, 289-296.
- Kunze, H.B. (1984). Regelungsalgorithmen für rechnergesteuerte Industrieroboter. *Regelungstechnik*, **32**, 7, 215-225.
- Patzelt, W. (1981). Zur Lageregelung von Industrierobotern bei Entkopplung durch das inverse System. *Regelungstechnik* **29**, 411-422.
- Pavlov, A., A. (1966). *Synthesis of relay time-optimal systems*, in Russian, Publishing house "Nauka".
- Schneider, G. (1971). Eine suboptimale Methode zur Synthese von Abtastsystemen mit beschränkter Stellgröße. *Regelungstechnik*, **19**, 8, 322-338.

MECHANIK UND ANGEWANDTE MATHEMATIK BEI ARCHIMEDES

Die Begriffe des dynamischen Gleichgewichts und der Stabilität

Prof. Dr. Dimitri Kalligeropoulos, Dr. Soultana Vasileiadou

Fachhochschule (TEI) Piraeus

Kurzfassung

Archimedes (287-212 v.u.Z.) verband in seinem Werk die theoretische Ansicht des Mathematikers mit der Anwendungsabsicht des Ingenieurs. Aus diesem Zusammenwirken von Mathematik und Mechanik ergab sich Folgendes:

- 1. Mathematische Sätze wurden durch mechanische Methoden bewiesen.*
- 2. Die Mathematik selbst wandte sich der Anwendung zu. Arithmetische und geometrische Annäherungsmethoden für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme entwickelten sich.*
- 3. Umgekehrt wurde die Theorie der Mechanik in geometrischer Form formuliert und nahm eine exakte mathematische Struktur an.*
- 4. Sowohl Mathematik als auch Mechanik wurden für die Lösung von regelungstechnischen Problemen, wie die Feststellung des dynamischen Gleichgewichts und der Stabilität von Systemen, angewandt.*

Einleitung

Archimedes (287-212 v.u.Z.) stammte aus Syrakus, studierte in Alexandria und war zweifellos vor allem Mathematiker. Er verband genial Mathematik mit Mechanik, die Wissenschaft mit ihren technischen Anwendungen, zu Gunsten aller beider.

Seinem Werk gehören sowohl mathematische Studien als auch Studien über Mechanik und der Hydrostatik an. Diesem Werk müssen zahlreiche Konstruktionen und bedeutende technische Erfindungen hinzugefügt werden.

Mathematische Werke des Archimedes

- **Kreismessung**, Mathematische Annäherung des Umfangs und der Fläche eines Kreises
- **Über Kugel und Zylinder**, Annäherung eines Kreises mit ein- und umgeschriebenen Polygonen, Berechnung der Fläche einer Kugel
- **Über Kegel- und Kugelförmige Körper**, Annäherung des Segments eines Kegelschnitts mit ein- und umgeschriebenen Zylindern
- **Quadratur einer Parabel**, Annäherung eines ebenen Parabelsegments mit eingeschriebenen Dreiecken
- **Über Spiralen**, Definition der geometrischen Spirale und Berechnung des Grenzwerts einer Reihe.

Archimedes Werke über Mechanik

- **Mechanik A**, Über das Gleichgewicht einer Waage, Berechnung der Schwerpunkte ebener Figuren
- **Mechanik B**, Über Schwerpunkte ebener Parabelsegmente
- **Über die mechanischen Theoreme – An Eratosthenes Methode**, Eine mechanische Methode zur Berechnung des Volumens und des Schwerpunkts von parabelförmigen Körpern
- **Fuhrwerke A**, Eigenschaften der Flüssigkeiten, Gleichgewicht von Schwimmkörpern und Definition des Auftriebs
- **Fuhrwerke B**, Gesetz des hydrostatischen Auftriebs und der Stabilität eines schwimmenden parabelförmigen Körpers.

Technische Werke und Erfindungen des Archimedes

- Die bekannte **archimedische Schraube** oder Schraubenwelle
- **Maschinen** für die Erhebung von schweren Gewichten
- **Astronomische Geräte** für die Berechnung von Sternpositionen und ein **Planetarium** als Modell unseres planetarischen Systems
- **Wegmesser** für die Berechnung von irdischen Abständen
- **Dampfgeschütz**, das den Dampfdruck als Antriebskraft ausnutzt
- **Hydraulische Uhr**, mit Wasserflussregelung ausgerüstet u.a.

Dieses fast endlose und vielfältige Werk von Archimedes werden wir auf einem für die Geschichte der Automaten interessanten Weg durchkreuzen. Wir werden hier folgende Einheiten untersuchen:

- Geometrie und angewandte Mathematik,
- Beziehung zwischen Mathematik und Mechanik,
- Gleichgewicht und Stabilität bei Schwimmkörpern.

Geometrie und angewandte Mathematik

Die Struktur der mathematischen Werke des Archimedes besitzt die strenge Beweisform der euklidischen Geometrie. Archimedes beginnt seine mathematische Behandlung mit “Definitionen” und “Axiomen”.

“Zuerst schreiben wir die Definitionen und die Axiome, die wir als gegeben für die Beweise der Theoreme halten” (Über Kugel und Zylinder A, Einleitung H4).

- Mit seinen Definitionen definiert er die Arten der Linien, der Flächen und der starren Körper.
- Unter seinen Axiomen beinhaltet er Sätze wie: **“Unter den Linien mit gleichen Enden kürzeste ist die Gerade”** (Über Kugel und Zylinder A, H8).

Er führt jedoch auch das quantitative Kontinuitätsaxiom, folgendermaßen ausgedrückt, ein: **“Die Differenz zwischen zwei ungleichen Flächen oder Größen, kann, nach einer aufeinanderfolgenden Addition mit sich selbst, jede gegebene endliche Fläche oder Größe übertreffen”** (Quadratur einer Parabel, Einleitung H264).

Das heißt, dass eine unendlich kleine Differenz Δx zwischen zwei ungleichen Größen

$$x_1 = x \text{ und } x_2 = x + \Delta x$$

“nach einer aufeinanderfolgenden Addition mit sich selbst” die Anfangsgröße x erreichen und sogar übertreffen kann. Symbolisch ausgedrückt:

$$x = \sum \Delta x .$$

Diese Prozedur beinhaltet die Logik der modernen Differential- und Integralrechnung.

Summen unendlicher Reihen

Von seinen Axiomen ausgehend formuliert Archimedes zuerst Sätze und Theoreme über Folgen, arithmetische und geometrische Reihen und ihre Summen. Diese Theoreme überschreiten die klassische geometrische Ansicht, sie beinhalten nämlich den Begriff der Approximation, den Begriff der Summe von unendlich vielen, jedoch unendlich kleinen Größen, den Begriff der Konvergenz dieser Summe gegen einen endlichen Grenzwert.

Spezieller, Archimedes berechnet in seinem Werk "Über Spiralen", Theorem 10, die Summen

- einer arithmetischen Reihe: $\sum_{v=1}^N v = \frac{N(N+1)}{2}$
- und einer quadratischen Reihe: $\sum_{v=1}^N v^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

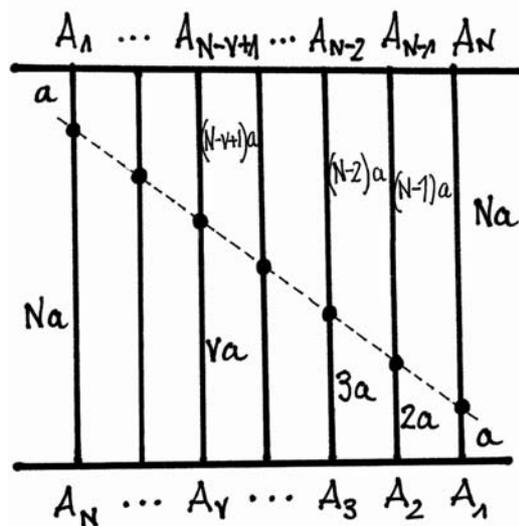


Bild 1. Geometrischer Beweis der Summe einer arithmetischen Reihe (Über Spiralen, Th.10, H30)

In seinem Werk "Quadratur einer Parabel", Theorem 23, berechnet er die Summe einer unendlichen abnehmenden geometrischen Reihe, mit dem Faktor $\lambda=1/4$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{4^v} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}.$$

Das Theorem lautet:

“Wenn Größen, die (in einer Reihe) so aufgliedert sind, daß jede von ihnen vier mal größer als ihre nächste ist, addiert werden und ihrer Summe ein drittel der kleinsten

Größe hinzugefügt wird, so ist die Gesamtsumme der Reihe gleich mit vier drittel der ersten Größe” (Quadratur einer Parabel, Theorem 23, H310).

Approximation des Kreises

In seinem Werk “Über Kugel und Zylinder”, Theorem 3, nimmt Archimedes die Approximation des Umfangs und der Fläche eines Kreises mittels einer Reihe von ein- und umgeschriebenen Polygonen vor. Er bildet einen konvergierenden geometrischen Algorithmus für die Berechnung der irrationalen Zahl π .

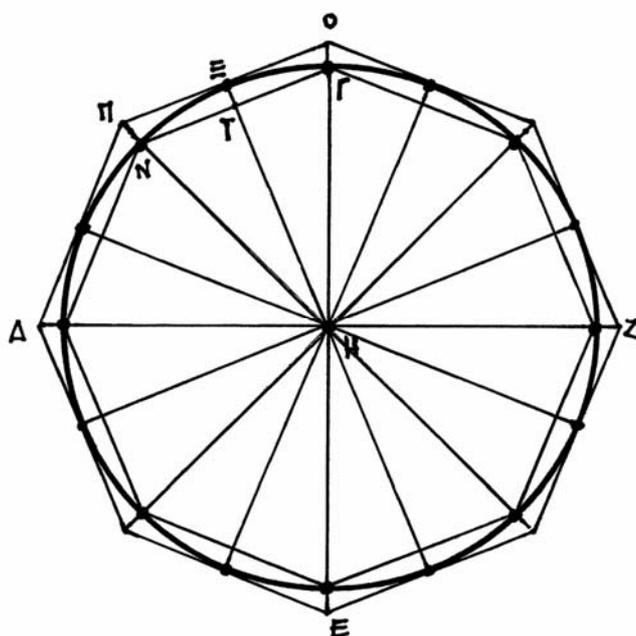


Bild 2. Geometrische Approximation eines Kreises durch ein- und umgeschriebene Polygone
(Über Kugel und Zylinder A, Th.3, H12, 30)

Einen ähnlichen approximativen Algorithmus verwendet Archimedes in seinem Werk “Kreismessung”, Theoreme 1, 2, 3. Mittels dieses Algorithmus

- grenzt er die Größe, die er berechnen möchte - hier den Umfang oder den Flächeninhalt des Kreises -, zwischen einem oberen und einem unteren Grenzwert ein

$$\varepsilon_N < E < E_N.$$

- Durch eine sich wiederholende Zweiteilung der spitzen Winkel aller ein- und umgeschriebenen Dreiecke, vergrößert er nach Belieben die Anzahl der Approximationsschritte.

- Zuletzt berechnet er die Summen von Reihen mit beliebig vielen Termen, beliebig klein in der Größe, und erreicht mit der gewünschten Genauigkeit den gesuchten Grenzwert.

Durch eine Eingrenzung des Kreises mit $N=96$ -kantigen ein- und umgeschriebenen Polygonen nähert er so den Quotienten des Umfangs π durch den Durchmesser δ eines Kreises mit folgender doppelter Ungleichung an:

$$3\frac{10}{71} < \frac{\pi}{\delta} < 3\frac{10}{70}$$

und erreicht somit eine Genauigkeit von ca. zweitausendstel der Einheit für die Berechnung der irrationalen Zahl π .

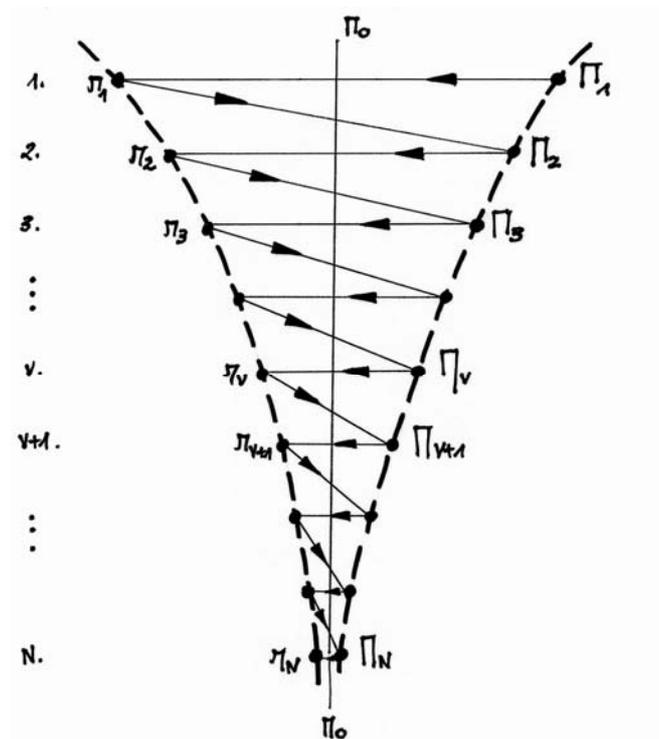


Bild 3. Algorithmische Approximation der irrationalen Zahl π (Kreismessung, Th.3, H236)

Dieser geometrische Algorithmus des Archimedes bildet für eine wachsende Anzahl N der Approximationsschritte den dynamischen Prozess einer doppelseitigen Konvergenz gegen einen realen Grenzwert oder gegen einen stabilen Gleichgewichtspunkt.

Approximation eines Parabelsegments

Dieselbe Approximationsmethode, die er für die Berechnung des Flächeninhalts von ebenen Figuren mittels eines geometrischen Algorithmus von sukzessiven eingeschriebenen Polygonen nützt, wendet Archimedes auch im Fall eines ebenen Kegelschnitts an. In seinem Werk “Mechanik B”, Theorem 2,

- schreibt Archimedes zuerst sukzessiv eine Reihe von aufeinanderliegenden Dreiecken in einem schiefen Parabelsegment ein.
- Danach berechnet er den Flächeninhalt E_N des entstehenden eingeschriebenen

$$\text{Polygons: } E_N = E + \frac{E}{4} + \frac{E}{16} + \dots + \frac{E}{4^{N-1}},$$

wobei E die Fläche des ersten eingeschriebenen Dreiecks ist.

- Zuletzt ermittelt er den Grenzwert der unendlichen Reihe: $E_0 = E + \frac{E}{4} + \frac{E}{16} + \dots = \frac{4E}{3}$ und findet somit die Fläche E_0 des Parabelsegments.

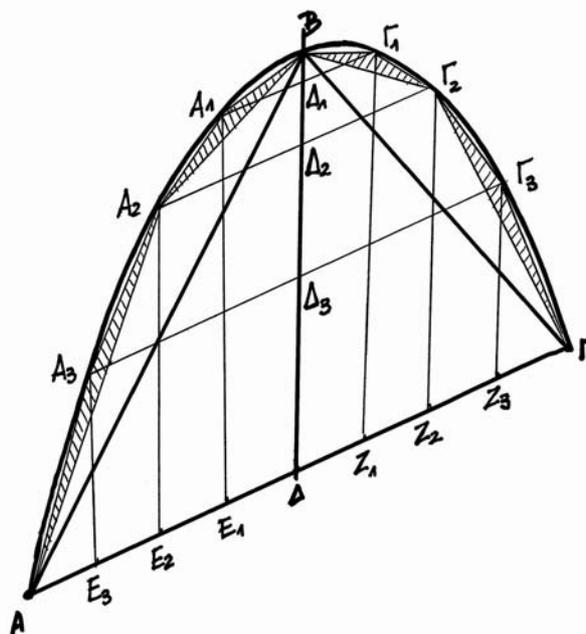


Bild 4. Geometrischer Algorithmus für die Approximation eines Parabelsegmentes durch sukzessiv eingeschriebene Dreiecke (Mechanik B, Th.2, H168)

Eine entsprechende Annäherungsmethode wendet Archimedes in seinem Werk “Über kegelförmige und kugelförmige Körper” auch für die Berechnung des Volumens eines parabelförmigen starren Körpers an.

Mechanik und Mathematik

Das Interessante in dem Werk von Archimedes ist die Verbindung, die er zwischen Mathematik und Mechanik herstellt. Charakteristisches Beispiel dieser Verbindung ist die Umwandlung einer mathematischen Figur - der Spirale - in eine Maschine - die Schraubenwelle -, die Jahrhunderte lang für die Wasserhebung oder allgemeiner für die mechanische Fortbewegung benutzt wurde.

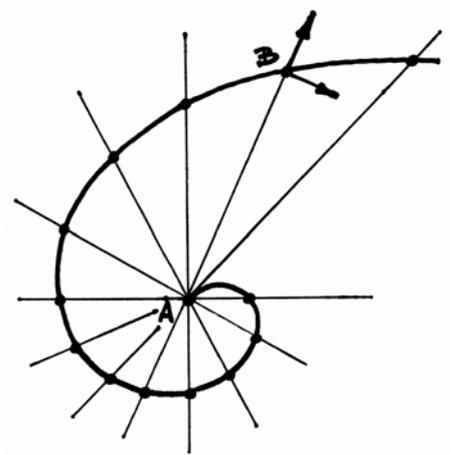


Bild 5. Mathematische Definition der ebenen Spirale (Über Spiralen, Einleitung, H8, 35)

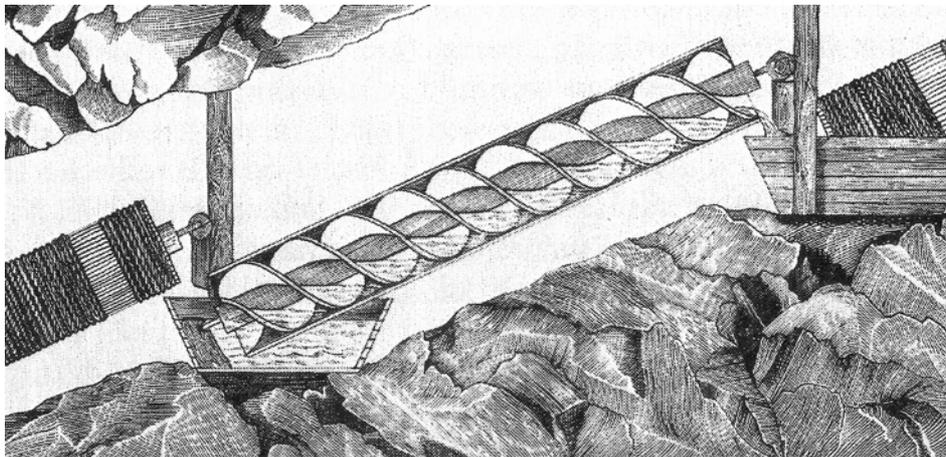


Bild 6. Die archimedische Schraubenwelle [Klemm, 4]

Eine umgekehrte Verbindung zwischen Mechanik und Mathematik unternimmt Archimedes in seinem Werk “Über die mechanischen Theoreme – An Eratosthenes Methode”. Dort entwickelt er “**Eine Theorie und die Eigenschaften einer Methode**”.

anhand deren die Möglichkeit bestehe manche mathematische Probleme mittels der entsprechenden mechanischen Problemen zu untersuchen und zu lösen ” (An Eratosthenes Methode, H428,20).

Mit dieser “Methode”, die er “mechanische Methode” nennt, versucht Archimedes schwer zu lösende mathematische Probleme zunächst empirisch, experimentell, durch Anwendung von Vergleichen, Modellen und Messinstrumenten, aber auch durch Übertragung von mechanischen Gesetzen in die Mathematik zu behandeln. Mit seiner “mechanischen Methode” findet er zunächst die Lösungen der mathematischen Probleme, bestätigt somit die Richtigkeit seiner Theoreme und entwickelt danach strenge geometrische Lösungen.

Spezieller, die “mechanische Methode” besteht aus folgenden Schritten:

- Archimedes geht von der Mechanik aus. Er untersucht die Waage und ihre Gleichgewichtsbedingung und formuliert das Grundgesetz der Mechanik, bekannt als Hebelgesetz.

“Größen stehen im Gleichgewicht, wenn sie aus Hebellängen mit reziprokem Verhältnis zu den entsprechenden Gewichten hängen” (Mechanik A,6.7).

$$\frac{\text{Gewicht(A)}}{\text{Gewicht(B)}} = \frac{\text{Hebel (OB)}}{\text{Hebel (OA)}}$$

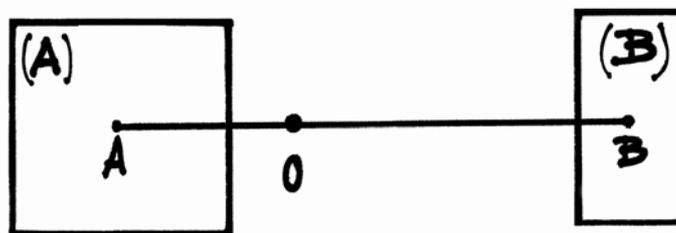


Bild 7. Mechanische Gleichgewichtsbedingung einer Waage (Mechanik A, Th.6, 7)

- Er erweitert den Begriff des “Gewichtes” mit dem allgemeinen Begriff der “Größe”, die er als jede “messbare Quantität” definiert. Mit dieser Definition verbindet er also den Begriff der physikalischen Größe mit dem mathematischen Begriff ihres Maßes.
- Er stellt eine “Analogie” zwischen Mechanik und Geometrie, spezieller zwischen dem “Gewicht” eines Körpers und seinem geometrischen “Volumen”, her. So versteht er unter dem allgemeinen Begriff Größe auch die Längen, die Flächen oder die Volumina von eindimensionalen, ebenen oder räumlichen geometrischen Figuren.

- Er erweitert diese allgemeine Analogie, indem er eine Analogie zwischen einer “mechanischen” und einer “geometrischen Waage” einführt. Er erfindet eine theoretische Waage, an deren Enden geometrische Größen hängen und für die eine mathematische anstatt der mechanischen Gleichgewichtsbedingung gilt.
- Er unterteilt die zu untersuchende Größe in unendlich viele, unendlich kleine Teilgrößen und setzt danach die Gesamtgröße mit Hilfe des “Superpositionsprinzips” aus diesen unendlich vielen, unendlich kleinen Teilgrößen zusammen.
- Archimedes konstruiert zuletzt seine gesamte “geometrische Waage” und “wiegt” auf ihr komplizierte geometrische Figuren, die er, in Teilgrößen untergeteilt und wieder zusammengesetzt, an einem Arm der Waage hängen lässt. Er berechnet Flächeninhalte, Volumina oder Schwerpunkte dieser ebenen oder starren geometrischen Figuren, indem er an den anderen Arm der Waage einfache geometrische Figuren bekannten Flächeninhalts, Volumens oder Schwerpunkts unter der Bedingung des geometrischen Gleichgewichts hängt.

Geometrische Waage eines Dreiecks

In seinem Werk “Quadratur einer Parabel”, Theorem 6, bildet Archimedes eine “geometrische Waage”, indem er an den einen Arm eine Größe, eine geometrische Fläche oder ein Gewicht Z und an den anderen ein Dreieck $B\Delta\Gamma$ aufsetzt.

Durch Anwendung des “geometrischen Gleichgewichtsprinzips” beweist er, dass **“die Waage im Gleichgewicht steht, wenn die Größe Z ein Drittel des Dreiecks $B\Delta\Gamma$ ist”**, da

$$\frac{(Z)}{\text{Dreieck } (B\Delta\Gamma)} = \frac{\text{Hebel } (BE)}{\text{Hebel } (BA)} = \frac{1}{3}.$$

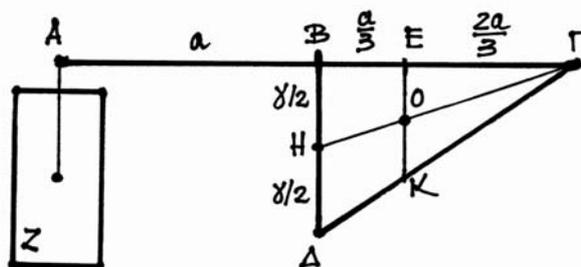


Bild 8. Geometrische Waage für die Berechnung des Schwerpunktes eines Dreiecks
(Quadratur einer Parabel, Th.6)

Seine Schritte sind folgende:

- Er definiert die physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten als Axiome.
- Er formuliert das Grundgesetz der Hydrostatik, das sogenannte archimedische Prinzip, nämlich das Gleichgewichtsprinzip eines Schwimmkörpers:

“Beim Gleichgewicht, ist das Verhältnis des Gewichtes des Schwimmkörpers zu dem Gewicht der Flüssigkeit gleichen Volumens gleich dem Verhältnis des Volumens des gesunkenen Körperteils zum Volumen des gesunkenen Schwimmkörpers” (Fuhrwerke B, Theorem 1).

Dieses Prinzip ist äquivalent der bekannten Gleichgewichtsbedingung, bei der **“das Gesamtgewicht des Schwimmkörpers dem Gewicht von Flüssigkeit gleichen Volumens mit dem des gesunkenen Körperteils”** ist.

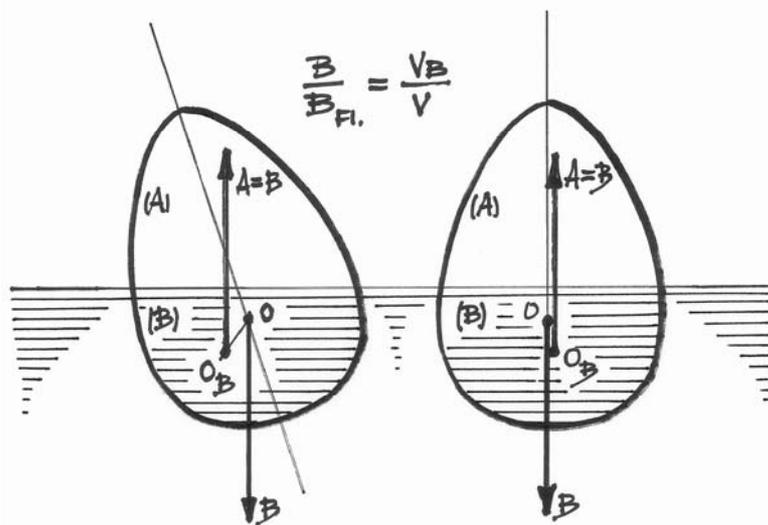


Bild 10. Hydrostatisches Gleichgewichtsprinzip eines Schwimmkörpers (Fuhrwerke B, Th.1, H345)

- Er interpretiert das Gleichgewichtsprinzip, indem er annimmt, dass der Schwimmkörper wie eine Waage, auf die zwei entgegengesetzte Kräfte einwirken, funktioniert. Die erste Kraft ist die Schwerkraft gleich dem Gesamtgewicht des Körpers. Sie wirkt am Schwerpunkt O des Körpers ein. Die zweite entgegengesetzte Kraft, die die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ist der sogenannte “Auftrieb”. Diese Kraft ist dem Maß nach gleich dem Gesamtgewicht des Körpers oder äquivalent gleich dem Gewicht der Flüssigkeit gleichen Volumens mit dem Volumen des gesunkenen Körperteils. Sie wirkt

am Schwerpunkt O_B des gesunkenen Körpers ein. Die Ruhelage des Schwimmkörpers entsteht also als Ergebnis des dynamischen Gleichgewichts dieser Waage.

- In seinen Werken “Fuhrwerke A und B” untersucht Archimedes zuletzt die Stabilitätsbedingungen von kugel- oder parabelförmigen Schwimmkörpern, die aus ihrer Ruhelage abgelenkt werden. Er setzt z.B. für eine solche Stabilitätsbedingung, nach der ein abgelenkter parabelförmiger Schwimmkörper in seine Ruhelage asymptotisch zurückkehrt, den Grenzwert 3 zu 2 für das Verhältnis der Parabelachse zu dem Abstand zwischen Wasserspiegel und Parabelgipfel voraus (Fuhrwerke B, Theorem 2). Diese Bedingung ist äquivalent der Stabilitätsbedingung: **“Ein Schwimmkörper kehrt in seine Ruhelage zurück, wenn sein Schwerpunkt unter dem Wasserspiegel liegt”**.

