Zusatzmaterial zu Kapitel 4

1 Ermittlung der Transitionsmatrix mit der *Sylvester*-Formel

Wir nehmen an, dass das Zustandsmodell eines linearen und zeitinvarianten Systems die Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

besitzt, und dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$ eine (konstante) (n,n)-Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten ist. D.h. es gilt:

$$s_i \neq s_j \qquad\qquad i,\ j = 1, 2, ..., n \quad \text{mit} \quad i \neq j.$$

In diesem Fall kann die Transitionsmatrix folgendermaßen berechnet werden (vgl. Kapitel 4)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\mathbf{diag}(e^{s_i t})\mathbf{P}^{-1}. \tag{1}$$

Die Matrix $\mathbf{P}$ wird durch die n Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_i$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i{=}s_i\mathbf{p}_i \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

geprägt

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n), \tag{3}$$

während deren Inverse $\mathbf{P}^{-1}$ durch die n Links-Eigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_i^T$

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{A} = s_i\boldsymbol{\rho}_i^T, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

charakterisiert wird:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ . \\ . \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ausgehend von der obigen Beziehung (1) erhält nach Ausmultiplikation die Transitionsmatrix die Gestalt

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i\boldsymbol{\rho}_i^T e^{s_i t}.$$

Sie entspricht einer gewichteten Summe von n Exponentialfunktionen $e^{s_i t}$. Führt man nun für die dyadischen Produkte $\mathbf{p}_i\boldsymbol{\rho}_i^T$ die (konstanten) Matrizen

$$\mathbf{F}_i := \mathbf{p}_i\boldsymbol{\rho}_i^T \qquad (i = 1, ..., n)$$

ein, so erhält man die sogenannte *spektrale* Darstellung von $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i e^{s_i t}. \tag{5}$$

Entscheidend für die Anwendung dieser Relation ist es, daß die formal eingeführten Matrizen $\mathbf{F}_i$ *ohne* Berechnung von Eigenvektoren anhand der Rechenvorschrift (*Sylvester*-Formel)

$$\mathbf{F}_i := \prod_{k=1,\ k\neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}}{s_i - s_k} \tag{6}$$

gebildet werden können! Damit erhalten wir die sogenannte *Sylvester*-Formel zur Berechnung der Transitionsmatrix.

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - s_k\mathbf{E}}{s_i - s_k} \right] e^{s_i t}.$$

Sie eignet sich gut für Systeme niedriger Ordnung ($n \leq 3$). In diesen beiden Fällen lautet sie:

Fall n=2:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

Fall n=3:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_1 - s_2}\frac{\mathbf{A} - s_3\mathbf{E}}{s_1 - s_3} e^{s_1 t} + \frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_2 - s_1}\frac{\mathbf{A} - s_3\mathbf{E}}{s_2 - s_3} e^{s_2 t} + \frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_3 - s_1}\frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_3 - s_2} e^{s_3 t}$$

1.0.1 Beispiel

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ betrage

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist die Transitionsmatrix.

Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ergeben sich durch Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0.$$

Im konkreten Fall lautet sie

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0.$$

Die Eigenwerte lauten demnach

$$s_1 = -2 \quad \text{und} \quad s_2 = -3.$$

Nach den Relationen (5) und (6) lautet die Transitionsmatrix im vorliegenden Fall $n = 2$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{F}_1 e^{s_1 t} + \mathbf{F}_2 e^{s_2 t},$$

mit

$$\mathbf{F}_1 := \frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_1 - s_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 := \frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_2 - s_1}.$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten der Exponentialfunktionen:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0-(-3) & 1 \\ -6 & -5-(-3) \end{bmatrix}}{(-2)-(-3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0-(-2) & 1 \\ -6 & -5-(-2) \end{bmatrix}}{(-3)-(-2)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Transitionsmatrix ergibt sich somit zu

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

1.1 Bemerkung zur Struktur der Übertragungsfunktion des Systems

Die Übertragungsfunktion des obigen Systems lautet

$$G(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \; + \; d = \mathbf{c}^T\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{b} \; + \; d.$$

Die Resolvente der Systemmatrix, d. h. $\mathbf{\Phi}(s)$ ergibt sich leicht im vorliegenden Fall durch Anwendung der *Laplace*-Transformation aus Relation (5)

$$\mathbf{\Phi}(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \frac{1}{s - s_i}.$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \frac{1}{s - s_i}\mathbf{b} \; + \; d$$

bzw.

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}^T\mathbf{F}_i\mathbf{b}\frac{1}{s - s_i} \; + \; d.$$

Durch Einführung der Abkürzungen

$$\eta_i := \mathbf{c}^T\mathbf{F}_i\mathbf{b}$$

erhält sie die Gestalt

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{1}{s - s_i} \ + \ d.$$

Unter Beachtung der Relation (5) ergeben sich die Faktoren η_i zu

$$\begin{aligned} \eta_i \quad : \quad &= \mathbf{c}^T (\prod_{k=1,\ k \neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}}{s_i - s_k}) \mathbf{b} \\ &= \prod_{k=1,\ k \neq i}^{n} \frac{\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}) \mathbf{b}}{s_i - s_k}. \end{aligned}$$

Hieraus ist schön ersichtlich, daß wenn $\mathbf{b}$ ein Rechts-Eigenvektor und/oder $\mathbf{c}$ ein Links-Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist, der (skalare) Faktor η_i verschwindet, und somit der Grad der Übertragungsfunktion niedriger als die Systemordnung n ist. Das bedeutet einen Verlust der Steuerbarkeit und/oder der Beobachtbarkeit des Systems. (vgl. Kapitel 5 insbesondere die Ausführungen über das Kriterium nach *Hautus*).

