Zusatzmaterial zu Kapitel 6

1 Zu Kapitel 6.2: „Methoden zur Stabilitätsprüfung”

1.1 Einleitung

Bei der Feststellung der asymptotischen Stabilität (siehe Kapitel 6.1.3) bzw. der BIBO-Eigenschaft (siehe Kapitel 6.1.4) geht es prinzipiell darum, ob ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, also

$$\Delta_n(s) := a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{1}$$

ausschliesslich Nullstellen in der offenen linken s-Halbebene besitzt, und damit ein sogenanntes *Hurwitz*-Polynom ist.

Zur Erinnerung: Mit Hilfe des *Routh*- bzw. *Hurwitz*-Kriteriums kann man *ohne* Ermittlung der Nullstellen des Polynoms $\Delta_n(s)$ entscheiden, ob $\Delta_n(s)$ ein *Hurwitz*-Polynom ist! Es handelt sich dabei um algebraische Tests, bezogen auf die Koeffizienten des vorliegenden Polynoms. Die zu erfüllenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind (i.a. nichtlineare) Ungleichungen bezüglich der Koeffizienten a_i. Zur Formulierung des *Routh*- bzw. des *Hurwitz*-Kriteriums betrachtet man folgende zwei Polynome:

$$\begin{aligned} \delta_n(s) \;&:= a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-4}s^{n-4} + \ldots \\ \delta_{n-1}(s) \;&:= a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + a_{n-5}s^{n-5} + \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Sie enthalten jeweils die geraden bzw. ungeraden Potenzen von s des Polynoms $\Delta_n(s)$.

1.2 Stabilitätsprüfung anhand einer Kettenbruch-Entwicklung

Hierbei geht es um ein einprägsames und leicht durchzuführendes Verfahren, um zu entscheiden, ob $\Delta_n(s)$ ein *Hurwitz*-Polynom ist. Ausgehend von den Polynomen $\delta_n(s)$ und $\delta_{n-1}(s)$ nach (2) bildet man den Quotienten

$$\frac{\delta_n(s)}{\delta_{n-1}(s)}.$$

Diesen entwickelt man nun in einen sogenannten Kettenbruch:

$$\frac{\delta_n(s)}{\delta_{n-1}(s)} = \alpha_1 s + \cfrac{1}{\alpha_2 s + \cfrac{1}{\alpha_3 s + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_n s}}}} \tag{3}$$

Das bedeutet, man ermittelt durch fortlaufende Division die n Kettenbruchfaktoren α_i.
Es gelten folgende Aussagen:

1) $\Delta_n(s)$ ist genau dann ein *Hurwitz*-Polynom, wenn *alle* Kettenbruchfaktoren α_i positiv sind, d.h.

$$\alpha_i > 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

2) Falls *kein* α_i gleich Null ist, gibt die Anzahl der *positiven* Kettenbruchfaktoren die Anzahl der Nullstellen von $\Delta_n(s)$, die einen negativen Realteil besitzen an.

1.2.1 Beispiel

Wir betrachten folgendes Polynom 4. Grades

$$\Delta_4(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 2.$$

Hieraus bilden wir die Polynome nach (2):

$$\begin{aligned} \delta_4(s) &= 2s^4 + 3s^2 + 2 \\ \delta_3(s) &= s^3 + s. \end{aligned}$$

Für den Quotienten $\dfrac{\delta_4(s)}{\delta_3(s)}$ ergibt sich dann folgende Kettenbruchentwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_4(s)}{\delta_3(s)} &= \frac{2s^4 + 3s^2 + 2}{s^3 + s} = 2s + \frac{s^2 + 2}{s^3 + s} = 2s + \cfrac{1}{\cfrac{s^3 + s}{s^2 + 2}} \\ &= 2s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\cfrac{s^2 + 2}{-s}}} = 2s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{-s + \cfrac{1}{-0.5s}}}. \end{aligned}$$

Das heißt:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = -0.5 \ .$$

Daraus folgt: $\Delta_4(s)$ ist kein *Hurwitz*-Polynom. Es besitzt 2 Nullstellen in der linken offenen s-Ebene, da 2 Koeffizienten α_i positiv sind.