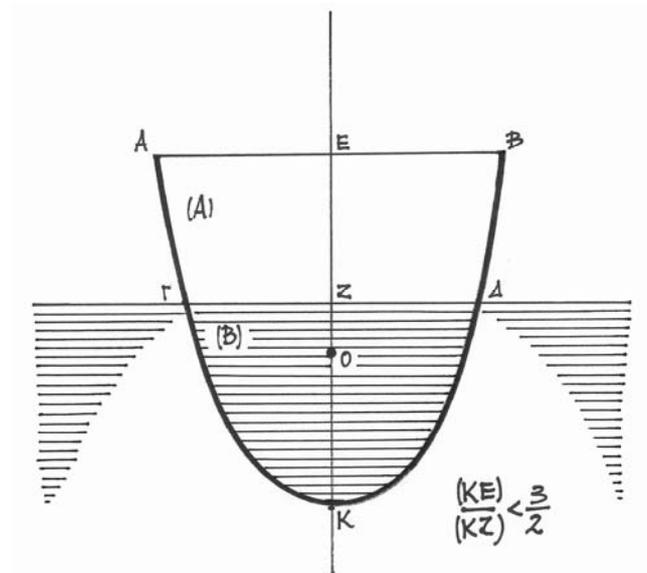


Bild 11. Stabilitätsbedingung eines parabelförmigen Schwimmkörpers
(Fuhrwerke B, Th.2, H348)

- Er untersucht das dynamische Verhalten des schwingenden Schwimmkörpers und interpretiert die Rückkehr zur Ruhelage als Ergebnis der Wirkung eines konkreten Ruckführungsmoments. Statt der einfachen Wirkung des Gesamtgewichts B am Schwerpunkt O des Körpers und des Gesamtauftriebs $A=B$ am Schwerpunkt O_B des gesunkenen Körperteils führt Archimedes die Idee einer “differentiellen Waage”, die die Rückkehr zur Ruhelage bewirkt, ein. Diese Waage besitzt einen “differentiellen

Non-holonomic Nature and Torque Control of Induction Machines

B. Grčar, P. Cafuta, G. Štumberger, H.R. Cortés, A.M. Stanković

Abstract

In the paper IM torque control is studied as an example of non-holonomic system with drift terms. Following the famous Brockett integrator problem several control propositions are introduced. The paper extends the control scheme from the state to the output control in several steps. By introducing adjusted amplitude, frequency and phase modulation of the IM stator current vector, the rotor flux linkage vector is implicitly forced to generate required periodic orbits that satisfy non-holonomic constraint. Improvements in the transient feedback performance, maximal steady-state efficiency, avoidance of singularities and sufficient robustness are actually achieved by making the current modulation dependent from the torque error signal. In the contrast with the original work instead of global only local stability could be assured. The overall IM control require cascaded high-gain current controllers along with the machine torque estimation. Simulation and experimental results illustrate main characteristics of the proposed control with the emphasis on generated machine torque and estimated rotor flux linkage pattern.

Index Terms

Induction machine, Torque control, Non-holonomic systems with drift, Current modulation, Full state information controller, Output controller

List of symbols

$i_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta}, \psi_{\alpha,\beta}$	components of stator current, stator voltage and rotor flux linkage vectors in stationary reference frame
$u_{I,\perp}, \psi_{I,\perp}$	components of stator voltage and rotor flux linkage vectors in direction $(\cdot)_I$ and orthogonal $(\cdot)_\perp$ to stator current vector
$i_{\gamma,\delta}, u_{\gamma,\delta}, \psi_{\gamma,\delta}$	components of stator current, stator voltage and rotor flux linkage vectors in rotor reference frame
$\ i_s\ $	stator current vector magnitude
$\omega_m, \omega_i, \omega_r$	rotor speed (mechanical), stator current vector rotation speed, relative speed
φ	stator current vector relative angle
θ_i	stator current vector absolute angle
M	mutual inductance
R_r, L_r	rotor resistance and self-inductance
$\tau_r = L_r/R_r$	rotor time constant
R_s, L_s	stator resistance and self-inductance
$L_\sigma = L_s - (M)^2/L_r$	
$R_\sigma = R_s + (M/L_r)^2 R_r$	
$\tau_\sigma = L_\sigma/R_\sigma$	
T_{el}, T_L	machine torque, load torque
J	drive inertia
$J = [0, -1; 1, 0]$	2×2 rotation matrix
τ_f	torque estimator time constant
$(x, z), (u, v)$	states and inputs of the normalized models
k_{pi}, k_{ii}	current controller parameters
$(\cdot)^*, \widetilde{(\cdot)}, \widetilde{(\cdot)}$	reference, estimated, errors and steady-state values

I. INTRODUCTION

Although simple in its construction squirrel cage IM represents a challenging system from the control point of view. Non-linear and non-holonomic structure, unmeasurable rotor states and parameter variations represent the key obstacles in control design. Several control concepts resulting from the non-linear system theory were proposed in the recent years resulting from feedback linearization [4],[15],[5], passivity [3],

and flatness [9]. Since these concepts require implicit system inversion (mapping of the oriented reference current vector into voltage vector), an inner current loop is needed. An outer loop for speed and/or torque control is usually designed for the reduced model, assuming that the high gain current controllers achieve perfect tracking of the current command. Conceptually a different approach is introduced in [6], [7]. Stator flux linkage rotation is achieved by generating the control signal (stator voltage vector) in accordance with the finite number of possible voltage-source inverter (VSI) states, resulting in a complex nonlinear hybrid feedback system. The switching logic can be then expressed in the form of algebraic inequalities to enable stability analysis and determination of the feasible operation areas [8].

In the torque control design the first task is to perform the inversion of the reduced (rotor) model in order to obtain equilibrium conditions for a required machine torque. Since in general no such unique inversion exists, additional restrictions on states or inputs are necessary as we presented in [10]. Invariance of the magnitude of the rotor flux linkage vector, actually enables such an inversion and the globally stable feedback (family of solutions based on FOC). Analyzing a double integrator problem, that in general describes a non-holonomic nature of the IM rotor dynamics, approximate solution was proposed in [11]. For a class of non-holonomic systems without drift terms exact, globally stable solution based on the state feedback was proposed in [12]. Although non-holonomic systems are especially important in mechanics and robotics many other technical (including IM) and biological systems could be placed into this particular class of the non-linear systems. In the control design discontinues feedback (hybrid, sliding mode, bang-bang time optimal,...) or time-varying state (or output) feedback (trajectories planning, back-stepping, pattern generation) are generally proposed [2], [13] [14].

In the paper the cascaded structure with fast, high-gain current control is adopted, thus the reduced IM model is sufficient in further analysis. Our approach is based on the well known recognition that producing a constant machine torque requires stator current vector that rotates with corresponding constant amplitude and constant rotational speed. In the ideal case this could be done in the open-loop manner, however, due to the un-modelled dynamics, parameter uncertainty and external disturbances, the feedback is essential for an acceptable performance. Current vector rotation will also implicitly enforce the required rotation of the IM rotor flux linkage, resulting in a constant vector product with the stator current. If the current vector rotational speed is too small both vectors are almost co-linear thus the resulting machine torque will be consequently also almost zero. In contrast, if the current vector rotational speed is increased to the point where both vectors are almost orthogonal the machine will stall, since the rotor field could not be further preserved. We therefore propose dynamic restriction on stator current vector rotation speed, so that unique maximal efficiency steady-state operation, along with high tracking dynamics and sufficient stability margin, is simultaneously achieved for any feasible machine torque. All these requirements, along with some additional robustness features, are assured with the adequate modulation of the stator current vector. This concept results in a controller structure that maps torque error in the stator current vector (imposing required magnitude, rotation speed and phase) instead of the decoupled two input-two output systems encountered in other schemes (flux-torque/speed control).

In the paper we will switch between two IM models: RM derived in the rotor reference frame and CM derived in the reference frame of the stator current. Both models have well defined coordinate transformations since they rely on directly measured variables. CM is used for the dynamic inversion to obtain unique equilibrium (inverse mapping between required output, states and inputs), in the determination of stable operation regions and for efficiency maximization. RM, on the other hand, is used to establish the link to the non-holonomic systems. Additionally it is used to expose explicitly the nature of periodic states and the need for the input modulation. Introducing corresponding transformation between reduced CM and RM the stability analysis could be simplified. Instead of proving the stability of time-variant RM feedback system, the time-invariant CM feedback system could be used instead.

The organization of the paper is as follows. First, the IM model in the rotor reference frame (RM) is introduced. The requirements for the stator current vector modulation are explained and the non-holonomic form is recognized. For the particular case when stator current is amplitude modulated, analytical expressions for the rotor flux linkage and for the machine torque are obtained. Based on the

steady-state and transient analysis of the reduced CM model conditions for maximal efficiency operation along with the general stability bounds are summarized. Simplified models with normalized coefficients are introduced next for RM and for CM. Based on the normalized RM and CM several modification of the Brockett controller [12], that simultaneously provide required input modulation, assure local stability and also minimal steady-state input norm are introduced in the next section. Finally the state and output controllers are proposed for the actual IM. Design and parametrization of the inner current controllers is discussed afterwards adopting justified time separation of the stator and rotor dynamics. The time-varying linear current controllers, based on the internal model principle, that also compensate the stator induced voltage, are proposed. In the last section some experimental results are given to illustrate main characteristics of the proposed control.

II. RM CHARACTERISTICS

Under standard IM modelling assumptions [1] for linear magnetics, choosing the stator current vector and the rotor flux linkage vector as the state variables, and applying orthogonal ($T_{3-2}^{-1} = T_{3-2}^T$) non-linear geometric transformations on a standard $\alpha - \beta$ model in a fixed reference frame, RM in $\gamma - \delta$ reference frame is obtained, for the two pole machine, in the following form

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_\gamma \\ \dot{i}_\delta \\ \dot{\psi}_\gamma \\ \dot{\psi}_\delta \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_\sigma^{-1}i_\gamma + \omega_m i_\delta + \omega_m \frac{M}{L_\sigma L_r} \psi_\delta + \frac{R_r M}{L_\sigma L_r^2} \psi_\gamma + \frac{1}{L_\sigma} u_\gamma \\ -\tau_\sigma^{-1}i_\delta - \omega_m i_\gamma - \omega_m \frac{M}{L_\sigma L_r} \psi_\gamma + \frac{R_r M}{L_\sigma L_r^2} \psi_\delta + \frac{1}{L_\sigma} u_\delta \\ -\tau_r^{-1}\psi_\gamma + \tau_r^{-1}M i_\gamma \\ -\tau_r^{-1}\psi_\delta + \tau_r^{-1}M i_\delta \\ J^{-1}(\frac{M}{L_r}(\psi_\gamma i_\delta - \psi_\delta i_\gamma) - T_L) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Assuming that, with some appropriate stator current controllers, the tracking problem (mapping of the references i_γ^*, i_δ^* into the machine voltages u_γ, u_δ) could be adequately solved, a reduced second order model is obtained as

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_\gamma \\ \dot{\psi}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_r^{-1}\psi_\gamma + \tau_r^{-1}M i_\gamma \\ -\tau_r^{-1}\psi_\delta + \tau_r^{-1}M i_\delta \end{bmatrix} \quad (2)$$

along with the first order output dynamics actually modelling the machine torque estimation process

$$\dot{\hat{T}}_{el} = -\tau_f^{-1}\hat{T}_{el} + \tau_f^{-1}\frac{M}{L_r}(\psi_\gamma i_\delta - \psi_\delta i_\gamma) \quad (3)$$

Choosing the machine torque as controlled output variable this imply some kind of torque estimation or measurement. Several estimation and measuring techniques are available. Advanced, robust estimation methods use voltage sensors and stator equations [16], [17] and [18]. In some drives with large IM air-gap flux is actually measured [19]. In this particular case it is straightforward task to calculate machine torque based on the orthogonal air-gap flux linkage. Although machine torque is in this case practically directly measured, this is always a dynamic process and the first order dynamics, with the time constant τ_f , was introduced to model this sensor (3). Just from the theoretical standpoint and without loss of generality it will be therefore assumed that the machine torque is measured.

Rewriting (2) and (3) in the compact form

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^2 g_i(x)u_i = Ax + \begin{bmatrix} \tau_r^{-1}M & 0 \\ 0 & \tau_r^{-1}M \\ -\frac{M}{\tau_f L_r} \psi_\delta & \frac{M}{\tau_f L_r} \psi_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

non-holonomic system with drift is obtained. Non-holonomic property of reduced IM model is conditioned by the facts that system (18) is under-actuated, that can not be controlled by a constant state feedback and that due to the drift terms implication $u = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$ is not fulfilled. Non-holonomic constraint for the IM machine in the particular reference frame that assures constant machine torque is obtained in the form

$$\begin{bmatrix} -\psi_\delta & \psi_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_\gamma \\ \dot{\psi}_\delta \end{bmatrix} = const. \quad (5)$$

or alternatively

$$\begin{bmatrix} -\psi_\delta & \psi_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_\gamma \\ \ddot{\psi}_\delta \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

Non-holonomic constraints (5) and (6) are satisfied only if the rotor flux trajectories are periodic orbits which by considering (4) imply that stator current must be periodic too, with exact amplitude, frequency and phase. The system (4) is first-bracket controllable since $\text{span}(g_1, g_2, g_3, [g_1, g_2], \dots, [g_2, g_3]) = 3$. If required machine torque should be increased (${}^2T_{el} > {}^1T_{el} > 0$) the corresponding steady-state flux linkage vector and the stator current vector are well defined under assumption $|\bar{\omega}_r| = \tau_r^{-1}$. Note that with a simple input transformation stator current vector magnitude and its rotation speed could be expressed in the rotor reference frame as

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau + \varphi_f ; \varphi(0) = 0 \\ i_\gamma &= \|i_s\| \cos(\varphi) \\ i_\delta &= \|i_s\| \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

where feed-forward angle φ_f could be set as:

$$\varphi_f = -\text{sign}(T_{el}^*) \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

In (7) we introduced relative speed as the difference between the rotation speed of the current vector and the rotor ($\omega_r = \omega_i - \omega_m$). Consequently, the rotor speed ω_m is simply interpreted as a bounded time-varying parameter, and the dynamics of the mechanical part could be therefore omitted from further analysis. The angle φ_f offers additional degree of freedom in the torque control providing phase modulation of the stator current vector while the amplitude and frequency modulation must be provided by the torque controller. This additional input can be used for the fast (almost instantaneous) angle changes between the stator current vector and the rotor flux linkage vector in case of sign changes of the reference torque (active braking) and in generation of short torque pulses.

To obtain fast exponential flux linkage trajectory during the transients appropriate modulation of the stator current vector must be assured. In Fig. 1 the rotor flux linkage trajectories are presented for increased positive machine torque.

Note that (2) is linear so that analytical solution could be obtained for periodic stator currents with adjusted amplitude and constant ω_r

$$\begin{aligned} i_\gamma &= \|i_s\| \cos(\omega_r t) = f_1(T_{el}^*, \omega_r) \cos(\omega_r t) \\ i_\delta &= \|i_s\| \sin(\omega_r t) = f_1(T_{el}^*, \omega_r) \sin(\omega_r t) \end{aligned} \quad (9)$$

where $f_1(\cdot) = f_1(T_{el}^*, \omega_r)$ indicate amplitude modulation that depends on the reference torque and constant relative speed. For the flux linkage components we get

$$\begin{aligned} \psi_\gamma &= M f_1(\cdot) (\omega_r \tau_r \sin(\omega_r t) + \cos(\omega_r t) - e^{-t/\tau_r}) / (1 + \omega_r^2 \tau_r^2) \\ \psi_\delta &= M f_1(\cdot) (-\omega_r \tau_r \cos(\omega_r t) + \sin(\omega_r t) - \omega_r \tau_r e^{-t/\tau_r}) / (1 + \omega_r^2 \tau_r^2) \end{aligned} \quad (10)$$

and for the machine torque

$$\hat{T}_{el} = \frac{M^2 f_1(\cdot)^2}{L_r + (1 + \omega_r^2 \tau_r^2)} (\omega_r \tau_r - \sin(\omega_r t) e^{-t/\tau_r} - \omega_r \tau_r \cos(\omega_r t) e^{-t/\tau_r}) \quad (11)$$

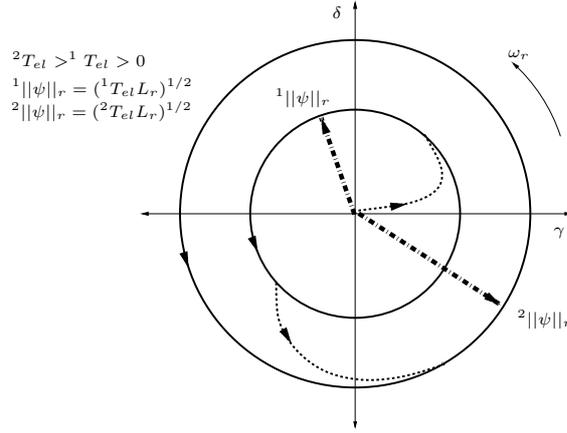


Fig. 1. Periodic rotor flux linkage trajectories.

Considering (10), (11) and assuming that $T_{el}^* > 0 \rightarrow \omega_r > 0$, it could be easily verified that amplitude modulation $f_1(\cdot)$ that depends on the reference torque and relative speed in the following way

$$f_1(T_{el}^*, \omega_r) = \frac{2\tau_r}{M} \sqrt{\frac{|T_{el}^*| L_r}{2}} \omega_r \quad (12)$$

along with assumed constant $\omega_r = \tau_r^{-1}$, will provide maximal efficiency steady-state operation with minimal magnitudes of the stator current and rotor flux linkage vectors. In this case (10) and (11) simplify into

$$\begin{aligned} \psi_\gamma &= \sqrt{\frac{|T_{el}^*| L_r}{2}} (\sin(t/\tau_r) + \cos(t/\tau_r) - e^{-t/\tau_r}) \\ \psi_\delta &= \sqrt{\frac{|T_{el}^*| L_r}{2}} (\sin(t/\tau_r) - \cos(t/\tau_r) + e^{-t/\tau_r}) \\ \hat{T}_{el} &= T_{el}^* (1 - \sin(t/\tau_r) e^{-t/\tau_r} - \cos(t/\tau_r) e^{-t/\tau_r}) \end{aligned} \quad (13)$$

As $t \rightarrow \infty$ it is obvious that required periodic motion of the rotor flux linkage vector along with the reference machine torque is obtained. Since the machine torque is changed only with the stator current magnitude adjustment, moderate dynamic performance could be expected. In order to obtain high dynamic torque response and the maximal steady state efficiency, frequency modulation that depends on the torque error should be also employed. If this type of modulation is also considered (9) is expanded as

$$\begin{aligned} i_\gamma &= f_1(T_{el}^*, f_2(\hat{T}_{el}, t)) \cos(f_2(\hat{T}_{el}, t)) \\ i_\delta &= f_1(T_{el}^*, f_2(\hat{T}_{el}, t)) \sin(f_2(\hat{T}_{el}, t)) \end{aligned} \quad (14)$$

This proposition will be studied in the Section IV.

III. CM CHARACTERISTICS

In the continuation some results from [10] are briefly summarized. For the same modelling assumption as in the case of RM, in addition the CM in the $I-\perp$ reference frame

$$\begin{bmatrix} \dot{\|i_s\|} \\ \dot{\theta_i} \\ \dot{\psi_I} \\ \dot{\psi_\perp} \\ \dot{\omega_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_\sigma^{-1} \|i_s\| + \frac{M}{L_\sigma L_r \tau_r} \psi_I + \omega_m \frac{M}{L_\sigma L_r} \psi_\perp + \frac{1}{L_\sigma} u_I \\ -\omega_m \frac{M}{L_\sigma L_r} \frac{\psi_I}{\|i_s\|} + \frac{M}{L_\sigma L_r \tau_r} \frac{\psi_\perp}{\|i_s\|} + \frac{1}{L_\sigma \|i_s\|} u_\perp \\ -\tau_r^{-1} \psi_I + (\omega_i - \omega_m) \psi_\perp + M \tau_r^{-1} \|i_s\| \\ -\tau_r^{-1} \psi_\perp - (\omega_i - \omega_m) \psi_I \\ -\frac{1}{J} \left(\frac{M}{L_r} \psi_\perp \|i_s\| - T_L \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Assuming again that, with some appropriate current controllers, the tracking problem (mapping of the references $\|i_s\|^\star, \omega_r^\star$ into the machine voltages u_I, u_\perp) can be adequately solved, and that the first order torque estimator dynamic is considered, reduced CM is derived from (15). Third order system that actually captures essential rotor flux linkage and machine torque dynamics, is obtained as follows

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_I \\ \dot{\psi}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_r^{-1}\psi_I + \omega_r\psi_\perp + M\tau_r^{-1}\|i_s\| \\ -\tau_r^{-1}\psi_\perp - \omega_r\psi_I \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{\hat{T}}_{el} = -\tau_f^{-1}\hat{T}_{el} - \tau_f^{-1}\frac{M}{L_r}\psi_\perp\|i_s\| \quad (17)$$

where $\|i_s\|, \omega_r$ are new control inputs. Note that in this particular reference frame estimation of any (stator, rotor or air-gap) flux linkage projection, that is orthogonal to the stator current vector, is sufficient for the machine torque calculation. If the air-gap flux linkage sensor is available than the machine torque could be easily calculated based on the orthogonal air-gap flux linkage projection and by using measured stator current vector. Again the first order dynamic is introduced to model this type of measurement. Rewriting (16) and (17) in the compact form

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^2 g_i(x)u_i = Ax + \begin{bmatrix} \tau_r^{-1}M & \psi_\perp \\ 0 & -\psi_I \\ -\frac{M}{\tau_f L_r}\psi_\perp & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|i_s\| \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (18)$$

slightly different form of a non-holonomic system with drift is obtained. Note that the symmetry observed in (4) is lost in (18) due to the particular nature of the inputs. In case of CM the inputs $\|i_s\|, \omega_r$ have explicit kinematic nature meanwhile in RM the inputs i_γ, i_δ have clear geometric meaning. Considering the reduced model (18), along with the output equation (17) it can be seen that unique inverse mapping $\hat{T}_{el} \rightarrow \psi_I, \psi_\perp, \|i_s\|, \omega_r$ does not exist. Additional conditions must therefore be introduced to obtain required equilibrium. Based on steady-state analysis of (18) it follows that

$$\bar{\psi}_r = \begin{bmatrix} \frac{M\|i_s\|}{1+\omega_r^2\tau_r^2} \\ -\frac{\omega_r\tau_r M\|i_s\|}{1+\omega_r^2\tau_r^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

from where it can be easily concluded that maximal steady-state gain between $\|i_s\|$ and ψ_\perp is obtained if the equilibrium condition $|\bar{\omega}_r| = \tau_r^{-1}$ is satisfied. Note that in the steady-state introduced relative rotation speed ω_r equals the slip speed. Since the quantities $\psi_\perp, \|i_s\|$ are torque producing, this condition also implies maximal torque per ampere ratio, and additionally it follows also that $\bar{\psi}_I = |\bar{\psi}_\perp|$. Furthermore the steady-state torque producing flux linkage vector component and the corresponding current vector magnitude for a given torque command T_{el}^\star could be calculated as

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\perp^\star &= -\text{sign}(T_{el}^\star)\sqrt{\frac{|T_{el}^\star|L_r}{2}} \\ \|\bar{i}_s\|^\star &= \frac{2}{M}|\bar{\psi}_\perp^\star| \end{aligned} \quad (20)$$

IV. PROPOSITIONS FOR THE STATE AND OUTPUT CONTROLLER

To simplify the analysis and to present essential control propositions the (4) is rewritten with the normalized coefficients in the form of the non-holonomic system with drift

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + u_1 \\ -x_2 + u_2 \\ -x_3 + x_1u_2 - x_2u_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Introducing the output control error $\tilde{x}_3 = x_3^* - x_3$, $x_3^* > 0$ and by expanding the proposition in [12] originally proposed for the drift-free case, a state controller that compensate drift terms $-x_1, -x_2$ is proposed first

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 - \omega x_2 \\ \omega x_1 + (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

where $k_p > 0$ is controller gain. Note that this controller implies a full state measurement, during the transients inputs u_1, u_2 are only amplitude modulated due to the term $k_p \tilde{x}_3$, ω appears in the control as a constant parameter and that $x_1 = x_2 = 0$ is the singular point. Choosing $\omega = 1$ the steady-state is obtained as

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_3^*} \cos(t) \\ \sqrt{x_3^*} \sin(t) \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (23)$$

Instead of using constant ω the dynamic extension of the static controller (22) is introduced

$$\dot{\omega} = k_i \tilde{x}_3 \quad ; \omega(0) = 0 \quad ; k_i > 0 \quad ; |\omega| \leq 1 \quad (24)$$

By bounding integrator output according to plant time constant ($\tau = 1$) partial oscillation reduction in controlled variable x_3 could be achieved. However, as only amplitude modulation of the inputs is employed (frequency does not depend on the output error), the response of x_3 is still slow and poorly damped. To increase overall control performance additional frequency modulation of the inputs is proposed. Expanding (22) along with (24) another controller type is therefore proposed in the form

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 - (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \\ (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 + (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

In Fig. 2 the performance of both controllers is given for comparison. The controller (25) will produce the same steady-state (23) as the controller (22), however with significant improvements in the dynamic response.

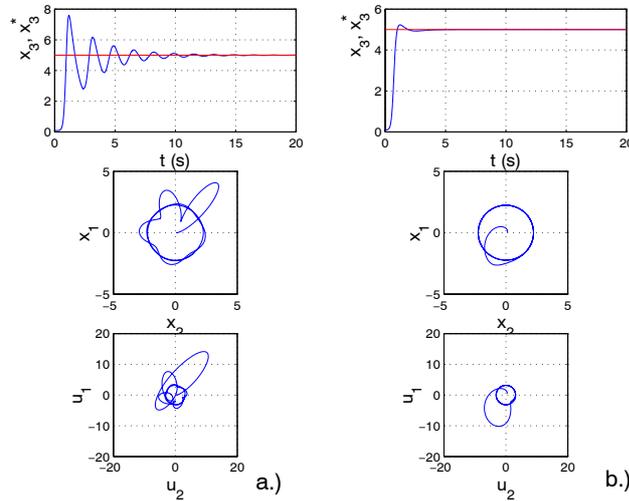


Fig. 2. Control performance using only amplitude modulation a.) and with amplitude and frequency modulation b.).

Note that infinite number of amplitude and frequency combinations will generate the same required output so that the question arises how to determine the solution that will additionally minimize the cost

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \|u\| d\tau \rightarrow \min \quad (26)$$

To examine this issue additional gain $\Gamma > 0$ is inserted into the control law (25)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 - (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \\ (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 + \Gamma(\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considering the plant (21) along with the control law (24) and (27) the feedback system is obtained as

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + \Gamma(\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 - (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \\ -x_2 + (\omega + k_p \tilde{x}_3)x_1 + \Gamma(\omega + k_p \tilde{x}_3)x_2 \\ -x_3 + (\omega + k_p \tilde{x}_3)(x_1^2 + x_2^2) \\ k_i \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

With the choice $\Gamma > 1$ the magnitude of the input vector will increase and the frequency will decrease. If $\|u\|$ is considered as unbounded then for any $\Gamma > 1$ the stable response is obtained. In the opposite case if $\Gamma < 1$ the magnitude of input vector will decrease and frequency will increase. But due to the low-pass plant characteristics the states x_1, x_2 will be too small to produce required output x_3 (phenomenon is usually denoted as stall in the case of IM). Only with the obvious choice $\Gamma = 1$ unique steady-state of (28) is obtained

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}| &= \tau^{-1} = 1 \\ \|\bar{u}\| &= \sqrt{2x_3^*} \\ \bar{x}_1 &= |\bar{x}_2| = \sqrt{x_3^*} \\ \bar{x}_3 &= x_3^* \end{aligned} \quad (29)$$

simultaneously fulfilling the minimal cost criteria (26). Fig. 3 illustrates the influence of the parameter Γ on the control performance.

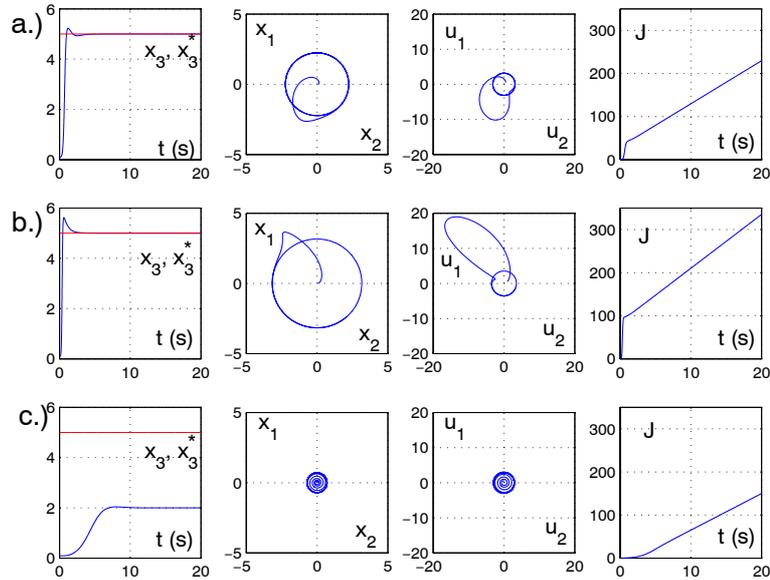


Fig. 3. Control performance and cost J for a.) $\Gamma = 1$, b.) $\Gamma = 2$ and c.) $\Gamma = 0.25$.