1.2 Zum Beweis der *Sylvester*-Formel

Es gilt offensichtlich

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}$$

d.h. mit (3) und (4)

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ . \\ . \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{pmatrix} = \mathbf{E},$$

bzw.

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \tag{7}$$

Die Links-Multiplikation der Relation (7) mit

$$\boldsymbol{\Psi}_i := \prod_{k=1,\ k \neq i}^{n} (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E})$$

ergibt zunächst

$$\boldsymbol{\Psi}_i \mathbf{E} = \prod_{k=1,\ k \neq i}^{n} (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T.$$

Nachdem alle Terme - abgesehen von dem i-ten Term - verschwinden, erhalten wir

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \left[\prod_{k=1,\ k \neq i}^{n} (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}) \right] \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T,$$

bzw. unter Beachtung von (2)

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \left[\prod_{k=1,\ k\neq i}^{n} (s_i - s_k) \right] \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T .$$

Damit gilt

$$\mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T = \boldsymbol{\Psi}_i \frac{1}{\prod\limits_{k=1,\ k\neq i}^{n} (s_i - s_k)},$$

d.h.

$$\mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T = \prod_{k=1,\ k\neq i}^{n} \frac{(\mathbf{A} - s_k \mathbf{E})}{(s_i - s_k)}$$

und die *Sylvester*-Formel ist bewiesen.

2 Der *PUTZER*-Algorithmus

Wir betrachten eine konstante (n, n)-Matrix $\mathbf{A}$ und bezeichnen deren n Eigenwerte mit s_i $(i = 1, ..., n)$. Die zugehörige Transitionsmatrix kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q}_i r_i(t) \tag{8}$$

Hierbei sind $r_i(t)$ skalare Zeitfunktionen und die (n, n)-Matrizen $\mathbf{Q}_i$ konstant. Letztere werden anhand folgender rekursiver Relation

$$\mathbf{Q}_{i+1} = (\mathbf{A} - s_i \mathbf{E})\, \mathbf{Q}_i \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{9}$$

berechnet. Die Anfangsbedingung lautet hierbei

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E}. \tag{10}$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{Q}_{i+1} = \prod_{k=1}^{i} (\mathbf{A} - s_k \mathbf{E}) \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{11}$$

Die Zeitfunktionen $r_i(t)$ erhält man durch Lösung eines Systems von n gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Führt man den Vektor

$$\mathbf{r}(t) := \left[\ r_1(t) \quad r_2(t) \quad ... \quad r_n(t)\ \right]^T$$

ein, so lautet das zu lösende Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & s_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & s_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & s_n \end{pmatrix} \mathbf{r}.$$

Die Anfangsbedingungen lauten hierbei:

$$\mathbf{r}(0) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}^T .$$

Die Lösung obigen Systems kann *rekursiv* ermittelt werden! Zuerst löst man die „freie" Differentialgleichung

$$\frac{dr_1}{dt} = s_1 r_1$$

und erhält

$$r_1\,(t) = e^{s_1 t}.$$

Die restlichen Funktionen werden *rekursiv* durch Lösung jeweils einer skalaren „gestörten" Differentialgleichung

$$\frac{dr_i}{dt} = s_i r_i \quad + \quad r_{i-1} \qquad\qquad i = 2, 3, .., n$$

bei verschwindenden Anfangswerten

$$r_i\,(0) = 0$$

berechnet. Das ergibt:

$$\begin{aligned} r_i\,(t) \quad &= \quad \int\limits_0^t e^{s_i(t-\tau)} r_{i-1}\,(\tau)\,d\tau \\ &= \quad e^{s_i t} \int\limits_0^t e^{-s_i \tau} r_{i-1}\,(\tau)\,d\tau \qquad\qquad i = 2, 3, ..., n \end{aligned}$$

2.0.1 Bemerkung:

Falls mehrfache Eigenwerte existieren, kommen diese in obigen Relationen mit ihrer Vielfachheit vor. Die Indizierung der Eigenwerte ist irrelevant!