1.2.2 Beispiel

Wir betrachten das Polynom 3. Grades

$$\Delta_3(s) = s^3 - 4s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s+1)(s-3).$$

Wir entwickeln den Quotienten

$$\frac{\delta_3(s)}{\delta_2(s)} := \frac{s^3 - 5s}{4s^2 + 6}$$

in einen Kettenbruch:

$$\frac{s^3 - 5s}{4s^2 + 6} = \frac{1}{4}s + \frac{-6.5s}{4s^2 + 6} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{\frac{4s^2+6}{-6.5s}} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{-\frac{8}{13}s + \frac{1}{-13/12s}}.$$

Das Polynom ist kein *Hurwitz*-Polynom und besitzt 1 Nullstelle in der linken offenen s-Ebene.

1.2.3 Zwei Hinweise

- Die Ermittlung der Koeffizienten α_i entspricht der Auswertung zweireihiger Determinanten und ist äquivalent der Vorgehensweise bei der Erstellung des *Routh*-Tableaus.
- Die entwickelte Form des Quotienten $\frac{\delta_n(s)}{\delta_{n-1}(s)}$ nach (3) entspricht der Reaktanzzweipolfunktion einer Schaltung in der sogenannten 1. *Cauer*-Form. Bei positiven Faktoren α_i liegen aufgrund des Reaktanzsatzes von *Cambell* und *Foster* die Null- und Polstellen der Übertragungsfunktion $\frac{\delta_n(s)}{\delta_{n-1}(s)}$ *auf* der imaginären Achse. Ferner liegen diese symmetrisch zum Nullpunkt und wechseln sich gegenseitig ab.

1.3 Eine Stabilitäts-Normalform

Die sogenannte *Schwarz*-Matrix besitzt die Form

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

wobei β_i reelle Parameter sind. Man beachte, dass jede nichtderogatorische (n,n)-Matrix[1] mittels einer regulären Transformation in diese Form gebracht werden kann. Zur Erinnerung: eine (n,n)-Matrix heisst nichtderogatorisch, wenn deren Minimalpolynom den Grad n hat. Ein Beispiel hierfür ist eine Matrix in Begleitform. Es gilt folgender Satz:

Unter der Voraussetzung, dass *alle* Parameter verschieden von Null sind, d.h.

$$\beta_i \neq 0 \qquad i = 0, ..., n-1$$

gilt, ist die Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{S}$, die einen negativen Realteil besitzen, gleich der Anzahl der positiven Werte der Zahlenfolge

$$\beta_{n-1},\ \beta_{n-1}\beta_{n-2},\ \beta_{n-1}\beta_{n-2}\beta_{n-3},\ \dots,\ \beta_{n-1}\beta_{n-2}\beta_{n-3}\cdots\beta_0 \quad . \tag{5}$$

Es leuchtet dann ein, dass das charakteristische Polynom $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{S})$ der Matrix $\mathbf{S}$ genau dann ein *Hurwitz*-Polynom ist, wenn die Ungleichungen

$$\beta_i > 0 \qquad\qquad i = 0, ..., n-1$$

gelten!

[1] Zur Erinnerung: eine (n,n)-Matrix heisst nichtderogatorisch, wenn deren Minimalpolynom den Grad n hat. Ein Beispiel hierfür ist eine Matrix in Begleitform.

Wird demnach ein System durch
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Sx}$$
beschrieben, so kann aufgrund des Vorzeichens der Parameter auf asymptotische Stabilität, bzw. Instabilität geschlossen werden. Man beachte, dass - im Gegensatz (!) zur Diagonalform - *keine* Voraussetzungen bezüglich der Vielfachheit der Eigenwerte der Systemmatrix nötig sind.