For the IM torque control implementation of a controller (27) and (24) would require rotor flux linkage estimation. Since this estimation is parameter sensitive alternative solution is to use the output control, based on knowledge of x_3 only. In the model (21) state x_3 corresponds to the machine torque which could be estimated by using measured machine voltages and stator currents therefore avoiding the need

for estimation of the rotor states which is always parameter sensitive process. Based on this assumption output controller is proposed in the final form

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= k_i \tilde{x}_3 \quad ; |\nu| \leq 1 \\ \dot{\varphi} &= \omega = \nu + k_p \tilde{x}_3 \\ \|u\| &= \sqrt{2z_3^*} |\omega| \end{aligned} \quad (30)$$

with the control inputs

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|u\| \cos(\varphi) \\ \|u\| \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (31)$$

which by its construction corresponds to the proposed form (14). Output controller (30), (31) will produce equivalent amplitude and frequency modulation during the transients and the same steady-state (29) as does the state controller (27). Instead of analyzing the stability of the resulting time-varying feedback system we therefore propose transformation of the original system (21) into reference frame that is aligned with $\|u\|$ (CM). In the new reference frame the inputs are expressed as

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \\ v_2 &= \omega = \dot{\varphi} = (\tan^{-1}(\frac{u_2}{u_1}))^\bullet \end{aligned} \quad (32)$$

and the new states as

$$z = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (33)$$

The transformed time-invariant model is obtained as

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -z_1 + z_2 v_2 + v_1 \\ -z_2 - z_1 v_2 \\ -z_3 - z_2 v_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Note that transformed model actually captures essential dynamics of the normalized IM model in the stator current reference frame (16), (17). The output control law in the new reference frame is given in accordance with (30) as

$$\begin{aligned} \dot{p} &= k_i \tilde{z}_3 \\ v_2 &= p + k_p \tilde{z}_3 \\ v_1 &= \sqrt{2z_3^*} |v_2| \end{aligned} \quad (35)$$

The resulting feedback is obtained as

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + z_2(p + k_p \tilde{z}_3) + \sqrt{2z_3^*} |(p + k_p \tilde{z}_3)| \\ -z_2 - z_1(p + k_p \tilde{z}_3) \\ -z_3 - z_2 \sqrt{2z_3^*} |(p + k_p \tilde{z}_3)| \\ k_i \tilde{z}_3 \end{bmatrix} = f(z, p) \quad (36)$$

with the unique equilibrium point

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= |\bar{z}_2| = \sqrt{2z_3^*}/2 \\ \bar{z}_3 &= z_3^* \\ |\bar{p}| &= 1 \end{aligned} \quad (37)$$

Linearizing the feedback system at the equilibrium point, assuming that $x_3^* > 0 \rightarrow v_2 > 0$, we get

$$\frac{\partial f(z, p)}{\partial (z, p)} \Big|_{(\bar{z}, \bar{p})} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{2z_3^*} k_p / 2 & \sqrt{2z_3^*} / 2 \\ -1 & -1 & \sqrt{2z_3^*} k_p / 2 & -\sqrt{2z_3^*} / 2 \\ 0 & \sqrt{2z_3^*} & -1 - z_3^* k_p & z_3^* \\ 0 & 0 & -k_i & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Local stability of the feedback system (38) is assured by Ruth's criteria. If additionally $z_3^* = 0$ the feedback dynamics is reduced to

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + z_2(p - k_p z_3) \\ -z_2 - z_1(p - k_p z_3) \\ -z_3 \\ k_i z_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Introducing Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + p^2) \quad (40)$$

time derivative along the solution of (39) is given as

$$\dot{V} = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + k_i p z_3) \quad (41)$$

Since p and z_3 have always the same sign equilibrium point $z = 0$ is globally asymptotically stable.

Based on the previous analysis two, by transient performance similar, IM torque controllers could be therefore proposed based either on the state feedback

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= k_i \tilde{T}_{el} \quad ; |\nu| \leq \hat{\tau}_r^{-1} \leq \tau_r^{-1} \\ i_\gamma^* &= \frac{\hat{\tau}_r}{M} (-(\nu + k_p \tilde{T}_{el})\psi_\delta + (\nu + k_p \tilde{T}_{el})\psi_\gamma) \\ i_\delta^* &= \frac{\hat{\tau}_r}{M} ((\nu + k_p \tilde{T}_{el})\psi_\gamma + (\nu + k_p \tilde{T}_{el})\psi_\delta) \end{aligned} \quad (42)$$

or based on the output feedback

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= k_i \tilde{T}_{el} \quad ; |\nu| \leq \hat{\tau}_r^{-1} \leq \tau_r^{-1} \\ \dot{\varphi} &= \omega_r = \nu + k_p \tilde{T}_{el} \\ \|i_s\| &= \frac{2\hat{\tau}_r}{M} \sqrt{\frac{|T_{el}^* L_r|}{2}} |\omega_r| \quad ; 0 < \|i_s\| < \|i_s\|_{\max} \\ i_\gamma^* &= \|i_s\| \cos(\varphi + \varphi_f) \\ i_\delta^* &= \|i_s\| \sin(\varphi + \varphi_f) \end{aligned} \quad (43)$$

$$(44)$$

The notation $(\cdot)^*$ is introduced to indicate that the torque controller outputs i_γ^*, i_δ^* actually represents the reference inputs for the inner current controllers. Both controllers produce similar dynamic response and the same steady-state if the rotor flux linkage or machine torque estimation are adequately solved as proposed in [16], [17] and [18]. Note that the state controller (42) is singular at zero flux linkage meanwhile no singularities occur if the output controller (43),(44) is used. Output controller additionally offers a possibility for the explicit phase modulation (φ_f) while in case of the state controller this type of modulation is only implicit. Maximal steady-state efficiency could be achieved with both controllers assuming that rotor time constant is known. In the perturbed case the stable operation will be preserved due to the integrator bound $|\nu| \leq \hat{\tau}_r^{-1} \leq \tau_r^{-1}$ but the efficiency will be partially aggravated. If the current control is realized in the stator current reference frame only first part of the output controller (43) is needed. However, if the current control should be realized in the rotor reference frame additionally (44) must be included in the feedback.

A. Rotor Flux Observer

If the full state information torque controller (42) is used appropriate rotor flux observer is necessary. We propose simple Lyapunov based observer derived from (1). Stator and rotor equations are rewritten in the matrix form as

$$\dot{i}_s = \begin{bmatrix} -\tau_\sigma^{-1} & \omega_m \\ -\omega_m & -\tau_\sigma^{-1} \end{bmatrix} i_s + \begin{bmatrix} \frac{R_r M}{L_\sigma L_r^2} & \frac{M}{L_\sigma L_r} \omega_m \\ -\frac{M}{L_\sigma L_r} \omega_m & \frac{R_r M}{L_\sigma L_r^2} \end{bmatrix} \psi_r + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_\sigma} \end{bmatrix} u_s = A_{11} i_s + A_{12} \psi_r + B u_s \quad (45)$$

and

$$\dot{\psi}_r = \begin{bmatrix} M \tau_r^{-1} & 0 \\ 0 & M \tau_r^{-1} \end{bmatrix} i_s + \begin{bmatrix} \tau_r^{-1} & 0 \\ 0 & \tau_r^{-1} \end{bmatrix} \psi_r = A_{21} i_s + A_{22} \psi_r \quad (46)$$

Defining stator current error as $\tilde{i}_s = \hat{i}_s - i_s$ and rotor flux error $\tilde{\psi}_r = \hat{\psi}_r - \psi_r$ and by introducing the positive definite matrix gain K the current error dynamics is given as

$$\dot{\tilde{i}}_s = (A_{11} - K) \tilde{i}_s + A_{12} \tilde{\psi}_r = \bar{A} \tilde{i}_s + A_{12} \tilde{\psi}_r \quad (47)$$

For the Lyapunov function candidate

$$V = \tilde{i}_s^T P \tilde{i}_s + \xi \psi_r^T \tilde{\psi}_r \quad (48)$$

where $\xi > 0$ and P is the symmetric solution of the matrix equation $\bar{A}^T P + P \bar{A} - Q = 0$ with $Q \geq 0$. For the derivative of (48) it follows

$$\dot{V} = -\tilde{i}_s^T Q \tilde{i}_s + 2\tilde{\psi}_r^T A_{12}^T P \tilde{i}_s + 2\xi \tilde{\psi}_r^T (\dot{\tilde{\psi}}_r - \dot{\psi}_r) \quad (49)$$

Assuming slowly changes in the rotor flux which are well justified with the relatively long time constant τ_r , the rotor flux estimate is obtained from (49) by considering $\dot{\tilde{\psi}}_r \approx 0$ as

$$\hat{\psi}_r = -\xi A_{12}^T P \tilde{i}_s \quad (50)$$

Obtained observer requires also knowledge of the the machine voltage u_s in calculation of the model current \hat{i}_s . Instead of the actual voltage reference values provided by the current controller (52) could be used if no voltage sensor is available.

V. CURRENT CONTROL

The task of the inner current controllers is quite demanding since reference tracking, disturbance suppression and voltage drop compensation of the VSI must be achieved simultaneously. If the current control should be realized directly in the stator current orientation then controller outputs $\omega_r, \|i_s\|$ would be used as references. Note that in this case inverse mapping between the current vector magnitude $\|i_s\|$ and the voltage u_I is characterized by the perturbed first-order dynamics and that inverse mapping between ω_i and voltage u_\perp is purely algebraic and nonlinear. It should be pointed out that the inverse mapping $\|i_s\|, \omega_i \rightarrow u_I, u_\perp$ is quite sensitive in practical realization due to the partially algebraic plant nature, influence of the signal noise, parameter uncertainty and VSI operation.

To avoid algebraic loops and to obtain symmetrical current control structure with simple tuning rules and sufficient robustness, the stator equations of RM (1) are used along with i_γ^*, i_δ^* obtained from the torque controllers (42) or (44). The task of the current controller is therefore the mapping of reference currents i_γ^* and i_δ^* into machine voltages u_γ and u_δ . Stator equation in rotor reference frame is rewritten in the vector form as:

$$\dot{i}_{\gamma,\delta} = -\tau_\sigma^{-1} (J \omega_m \tau_\sigma + 1) i_{\gamma,\delta} + \frac{M}{L_\sigma L_r \tau_r} (J^T \omega_m \tau_r + 1) \psi_{\gamma,\delta} + \frac{1}{L_\sigma} u_{\gamma,\delta} = (A + J \omega_m) i_{\gamma,\delta} + B u_{\gamma,\delta} + d \quad (51)$$

Based on the justified time separation of the stator and rotor dynamics bounded disturbance d could be neglected since that stator current dynamic is predominantly driven by the eigenvalues of the time variant

system matrix $\lambda_{1,2}(A) = -\tau_\sigma^{-1} \pm j\omega_m$. For the cross-coupling effects between the current components $i_{\gamma,\delta}$ due to the motion induced voltages $L_\sigma J\omega_m i_{\gamma,\delta}$ time separation is not justified since this voltage can change as fast as the stator current. To obtain satisfactory tracking performance these terms must be considered in control design. Simple feed-forward compensation with opposite sign provides only a moderate performance due to the uncertainty in the estimation of machine leakage inductance L_σ . Introducing the current error $\tilde{i}_{\gamma,\delta} = i_{\gamma,\delta}^* - i_{\gamma,\delta}$ the PI controller using internal model principle is therefore proposed in the following form:

$$u_{\gamma,\delta} = k_{pi}\tilde{i}_{\gamma,\delta} + k_{pi}k_{ii} \int_0^t \left(\frac{J\omega_m}{k_{ii}} + 1 \right) \tilde{i}_{\gamma,\delta} d\tau \quad (52)$$

where $k_{pi}, k_{ii} > 0$ are free design parameters. Dynamic of the augmented system is therefore given as:

$$\begin{aligned} \dot{i}_{\gamma,\delta} &= Ai_{\gamma,\delta} + Bk_{pi}\tilde{i}_{\gamma,\delta} + Bz \\ \dot{z} &= (k_{pi}k_{ii} + k_{pi}J\omega_m)\tilde{i}_{\gamma,\delta} \quad ; z(0) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Choosing $k_{ii} = \tau_\sigma^{-1}$ and by setting $i_{\gamma,\delta}^* = 0$ the closed loop system matrix is obtained in the form:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} -\tau_\sigma^{-1} - \frac{k_{pi}}{L_\sigma} & \omega_m & \frac{1}{L_\sigma} & 0 \\ -\omega_m & -\tau_\sigma^{-1} - \frac{k_{pi}}{L_\sigma} & 0 & \frac{1}{L_\sigma} \\ -\frac{k_{pi}}{\tau_\sigma} & k_{pi}\omega_m & 0 & 0 \\ -k_{pi}\omega_m & -\frac{k_{pi}}{\tau_\sigma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

while the closed loop eigenvalues are:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -k_{pi}/L_\sigma \\ \lambda_{3,4} &= -\tau_\sigma^{-1} \pm j\omega_m \end{aligned} \quad (55)$$

The eigenvalues $\lambda_{1,2}$ define the dynamics of stator current while $\lambda_{3,4}$ are related with the dynamic of the auxiliary variable z .

VI. EXPERIMENTAL RESULTS

Beside tested IM experimental setup consisted of: a DSPACE DS1103 PPC Controller board, a host PC with installed development environment, an incremental encoder Iskra TELA TGR 10 with 2500 pulses per revolution, current sensors LEM LT 100-P, Semikron inverter (modules SKH1 22, SKM 50GB 123D and SKD 51/14, up to 800 V at the dc bus and currents up to 30 A RMS) and DC motor. The DSPACE DS 1103 PPC Controller board consists of: the IBM PowerPC 604e, the slave digital signal processor (DSP) TMS320F240, interfaces for incremental encoders, and AD and DA converters. Although ω_i can be obtained directly by (noisy) derivation of the current angle vector θ_i a second order programm resolver was used in our realization scheme. During the tests, the data acquisition, the transformations, and the control were executed on the PowerPC, while the slave DSP was used for the vector modulation running at 4 kHz. All experiments were performed with the sampling time of 250 μ s. The program codes for the PowerPC and for the slave DSP were developed with the Real Time Interface and Simulink. To avoid the danger of escaping the DC motor was connected to the shaft. Breaking torque proportional to the mechanical speed was generated ($t_l = k\omega_m$) so that the effect of the linear friction was actually simulated. Although in all experiments simple flux and torque estimator based on (2) and (3) was used, torque sensor HBM-T20WN (10 Nm) was mounted between IM and DC motor just to calibrate and verify torque and flux estimates at $\omega_m = 0 \rightarrow \omega_i = \omega_r$ (locked rotor).

Presented experiments show responses of the torque controlled machine along with the typical periodic motion of the flux linkage vector. Transient amplitude and frequency modulation of the stator currents vector could be also observed. Only positive torque reference was used during the first experiment in Fig. 4, more demanding tracking task is presented in Fig. 5 and torque reversal is shown in Fig. 6. The torque was built up completely after ≈ 50 ms starting practically from zero field; almost perfect tracking

performance of the generated torque can be observed after the rotor field is once established. As the magnitude of the flux linkage vector components equalize the maximal efficiency operation is reached for all steady-states. In Fig. 7 the experiment is shown where short torque pulses were generated representing the high dynamic capability of the control scheme.

VII. CONCLUSION

In the paper locally stable output torque controller for IM is proposed. The control design is based on the amplitude and frequency modulated stator current vector that implicitly force periodic motion of the rotor flux linkage vector. Unique steady-state condition that assure maximal efficiency are derived from the model in the stator current reference frame. The analogy with the state controller that would produce similar dynamic response and the same steady-state as the proposed output controller is established. Several extensions of the original Brockett controller are indicated. The derived IM control establishes acceptable tracking performance, local asymptotic stability for all physically feasible initial conditions, robustness with respect to rotor time constant perturbations, and implicit high efficiency. In addition the proposed control is less sensitive with respect to saturation effects compared to other control schemes which reference frames are attached to the estimated machine fields. The implementation of the proposed control is possible on standard industrial hardware. Regarding the machine torque estimation, we propose the use of the stator quantities only, to avoid sensitivity due to the uncertain rotor parameters. This imply additional measurements of the actual machine voltages, however, also the voltage sensors are becoming more or less a standard part of the drive hardware.

REFERENCES

- [1] P.C. Krause, "Analysis of Electric Machinery," McGraw-Hill,1986.
- [2] S. Sastry, "Nonlinear Systems," Springer,1999.
- [3] R. Ortega,A. Loria,P.J. Nicklasson and H. Siera-Ramirez "Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems," Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] R. Marino, S. Peresada and P. Tomei, "Global Adaptive Output Feedback Control of Induction Motors with Uncertain Rotor Resistance," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.44, no. 5, pp.:967–980,1999.
- [5] J. Chiasson, "A New Approach to Dynamic Feedback Linearization Control of an Induction Motor," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.43, no. 3, pp.:391–396,1998.
- [6] I. Takagashi and T. Noguchi, "A New Quick-Response and High-Efficiency Control Strategy of an Induction Motor," *IEEE Trans. on Ind. Applications*, vol.IA-22, no. 5, pp.:820-827,1986.
- [7] M. Depenbrock, "Direct Self-Control (DSC) of Inverter-Fed Induction Machine," *IEEE Trans. on Ind. Applications*, vol.IA-22, no. 5, pp.:820-827,1986.
- [8] R. Ortega, N. Barabanov and G. Escobar, "Direct Torque Control of Induction Motors: Stability Analysis and Performance Improvement," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.46, no. 8, pp.:967–980,2000.
- [9] P. Martin and P. Rouchon, "Flatness and Sampling Control of Induction Motor," *IFAC, 13th Triennial World Congress, San Francisco*, 2b 27 2, pp.:389–394,1996.
- [10] B. Grčar, P. Cafuta,G. Štumberger,H.R. Cortés, A.M. Stanković, "Torque Control of an Induction Machine Based on Dynamic Equilibrium," *13 Staeireisches Seminar ueber Regelungstechnik und Prozessautomatisierung, Schloss Retzhof, TU Graz-IRT*, , Tagungsband, pp.:60–79,2003.
- [11] R. Brockett, "Characteristic Phenomena and Model Problems in Nonlinear Control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.48, no. 10, pp.:1699–1711,2003.
- [12] R. Brockett, "Pattern Generation and the Control of Nonlinear Systems," *IFAC, 13th Triennial World Congress, San Francisco*, 2b II, pp.:257–262,1996.
- [13] J.P. Hespanha and A.S. Morse, "Stabilization of Nonholonomic Integrators via Logic-Based Switching," *Automatica*, vol.35, pp.:385–393,1999.
- [14] K.A. Morgansen, "Controllability and Trajectory Tracking for Classes of Cascade-Form Second Order Nonholonomic Systems," *IEEE, 40th Conf. on Decision and Control,Orlando, Florida, USA*, ThM03-6, pp. 3031–3036,2001.
- [15] M. Bodson and J. Chiasson, "Differential-Geometric Methods for Control of Electric Motors," *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, no. 8, pp.:927–952,1998.
- [16] G.C. Verghese, S. R. Sanders, "Observers for Flux Estimation in Induction Machines," *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, vol.35, no. 1, pp.:85–93,1988.
- [17] P. Vas, "Sensorless Vector and Direct Torque Control," Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [18] F. Briz, M.W. Degner, A. Diez and R.D. Lorenz, "Static and Dynamic Behavior of Saturation-Induced Saliencies and Their Effect on Carrier-Signal-Based Sensorless AC Drives," *IEEE Trans. on Ind. Applications*, vol.38, no. 3, pp.:670–678,2002.
- [19] A.B. Ploukett,J.D. D'Atre,T.A. Lipo , "Synchronous Control of a Static AC Induction Motor Drive," *IEEE Trans. on Ind. Applications*, vol.15, no. 4, pp.:430–437,1979.

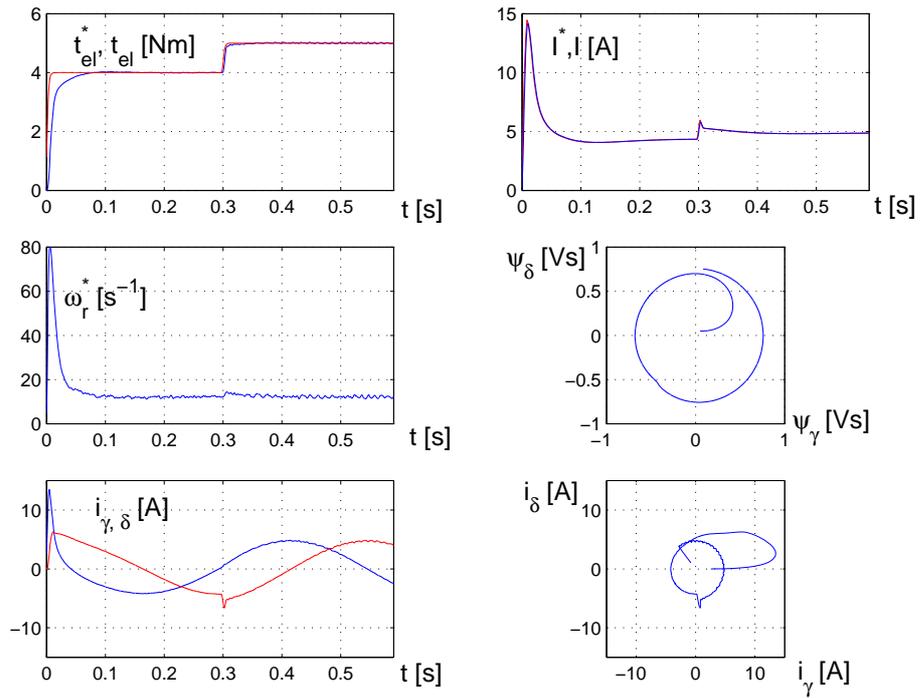


Fig. 4. Tracking of the positive torque reference.

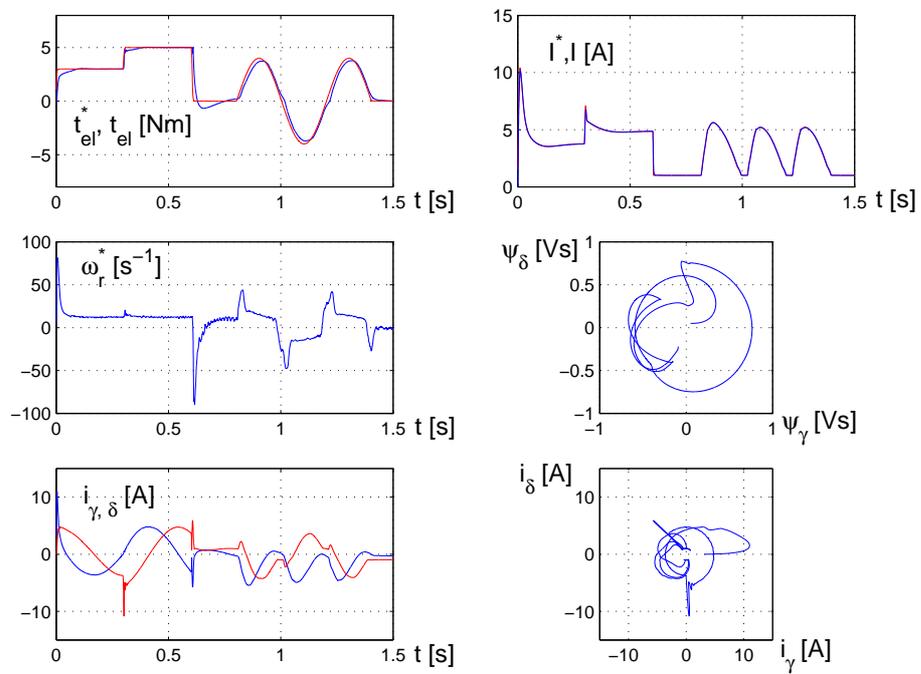


Fig. 5. Tracking of the general torque reference.

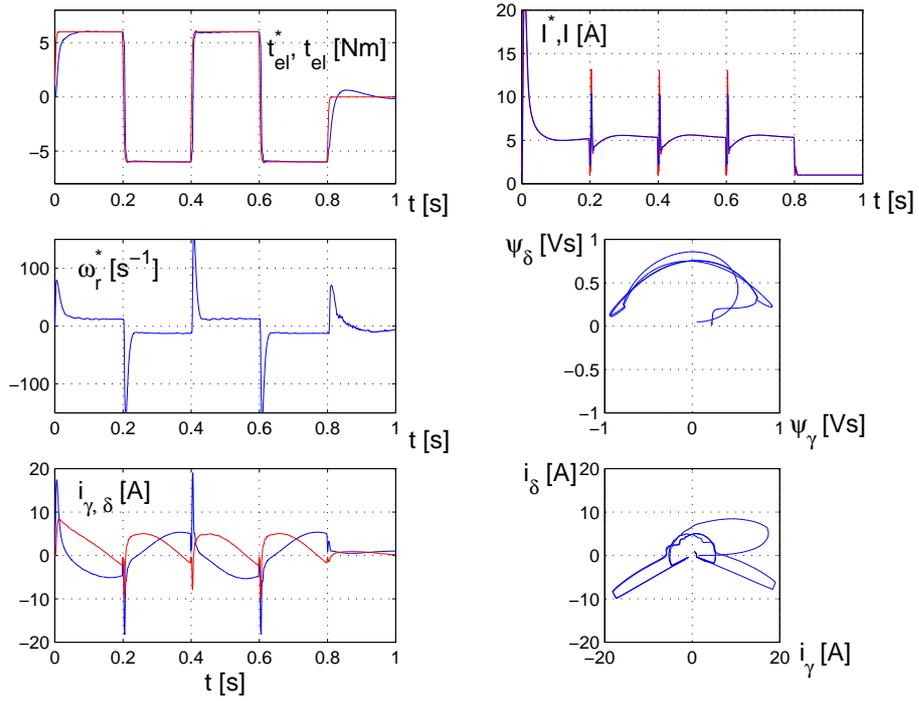


Fig. 6. Torque reversal.

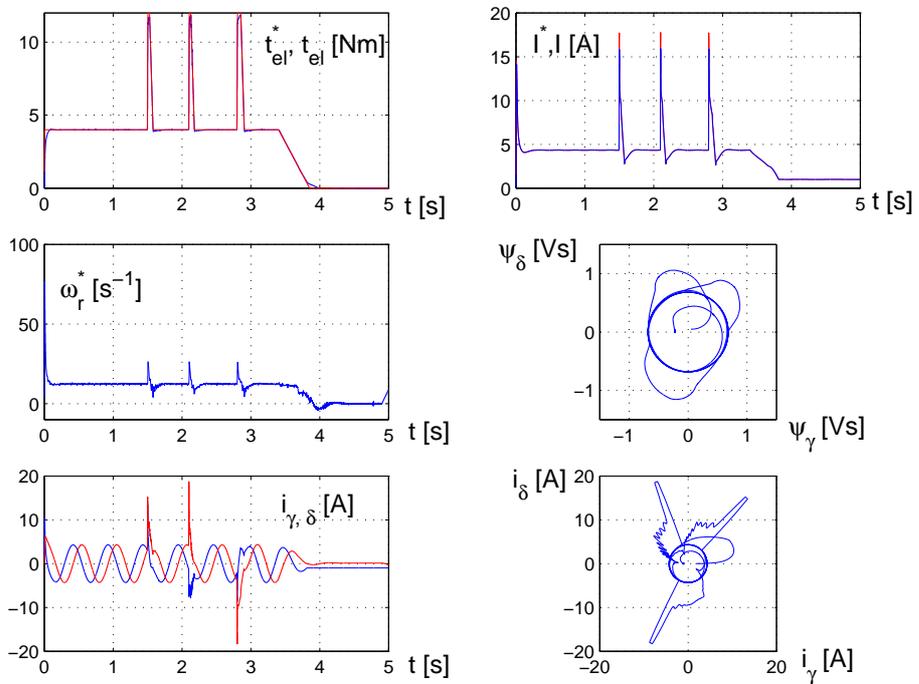


Fig. 7. Generation of the torque pulses.

Ein systemtheoretischer Ansatz zur Lösung der Neutronendiffusionsgleichungen

Dr.-Ing. Karlheinz Ochs
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Universitätsstraße 150
44801 Bochum
ochs@nt.ruhr-uni-bochum.de

Zusammenfassung

Die Hauptaufgabe in einem Kernkraftwerk ist die kontrollierte Kernspaltung, die von der Sicherheitsleittechnik geregelt wird. Zu diesem Zweck sind im Innern des Reaktors Sensoren angebracht, die Aufschluss über den aktuellen Betriebszustand geben. Zur Verbesserung der Sicherheitsleittechnik werden numerische Verfahren eingesetzt, die auf der Grundlage der gelieferten Sensordaten zusätzliche Werte zwischen den Sensoren schätzen. Die bislang bekannten Verfahren basieren allerdings auf einer sehr zeitaufwändigen numerischen Integration. In diesem Aufsatz wird ein Verfahren vorgestellt, das keine numerische Integration benötigt, wodurch eine erhebliche Zeitersparnis erzielt wird.

1 Einleitung

Die Nutzung der Kernenergie ist die wohl umstrittenste Form der Energieerzeugung, weil sie ein erhebliches Gefahrenpotential für Mensch und Umwelt birgt. Aufgrund dieser Gefahr werden in einem Kernkraftwerk größte Anstrengungen unternommen, um das Eintreten eines Störfalls zu verhindern. Eine der zahlreichen Maßnahmen zur Vermeidung derartiger Gefahren ist die Sicherheitsleittechnik, die ursprüngliche analog war und in der jüngeren Zeit teilweise durch eine digitale Technik ersetzt oder aber ergänzt worden ist.

Die wesentliche Aufgabe in einem Kernkraftwerk besteht in einer kontrollierten Kernspaltung von Atomen, die im Innern des Reaktors im Gleichgewicht zu halten ist. Einerseits müssen dazu genügend Neutronen produziert werden, um die Kernspaltung am Leben zu erhalten, andererseits dürfen nicht zuviele Neutronen erzeugt werden, um die Kernspaltung nicht außer Kontrolle geraten zu lassen. Hierzu sind im Innern des Reaktors Detektoren angebracht, welche Daten über die aktuelle Neutronenflussdichte liefern, die von der Sicherheitsleittechnik zur Regelung des Reaktors in den gewünschten Betriebszustand und falls nötig auch zur Schnellabschaltung verwendet werden. Aufgrund

der begrenzten Zahl von Neutronenflussdetektoren ist der aktuelle Betriebszustand nur lückenhaft bekannt. Die Kenntnis der fehlenden Werte zwischen den Detektoren hätte den Vorteil einer möglichen Steigerung der Effizienz des Kernkraftwerks bei gleichzeitiger Erhöhung der Sicherheit, weil man frühzeitiger das Über- oder Unterschreiten kritischer Werte erkennen könnte.

Um Aufschluss über die fehlenden Werte zwischen den Detektoren zu erhalten, sind im Laufe der Jahre einige Verfahren entwickelt worden, die eine Schätzung dieser Werte ermöglichen. Sie basieren auf einer hinreichend genauen mathematischen Beschreibung der Neutronenflussdichten, welche auf die so genannten Neutronendiffusionsgleichungen führen. Dabei handelt es sich um nichtlineare partielle Differentialgleichungen, die für praktisch relevante Probleme bislang nur durch numerische Integration gelöst werden, siehe z. B. [1–7].

Diese numerische Verfahren sind wegen des benötigten Rechenaufwandes selbst mit den derzeit verfügbaren Digitalrechnern sehr zeitaufwändig, womit sie sich nur bedingt für einen Einsatz in der Sicherheitsleittechnik eignen, die eine Regelung in Echtzeit erfordert. Der wesentliche Grund für den hohen Rechenaufwand liegt in der numerischen Integration der Neutronendiffusionsgleichungen, bei der zusätzlich implizite Gleichungen zu lösen sind.

In diesem Aufsatz wird ein Ansatz vorgestellt, der eine numerische Integration gänzlich vermeidet und das Problem auf die Lösung einer skalaren impliziten Gleichung reduziert. Infolgedessen wird der Rechenaufwand deutlich verringert und die Neutronenflussdichten können somit in wesentlich kürzerer Zeit berechnet werden. Als Referenz wird ein erst vor kurzem entwickeltes Wellendigital-Modell herangezogen [7].

2 Die Kernspaltung

2.1 Physikalische Beschreibung

Für eine anschauliche Erläuterung der Kernspaltung wird ein mit einem Kernbrennstoff gefüllter Reaktor betrachtet. Von dem Kernbrennstoff wird angenommen, dass er aus einer Mischung von Uran-238 und Uran-235 besteht, wobei der Anteil von Uran-235 bei einem Leichtwasser-Reaktor bei etwa 4% liegt.

Nimmt man nun an, dass ein Uran-235-Atom von einem langsamen Neutron getroffen wird, so wird es mit großer Wahrscheinlichkeit vom Atomkern eingefangen und man erhält einen hochangeregten Zwischenkern. Nach einer Dauer von etwa 10^{-14} s entsteht zu einem geringen Teil das langlebige Isotop Uran-236, während es in den meisten Fällen zu einer Kernspaltung kommt. Unter Abgabe von Energie entstehen hierbei mittelgroße Trümmerkerne (z. B. Barium-139 und Krypton-94) sowie zwei bis drei schnelle Neutronen als Spaltprodukte. Die Spaltprodukte fliegen zunächst mit einer hohen Geschwindigkeit auseinander, werden aber im umgebenden Material wieder abgebremst, wodurch kinetische in thermische Energie umgesetzt wird, die zur Stromerzeugung verwendet werden kann. Im Besonderen wird ein Teil der schnellen Neutronen durch diese Streuung so langsam, dass sie weitere Atome spalten, wodurch eine Kettenreaktion in Gang gesetzt wird, die aufrechterhalten wird, wenn die kritische Bedingung für die Kettenreaktion erfüllt ist:

Jedes für die Kernspaltung verloren gegangene Neutron wird durch ein neues ersetzt.

Eine Ursache für Neutronenverluste ist der Neutroneneinfang von Uran-238-Atomen, da es hierbei nur sehr selten zu einer Kernspaltung kommt. In den meisten Fällen werden die Neutronen absorbiert und leisten für die weitere Kernspaltung keinen Beitrag mehr. Zusätzliche Neutronenverluste entstehen, wenn Neutronen aus dem Reaktor herausdringen. Der Reaktor ist an seiner Oberfläche zwar mit einem Reflektormaterial umgeben, das die Neutronen in den Reaktor zurückstreuen soll, allerdings gelingt dies nur bis zu einem gewissen Grad, weshalb ein weiterer Teil der Neutronen durch Leckage verloren geht.

Ein realer Reaktor ist noch mit vielen weiteren Materialien gefüllt, von denen hier nur noch die Moderatoren und die Steuerstäbe genannt werden. Moderatoren, die auch als Bremsmittel bezeichnet werden, sollen die schnellen Neutronen möglichst schnell durch möglichst wenig Zusammenstöße abbremsen, um zusätzliche Neutronen für die Kernspaltung zu gewinnen. Im Gegensatz zu Moderatoren absorbieren Steuerstäbe vor allem die langsamen Neutronen, womit eine Möglichkeit für eine kontrollierte Kernspaltung gegeben ist, weil man durch das Einfahren von Steuerstäben in den Reaktor die Kettenreaktion eindämmen und im Ernstfall sogar ganz zum Erliegen bringen kann.

2.2 Mathematische Beschreibung

Für eine mathematische Beschreibung der physikalischen Vorgänge wird nun die Diffusionstheorie verwendet, die eine Approximation der exakteren Transporttheorie darstellt. Des Weiteren wird von einem stationären Zustand des Reaktors ausgegangen, bei dem es keine externen Neutronenquellen gibt und der Neutronengewinn gleich dem Neutronenverlust ist. Diese Annahme stellt für die Praxis keine wesentliche Einschränkung dar, weil man bei der Energieerzeugung dieses Gleichgewicht anstrebt und zumindest näherungsweise erreicht. Um eine mathematisch einfach zu handhabende Beschreibung zu erhalten, werden die Neutronen in nur zwei Energiegruppen unterschieden, wobei man die schnellen Neutronen der ersten und die langsamen der zweiten Energiegruppe zuordnet.

Anstelle einzelner Neutronen betrachtet man Neutronenflussdichten, die man als die Strecke interpretieren kann, welche von den Neutronen pro Zeit- und Volumeneinheit zurückgelegt wird. Sie besitzen die Einheit $1/[\text{cm}^2 \text{s}]$ und werden hier mit φ_1 bzw. φ_2 bezeichnet, wobei der Index die zugehörige Energiegruppe angibt. Bedingt durch die vereinfachenden Annahmen sind die Neutronenflussdichten eine Funktion des Ortes, der hier in den kartesischen Koordinaten x , y und z , welche in cm angegeben werden, beschrieben wird.

Neben den Neutronenflussdichten werden noch die Vektoren der Neutronenstromdichten

$$\mathbf{j}_1 = [j_{1x}, j_{1y}, j_{1z}]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_2 = [j_{2x}, j_{2y}, j_{2z}]^T \quad (1)$$

eingeführt, die mit den Neutronenflussdichten über das FICK'sche Gesetz,

$$\nabla \varphi_1 = -r_1 \mathbf{j}_1 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \varphi_2 = -r_2 \mathbf{j}_2, \quad (2)$$

miteinander verknüpft sind, wobei

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (3)$$

den Gradienten-Operator bezeichnet. Die positiven Konstanten r_1 und r_2 , deren Kehrwerte man Diffusionskonstanten nennt, heißen entsprechend ihrer Einheit 1/cm reziproke Längen. Infolgedessen sind die Einheiten der Neutronenstromdichten und der Neutronenflussdichten gleich.

Im stationären Zustand sind die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten über partielle Differentialgleichungen miteinander gekoppelt,

$$\nabla^T \mathbf{j}_1 = -r_3 \varphi_1 + r_4 \varphi_2 \quad \text{und} \quad \nabla^T \mathbf{j}_2 = r_5 \varphi_1 - r_6 \varphi_2. \quad (4a)$$

Hierbei ist ∇^T der Divergenz-Operator und die auftretenden Größen

$$r_3 = \Sigma_{A1} + \Sigma_{S21} - \bar{\nu}_1 \Sigma_{F1} \quad \text{und} \quad r_4 = \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2} \quad (4b)$$

sowie

$$r_5 = \Sigma_{S21} \quad \text{und} \quad r_6 = \Sigma_{A2} \quad (4c)$$

sind positive Konstanten mit der Einheit 1/cm, die ebenfalls reziproke Längen genannt werden. Hierbei sind Σ_{A1} , Σ_{A2} , Σ_{F1} und Σ_{F2} die makroskopischen Wirkungsquerschnitte, welche die durch Absorption oder Spaltung (Fission) verursachten Neutronenverluste bzw. Neutronengewinne der jeweiligen Energiegruppe berücksichtigen. Anstelle der auf eine Spaltung bezogenen makroskopischen Wirkungsquerschnitte wird üblicherweise ihr Produkt mit der mittleren Anzahl von Neutronen der zugehörigen Energiegruppe $\bar{\nu}_1$ bzw. $\bar{\nu}_2$ angegeben. Mit dem makroskopischen Wirkungsquerschnitt Σ_{S21} wird die Streuung der Neutronen von der ersten zur zweiten Energiegruppe berücksichtigt, die auf eine Abbremmung der Neutronen zurückzuführen ist. In der Tabelle 1 sind typische Zahlenwerte für Materialparameter aufgelistet, die dem IAEA-Benchmark-Test entnommen sind [8].

Nr.	Material	$1/r_1$	$1/r_2$	Σ_{S21}	Σ_{A1}	Σ_{A2}	$\bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}$	$\bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}$
I	Brennstoff 1	1,5	0,4	0,02	0,01	0,08	0	0,135
II	Brennstoff 2	1,5	0,4	0,02	0,01	0,085	0	0,135
III	Brennstoff 2 + Steuerstab	1,5	0,4	0,02	0,01	0,13	0	0,135
IV	Reflektor	2,0	0,3	0,04	0	0,01	0	0
V	Reflektor + Steuerstab	2,0	0,3	0,04	0	0,055	0	0

Tabelle 1: Materialparameter des IAEA-Benchmark-Tests in 1/cm.

Die unter (4) zusammengefassten Gleichungen nennt man die stationären Neutronendifusionsgleichungen in zwei Energiegruppen, die stationär genannt werden, weil ein Gleichgewicht zwischen den Gewinnen und Verlusten von Neutronen besteht. Um eine Neutronenbilanz zu erhalten, werden die beiden Gleichungen in (4a) unter Berücksichtigung der Definitionen (4b) und (4c) addiert und wie folgt umgestellt:

$$\bar{\nu}_1 \Sigma_{F1} \varphi_1 + \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2} \varphi_2 = \Sigma_{A1} \varphi_1 + \Sigma_{A2} \varphi_2 + \nabla^T [\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2]. \quad (5)$$

Auf der linken Seite der Gleichung befinden sich die durch Kernspaltung erzeugten Neutronengewinne, während die auf der rechten Seite stehenden Neutronenverluste auf Absorption und Leckage zurückzuführen sind. Da die stationären Neutronendifusionsgleichungen in zwei Energiegruppen (5) nur für ein exaktes Gleichgewicht zwischen den Gewinnen und Verlusten von Neutronen eine nichttriviale Lösung haben, sind sie für die Praxis, in der ein exaktes Gleichgewicht nicht permanent erreicht wird, unbrauchbar [7].

Um dennoch zu einer brauchbaren mathematischen Beschreibung zu gelangen, werden diese Gleichungen modifiziert, indem man die für die Neutronengewinne verantwortlichen Summanden mit einem Faktor $1/k$ korrigiert,

$$\frac{\bar{\nu}_1}{k} \Sigma_{F1} \varphi_1 + \frac{\bar{\nu}_2}{k} \Sigma_{F2} \varphi_2 = \Sigma_{A1} \varphi_1 + \Sigma_{A2} \varphi_2 + \nabla^T [\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2], \quad (6)$$

was gleichbedeutend mit den Definitionen

$$r_3 = r_3(k) = \Sigma_{A1} + \Sigma_{S21} - \frac{\bar{\nu}_1}{k} \Sigma_{F1} \quad \text{und} \quad r_4 = r_4(k) = \frac{\bar{\nu}_2}{k} \Sigma_{F2} \quad (7)$$

ist. Die Größe k wird in der Literatur zwar als Eigenwert für die Kritikalität des Reaktors bezeichnet, um jedoch Verwechslungen zu vermeiden, wird k im weiteren Verlauf Korrekturfaktor genannt. Zur Berechnung von k integriert man die Gleichung (6) über das Volumen des Reaktors und erhält in guter Näherung

$$k = \frac{\int_V \bar{\nu}_1 \Sigma_{F1} \varphi_1 + \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2} \varphi_2 dV}{\int_V \Sigma_{A1} \varphi_1 + \Sigma_{A2} \varphi_2 dV}, \quad (8)$$

da der Einfluss der Leckage vernachlässigbar ist [7]. Der Korrekturfaktor beschreibt das Verhältnis der Neutronenproduktionsrate zur Neutronenverlustrate und ist eine charakteristische Größe für die Kettenreaktion: Wenn $k = 1$ ist, spricht man von einem kritischen Reaktor, bei dem die Zahl der Neutronen konstant bleibt. Ist dagegen $k < 1$, so befindet sich der Reaktor in einem unterkritischen Zustand, bei dem mehr Neutronen durch Absorption und Leckage verloren gehen, als erzeugt werden. Für $k > 1$ ist der Reaktor überkritisch und die Neutronengewinne übersteigen die Neutronenverluste.

An dieser Stelle ist noch zu bemerken, dass die Theorie der Kernreaktoren hier nicht ausführlicher dargelegt werden kann und soll. Der interessierte Leser muss an dieser Stelle auf die vorhandene Literatur verwiesen werden, siehe beispielsweise [9, 10].

Fasst man die Gleichungen (2) und (4a) zusammen, so entsteht ein System von homogenen Differentialgleichungen, deren Lösung nur bis auf die Multiplikation mit einer Konstanten bestimmt ist:

$$\begin{bmatrix} \nabla^T \mathbf{j}_1 \\ \nabla^T \mathbf{j}_2 \\ \nabla \varphi_1 \\ \nabla \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -r_3(k) & r_4(k) \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & r_5 & -r_6 \\ -r_1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -r_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

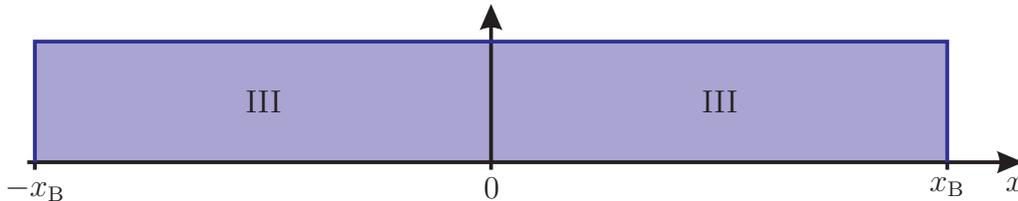
Im Allgemeinen bezeichnet hier $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix von geeigneter Dimension, die in diesem speziellen Fall ein Spaltenvektor mit drei Einträgen ist. Um eine eindeutige Lösung für die homogenen Differentialgleichungen zu erhalten, wird im IAEA-Benchmark-Test eine Normierung der Neutronengewinne vorgeschlagen:

$$\frac{1}{V} \int_V \bar{\nu}_1 \Sigma_{F1} \varphi_1 + \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2} \varphi_2 \, dV = \frac{1}{\text{cm}^3 \text{s}}. \quad (10)$$

Zur Entlastung der Schreibweise werden die Gleichungen in (9) von nun an kurz Neutronendifusionsgleichungen genannt.

3 Eindimensionaler Fall mit einem Material

In diesem Abschnitt wird ein Reaktor betrachtet, der in y und z unendlich ausgedehnt und mit nur einem Material gefüllt ist. In Richtung der x -Koordinate wird der Reaktor durch die Vorgabe $|x| \leq x_B$ beschränkt. Aufgrund dieser Annahmen entfällt die Abhängigkeit der Neutronenflussdichten und folglich der Neutronenstromdichten von den Koordinaten y und z .



3.1 Formulierung einer Anfangswertaufgabe

Im örtlich eindimensionalen Fall entarten die Divergenz und der Gradient zu einer einfachen partiellen Ableitung nach der Ortskoordinate x . Fasst man nun die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten im Zustandsvektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

zusammen, so kann man die Gleichungen (2) und (4a) in Form einer Anfangswertaufgabe schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}(x) = \mathbf{A} \mathbf{w}(x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0. \quad (12)$$

Hierbei ist \mathbf{w}_0 ein noch unbekannter Anfangszustand und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ist die Systemmatrix, die in Abhängigkeit der durch

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -r_3 & r_4 \\ r_5 & -r_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

definierten Matrizen geschrieben worden ist. Es ist zu beachten, dass die reziproken Längen r_3 und r_4 vom Eigenwert für die Kritikalität des Reaktors abhängen, womit die Systemmatrix eine Funktion der Zustandsgrößen ist.

3.2 Eigenwertzerlegung

Für den Moment wird die Anfangswertaufgabe (12) für einen beliebigen aber fest vorgegebenen Korrekturfaktor k betrachtet. Unter dieser Bedingung ist die Systemmatrix konstant und die vorliegende Anfangswertaufgabe kann mit systemtheoretischen Methoden gelöst werden:

$$\mathbf{w}(x) = \Phi(x) \mathbf{w}_0 \quad (15)$$

wobei

$$\Phi(x) = \exp(\mathbf{A}x) := \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \mathbf{A}^{\mu} x^{\mu}, \quad (16)$$

die Transitionsmatrix ist.

Für eine einfacher zu handhabende Darstellung der Transitionsmatrix wird eine Eigenwertzerlegung der Systemmatrix \mathbf{A} vorgenommen. Zu diesem Zweck werden die Eigenwerte von \mathbf{A} berechnet, die gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 \text{spur}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) \quad (17)$$

sind, wobei zur Entlastung der Schreibweise die Matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} r_1 r_3 & -r_2 r_4 \\ -r_1 r_5 & r_2 r_6 \end{bmatrix} \quad (18)$$

eingeführt worden ist. Da das charakteristische Polynom biquadratisch ist, kann es auch in der Form

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = [\lambda^2 - \lambda_r^2][\lambda^2 - \lambda_i^2] \quad (19)$$

geschrieben werden und die quadrierten Eigenwerte der Systemmatrix ergeben sich zu

$$\lambda_r^2 = \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}) + \sqrt{\frac{1}{4} \text{spur}^2(\mathbf{M}) - \det(\mathbf{M})} \quad (20a)$$

$$\text{und} \quad \lambda_i^2 = \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}) - \sqrt{\frac{1}{4} \text{spur}^2(\mathbf{M}) - \det(\mathbf{M})}. \quad (20b)$$

Um die Eigenschaften der Eigenwerte zu bestimmen, werden die Spur und die Determinante der Matrix \mathbf{M} untersucht: Die Spur

$$\text{spur}(\mathbf{M}) = \lambda_r^2 + \lambda_i^2 = r_1 r_3 + r_2 r_6 \quad (21)$$

ist offenbar positiv, weil sowohl die Diffusionskonstanten als auch die reziproken Längen positiv sind. Mit der gleichen Argumentation findet man, dass mit

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{A}_{21}) \det(\mathbf{A}_{12}) = \lambda_r^2 \lambda_i^2 = r_1 r_2 [r_3 r_6 - r_4 r_5] \quad (22)$$

die in der Gleichung (20) auftretenden Radikanten,

$$\frac{1}{4} \text{spur}^2(\mathbf{M}) - \det(\mathbf{M}) = \frac{1}{4} [r_1 r_3 - r_2 r_6]^2 + r_1 r_2 r_4 r_5 \quad (23)$$

stets positiv sind und infolgedessen $\lambda_r^2 \neq \lambda_i^2$ mit $\lambda_r^2 > 0$ und $\lambda_i^2 \in \mathbb{R}$ bekannt sind. Im weiteren Verlauf wird

$$\det(\mathbf{A}_{12}) = r_3 r_6 - r_4 r_5 < 0 \quad (24)$$

angenommen, womit

$$\lambda_r^2 > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i^2 < 0 \quad (25)$$

gilt und vier voneinander verschiedene Eigenwerte vorliegen:

$$\lambda_1 = \lambda_r = \lambda_r^*, \quad \lambda_2 = \lambda_i = -\lambda_i^*, \quad \lambda_3 = -\lambda_1 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -\lambda_2. \quad (26)$$

Da die Eigenwerte voneinander verschieden sind, sind die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig, wobei die Rechts-Eigenvektoren der vorliegenden Systemmatrix \mathbf{A} durch

$$\begin{bmatrix} \lambda_\nu [r_2 r_6 - \lambda_\nu^2] \\ \lambda_\nu r_1 r_5 \\ -r_1 [r_2 r_6 - \lambda_\nu^2] \\ -r_2 r_1 r_5 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \nu = 1, \dots, 4 \quad (27)$$

gegeben sind.

Für eine kompakte Darstellung der Eigenwertzerlegung werden die Eigenwerte in die Hauptdiagonale einer Diagonalmatrix eingetragen,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

und die Rechts-Eigenvektoren als Spaltenvektoren zur Matrix

$$\mathbf{R}\mathbf{D} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{21} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

zusammengefasst, wobei $\mathbf{1}$ eine $[2 \times 2]$ -Einheitsmatrix ist. Die Matrizen \mathbf{R}_{11} und \mathbf{R}_{21} können mithilfe der Rechts-Eigenmatrix von \mathbf{M} definiert werden:

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{11} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{P}. \quad (30)$$

Die Rechts-Eigenmatrix \mathbf{P} lautet explizit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} r_2 r_6 - \lambda_r^2 & r_2 r_6 - \lambda_i^2 \\ r_1 r_5 & r_1 r_5 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathbf{P}) = r_1 r_5 [\lambda_i^2 - \lambda_r^2] \neq 0 \quad (31)$$

und genügt der Gleichung

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{11}^2\mathbf{P}^{-1}. \quad (32)$$

Die Eigenwertzerlegung der Systemmatrix,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^{-1}, \quad (33)$$

kann nun verwendet werden, um die Transitionsmatrix zu berechnen:

$$\Phi(x) = \mathbf{R}\mathbf{D} \exp(\mathbf{A}x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^{-1}. \quad (34)$$

Unter Verwendung der Definitionen

$$\begin{aligned} \cosh(\mathbf{A}_{11}x) &:= [\exp(\mathbf{A}_{11}x) + \exp(\mathbf{A}_{11}x)]/2, \\ \sinh(\mathbf{A}_{11}x) &:= [\exp(\mathbf{A}_{11}x) - \exp(\mathbf{A}_{11}x)]/2 \end{aligned} \quad (35)$$

gelangt man zum einprägsamen Ausdruck für die Transitionsmatrix

$$\Phi(x) = \mathbf{R}\mathbf{H}(x)\mathbf{R}^{-1} \quad (36)$$

mit

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{D} \exp(\mathbf{A}x)\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh(\mathbf{A}_{11}x) & \sinh(\mathbf{A}_{11}x) \\ \sinh(\mathbf{A}_{11}x) & \cosh(\mathbf{A}_{11}x) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

3.3 Lösungsansatz

Da die Lösung der Anfangswertaufgabe für einen festen aber beliebig wählbaren Korrekturfaktor k bestimmt worden ist, gilt sie für alle möglichen Werte des Korrekturfaktors. Für die in der Gleichung (15) angegebenen Lösung sind somit noch der Korrekturfaktor k und der bislang ebenfalls noch unbekanntes Anfangszustand \mathbf{w}_0 unter den jeweils vorliegenden Bedingungen zu berechnen. Ausgangspunkt ist hierbei die mit der Eigenwertzerlegung der Transitionsmatrix geschriebene Lösung:

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{R}\mathbf{H}(x)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{w}_0, \quad (38)$$

vgl. (36). Da der Anfangszustand \mathbf{w}_0 ohnehin unbekannt ist, kann man stattdessen auch den Vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{w}_0 \quad (39)$$

als unbekannt auffassen, mit dem die Lösung

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{RH}(x)\mathbf{c} \quad (40)$$

lautet. Es verbleibt nun, fünf Unbekannte zu bestimmen, die durch k und den vier Elementen des Vektors \mathbf{c} gegeben sind, wobei zur Vermeidung einer trivialen Lösung noch

$$\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \quad (41)$$

zu verlangen ist.

3.4 Symmetriebedingungen

Aus der Symmetrie der Anordnung entnimmt man, dass entweder $\mathbf{j}(x)$ oder $\boldsymbol{\varphi}(x)$ eine gerade Funktion in der Variablen x ist. Weil die Neutronenflussdichten stets positiv sind, müssen die Neutronenflussdichten für eine nichttriviale Lösung eine gerade Funktionen sein und infolge des FICK'schen Gesetzes (2) sind die Neutronenstromdichten ungerade Funktionen:

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\varphi}(-x) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{j}(x) = -\mathbf{j}(-x), \quad (42)$$

siehe beispielsweise [9,10]. In Abhängigkeit des Zustandsvektor ist diese Symmetrie äquivalent zu der Gleichung

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{S}_1\mathbf{w}(-x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

welche durch den Lösungsansatz (40) für alle x mit $|x| \leq x_B$ erfüllt werden muss:

$$\mathbf{RH}(x)\mathbf{c} = \mathbf{S}_1\mathbf{RH}(-x)\mathbf{c}. \quad (44)$$

Diese Beziehung muss insbesondere für $x = 0$ gelten,

$$\mathbf{Rc} = \mathbf{S}_1\mathbf{Rc} = \mathbf{RS}_1\mathbf{c}, \quad (45)$$

womit eine von links durchgeführte Multiplikation mit \mathbf{R}^{-1}

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}_1\mathbf{c} \quad (46)$$

liefert. Mit der Partitionierung

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_j \\ \mathbf{c}_\varphi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_j = \mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{j}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_\varphi = \mathbf{R}_{21}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

ist die Gleichung (46) äquivalent zum Verschwinden von \mathbf{c}_j und es gilt

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_\varphi. \quad (48)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (30) vereinfacht sich der Lösungsansatz (40) somit zu

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{j}(x) \\ \boldsymbol{\varphi}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda}_{11} \sinh(\boldsymbol{\Lambda}_{11}x) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{21} \mathbf{P} \cosh(\boldsymbol{\Lambda}_{11}x) \end{bmatrix} \mathbf{c}_\varphi. \quad (49)$$

Folglich sind durch die Symmetriebedingungen zwei der fünf Unbekannten festgelegt und es sind nur noch die Elemente des Vektors \mathbf{c}_φ und der Korrekturfaktor k zu bestimmen.

3.5 Randbedingungen

An den Rändern, $|x| = x_B$, gelten für die Zustandsvariablen die Randbedingungen

$$\mathbf{B}\mathbf{w}(\pm x_B) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{1}{2}\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

wobei es aufgrund der Symmetrie ausreicht, nur den rechten Rand zu betrachten [7]. Mit dem Lösungsansatz aus (49) ergibt sich die Bedingung

$$[\mathbf{P}2\mathbf{A}_{11} \sinh(\mathbf{A}_{11}x_B) - \mathbf{A}_{21}\mathbf{P} \cosh(\mathbf{A}_{11}x_B)] \mathbf{c}_\varphi = \mathbf{0}, \quad (51)$$

die für eine nichttriviale Lösung das Verschwinden der Determinanten der links stehenden Matrix erfordert:

$$\det(\mathbf{P}2\mathbf{A}_{11} \tanh(\mathbf{A}_{11}x_B) - \mathbf{A}_{21}\mathbf{P}) = 0 \quad (52)$$

mit

$$\tanh(\mathbf{A}_{11}x_B) := \sinh(\mathbf{A}_{11}x_B) \cosh(\mathbf{A}_{11}x_B)^{-1}. \quad (53)$$

Die Regularität der Matrix $\cosh(\mathbf{A}_{11}x_B)$ ist zwar nicht notwendig, man erhält aber mit $\tanh(\mathbf{A}_{11}x_B)$ numerisch günstigere Ausdrücke. Eine Berechnung der Determinanten in (52) führt auf die Gleichung

$$f(\lambda_r) = f(\lambda_i) \quad \text{mit} \quad f(\xi) := \frac{2\xi \tanh(\xi x_B) + r_1}{2\xi \tanh(\xi x_B) + r_2} [r_2 r_6 - \xi^2]. \quad (54)$$

Für den Spezialfall, dass die reziproke Länge r_3 unabhängig vom Korrekturfaktor k ist, kann diese Gleichung mithilfe der Gleichung (21) für einen der beiden Eigenwerte gelöst werden. Zwar ist dies bei den hier betrachteten Materialien der Fall, es soll eine Vorgehensweise aufgezeigt werden, die diese Einschränkung nicht erfordert.