1.3.1 Bemerkungen

Die nachfolgenden Ausführungen sollen dem Verständnis des oben formulierten Satzes dienen und existierende Verbindungen zum klassischen *Hurwitz*- Stabilitätskriterium aufzeigen. Es wird nun angenommen, dass beim Polynom $\Delta_n(s)$ nach Gleichung (1) der Koeffizient a_n der Potenz s^n gleich Eins ist. Dies stellt zweifellos *keine* Einschränkung der Allgemeinheit dar. Damit erhalten wir nach (2) die Polynome:

$$\begin{aligned}
\delta_n(s) \quad &: \quad = s^n + a_{n-2}s^{n-2} + a_{n-4}s^{n-4} + \ldots \\
\delta_{n-1}(s) \quad &: \quad = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + a_{n-5}s^{n-5} + \ldots .
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Bei der Formulierung des *Hurwitz*-Kriteriums benutzt man die Polynome $\delta_{n-1}(s)$ und $\delta_n(s)$ und bildet folgende quadratische (n,n)-Matrix $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \cdots \\
1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \cdots \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\
0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0
\end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a_{n-i} = 0 \text{ für } \; n-i < 0.$$

Man betrachtet nun alle n „nordwestlichen” Unterdeterminanten

$$H_1 := a_{n-1},$$

$$H_2 := \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$H_3 := \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \cdots, H_n := \det(\mathbf{H})$$

Nach dem *Hurwitz*-Kriterium ist $\Delta_n(s)$ genau dann ein *Hurwitz*-Polynom, wenn *alle* n „nordwestlichen” Unterdeterminanten $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ positiv sind.

Unter der Voraussetzung, dass $H_1, H_2, \ldots, H_n$ verschieden von Null sind, bildet man n reelle Zahlen β_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ nach folgender Vorschrift:

$$\begin{aligned}
&\beta_{n-1} := H_1 \quad ; \quad \beta_{n-2} := \frac{H_2}{H_1} \quad ; \quad \beta_{n-3} := \frac{H_3}{H_1 H_2} \\
&\beta_{n-\nu} = \frac{H_{\nu-3}H_\nu}{H_{\nu-2}H_{\nu-1}} \qquad \nu = 4, \ldots, n \ .
\end{aligned} \tag{6}$$

Mit deren Hilfe erzeugt man folgende (n, n)-Matrix

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & ... & -\beta_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Es gilt dann: Die Matrix $\mathbf{S}$ besitzt $\Delta_n(s)$ als charakteristisches Polynom, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{S}) = \Delta_n(s)\,. \tag{7}$$

Aufgrund der Beziehung (7) leuchtet folgender Satz ein: Das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{S}$ ist genau dann ein *Hurwitz*-Polynom, wenn

$$\beta_i > 0$$

gilt!

Beispiel: Wir betrachten das Polynom 4. Grades

$$\Delta_4(s) = s^4 + \frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s + 1$$

und konstruieren die zugehörige *Schwarz*-Matrix $\mathbf{S}$. Hierzu bilden wir die zugehörigen *Hurwitz*-Determinanten:

$$H_1 := 0.5,$$

$$H_2 := \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1.5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4},$$

$$H_3 := \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8},$$

und

$$H_{4:=} \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 \end{vmatrix} = 1H_3 = -\frac{1}{8}.$$

Nachdem H_3 negativ ist, ist das betrachtete Polynom kein *Hurwitz*-Polynom.

Wir wollen nun die *Schwarz*-Matrix berechnen: hierzu bilden wir die reellen Zahlen β_i $(i = 0, \ldots, 3)$ nach der Vorschrift (6):

$$\beta_3 := H_1 = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \beta_2 := \frac{H_2}{H_1} = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \beta_1 := \frac{H_3}{H_1 H_2} = -1$$

$$\beta_0 = \frac{H_1 H_4}{H_2 H_3} = 2.$$

Die *Schwarz*'sche Matrix lautet dann nach (4):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bilden wir die Folge nach (5), so ergeben sich die Elemente

$$\beta_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_3\beta_2 = \frac{1}{4}, \quad \beta_3\beta_2\beta_1 = -\frac{1}{4}, \text{ und } \quad \beta_3\beta_2\beta_1\beta_0 = -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgern wir - nachdem 2 der gebildeten Elemente positiv sind - dass 2 Eigenwerte von $\mathbf{S}$, d.h. 2 Nullstellen von $\Delta_4(s)$, einen negativen Realteil aufweisen.

Literatur

[1] Schwarz H.R.: Eine Methode zur Bestimmung der Stabilität von Matrix-Differentialgleichungen. Zeitschrift für Angewandte Mathematische Physik, vol. 7, 1956, S. 473 – 500

[2] Rupprecht W.: Netzwerksynthese; Entwurfstheorie linearer passiver und aktiver Zweipole und Vierpole. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York. 1972