Im Allgemeinen wird man die Eigenwerte λ_r und λ_i , wie in der Gleichung (20) angegeben, ersetzen, wobei diese Eigenwerte vom Korrekturfaktor k abhängen. Die für k entstehende nichtlineare implizite Gleichung,

$$f(\lambda_r(k)) = f(\lambda_i(k)), \quad (55)$$

kann anschließend iterativ gelöst werden. Für eine iterative Lösung dieser impliziten Gleichung benötigt man noch einen geeigneten Startwert. Wie sich bei den hier betrachteten Materialien herausgestellt hat, ist der Betrag der Determinanten $\det(\mathbf{A}_{12})$ sehr klein, sodass die Näherung

$$k \approx k_0 = \frac{\bar{v}_1 \Sigma_{F1} \Sigma_{A2} + \bar{v}_2 \Sigma_{F2} \Sigma_{S21}}{[\Sigma_{A1} + \Sigma_{S21}] \Sigma_{A2}} \quad (56)$$

gilt. Aus diesem Grund kann man k_0 als Startwert für die Iteration verwenden, wobei k_0 nur geringfügig größer ist als der gesuchte Korrekturfaktor [7].

Setzt man den gefundenen Korrekturfaktor k in die Gleichung (51) ein, so entstehen zwei linear abhängige Zeilen, von denen eine ausgewählt werden kann, um eine Beziehung zwischen den noch unbekanntenen Elementen des Vektors \mathbf{c}_φ zu aufzustellen:

$$c_2 = -\frac{2\lambda_r \sinh(\lambda_r x_B) - r_2 \cosh(\lambda_r x_B)}{2\lambda_i \sinh(\lambda_i x_B) - r_2 \cosh(\lambda_i x_B)} c_1. \quad (57)$$

Ersetzt man c_2 durch diesen Ausdruck, so ist von den ursprünglich fünf Unbekannten nur noch c_1 unbekannt.

3.6 Normierungsbedingung

Ohne eine konkrete Anfangsbedingung ist die Lösung der vorliegenden homogenen Differentialgleichung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Aus diesem Grund kann man die Lösung und folglich den Vektor \mathbf{c} willkürlich normieren, wie es beispielsweise in (10) vorgegeben ist:

$$\frac{1}{x_B} [\bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}, \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}] \int_0^{x_B} \varphi(x) dx = \frac{1}{\text{cm s}}. \quad (58)$$

Zur Bestimmung der Normierungskonstanten wird $\varphi(x)$ gemäß der Gleichung (49) ausgedrückt und das Integral berechnet:

$$\int_0^{x_B} \varphi(x) dx = \mathbf{A}_{21} \mathbf{P} \int_0^{x_B} \cosh(\mathbf{A}_{11} x) dx \mathbf{c}_\varphi = \mathbf{A}_{21} \mathbf{P} \mathbf{A}_{11}^{-1} \sinh(\mathbf{A}_{11} x_B) \mathbf{c}_\varphi \quad (59)$$

In Abhängigkeit des Vektors \mathbf{c}_φ ist also sicherzustellen, dass

$$\frac{1}{x_B} [\bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}, \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}] \mathbf{A}_{21} \mathbf{P} \mathbf{A}_{11}^{-1} \sinh(\mathbf{A}_{11} x_B) \mathbf{c}_\varphi = \frac{1}{\text{cm s}} \quad (60)$$

eingehalten wird. Sollte diese Bedingung nicht erfüllt sein, braucht man die Elemente des Vektors \mathbf{c}_φ nur noch durch den Zahlenwert des links stehenden Ausdruck dividieren.

3.7 Algorithmus

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch der Ablauf zur Berechnung der Neutronenflussdichten und der Neutronenstromdichten für einen symmetrisch aufgebauten und mit einem Material gefüllten Reaktor angegeben, welche mit dem Lösungsansatz (49) berechnet werden sollen.

1. Bestimme anhand der Materialparameter der Tabelle 1 die reziproken Längen

$$r_1, r_2, r_5 = \Sigma_{S21} \quad \text{und} \quad r_6 = \Sigma_{A2}.$$

2. Mit den Gleichungen (20) und (54) ist der Korrekturfaktor k zu bestimmen, der durch die Nullstelle der impliziten Gleichung

$$f(\xi) - f\left(\sqrt{r_2 r_6 + r_1 r_3 - \xi^2}\right) = 0$$

mit

$$\xi = \sqrt{\frac{r_1 r_3 + r_2 r_6}{2} + \sqrt{\frac{[r_1 r_3 - r_2 r_6]^2}{4} + r_1 r_2 r_4 r_5}}$$

gegeben ist, wobei die reziproken Längen r_3 und r_4 von k abhängen, siehe (7):

$$r_3 = \Sigma_{A1} + \Sigma_{S21} - \bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}/k \quad \text{und} \quad r_4 = \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}/k.$$

Ein möglicher Startwert für k kann der Gleichung (56) entnommen werden.

3. Ausgehend vom gefundenen Korrekturfaktor k berechnet man die reziproken Längen

$$r_3 = \Sigma_{A1} + \Sigma_{S21} - \bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}/k \quad \text{und} \quad r_4 = \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}/k$$

sowie die Eigenwerte der Systemmatrix, siehe (20) und (21):

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{r_1 r_3 + r_2 r_6}{2}} + \sqrt{\frac{[r_1 r_3 - r_2 r_6]^2}{4} + r_1 r_2 r_4 r_5}$$

bzw.

$$\lambda_i = \sqrt{r_2 r_6 + r_1 r_3 - \lambda_r^2}.$$

4. Wähle $c_1 = 1$ und berechne c_2 aus der Randbedingung (57):

$$c_2 = -\frac{2\lambda_r \sinh(\lambda_r x_B) - r_2 \cosh(\lambda_r x_B)}{2\lambda_i \sinh(\lambda_i x_B) - r_2 \cosh(\lambda_i x_B)}.$$

5. Bestimme den Vektor \mathbf{c}_φ sowie die Matrizen \mathbf{A}_{11} und \mathbf{P} aus (47), (28) bzw.(31):

$$\mathbf{c}_\varphi = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} r_2 r_6 - \lambda_r^2 & r_2 r_6 - \lambda_i^2 \\ r_1 r_5 & r_1 r_5 \end{bmatrix}.$$

6. Normiere die Koeffizienten c_1 und c_2 entsprechend zu (60).

7. Die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten können nun gemäß der Gleichung (49) berechnet werden.

3.8 Beispiel

Als Beispiel wird ein Reaktor betrachtet, der sich entlang der x -Achse von -100 cm bis 100 cm erstreckt. Als Brennstoff wird das Material III aus der Tabelle 1 eingesetzt, welches aus dem Brennstoff 2 und Steuerstab besteht. Aus Symmetriegründen sind in Bild 1 die berechneten Kurvenverläufe für die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten der beiden Energiegruppen nur für positive x -Werte dargestellt. Die Kurvenverläufe wie auch der berechnete Korrekturfaktor $k = 0.6838$ stimmen mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen überein, siehe z. B. [7]. Der Korrekturfaktor belegt insbesondere die Fähigkeit des Steuerstabes Neutronen zu absorbieren, was in diesem Fall zu einem unterkritischen Reaktor führt. Im Gegensatz dazu erhält man aus einer Berechnung der Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten, wenn als Brennstoff das Material I oder das Material II verwendet wird, die Korrekturfaktoren $k = 1.1107$ bzw. $k = 1.0454$, die Kennzeichen für überkritische Reaktoren sind.

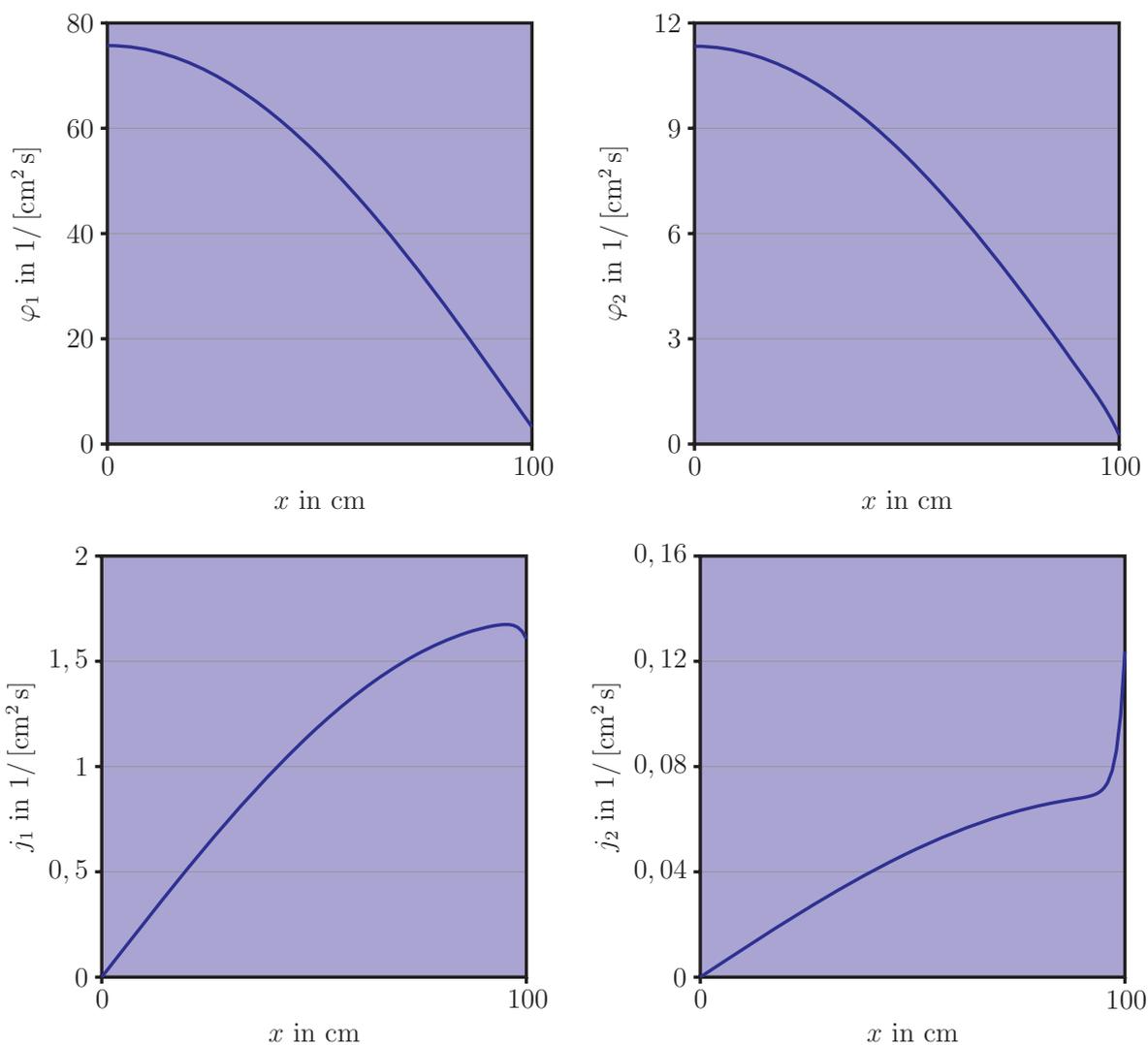


Abbildung 1: Neutronenflussdichten und Neutronenstromdichten für einen mit dem Material III gefüllten Reaktor, der sich in x -Richtung von -100 cm bis $x = 100$ cm erstreckt.

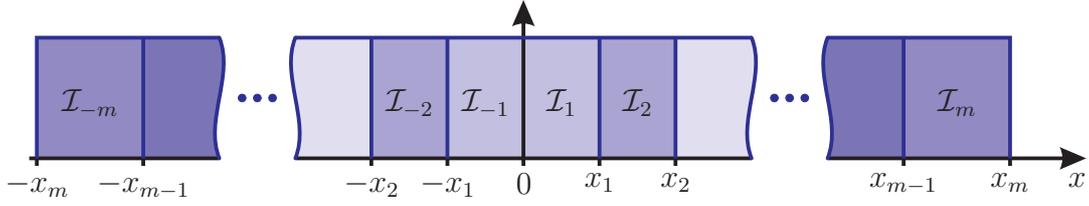
4 Eindimensionaler Fall mit mehreren Materialien

In diesem Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse auf den Fall mehrerer Materialien erweitert. Zu diesem Zweck wird wieder ein symmetrisch angeordneter und gefüllter Reaktor angenommen, der von nun an nur für

$$x_0 = 0 < x \leq x_B = x_m \quad (61)$$

betrachtet wird. Dieser Bereich wird in m Intervalle \mathcal{I}_μ unterteilt, in denen sich jeweils ein Material μ befindet:

$$\mathcal{I}_\mu = \{x \in \mathbb{R} \mid x_{\mu-1} < x \leq x_\mu\} \quad \text{mit} \quad \mu = 1, \dots, m. \quad (62)$$



In jedem Intervall hat man zwar dieselbe Differentialgleichung wie zuvor,

$$\mathcal{I}_\mu : \mathcal{D}_x \mathbf{w}(x) = \mathbf{A}^{[\mu]} \mathbf{w}(x), \quad (63)$$

aber die auftretenden Konstanten unterscheiden sich wegen der im Allgemeinen voneinander verschiedenen Materialparameter, wobei $[\mu]$ die Abhängigkeit vom Material μ anzeigt.

Die Differentialgleichung kann stückweise für jedes Intervall gelöst werden und führt, abgesehen von einer Verschiebung in der Ortskoordinate x , auf die bisherige Lösung:

$$\mathcal{I}_\mu : \mathbf{w}(x) = \Phi^{[\mu]}(x - x_{\mu-1}) \mathbf{w}_{\mu-1} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m, \quad (64)$$

vgl. (15). Die unbekannten Anfangszustände $\mathbf{w}_{\mu-1}$ werden entsprechend zu (39) durch

$$\mathbf{w}_{\mu-1} = \mathbf{R}^{[\mu]} \mathbf{c}^{[\mu]} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m \quad (65)$$

ersetzt, womit sich für das jeweilige Intervall die Lösung

$$\mathcal{I}_\mu : \mathbf{w}(x) = \mathbf{R}^{[\mu]} \mathbf{H}^{[\mu]}(x - x_{\mu-1}) \mathbf{c}^{[\mu]} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m, \quad (66)$$

ergibt, siehe (40). Um die triviale Lösung auszuschließen, ist schließlich noch

$$\mathbf{c}^{[1]} \neq \mathbf{0} \quad (67)$$

zu verlangen.

4.1 Symmetriebedingungen

Wie zuvor bei einem Material gilt aufgrund der Symmetrie der Anordnung, dass im ersten Intervall die Neutronenflussdichten gerade und die Neutronenstromdichten ungerade Funktionen sind, womit der Vektor $\mathbf{c}_j^{[1]}$ verschwindet, siehe (48):

$$\mathbf{c}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_\varphi^{[1]}. \quad (68)$$

4.2 Übergangsbedingungen

Aus physikalischen Gründen sind die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten stetig [9, 10], weshalb man in einem Intervall \mathcal{I}_μ als Anfangszustand den Zustand am Ende des vorangegangenen Intervalls $\mathcal{I}_{\mu-1}$ zu wählen hat:

$$\mathcal{I}_{\mu-1} : \mathbf{w}_\mu = \mathbf{w}(x_\mu) \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m-1. \quad (69)$$

Mit der Lösung aus (64) ergibt sich als Endzustand des jeweiligen Intervalls

$$\mathbf{w}_\mu = \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{w}_{\mu-1} \quad \text{mit} \quad \Delta x_\mu = x_\mu - x_{\mu-1} \quad \text{für} \quad \mu = 1, \dots, m-1, \quad (70)$$

was mit der Definition (65) auch als

$$\mathbf{R}^{[\mu+1]} \mathbf{c}^{[\mu+1]} = \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{R}^{[\mu]} \mathbf{c}^{[\mu]} \quad \text{für} \quad \mu = 1, \dots, m-1 \quad (71)$$

geschrieben werden kann. Zusammen mit der Eigenwertzerlegung der Transitionsmatrix aus (36) resultiert zur Berechnung der Vektoren $\mathbf{c}^{[\mu]}$ die Rekursion

$$\mathbf{c}^{[\mu+1]} = \mathbf{R}^{[\mu+1]-1} \mathbf{R}^{[\mu]} \mathbf{H}^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{c}^{[\mu]} \quad \text{für} \quad \mu = 1, \dots, m-1, \quad (72)$$

wobei eine Initialisierung mit (68) möglich ist.

4.3 Randbedingungen

Für die Randbedingungen ist das Intervall \mathcal{I}_m zu betrachten, in dem der Zustandsvektor am Rand $x = x_B = x_m$ den Wert

$$\mathbf{w}_m = \Phi^{[m]}(\Delta x_m) \mathbf{w}_{m-1} \quad \text{mit} \quad \Delta x_m = x_m - x_{m-1} \quad (73)$$

annimmt. Dieser ergibt zusammen mit der Gleichung (70) nach einer rekursiven Auswertung

$$\mathbf{w}(x_B) = \mathbf{w}_m = \Phi^{[m]}(\Delta x_m) \cdots \Phi^{[2]}(\Delta x_2) \Phi^{[1]}(\Delta x_1) \mathbf{w}_0 = \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{w}_0 \quad (74)$$

und muss der schon in (50) angegebenen Randbedingung genügen:

$$\mathbf{B} \mathbf{w}(x_B) = \mathbf{B} \mathbf{w}_m = \mathbf{B} \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}. \quad (75)$$

Ersetzt man gemäß (65) \mathbf{w}_0 durch $\mathbf{R}^{[1]} \mathbf{c}^{[1]}$ und nutzt die Symmetriebedingung (68) aus, so gelangt man zur Forderung

$$\mathbf{B} \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{R}^{[1]} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_\varphi^{[1]} = \mathbf{0}. \quad (76)$$

Für eine nichttriviale Lösung kann diese aber nur erfüllt werden, wenn die Determinante der links von $\mathbf{c}_\varphi^{[1]}$ stehenden Matrix verschwindet:

$$\det \left(\mathbf{B} \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_\mu) \mathbf{R}^{[1]} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (77)$$

Man beachte, dass die Transitionsmatrizen sich direkt aus der Kenntnis der Systemmatrizen bestimmen lassen, die wiederum bis auf die global geltende Größe k bekannt sind. Somit kann die skalare Gleichung (77) zur Berechnung des Korrekturfaktors k herangezogen werden.

Umgekehrt sind mit k die Systemmatrizen und infolgedessen auch die Transitionsmatrizen eindeutig bestimmt. Damit kann eine der beiden linear abhängigen Gleichungen in (76) genutzt werden, um eine Beziehung zwischen den Elementen $c_1^{[1]}$ und $c_2^{[1]}$ des Vektors $\mathbf{c}_\varphi^{[1]}$ aufzustellen.

4.4 Normierungsbedingung

Schließlich ist noch die Lösung, wie in der Gleichung (10) vorgegeben, zu normieren, was unter Berücksichtigung der Symmetrie

$$\frac{1}{x_m} \int_0^{x_m} [\bar{\nu}_1 \Sigma_{F1}, \bar{\nu}_2 \Sigma_{F2}] \varphi(x) dx = \frac{1}{\text{cm s}} \quad (78)$$

als Normierungsbedingung liefert. Zur Berechnung des Integrals wird über die einzelnen Teilintervalle integriert:

$$\int_0^{x_m} \varphi(x) dx = \sum_{\mu=1}^m \int_{\mathcal{I}_\mu} \varphi(x) dx. \quad (79)$$

Ausgehend von der Gleichung (66) erhält man mit

$$\varphi(x) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}] \mathbf{w}(x) \quad (80)$$

für $\mu = 1, \dots, m$ den Ausdruck

$$\mathcal{I}_\mu : \varphi(x) = \mathbf{R}_{21}^{[\mu]} \left[\sinh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]}[x - x_{\mu-1}]) \mathbf{c}_\varphi^{[\mu]} + \cosh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]}[x - x_{\mu-1}]) \mathbf{c}_j^{[\mu]} \right], \quad (81)$$

sodass die zu berechnenden Summanden

$$\int_{\mathcal{I}_\mu} \varphi(x) dx = \mathbf{R}_{21}^{[\mu]} \int_0^{x_m} \sinh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]}[x - x_{\mu-1}]) \mathbf{c}_\varphi^{[\mu]} + \cosh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]}[x - x_{\mu-1}]) \mathbf{c}_j^{[\mu]} dx \quad (82)$$

lauten. Eine Integration liefert das Ergebnis

$$\int_{\mathcal{I}_\mu} \varphi(x) dx = \mathbf{R}_{21}^{[\mu]} \mathbf{A}_{11}^{[\mu]-1} \left[[\cosh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]} \Delta x_\mu) - \mathbf{1}] \mathbf{c}_\varphi^{[\mu]} + \sinh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]} \Delta x_\mu) \mathbf{c}_j^{[\mu]} \right], \quad (83)$$

womit für die Normierung also

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_m} \sum_{\mu=1}^m \left[\bar{\nu}_1^{[\mu]} \Sigma_{F1}^{[\mu]}, \bar{\nu}_2^{[\mu]} \Sigma_{F2}^{[\mu]} \right] \mathbf{R}_{21}^{[\mu]} \mathbf{A}_{11}^{[\mu]-1} \\ \left[[\cosh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]} \Delta x_\mu) - \mathbf{1}] \mathbf{c}_\varphi^{[\mu]} + \sinh(\mathbf{A}_{11}^{[\mu]} \Delta x_\mu) \mathbf{c}_j^{[\mu]} \right] = \frac{1}{\text{cm s}} \end{aligned} \quad (84)$$

sicherzustellen ist, was stets durch eine Division der Elemente aller Vektoren $\mathbf{c}^{[\mu]}$ durch den Zahlenwert des links stehenden Ausdrucks erreicht werden kann.

4.4.1 Algorithmus

zur Berechnung der Neutronenflussdichten und der Neutronenstromdichten für einen symmetrisch aufgebauten und gefüllten Reaktor:

1. Berechne mit der Gleichung (77) den Korrekturfaktor k :

$$\det \left(\mathbf{B} \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_{\mu}) \mathbf{R}^{[1]} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right) = 0 .$$

2. Wähle $c_1^{[1]} = 1$ und berechne $c_2^{[1]}$ aus einer der beiden linear abhängigen Zeilen der Randbedingung (76):

$$\mathbf{B} \prod_{\mu=1}^m \Phi^{[\mu]}(\Delta x_{\mu}) \mathbf{R}^{[1]} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_{\varphi}^{[1]} = \mathbf{0} .$$

3. Berechne mit (68) den Vektor

$$\mathbf{c}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{c}_{\varphi}^{[1]} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_{\varphi}^{[1]} = \begin{bmatrix} c_1^{[1]} \\ c_2^{[1]} \end{bmatrix} ,$$

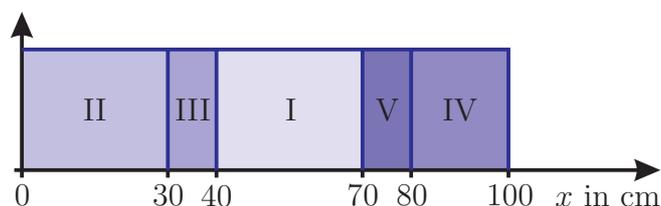
der zur Initialisierung der Rekursion (72) genutzt wird:

$$\mathbf{c}^{[\mu+1]} = \mathbf{R}^{[\mu+1]-1} \mathbf{R}^{[\mu]} \mathbf{H}^{[\mu]}(\Delta x_{\mu}) \mathbf{c}^{[\mu]} \quad \text{für} \quad \mu = 1, \dots, m-1 .$$

4. Normiere die Elemente aller Vektoren $\mathbf{c}^{[\mu]}$ entsprechend zu (84).
5. Berechne gemäß der Gleichung (66) den Zustandsvektor, der die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten als Elemente beinhaltet.

4.5 Beispiel

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird erneut vom Reaktor des Beispiels 3.8 ausgegangen, der nun symmetrisch mit allen fünf Materialien der Tabelle 1 gefüllt ist, wobei es in den folgenden Betrachtungen wieder ausreicht, sich auf positive x -Werte zu beschränken.



In Bild 2 findet man die berechneten Kurvenverläufe für die Neutronenflussdichten und die Neutronenstromdichten. Als Referenz ist jeweils das Ergebnis einer Wellendigital-Simulation gestrichelt eingezeichnet [7], welches sich nur unwesentlich von der berechneten Lösung unterscheidet.

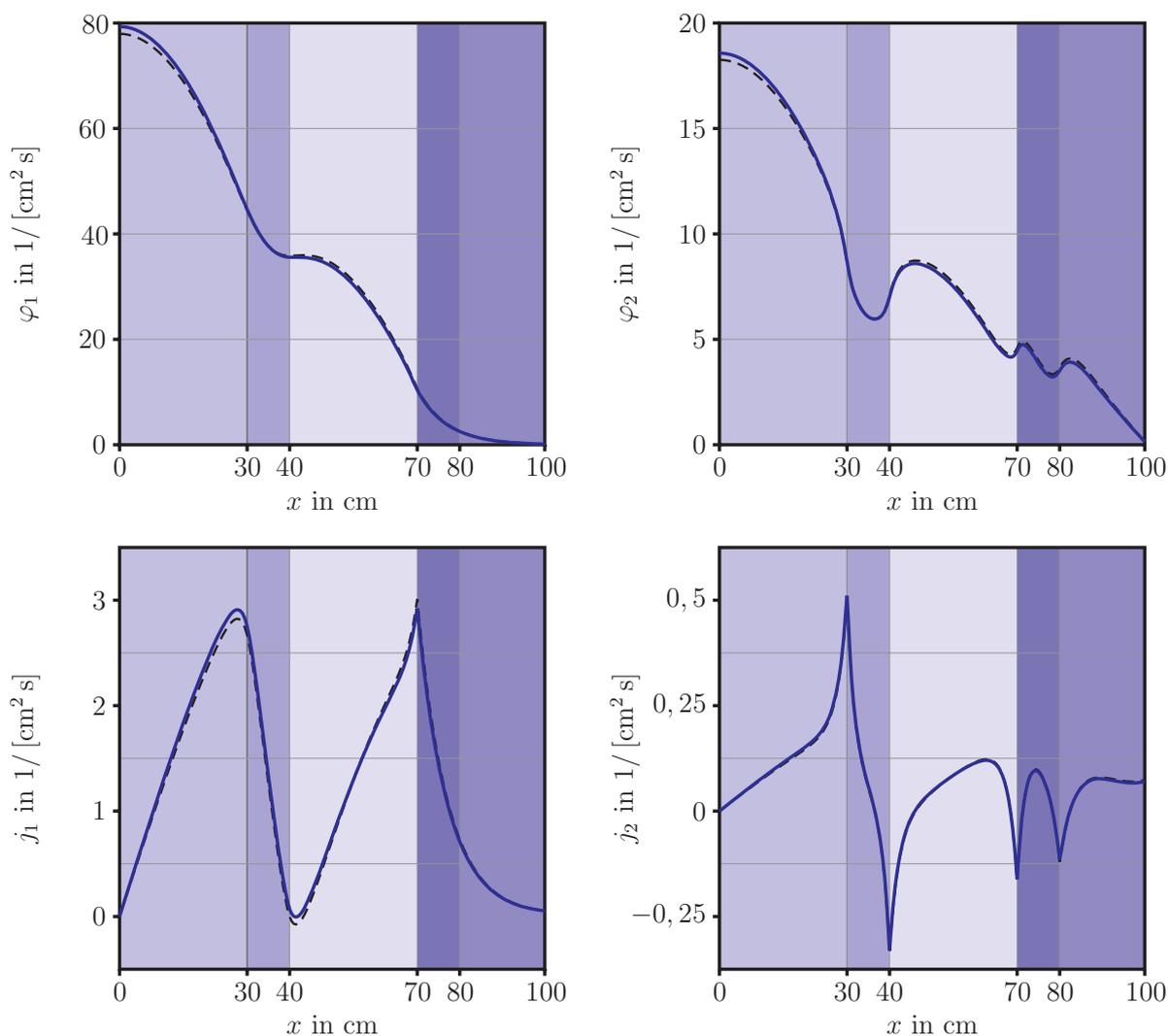


Abbildung 2: Berechnete Neutronenflussdichten und Neutronenstromdichten für einen symmetrisch aufgebauten und mit allen fünf Materialien der Tabelle 1 gefüllten Reaktor. Zum Vergleich ist das Ergebnis einer Wellendigital-Simulation gestrichelt eingezeichnet.

Die Ergebnisse erscheinen auch aus physikalischer Sicht plausibel. Beim Übergang $x = 30$ cm ist der makroskopische Wirkungsquerschnitt der Absorption im zweiten Intervall größer als im ersten, sodass die Neutronenflussdichten im zweiten Intervall wieder abnehmen und die Neutronenstromdichten dort lokale Maxima aufweisen. Da die Situation beim Übergang $x = 40$ cm umgekehrt ist, haben die Neutronenstromdichten dort lokale Minima. Die Ähnlichkeit der Verläufe von φ_1 und φ_2 im vorderen Bereich hat einen einfachen Grund: Wenn viele langsame Neutronen zur Verfügung stehen, dann werden durch die Kernspaltung auch viele schnelle Neutronen erzeugt. Anders verhält es sich bei den letzten beiden Übergängen, bei denen aufgrund der relativ großen makroskopischen Wirkungsquerschnitte für die Streuung viele Neutronen der ersten Energiegruppe abgebremst werden und zur zweiten Energiegruppe wechseln, womit sich der anfängliche Anstieg der Neutronenflussdichte der zweiten Energiegruppe erklärt.

5 Zusammenfassung

In diesem Aufsatz ist ein Ansatz vorgestellt worden, mit dem sich die Neutronendiffusionsgleichungen in zwei Energiegruppen lösen lassen. Die grundsätzliche Idee besteht in der Lösung der für einen fest vorgegebenen Korrekturfaktor vorliegenden linearen Differentialgleichungen mit den aus der Systemtheorie bekannten Methoden. Da die berechnete Lösung für jeden fest vorgegebenen Korrekturfaktor gilt, darf sie auch auf einen variablen Korrekturfaktor verallgemeinert werden, wodurch eine nichtlineare implizite Gleichung entsteht.

Auf diese Weise sind Algorithmen zur Lösung der Neutronendiffusionsgleichungen entwickelt worden, die eine Berechnung der Neutronenflussdichten und Neutronenstromdichten ermöglichen, ohne eine numerische Integration zu verwenden. Als Referenz ist ein mit mehreren Materialien gefüllter Reaktor mit einem Wellendigital-Modell simuliert worden, wobei die mit einer numerischen Integration gefundenen Ergebnisse sehr gut mit dem hier angegebenen Algorithmus übereinstimmen. Diese Übereinstimmung wurde bei vielen weiteren Beispielen erzielt, die aber aus Platzgründen nicht aufgeführt worden sind. Bemerkenswert ist die erreichte Zeitersparnis, die sich auf zweistellige Faktoren beziffern lässt.

Mit der hier angegebenen Lösung liegt für die verschiedenen numerischen Verfahren nicht nur eine verlässliche Referenz vor, sie ist wegen des erreichten Zeitvorteils gegebenenfalls sogar geeignet, die anderen numerischen Verfahren abzulösen. Zu diesem Zweck muss die Lösung allerdings noch auf drei Ortskoordinaten erweitert werden. Diese Erweiterung ist aber ohne Weiteres möglich, wird aber Gegenstand einer zukünftigen Veröffentlichung sein.

Literatur

- [1] Ib Misfeldt. 3D IAEA benchmark problem 2nd order FEM calculation (DAEK-RP-4-75). *NEA/NEACRP/L*, 139:1–7, 1975.
- [2] Ib Misfeldt. 3D IAEA benchmark problem 3rd order FEM calculation (DAEK-RP-5-75). *NEA/NEACRP/L*, 142:1–7, 1975.
- [3] M. R. Wagner. Current trends in multidimensional static reactor calculations. *CONF-750413. Proc. Conf. on Computational Methods in Nuclear Engineering*, I:1–23, 1975.
- [4] M. R. Wagner, Herbert Finnemann, K. Koebke, and H.-J. Winter. Validation of the nodal expansion method and the depletion program MEDIUM-2 by benchmark calculations and direct comparison with experiment. *Atomkernenergie (ATKE)*, 30:129–135, 1977.
- [5] Herbert Finnemann, Friedrich Bennewitz, and Manfred R. Wagner. Interface current techniques for multidimensional reactor calculations. *Atomkernenergie (ATKE)*, 30:123–128, 1977.

- [6] M. Melice. A nodal-modal coarse mesh method for solving the 2-group diffusion equation. *NEA/NEACRP/L*, 228:1–46, 1978.
- [7] Katrin Luhmann. *Die numerische Lösung der Neutronendiffusionsgleichungen in zwei Energiegruppen mit dem Wellendigital-Konzept*. Cuvillier, Göttingen, 2004.
- [8] B. Micheelsen and H. Neltrup. The 3D-IAEA benchmark problem. *RISØ-M-1572*, 1973.
- [9] James J. Duderstadt and Louis J. Hamilton. *Nuclear Reactor Analysis*. Wiley & Sons, New York, 1976.
- [10] John Raymond Lamarsh. *Nuclear Reactor Theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1972.

Vortragsunterlagen



Generische By-Wire-Plattform für Flug- und Fahrzeuge und neue Anwendungsmöglichkeiten

Steirisches Seminar über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

20. – 22. September 2005
Retzhof / Graz

Reinhard Reichel,
Michael Armbruster, Matthias Lehman, Gernot Konrad, Steffen Hesse



Universität
Stuttgart

By-Wire-Plattform for automotive and aeronautic
Application

Seite 1



Institut für
Luftfahrtssysteme

21.09.2005

Content



1. Automotive Application

- Perspective : Future Control Application for Vehicles
- Baseline : Highly safety critical X-by-Wire Platform

2. Aeronautic Application

- Synergy : X-by-Wire Platform as Baseline for a Fly-by-Wire Platform
- Perspective : Future Control Application in the Aviation

3. Summary, Abbreviations, References



Universität
Stuttgart

By-Wire-Plattform for automotive and aeronautic
Application

Seite 2

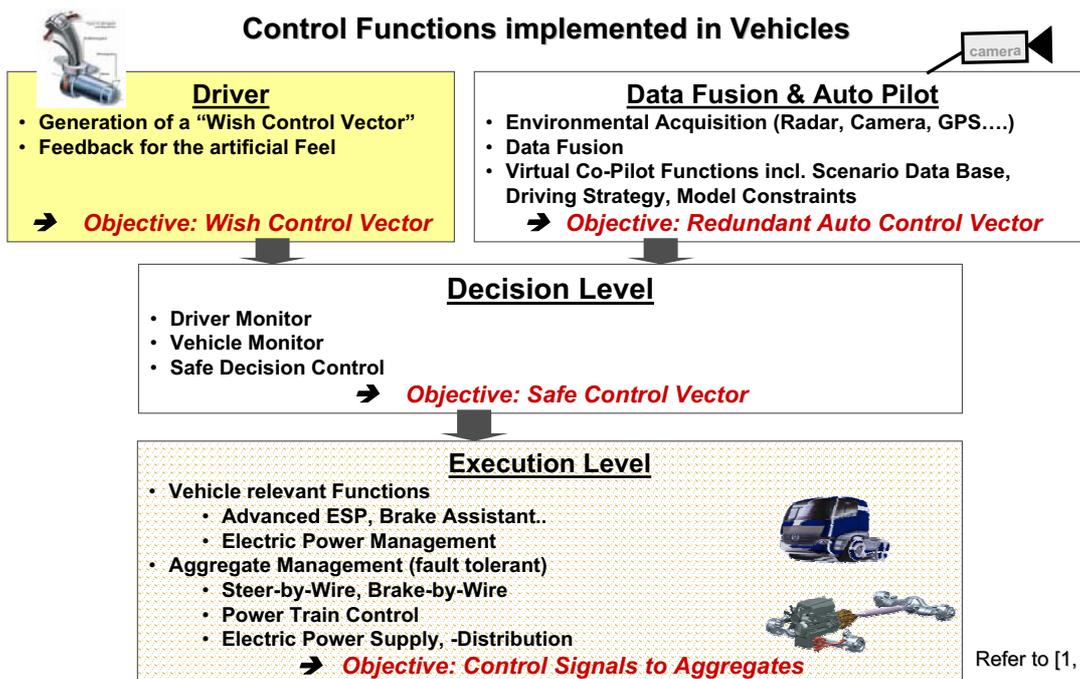


Institut für
Luftfahrtssysteme

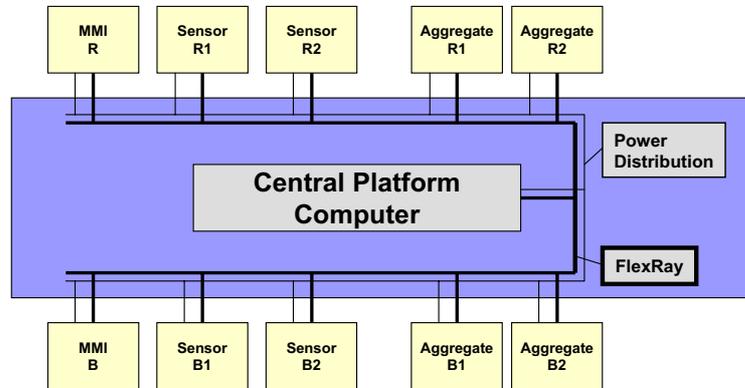
21.09.2005

Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process



Baseline for the Realization of Control Functions: X-by-Wire Platform



Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process



Platform rel. Requirements: Random Failures

Random Failures

- No “Probability-based” Safety Requirement exists.
- As Vehicles can be stopped at any time, basically a simple Strategy in Case of a Failure can be applied:
 - If the first Failure occurs:
 - The System must still continue correct Operation.
 - The Failure must be indicated to the Driver.
 - Within T_{SS} after Failure Occurrence, the Driver has to bring the Vehicle into a safe State.

This requires at least a

“Fail/Operational – Fail/Passive” fault tolerant System (F/O-F/P).



Random Failures: “Safety Probability”

Derivation of a basic “Safety-Probability” (Rough Order of Magnitude)

Although there is no formal Requirement to meet any Safety Feature based on Probability, it is possible to derive such a Feature based on Accident Rates analogously to the Aviation. This can be done for Passenger Cars based e.g. on data of the year 2001 of Germany [3, 4]:

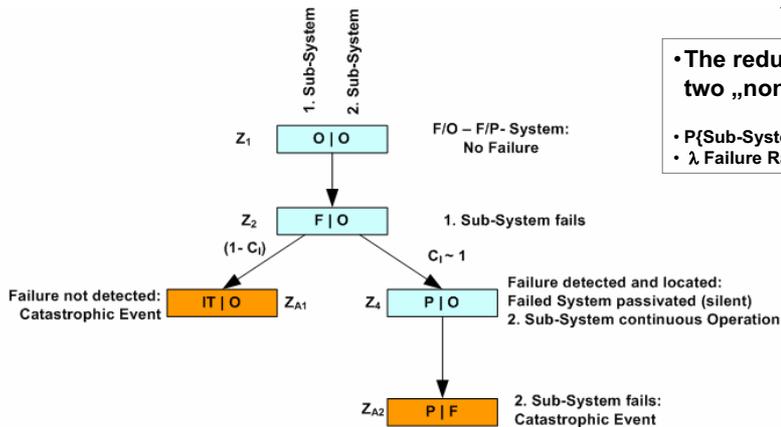
- 2681 Accidents with fatal personal Injury or serious Property Damage caused by technical Deficiencies.
- 158 of Accidents above are caused by technical Deficiencies of the Steering System.
- 45 Mio. Passenger Cars were registered.
- 300h Operation per Car per Year.

This results in a rough Order of Magnitude per Car (in Operation) per Hour:

$P\{\text{Malfunction of Steering System with fatal Impact/h}\} \sim 10^{-8}$



Random Failures: Basic Failure Modeling



• The redundant System consists of two „non-redundant“ Sub-Systems.

• $P\{\text{Sub-System}/h\} \sim 10^{-5} \dots 10^{-4}/h$ ($\lambda \sim 10^{-5} \dots 10^{-4}/h$)
 • λ Failure Rate of a non redundant Sub-System

O....Sub-System operates correctly „OK“
 FSub-System failed
 PSub-System failed and passivated (Silent)
 IT....Sub-System failed and NOT passivated (Integrity-Problem)
 C_1 $P\{\text{Failed Sub-System passivated} \mid \text{Sub-System failed}\}$

$$P\{\text{Cat-Event}/h\} = P\{Z_{A1}\} + P\{Z_{A2}\} < 1 \cdot 10^{-8}$$

Assuming $P\{Z_{A1}\} = P\{Z_{A2}\}$:

$$P\{Z_{A1}\} < 5 \cdot 10^{-9}/h$$

$$P\{Z_{A2}\} < 5 \cdot 10^{-9}/h$$



Universität
Stuttgart

By-Wire-Platform for automotive and aeronautic
Application

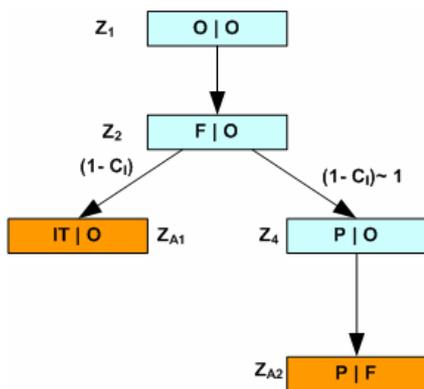
Seite 9



Institut für
Luftfahrtssysteme

21.09.2005

Mission Model: “Safety relevant Mission” begins with first Failure



Safety relevant Mission Scenario:

After the first Failure has occurred, the Vehicle has to be brought into a safe State within T_{SS} . The Probability that this fails must be

$$P\{\text{Cat Event} / T_{SS}\} < 1 \cdot 10^{-8}.$$

This means that the complete Mission Period is not taken into consideration (Mission Period is not limited). Just the period after the first Failure is relevant to achieve the “Safety Budget 10^{-8} ”.

$$P\{\text{Cat Event}/h\} = P\{Z_{A1}\} + P\{Z_{A2}\} < 1 \cdot 10^{-8}/h$$

Assuming $P\{Z_{A1}\} = P\{Z_{A2}\}$:

$$P\{Z_{A1}\} = (1 - C_1) < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow C_1 > 99,9999995\%$$

$$P\{Z_{A2}\} = \lambda \cdot T_{SS} < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow T_{SS} < 30\text{ms} (\lambda = 10^{-5}/h)$$

$$\rightarrow T_{SS} < 3\text{ms} (\lambda = 10^{-4}/h)$$

Result:

- System-Capability of Failure-Detection, -Localization and -Passivation must be **extremely high**
- The Vehicle has to be brought into a safe state within 30ms !!!!!



Universität
Stuttgart

By-Wire-Platform for automotive and aeronautic
Application

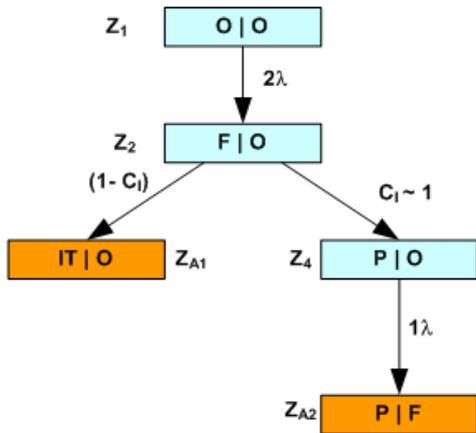
Seite 10



Institut für
Luftfahrtssysteme

21.09.2005

Mission Model: "Safety relevant Mission" is limited to one Hour (analogous to the Aviation)



Safety relevant Mission Scenario:

$P\{\text{Cat Event}\} < 1 \cdot 10^{-8}$ must be achieved (Cat..Catastrophic)

- assuming a Mission has a max. Period of one Hour and
- the Vehicle has to be brought into a safe State within T_{SS} after the first Failure has occurred.

This means that the Probability of the "Catastrophic Event" is based on a max. Mission Period of 1h.

$$P\{\text{Cat Event/h}\} = P\{Z_{A1}\} + P\{Z_{A2}\} < 1 \cdot 10^{-8}$$

Assumption 1: $P\{Z_{A1}\} = P\{Z_{A2}\}$ and $\lambda \sim 10^{-4}/h$

$$P\{Z_{A1}\} = 2 \cdot \lambda \cdot (1 - C_i) < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow C_i > 99,9975 \%$$

$$P\{Z_{A2}\} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot T_{SS} \cdot [1 - T_{SS}/2] < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow T_{SS} = 17\text{min}$$

Assumption 2: $P\{Z_{A1}\} = P\{Z_{A2}\}$ and $\lambda \sim 10^{-5}/h$

$$P\{Z_{A1}\} = 2 \cdot \lambda \cdot (1 - C_i) < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow C_i > 99,975 \%$$

$$P\{Z_{A2}\} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot T_{SS} \cdot [1 - T_{SS}/2] < 5 \cdot 10^{-9}/h \rightarrow T_{SS} > 60\text{min}$$

Result:

→ Capability of Failure-Detection, -Localization and -Passivation must be 99,975% ...99,9975%

→ Assuming $\lambda \sim 10^{-4}/h$: The Vehicle has to be stopped within 17min after the first Failure

→ Assuming $\lambda \sim 10^{-5}/h$: The Vehicle can complete the Mission of one hour even in cases of a first failure



Universität
Stuttgart

By-Wire-Platform for automotive and aeronautic
Application

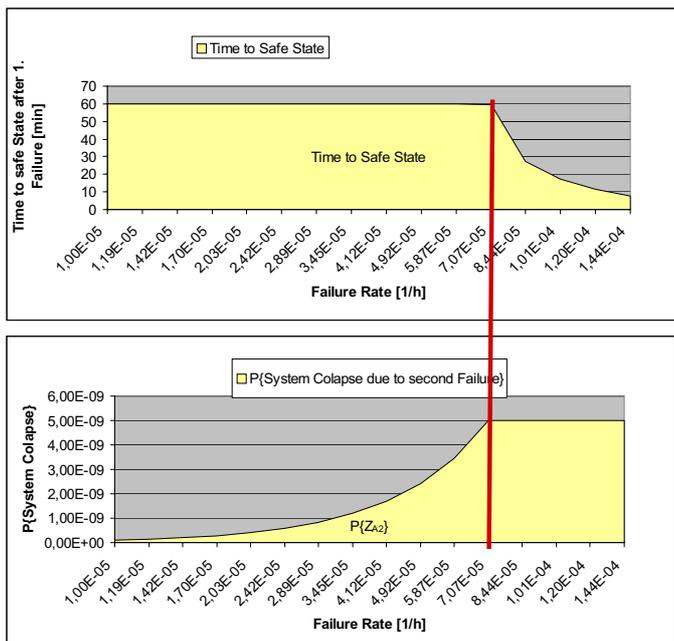
Seite 11



ILI Institut für
Luftfahrtssysteme

21.09.2005

Mission Model: T_{SS} depending on the Sub-System Failure Rate λ



T_{SS} dependent of λ

For $\lambda \leq 7 \cdot 10^{-5}/h$, the Mission of one Hour can be completed even if one Sub-System has failed already during the Mission. Reason:

$$P\{\text{Loss of both Sub-Systems/h}\} \leq 5 \cdot 10^{-8}$$

For $\lambda > 7 \cdot 10^{-5}/h$, the Vehicle has to be brought into a safe State when T_{SS} after the first Sub-System failed. Reason:

$$P\{\text{Loss of both Sub-Systems/h}\} > 5 \cdot 10^{-8}$$



Universität
Stuttgart

By-Wire-Platform for automotive and aeronautic
Application

Seite 12



ILI Institut für
Luftfahrtssysteme

21.09.2005

Platform rel. Requirements: Random Failures Results

- $P\{\text{Catastrophic Event}\} < 10^{-8}$ for a Mission of one Hour (per System)
- A safety critical System must provide at least "Fail/Operational --- Fail/Passive Behaviour"
- The first Failure must be detected, localized and passivated to a very high Degree: $C_1 \sim 99,975 \dots 99,9975\%$
- Assuming $\lambda \sim 10^{-4}/h$:
The Vehicle has to be stopped within 17min after the first Failure
- Assuming $\lambda \sim 10^{-5}/h$:
The Vehicle can complete the Mission of one hour even in cases of a first failure



Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process



Platform rel. Requirements : Design Faults

Design Faults

- IEC 61508 covers the complete Life Cycle of electrical, electronic, programmable electronic safety related Systems incl. Design, Verification, Validation (not restricted to the automotive Industry). The Application of this Document is not mandatory for Vehicle Manufacturers. In safety related automotive Software-Development, several committees are working on standards resp. recommendations for components and the development process (MISRA, HIS, AutomotiveSpice, AUTOSAR).
- Today, requirements for Dissimilarity (Diversity) do not exist.
- The manufacturing Process must be certified by the Kraftfahrtbundesamt.
- The System must be qualified with Respect to EMI (ECE10 resp. 2004/104 EG).

Significant Result relevant for Platform Design (Prototype)

- Dissimilarity is not realized in the Prototype. Nevertheless, the Platform shall provide the Capability for dissimilar Realization providing F/O – F/P – Behaviour for Generic Faults.
- The Platform shall provide the Capability for high credible Dissimilarity if required.
- The Degree of Dissimilarity shall not depend on the Degree of Redundancy.



Platform rel. Requirements : Single Point Failures

Single Point Failures

No explicit Requirements exists on single Point Failures. But redundant System Structures in IEC 61508 Part 2 requires this indirectly.

Significant Result relevant for Platform Design (Prototype)

- The Platform must comply with the Requirement „No Single Point Failure“



Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process



Platform relevant Requirements: System Reliability

Maintenance Scenario

Assumption:

- Scheduled Maintenance Check all 20.000km
- Average Speed: 75km/h
- 4 safety critical F/O-F/P-Systems with $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}/h$ per Sub-System
 - 267 Oph (Operating Hours between two scheduled Maintenance Checks)
 - 10% of all Vehicles will have unscheduled Repair between scheduled Maintenance Checks
 - Result: not acceptable especially for Trucks

Significant Result relevant for Platform Design (Prototype)

The Platform must provide high Reliability to cope future Reliability Requirements:

- The System Structure is based on a centralized core computing System, a redundant System Bus and local Aggregates.
- Electronics in the Aggregates (e.g. Brakes..), which will not built up redundantly, shall be reduced to a minimum to ensure high reliable Aggregates (keep Aggregates as simple as possible).
- of The core computing System and the System Bus shall provide at least F/O-F/O-F/P-Capability (high "reliable" core System)



Platform relevant Requirements: Complementary Aspects

Multi Application Aspects

- Different Applications with different Safety Criticality must be implemented.
- A Modification of one Applications must not lead to a Re-Verification (Re-Certification) of other Applications.

“Simplex minded Application-Design”

- Applications shall be designed “Simplex Minded” and shall be directly downloadable onto the Platform.

Aggregates

- Aggregates shall be kept as simple (reliable) as possible.
- Aggregates shall not contain any functions as “Wake Up”...
- Aggregates shall be linked to one bus only and shall not “see” any Redundancy of the “Core System”.

Platform Wiring

- Significant low Amount of Wiring for Communication and Energy Supply is requested.
- Extra “Wiring” for Discretes etc. shall be avoided.

Power Supply

- Aggregates shall be supplied with safety critical electrical Power.

Low Cost

- Low Recurring Cost (Efficient Use of redundant Resources)
- Low Non-Recurring Cost (Configurable resp. model based Software Design)



Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process

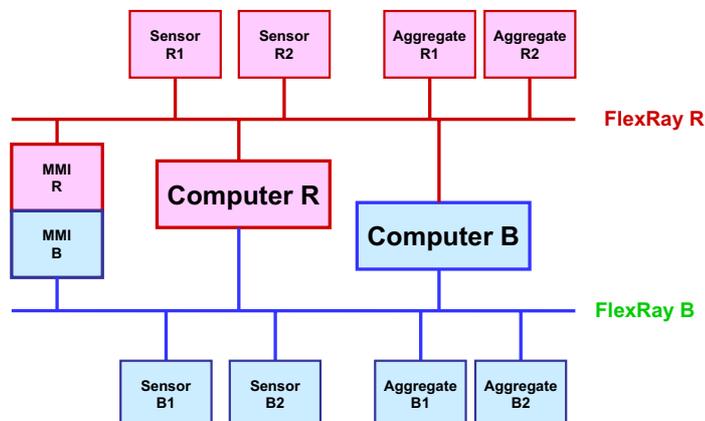


Platform: Realization of basic Design Requirements

- System is based on a centralized Computer System
- Centralized Computer System incl. the System Bus provides F/O-F/O-F/O-F/P for absolute safety critical Functions (up/down Scalability possible).
- Hardware Resources of the centralized Computer System are used very efficient
 - by hardware resource sharing between different functions
 - by dynamic resources sharing in cases of failures
- Each Partition is protected against any other Partition by Hardware Protections.
- System is split into two Sides.
- Each Side has its own independent Bus (FlexRay).
- Only the Processing Units of the Central Computer have access to both FlexRay Busses.
- Aggregates are linked to one FlexRay Bus only.
- Aggregates do not see the degree of redundancy of the System Bus of the centralized Computer System.
- Aggregate Interfaces are kept as simple as possible



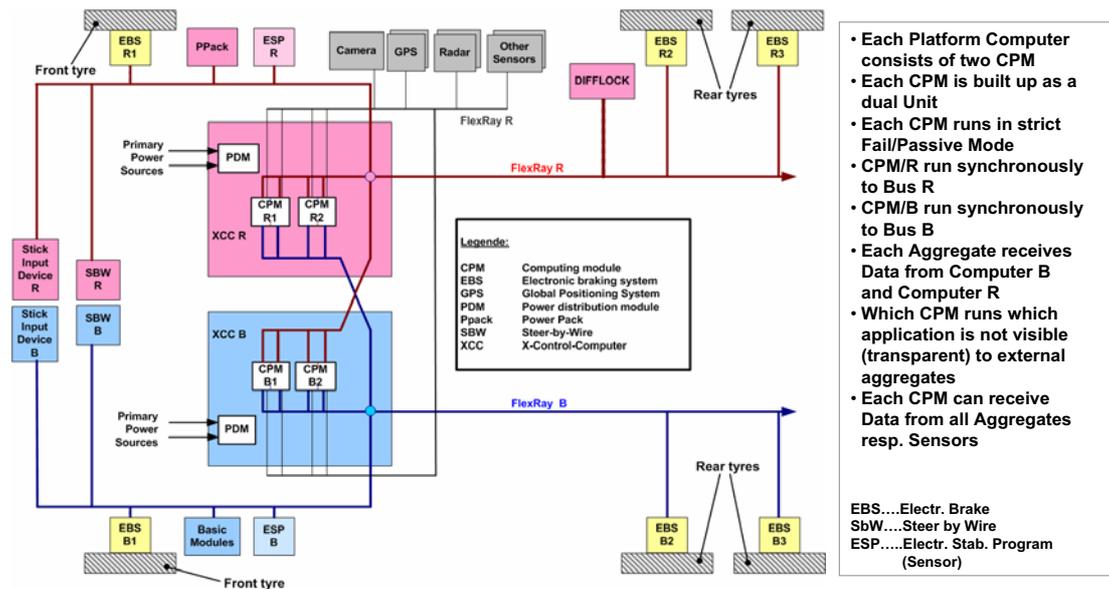
Platform: Structure Overview



- Two FlexRay Busses
- Two Platform Computers
- Simplex Aggregates are linked to one bus only
- Redundant Aggregates are linked to both busses



Platform: Structure



- Each Platform Computer consists of two CPM
- Each CPM is built up as a dual Unit
- Each CPM runs in strict Fail/Passive Mode
- CPM/R run synchronously to Bus R
- CPM/B run synchronously to Bus B
- Each Aggregate receives Data from Computer B and Computer R
- Which CPM runs which application is not visible (transparent) to external aggregates
- Each CPM can receive Data from all Aggregates resp. Sensors

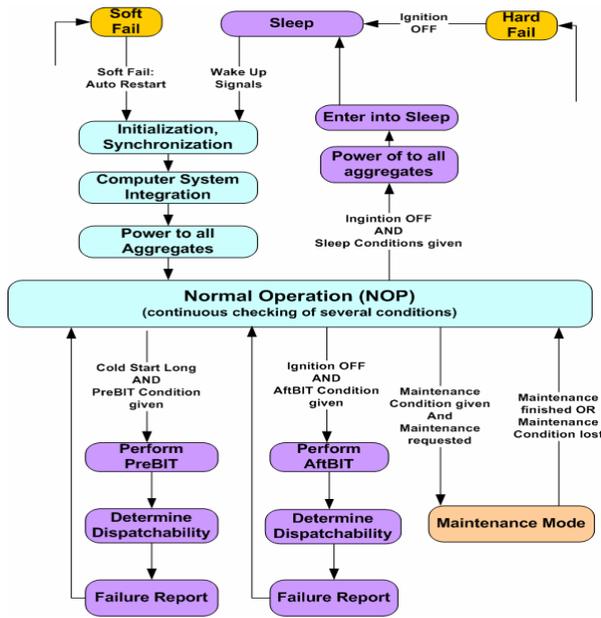


Content: Automotive Application

1	Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
2	Platform rel. Requirements: Random Failures
3	Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
4	Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
5	Platform: Basic Structure
6	Platform: Basis Operation and System Management
7	Platform: Functional- and SW-Structure
8	Application: SPARC Project and I/V-Process



System Management: Top Level Operating State Transitions CPM



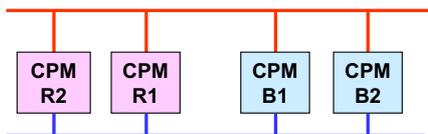
- Platform incl. Aggregates are controlled basically by the CPM
- An CPM getting powered
 1. adapts to the CPM on its side
 2. adapts to the CPM of the other side
- The platform computer system controls the startup procedure of the whole system
- The platform computer controls any system operating mode

Abbreviations:

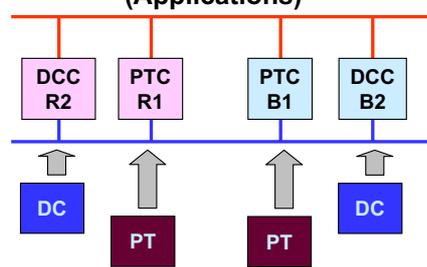
BIT	Built In Test
PreBIT	BIT performed at the begin of the Mission
AftBIT	BIT performed at the end of the Mission
PreBIT	Basically to ensure Integrity
AftBIT	Basically for Diagnostics/Maintenance
NOP	Normal Operation

System Management: Allocation of Functions in the CPM / Data Flow

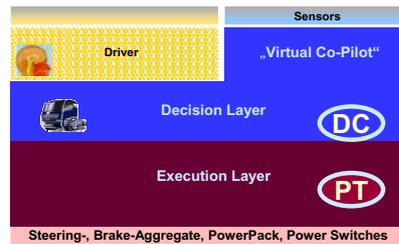
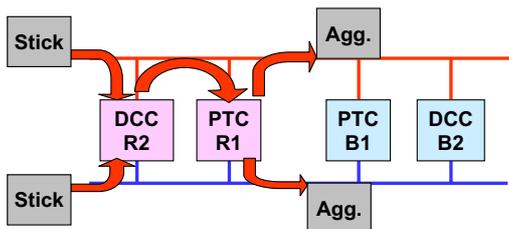
Basic Configuration



Allocation of Functions (Applications)

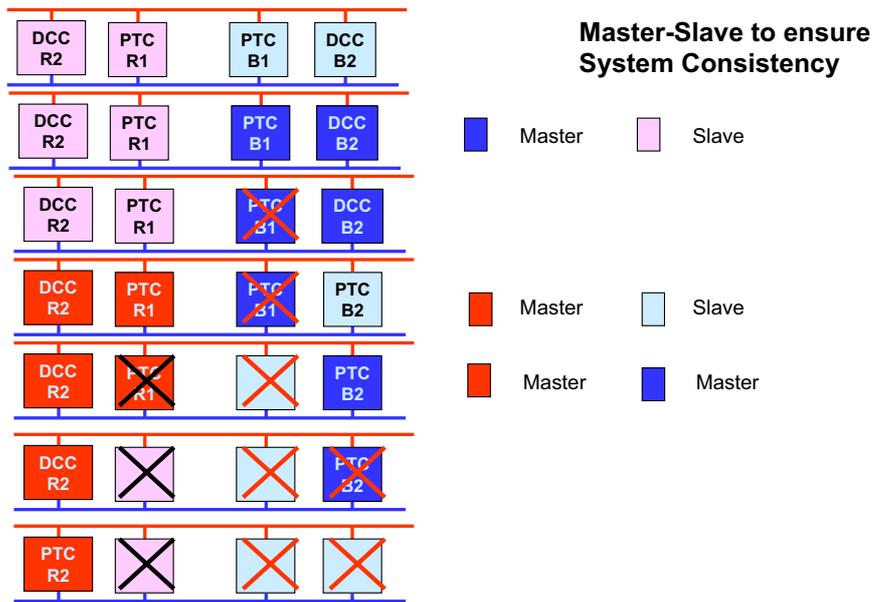


Data Flow For Side Red being Active



Steering-, Brake-Aggregate, PowerPack, Power Switches

System Management: CPM Reconfiguration and Master Slave Principle

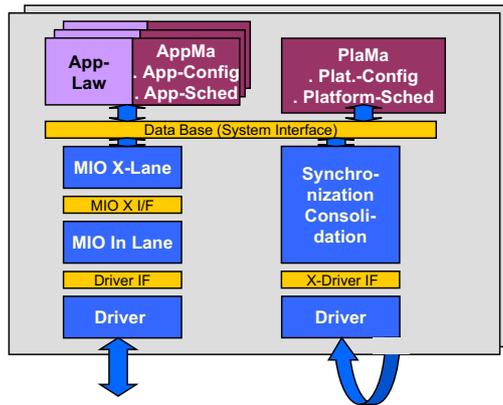


Content: Automotive Application

- | | |
|---|---|
| 1 | Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program) |
| 2 | Platform rel. Requirements: Random Failures |
| 3 | Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures |
| 4 | Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary |
| 5 | Platform: Basic Structure |
| 6 | Platform: Basis Operation and System Management |
| 7 | Platform: Functional- and SW-Structure |
| 8 | Application: SPARC Project and I/V-Process |



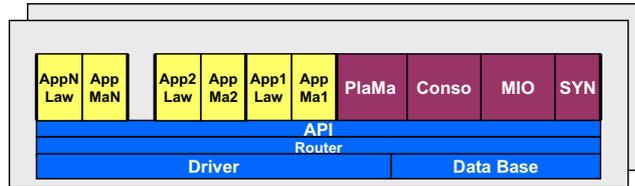
Platform: Functional- and SW-Structure



IF	Interface
MIO	SW-Module for Input/Output
In Lane	"In-Lane" Data Processing
X-Lane	Cross Lane Data Processing in the CPM
App	Application
AppMa	Application-Management
App-Config	Application Configuration Management
App-Sched	Application-Scheduling
PlaMa	Platform-Management
Plat	Platform
Conso	CPM Lane-Lane Data Consolidation/Monitoring
SYN	Synchronization

Functional Structure of the CPM

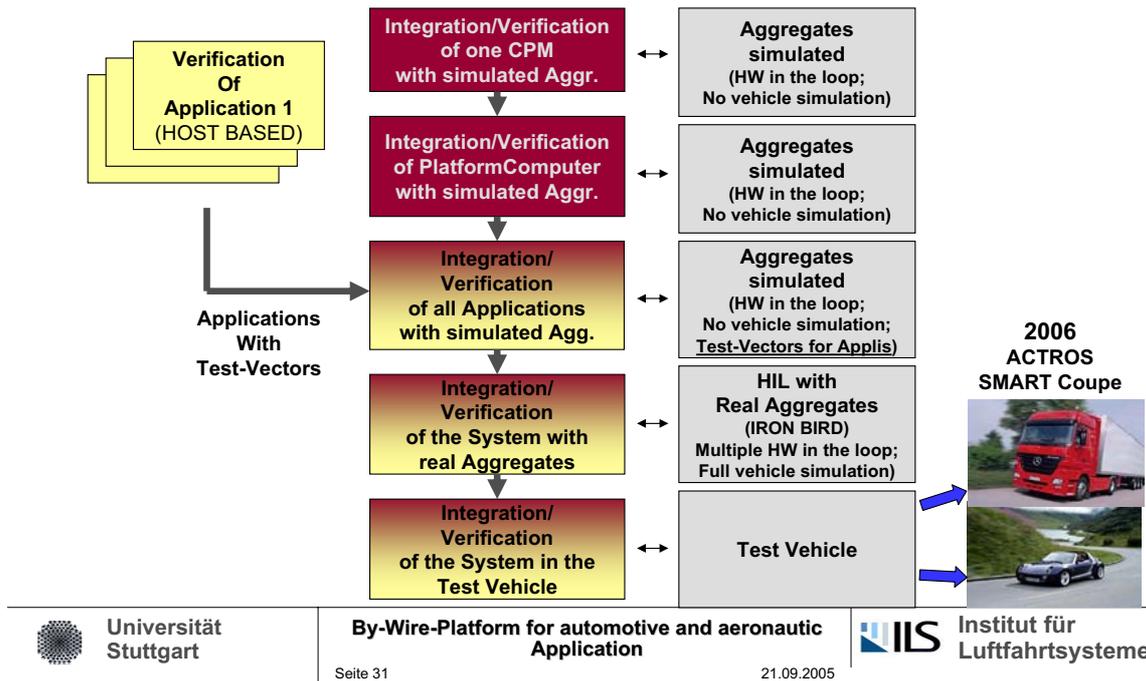
Software Structure of the CPM



Content: Automotive Application

- 1 Future Control Functions implemented in Vehicles (SPARC Program)
- 2 Platform rel. Requirements: Random Failures
- 3 Platform rel. Requirements : Design Faults, Single Point Failures
- 4 Platform rel. Requirements: Complementary Aspects and Summary
- 5 Platform: Basic Structure
- 6 Platform: Basis Operation and System Management
- 7 Platform: Functional- and SW-Structure
- 8 Application: SPARC Project and I/V-Process

Application: Integration/Verification Process



Content



1. Automotive Application

- Perspective : Future Control Application for Vehicles
- Baseline : Highly safety critical X-by-Wire Platform

2. Aeronautic Application

- Synergy : X-by-Wire Platform as Baseline for a Fly-by-Wire Platform
- Perspective : Future Control Application in the Aviation

3. Summary, Abbreviations, References

Content: Aeronautic Application

1	Platform relevant Design Requirements
2	Platform: Basic Structure
3	Perspective Applications in Low Capacity Air Transport (LCAT)
4	Easy Control System ECS



Platform rel. Requirements: Random Failures

Random Failures		
P{Cat-Event per System/ 1h Mission}	< Pmax	
FAR23/AC1309/CLASS I	: Pmax = 10 ⁻⁶	(1 fatal Accident per 10 ⁴ Fh)
FAR23/AC1309/CLASS II	: Pmax = 10 ⁻⁷	
FAR23/AC1309/CLASS III	: Pmax = 10 ⁻⁸	
FAR23/AC1309/CLASS IV oder FAR25	: Pmax = 10 ⁻⁹	(1 fatal Accident per 10 ⁶ Fh)
Remark: P{Fatal injury to an occupant/h} < 10 ⁻⁷		

Result relevant for Platform Design	
• P{Cat-Event} < 10 ⁻⁶10 ⁻⁹	for a Mission of one Hour.
• F/O-F/O-F/P	Minimum Fault Tolerance.
• C ₁ ~ 99,9x.....99,9999x[%]	Required Integrity.
• Remark:	Contrarily to Vehicles, a 1h Flight Mission can not be aborted after the first failure.



Platform rel. Requirements: Design Faults, Single Point Failures

Design Faults

- Design, Verification and Validation must be performed due a a Process accepted by the Certification Authority. The Process has to comply with SAE ARP 4754/4761, RTCA DO178, DO254.....
- Beyond this, Aircraft Manufacturer require Dissimilarity (Diversity). For absolute safety critical Systems, Dissimilarity shall ensure F/O-F/P with respect to Generic Faults.
- The manufacturing Process must be certified.
- The System must be qualified with Respect to environmental Conditions such as EMI, Lightning Strokes, Deficiencies on the Power Supply (different scenarios on Power Interrupts, Over- and Under Voltages...), Temperature, mechanical Stress....(RTCA DO160).

Single Point Failures

- No Single Point Failure is required explicitly for safety critical Systems [FAR23, FAR25]

Significant Result relevant for Platform Design

- Even if Dissimilarity might not be requested in any case, the Platform shall provide the Capability for dissimilar Realization providing F/O – F/P – Behaviour for Generic Fault.
- The Platform shall provide the Capability for high credible Dissimilarity.
- The Degree of Dissimilarity shall not depend on the Degree of Redundancy.
- The Platform must comply with the Requirement „No Single Point Failure“



Platform rel. Requirements : Other Aspects

System Reliability / Dispatchability

- Maintenance Checks: P{Unscheduled Maintenance between two 400oph-Checks} << 5%.

Significant Result relevant for Platform Design

- Dispatchability shall be given even with a Failure in the System
- Non redundant Aggregates (Actuators for Elevators, Rudder mainly) shall be built up as reliable as possible.

Complementary Aspects

Complementary Aspects concerning “Multi Applications”, “Simplex Minded Design of Applications”, Aggregates, Platform Wiring, Power Supply (Specific for small A/C), Cost are similar to those of the automotive Application.

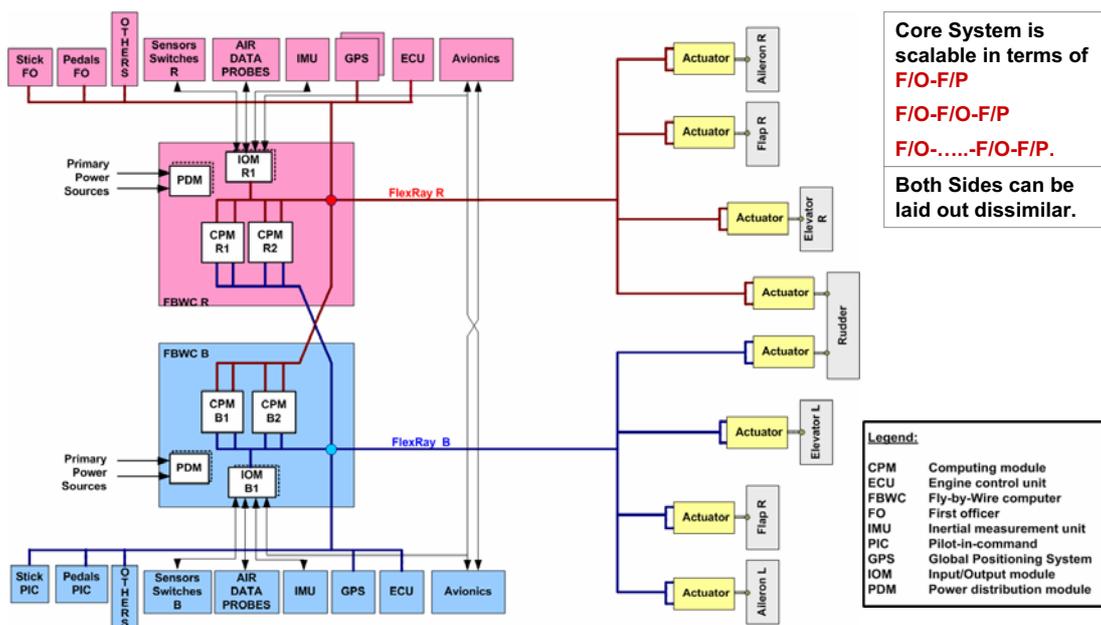


Content: Aeronautic Application

1	Platform relevant Design Requirements
2	Platform: Basic Structure
3	Perspective Applications in Low Capacity Air Transport (LCAT)
4	Easy Control System ECS



Platform: Basic Structure for a small Aircraft



Content: Aeronautic Application

1	Platform relevant Design Requirements
2	Platform: Basic Structure
3	Perspective Applications in Low Capacity Air Transport (LCAT)
4	Easy Control System ECS



LCAT: What is it?

Category of A/C	Operator	A/C Manufacturer	Capacity
Air Transport	LH, AF, BA..	Airbus, Boeing	HCAT
High End Regionals	BritAir, LH CityLine, Tyrolian..	ATR, Embraer, Bombardier	HCAT
High End Biz/Corporate	DaimlerChrysler Aviation..	Bombardier, Dassault, Airbus, ..	LCAT
Low End Regionals	NorthWest Airlink	SAAB340, Bae Jetstream	LCAT
Air Taxi	Airtaxi Europe, Sky Taxi..	Piper, Lear-Jet, Socata, Diamond, APEX (Robin), ..	LCAT
Corporate A/C	DaimlerChrysler Aviation..	Grob, Gulfstream, Cessna, Socata, Pilatus, ..	LCAT
Business A/C	Private Person, Charter	Socata, Diamond, Pilatus, Grob, APEX (Robin)....	LCAT
Instructural A/C	InterCockpit, ...	Grob, Diamond, Cessna, Piper, ..	LCAT
Personal A/C	Private Owned and Operated	Diamond, APEX, Grob, Socata, ...	Private



Perspectives of LCAT based on individual Transportation Needs

Status of individual Transportation today

- The demand on Low Capacity Transport (Individual Transport) increases due to growing internationalization affecting more and more smaller groups, companies, economic and social units.
- Growth of road traffic faces saturation.
- Distances for individual transportation will increase.

Social and economic Impact of individual Transportation

- According to the German Federal Ministry of Education and Research, the individual transportation sector is the major driving force of innovation and wealth, because of its high flexibility, efficiency and its economical importance .



Perspectives of LCAT based on individual Transportation Needs

Impact on LCAT and private Transportation

- Demand of increased LCAT.
- AGATE & SATS [13, 14] predict a significant growth potential for the LCAT market arising from future highly-efficient, highly-reliable LCAT A/C which should achieve point-to-point on-demand traffic
 - at speeds three to four times faster than highway (road) speeds and
 - approximately two times faster than using scheduled air transport traffic between major airport hubs.



Perspectives of LCAT based on individual Transportation Needs

Necessary Innovations of LCAT

- Increased Speed and Performance
- High Efficiency of the A/C
- Significant increased Safety
 - LCAT operate mainly according to FAR Part 91
 - Airlines operate according to FAR Part 121
FAR 121 provides significantly higher safety than FAR 91
- Easy Control Characteristics incl. autonomous Flight Capability in Cases of Emergency



Content: Aeronautical Application

- 1 Platform relevant Design Requirements
- 2 Platform: Basic Structure
- 3 Perspective Applications in Low Capacity Air Transport (LCAT)
- 4 Easy Control System ECS



Innovations of LCAT by ECS (Easy Control System)

Easy Control System

- Increased Speed / Performance / Efficiency by full time active Control- and Monitor Functions
- Increased Safety by full Flight Envelop Protection
- Easy Control Characteristics based on
 - Integrated Flight Control & Guidance Functions
 - Autonomous Flight Capability in Cases of Emergency
 - Simplified Cockpit HMI (Human Machine Interface)



ECS: Main Characteristics

Functional Characteristics of the ECS

- Easy and safe control of the aircraft in all phases in flight and on ground (Start, Take Off, Climb, Cruise, Descend, Approach, Landing, Roll Out, Taxing)
 - The Pilot shall not see the complexity of the system (Complexity is transparent to him even in cases of failures); this ensure low training efforts
 - The Pilot controls the aircraft by intuitive commands via the Stick and Power Lever (incl. all auto-flight modes); this ensures easy control
 - In static flight phases inputs will be interpreted as guidance inputs
 - In dynamic flight phases stick inputs will be interpreted as flight control commands
 - Switching between "Guidance and Control Modes" will be performed automatically
 - Flight Envelope Protection ensures carefree control
- When data link based ATC will be introduced, the Pilot can "engaged" the routes directly into the full authority flight control system to be executed there automatically
- In cases of emergency (pilot collapse, total loss of engine power), ECS provides autonomous control capability incl. full auto land without any external aids.

Resume

- The aircraft can be controlled in an easy and safe way.
- The Pilot can focus on the Air Traffic, Air Traffic Control and Navigation.
- The Pilot can participate on advanced Air Traffic control and new Free Flight Technique.
- Single Pilot operation is possible.



	Roll Axis	Yaw Axis	Pitch Axis	Thrust/Speed
Taxi	Active Stabilization	SC: Small lateral deflection & guidance mode	Introduction of rotation by SC after V_R	Power demand via throttle position
		Heading rate demand		
		SC: Big lateral deflection or manoeuvring mode		
		Lateral-acceleration and yaw rate demand		
Take Off Run	see Taxi	see Taxi	see Taxi	see Taxi
Take Off	o	o	o	o
In Flight (Climb, Cruise, Descent, Approach)	SC: Small lateral deflection & guidance mode		SC: Small longitudinal deflections (guidance mode)	Power/Speed demand via throttle position
	No change of roll attitude	Heading/Tracking rate demand	VS-/Flight path angle rate demand	
	SC: Big deflection or manoeuvring mode			
	SC lateral deflection: roll rate demand	Side slip angle = 0	SC longitudinal deflection: N_z -demand	
Landing (Flare and Alignment)	SC: Small lat. deflection & guidance mode		SC: AOA- / N_z -demand	Throttle in idle
	Heading rate demand			
	SC: Big deflection or manoeuvring mode			
	SC lateral deflection: roll rate demand	Side slip angle = 0		
Roll Out	see Taxi	see Taxi	see Taxi	see Taxi

**ECS:
Abstract of
Guidance-
/Control-
Functions
(Simplified)**



Universität
Stuttgart

By-Wire-Plattform für automotive and aeronautic
Application

Seite 47



Institut für
Luftfahrtsysteme

21.09.2005

Content

1. Automotive Application

- Perspective : Future Control Application for Vehicles
- Baseline : Highly safety critical X-by-Wire Platform

2. Aeronautic Application

- Synergy : X-by-Wire Platform as Baseline for a Fly-by-Wire Platform
- Perspective : Future Control Application in the Aviation

3. Summary, Abbreviations, References



Universität
Stuttgart

By-Wire-Plattform für automotive and aeronautic
Application

Seite 48



Institut für
Luftfahrtsysteme

21.09.2005

Summary



- Functions providing safe, easy and partially automatic Control Characteristics imply safety critical, reliable and low Cost X-by-Wire Platforms for automotive Vehicles.
- A Platform providing this Features is developed in the Frame of the EU-Projects PEIT and SPARC.
- As the X-by-Wire Platforms are scalable in terms of safety, Performance and Aggregates, they can be applied as Fly-by-Wire Platforms in the Aviation.
- The new low Cost Fly-by-Wire Platform provides the Baseline for an “Easy Control System” for LCAT Aircraft.
- This innovative LCAT may contribute substantially to meet the increased Amount of individual Transportation in future .



List of Abbreviations

A/C	Aircraft	LCAT	Low Capacity Air Transport
AOA	Angle of Attack	LH	Lufthansa
ATC	Air Traffic Control	N/A	Not Applicable
BIT	Built In Test	NFF	No Fault Found
Cat	Catastrophic	NOP	Normal Operation
CPM	Computing Module	N _z	Load Factor
DC	Decision Control Function	oph	Operating Hours
DCC	Decision Control Computation	P	Probability
EBS	Electric Brake System	PDM	Power Distribution Module
EMI	Electro-magnetic Interference	PT	Power Train Function
ECS	Easy Control System	PTC	Power Train Control
ESP	Electronic Stability Programme	SC	Stick Controller
F	System failed	sPC	small Passenger Car
FAR	Federal Aviation Regulation	VS	Vertical Speed
F/O	Fail/Operational		
F/P	Fail/Passive		
HGV	Heavy Goods Vehicle		
HIL	hardware in the Loop		
HMI	Human Machine Interface		
IOM	Input Output Module		
JAR	Joint Aviation Requirements		



References

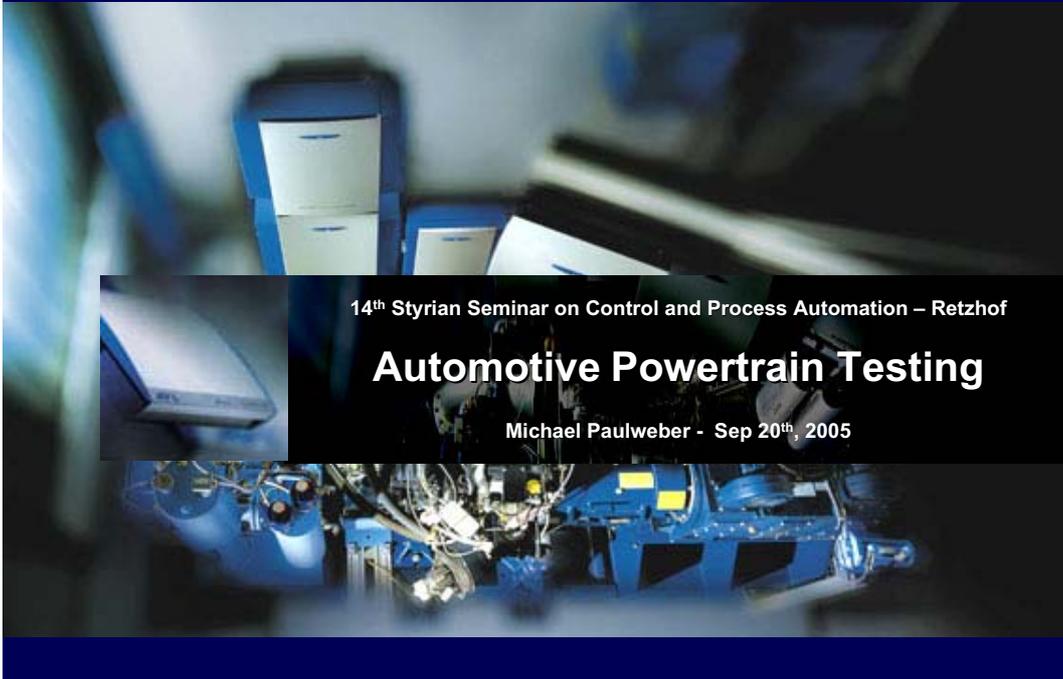
- [1] Gernot Spiegelberg, Ansgar Maisch, Armin Sulzmann.
Intelligentes Fahrzeugkonzept auf Basis Drive-by-Wire – Umsetzungsschritte in den EU-Projekten PEIT und SPARC.
Automatisierungs- und Assistenzsysteme für Transportmittel. 5th Braunschweiger Symposium. February 17th – 18th, 2004. Braunschweig.
- [2] Armin Sulzmann, Gernot Spiegelberg, Frederik Holzmann.
Increasing of preventive active safety incl. MMI and virtual drive –Goals and state of the development in the EU-project SPARC.
AAET 2005. Automation, Assistance and imbedded real time Platforms for Transportation. 6th Braunschweig Conference. February 16th – 17th, 2005. Braunschweig.
- [3] Jürgen Lehold.
Die elektrische Infrastruktur für zukünftige Fahrerassistenzsysteme.
Automatisierungs- und Assistenzsysteme für Transportmittel. 5th Braunschweiger Symposium. February 17th – 18th, 2004. Braunschweig.
- [4] Statistisches Bundesamt: Ursachen von Straßenverkehrsunfällen. www.destatis.de
- [5] Joint Aviation Authorities Committee. ACJ No.4 to JAR 25.1309, Global Engineering Documents, 01.05.03, Amdt.16.
- [6] Radio Technical Commission for Aeronautics.
DÖ178B, Software Considerations in Airborne Systems and Equipment Certification, RTCA, 01.12.1992.
- [7] Radio Technical Commission for Aeronautics. DO/254, Design Assurance Guidance for Airborne Electronic Hardware, RTCA, 19.04.2004.



References

- [8] IEC - International Electrotechnical Commission
www.iec.ch
- [9] HIS – Herstellerinitiative Deutschland
www.automotive-HIS.de
- [10] AUTOSAR – Automotive Open System Architecture
www.autosar.org
- [11] MISRA – Motor Industrie Software Reliability Association
www.misra.org.uk
- [12] Verkehrsbericht 2000 – Integrierte Verkehrspolitik: unser Konzept für eine mobile Zukunft. Published by the German federal ministry of education and research. 2000.
- [13] Advanced general aviation transport experiment (AGATE)
- [14] Small aircraft transportation system (SATS)





14th Styrian Seminar on Control and Process Automation – Retzhof

Automotive Powertrain Testing

Michael Paulweber - Sep 20th, 2005

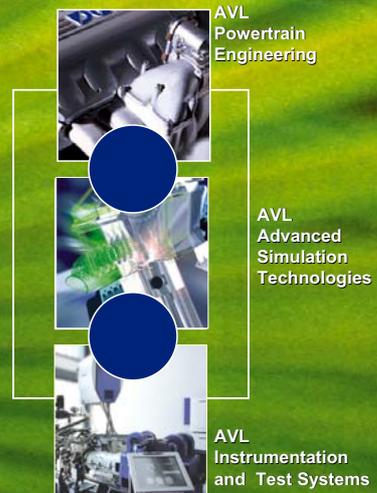
Content

- ◆ Overview AVL
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ Summary

- ◆ **Overview AVL**
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ Summary

AVL List GesmbH headquarter is located in Graz, Austria ...

- ◆ **AVL is the world's largest private and independent company developing power train systems with combustion engines along with instrumentation and test systems.**
- ◆ **AVL has engineering and testing know-how for the entire development process.**
- ◆ **AVL is partner to all OEMs and automotive supply industry**
- ◆ **AVL is worldwide market leader in automotive test equipment business**



AVL covers all customer segments in automotive area ...



PE - Testbed Automation System Development



passenger cars 2-wheelers racing



construction agriculture commercial vehicle



locomotive marine power plants



AVL Powertrain Engineering



AVL Advanced Simulation Technologies

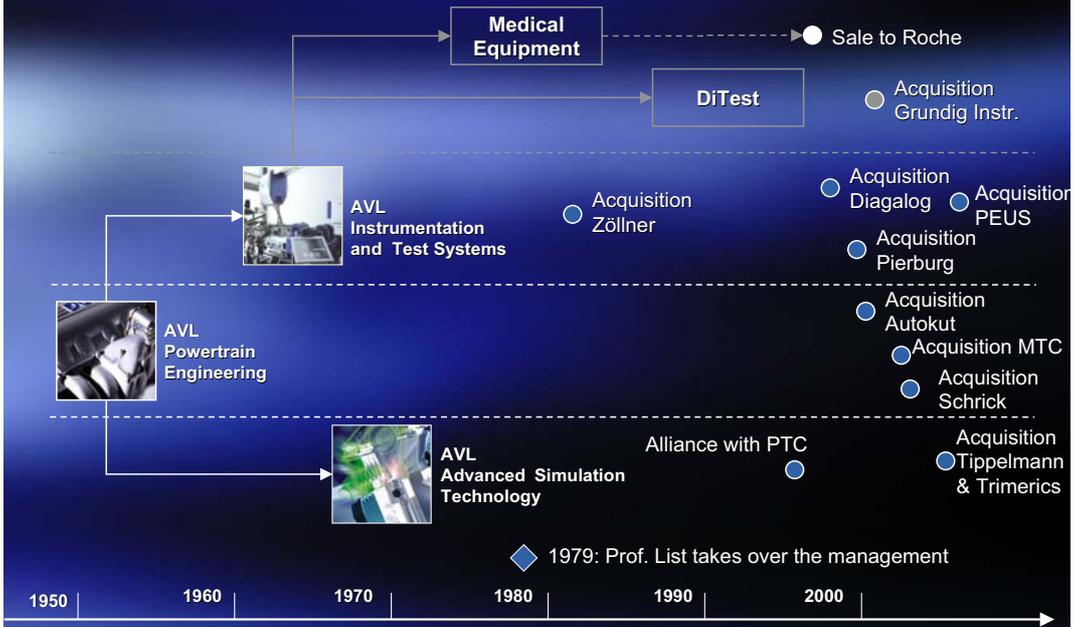


AVL Instrumentation and Test Systems

AVL's company development started in 1948 by Prof.DDr.Hans List ...



PE - Testbed Automation System Development



AVL Instrumentation division covers powertrain and vehicle testing ...



PE - Testbed Automation System Development



AVL
Instrumentation
and Test Systems

Emission testing

- Acquisition PEUS
- Acquisition Pierburg

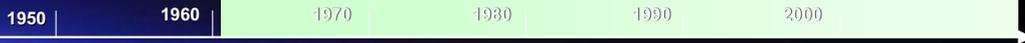
Powertrain testing

- Acquisition Zöllner

Vehicle testing

- Acquisition Diagalog

Combustion engine testing



AVL turnover grew more than 10 times during the last 20 years ...



PE - Testbed Automation System Development



Total growth :

1984: 40 Mio €

2004: 471 Mio €

Total increase in employees:

1984: 560

2004: 3300

Average R&D spending:

10 % of turnover

Average export quota:

96 % of turnover

Instrumentation & Test Systems delivers everything needed to test automotive powertrain components ...



PE - Testbed Automation System Development

- ◆ Comprehensive technology for testing engines, gearboxes, transmissions and vehicles
 - ◆ Test bed systems
 - ◆ Instrumentation & diagnostics
 - ◆ Optimization technology
- ◆ Product innovations through close collaboration with pilot customers
- ◆ Maximum accessibility via comprehensive service offering



AVL is a worldwide partner to the automotive industry ...

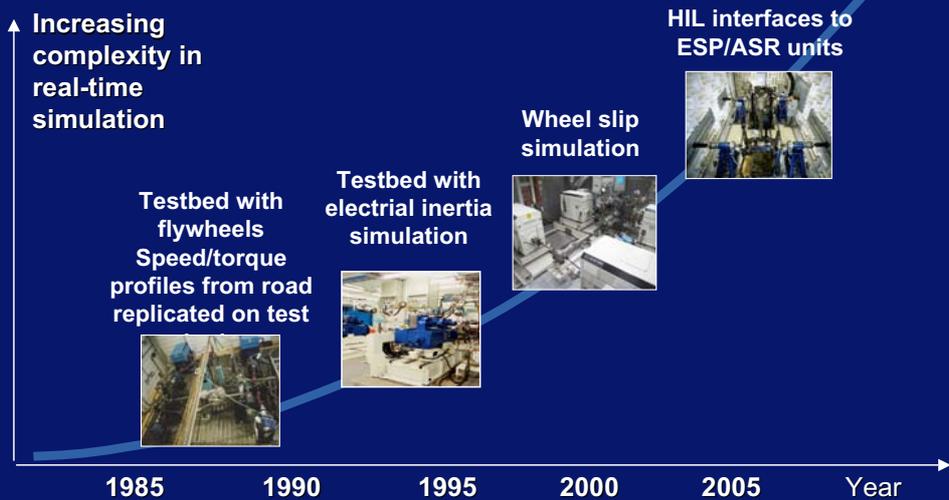


PE - Testbed Automation System Development



- ◆ Overview AVL
- ◆ **History of powertrain testing**
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ Summary

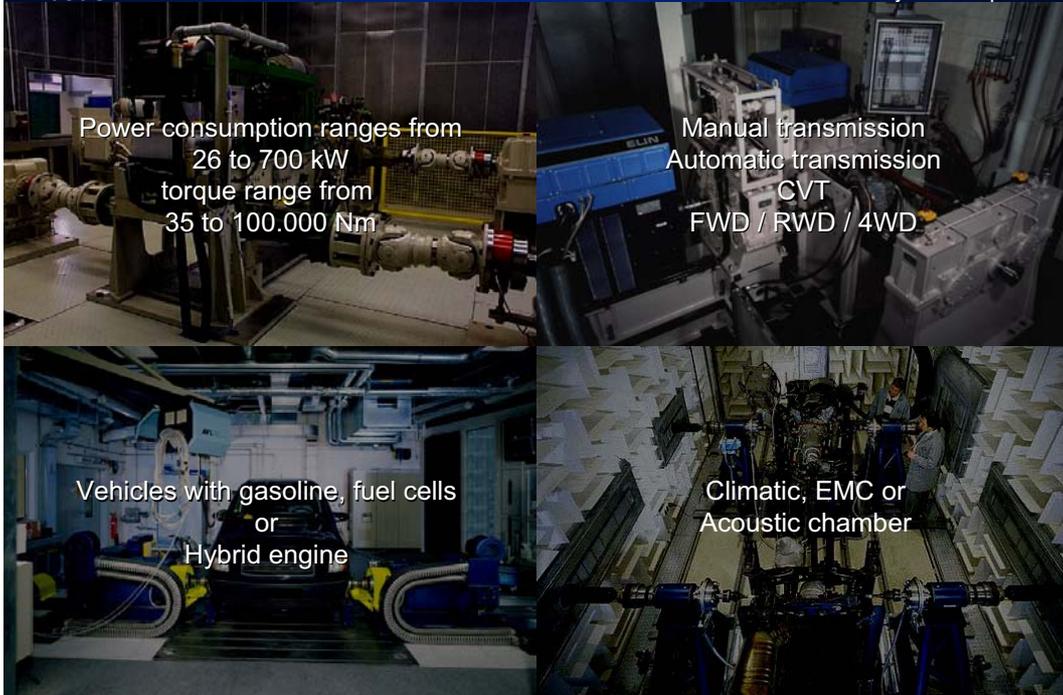
Power distribution systems define requirements for Powertrain Test beds ...



Examples of power train test beds ...

AVL

PE - Testbed Automation System Development



Content

AVL

PE - Testbed Automation System Development

- ◆ Overview AVL
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ **Requirements in powertrain testing**
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ Summary

Trends in automotive industry influence also power train testing ...



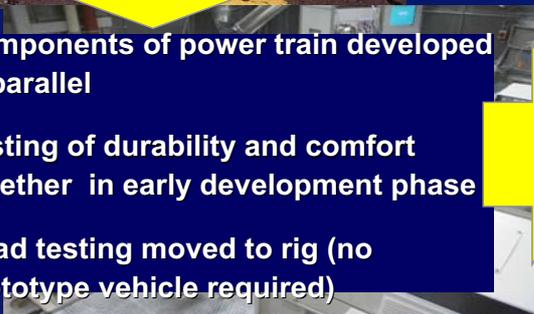
PE - Testbed Automation System Development



- ◆ Reduction of development time
- ◆ Reduction of development costs
- ◆ Increase in comfort and life time
- ◆ Reduction of emissions and fuel consumption



- ◆ Components of power train developed in parallel
- ◆ Testing of durability and comfort together in early development phase
- ◆ Road testing moved to rig (no prototype vehicle required)

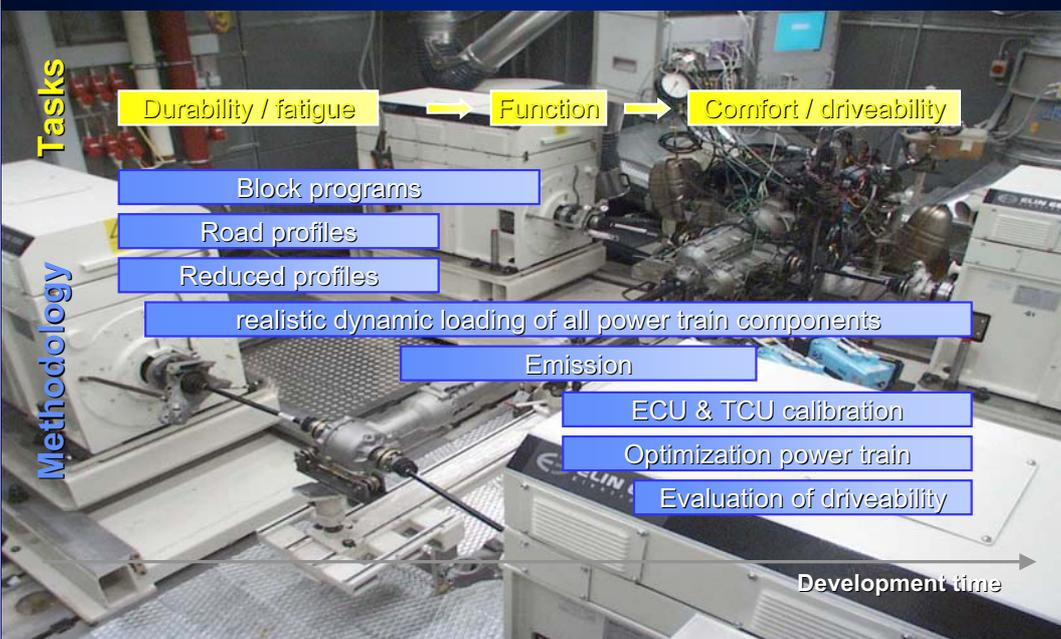


- ◆ Correct load distribution required
- ◆ Test of mechanical components together with control units

Different test tasks require necessary test methodology ...



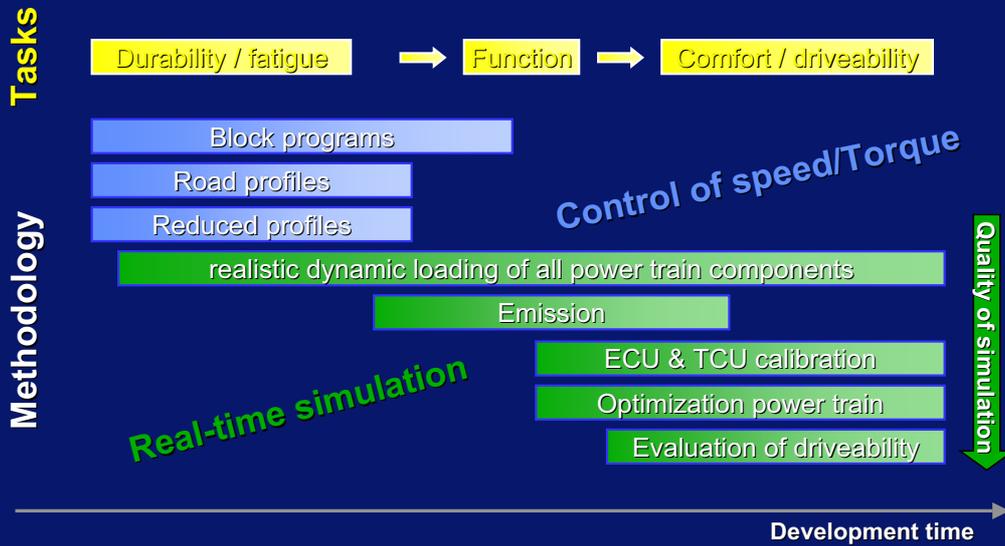
PE - Testbed Automation System Development



Different test tasks require necessary test methodology ...



PE - Testbed Automation System Development



Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 17

Conventional power train test beds have some drawbacks ...



PE - Testbed Automation System Development



Conventional power train test beds with flywheels or electrical simulation of inertia do not simulate drive train behavior correctly (too „stiff“)

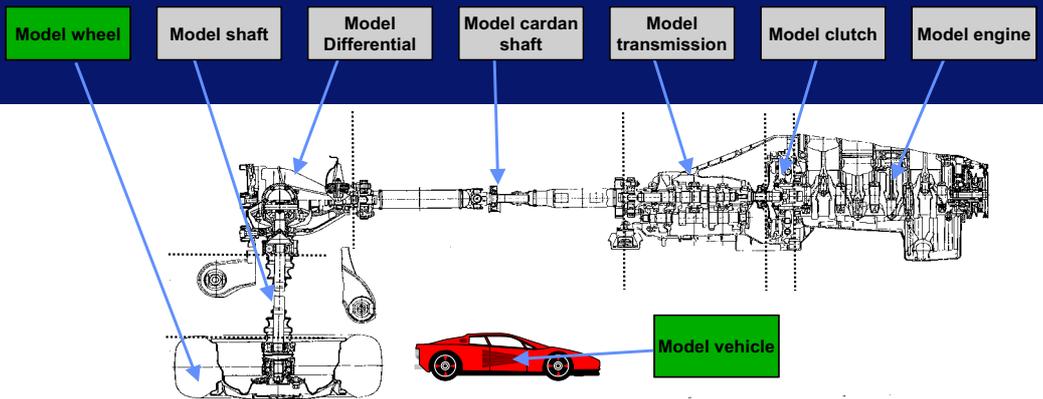
- ◆ No realistic damping, because vehicle mass (inertia of input dyno) is coupled stiff to the axle shafts (inertia of output dynos)
- ◆ No realistic curve simulation → speed difference is enforced to unit under test
- ◆ No realistic torque distribution → enforced to unit under test

Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 18

- ◆ Overview AVL
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ **Simulation of slipping wheel**
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ Summary

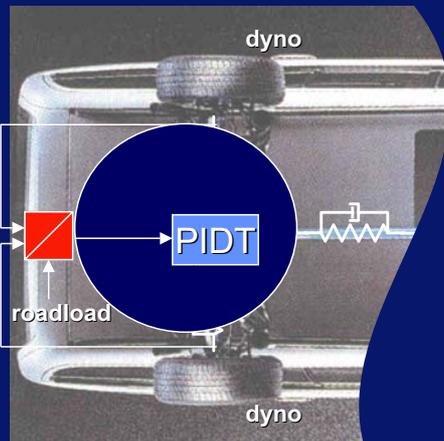
Drive train simulated in modules ...



Simple simulation model has limitations ...



PE - Testbed Automation System Development



- ◆ Vehicle modeled as single mass
- ◆ Set value: vehicle speed (average of 4 wheels) and road description
- ◆ Difference speed or torque (front/rear, left/right) enforced to unit under test
- ◆ Speed controller parameters define damping of system
- ◆ Likely to get oscillations between wheel dynos

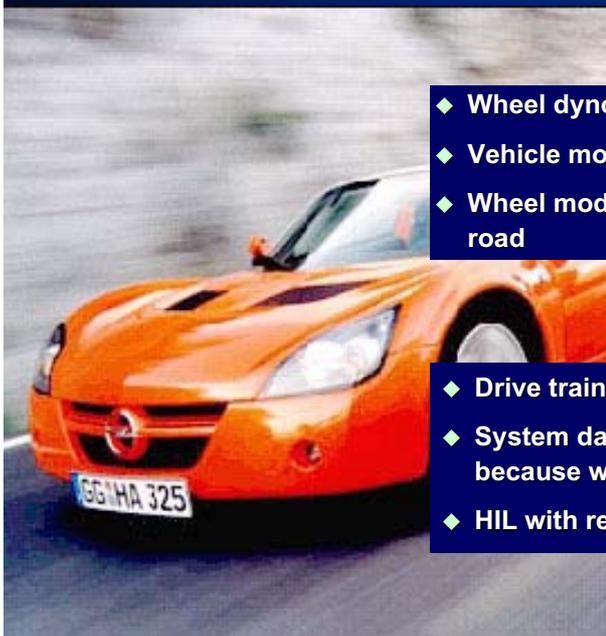
Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 21

More complex simulation model for wheel slip simulation tests required ...



PE - Testbed Automation System Development



- ◆ Wheel dyno inertia similar to wheel inertia
- ◆ Vehicle model calculates velocity
- ◆ Wheel model delivers force between wheel and road



- ◆ Drive train reacts similar to vehicle on road
- ◆ System damping and frequency as in vehicle, because wheel – road contact simulated
- ◆ HIL with real ABS, ESP system possible

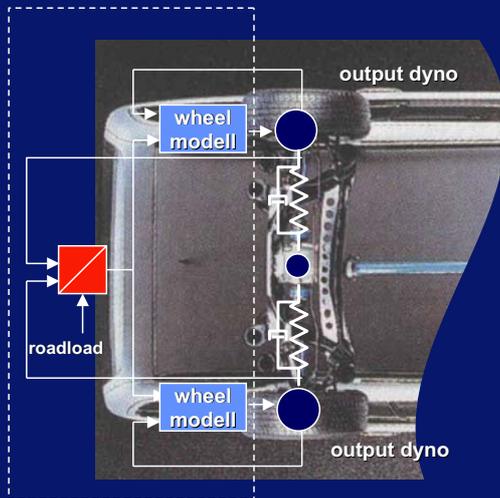
Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 22

More complex simulation model has several advantages ...



PE - Testbed Automation System Development



Simulation and control

- Realistic eigenfrequency and damping of drive train
- Realistic load distribution between wheels
- Realistic load for differential gearbox and Visco clutch
- Realistic start from rest
- Start with slipping wheels (racing cars)

→ Low inertia dynos required: PMM

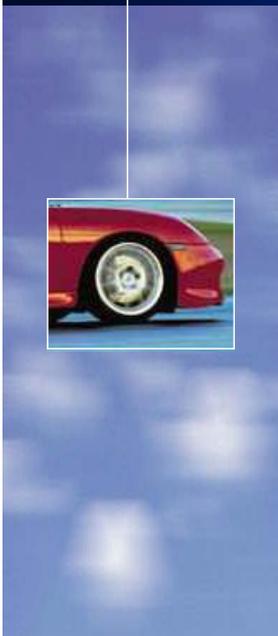
→ Dyno not stiff any more → special controller required

→ Rotor notches induce additional disturbance → compensation necessary

Wheel model

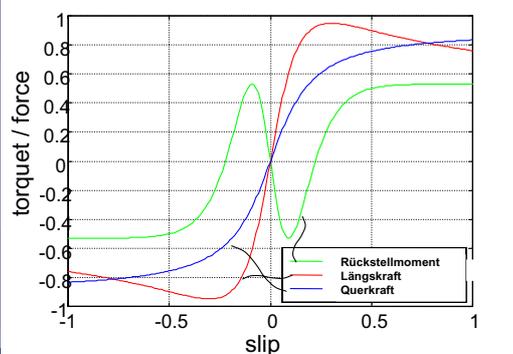


PE - Testbed Automation System Development



- Nonlinear function between vehicle speed, slip, torque, forces, ...

$$\mu = D \cdot \sin \left(C \cdot \arctan \left(B \cdot (1 - E) \cdot (\lambda + S_p) + \left(\frac{E}{B} \cdot \arctan \left(B \cdot (\lambda + S_p) \right) \right) \right) \right)$$



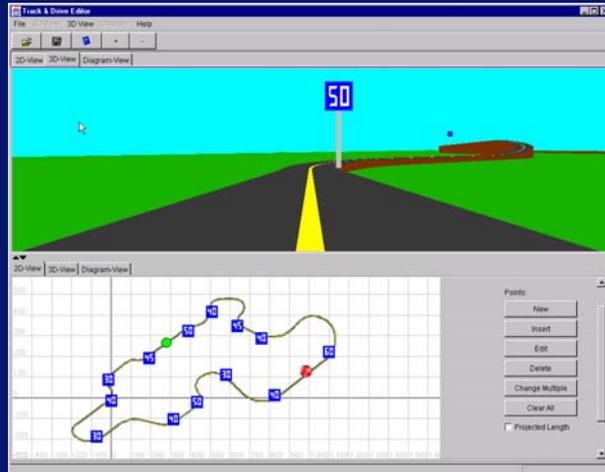
Road profile editor defines test run ...



PE - Testbed Automation System Development

... Three dimensional description of track

... Graphical configuration of driver commands by placing traffic signs along the track



First all wheel drive test beds with wheel slip simulation ...



PE - Testbed Automation System Development



Customer:
Porsche
Weissach

Build:
2002

Dynos:
4 x ASM

Wheel slip simulation:
yes

First all wheel drive test beds with wheel slip simulation with PMM ...



PE - Testbed Automation System Development



Customer:
VOLVO Car
Gothenbog

Build:
2003

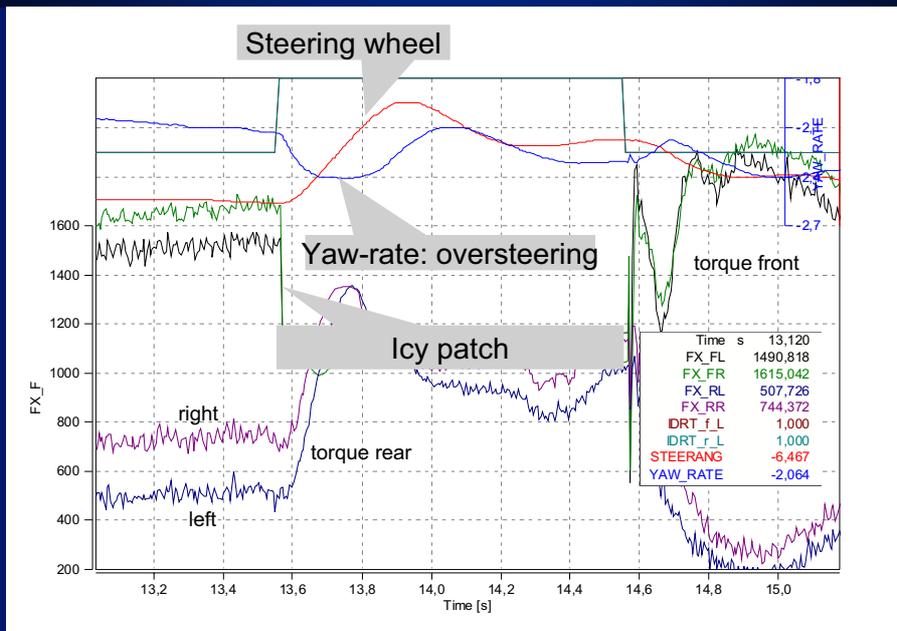
Dynos:
4 x PMM

Wheel slip simulation:
yes

Example of maneuver: acceleration in curve on icy road



PE - Testbed Automation System Development



Examples



PE - Testbed Automation System Development



Customer:
John Deere

Build:
2002

Dynos:
4 x ASM

Wheel slip simulation:
no

Examples



PE - Testbed Automation System Development



Customer:
Opel GAWC

Build:
2000

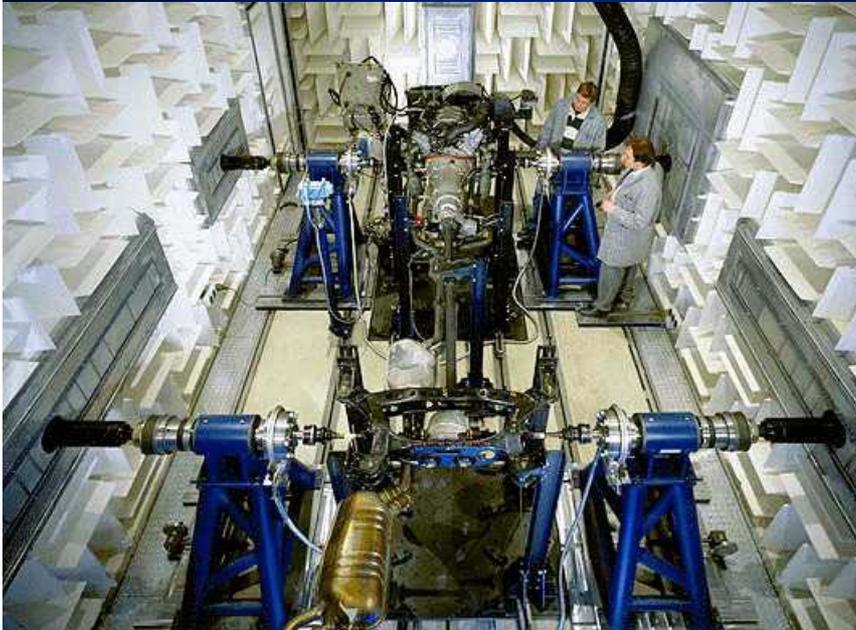
Dynos:
4 x ASM

Wheel slip simulation:
no

Examples



PE - Testbed Automation System Development



Customer:
ACC Graz

Build:
2001

Dynos:
4 x ASM

Wheel slip simulation:
No

Environment:
Accoustic chamber

Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 31

Content



PE - Testbed Automation System Development

- ◆ Overview AVL
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ **Formula 1 test beds**
- ◆ Summary

Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 32



Racing customers have specific requirements ...



- ◆ Development (and validation) of strategy for traction control (ECU, TCU together with complete drive train tested under racing conditions by rallye sport customer)
- ◆ Development (and validation) of strategy for launch control in *Engine Only* and *Powertrain* configurations (F1, rallye sport)
- ◆ Durability tests with traction control

Complexity of model varies depending on test applications ...



PE - Testbed Automation System Development



- **1-D Model:**
Wheel and slip simulation for straight track
→ development of strategies for launch control (clutch and engine controlled by ECU)



- **2-D Model:**
Wheel and slip simulation with simulated radial forces



- **3-D Model:**
Wheel, slip, radial and vertical forces at wheel suspension simulated
(distribution of weight due to changes in road grade shown)

Sep 2005 © AVL PT, PR, PP, PE

Page 35

Examples for Formula 1 test beds ...



PE - Testbed Automation System Development



TOYOTA Formula 1
Engine / Powertrain Test Bed

Examples for Formula 1
test beds ...



TOYOTA Formula 1
Engine / Powertrain Test Bed

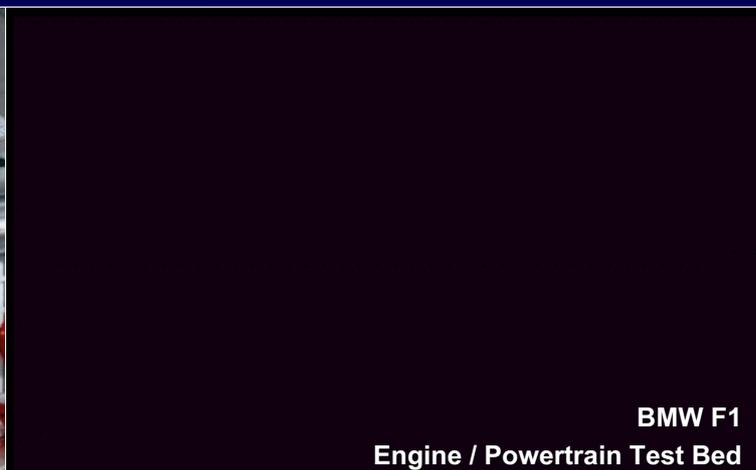


BMW F1
Engine / Powertrain Test Bed

Examples for Formula 1
test beds ...



TOYOTA Formula 1
Engine / Powertrain Test Bed



BMW F1
Engine / Powertrain Test Bed

Other F1 teams using AVL test technologies: Ferrari,
DaimlerChrysler, Renault, Honda,
Sauber, ...

- ◆ Overview AVL
- ◆ History of powertrain testing
- ◆ Requirements in powertrain testing
- ◆ Simulation of slipping wheel
- ◆ Formula 1 test beds
- ◆ **Summary**



Power train test beds require increasing real-time simulation

Model complexity increases due to interfaces to various control units (launch control, ESP, ABS, ...)

Low inertia dyno (with up to 150.000 Upm/s acceleration) need special control algorithms