2.0.2 Beispiel „der Fall $n = 2$":

In diesem Fall ergeben sich für die benötigten Matrizen die Ausdrücke:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E}$$

und

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}.$$

Für die Funktionen $r_i(t)$ erhalten wir zunächst

$$r_1\,(t) = e^{s_1 t}.$$

Die Funktion $r_2\,(t)$ ergibt sich durch Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dr_2}{dt} = s_2 r_2 + r_1$$

zu

$$\begin{aligned} r_2(t) &= \int_0^t e^{s_2(t-\tau)} e^{s_1\tau} d\tau = e^{s_2 t} \int_0^t e^{(s_1-s_2)\tau} d\tau \\ &= e^{s_2 t}\left(e^{(s_1-s_2)t} - 1\right)\frac{1}{s_1-s_2} = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \end{aligned}$$

bzw.

$$r_2(t) = e^{s_2 t}\frac{e^{(s_1-s_2)t} - 1}{s_1 - s_2}$$

Damit ergibt sich nach (8) für die Transitionsmatrix (vergleiche die *Sylvester*-Formel)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E}e^{s_1 t} \quad + \quad (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})\, e^{s_2 t}\frac{e^{(s_1-s_2)t} - 1}{s_1 - s_2}$$

bzw

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{\mathbf{A} - s_2\mathbf{E}}{s_1 - s_2}e^{s_1 t} \quad + \quad \frac{\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}}{s_2 - s_1}e^{s_2 t}.$$

Für

$$s_1 = s_2 = s$$

erhalten wir unmittelbar (mit Hilfe der Regel von *de L'Hospital*) den Ausdruck

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{E}e^{st} \quad + \quad (\mathbf{A} - s\mathbf{E})\, te^{st} \\ &= [\mathbf{E} \quad + \quad (\mathbf{A} - s\mathbf{E})\, t]\, e^{st}. \end{aligned}$$

2.0.3 Beispiel ($n = 2$):

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ lautet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristischen Polynoms ergibt sich zu:

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-3 & 1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 4s + 4 = (s-2)^2$$

D.h. es liegt ein doppelter Eigenwert vor:

$$s_{1,2} = 2.$$

Die Matrix $\mathbf{Q}_1$ berechnet sich anhand (9) und (10):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E})\,\mathbf{Q}_1 \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{E} \\ &= (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 3-s_1 & -1 \\ 1 & 1-s_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit

$$r_1(t) = e^{2t}$$

als „Eingangsfunktion” lautet die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{dr_2}{dt} = 2r_2 + e^{2t} \qquad \text{mit} \qquad r_2(0) = 0.$$

Es ergibt sich

$$r_2(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)} e^{2\tau} d\tau = te^{2t}$$

Die gesuchte Transitionsmatrix lautet nach (8):

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} te^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & 1 - te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beispiel ($n = 3$)**:** Die Systemmatrix **A** sei gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ lässt sich anhand der Entwicklung nach der 3. Spalte leicht berechnen:

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (s-2)(s-1)^2$$

Die Eigenwerte lauten somit

$$s_1 = 2,\ s_2 = 1 \ \text{ und } \ s_3 = 1.$$

Die Matrix $\mathbf{Q}_1$ lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) \\ &= \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ -1 & 2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach (9) für

$$\mathbf{Q}_3 = (\mathbf{A} - s_2\mathbf{E})\,\mathbf{Q}_2$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ -1 & 2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ermittlung von $r_2\,(t)$ erfolgt durch Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dr_2}{dt} = r_2 + r_1$$

mit

$$r_1\,(t) = e^{2t}$$

als Störfunktion und der Anfangsbedingung

$$r_2(0) = 0.$$

Es ergibt sich

$$r_2\,(t) = \int_0^t e^{t-\tau} e^{2\tau} d\tau = e^t \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^t \left(e^t - 1\right) = e^{2t} - e^t$$

Die Differentialgleichung für $r_3\,(t)$ lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{dr_3}{dt} &= r_3 + e^{2t} - e^t \\ r_3\,(t) &= \int_0^t e^{t-\tau} \left(e^{2\tau} - e^{\tau}\right) d\tau \\ &= e^t \left(\int_0^t e^{\tau} d\tau - \int_0^t d\tau \right) \\ &= e^{2t} - e^t - te^t \end{aligned}$$

Die gesuchte Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ ist nach (8) durch

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{E}r_1\,(t) + \mathbf{Q}_1 r_2\,(t) + \mathbf{Q}_2 r_3\,(t) \\ e^{\mathbf{A}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \\ &+ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left(e^{2t} - e^t\right) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(e^{2t} - e^t - te^t\right). \end{aligned}$$

gegeben. D.h.

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ -e^{2t} + e^t & e^{2t} - e^t + te^t & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Durch die Indizierung

$$s_1 = s_2 = 1\ ,\ \ s_3 = 2$$

ergibt sich natürlich das gleiche Ergebnis!

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} te^t + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(e^{2t} - te^t - e^t\right). \end{aligned}$$

3 Zu Kapitel 4.2.5: „Gewichtsfunktion und Übertragungsfunktion”

Für ein mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d \end{aligned}$$

mit dem n-dimensionalen Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ergibt sich die Gewichtsfunktion $g(t)$ aufgrund der Relation (siehe Kapitel 2.2.4)

$$g(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}. \tag{12}$$

Die Übertragungsfunktion lautet (nach Relation 3.4):

$$G(s) = \mathbf{c}^T \mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{A}t}\right\}\mathbf{b} + d \tag{13}$$

Im Fall „verschiedene Eigenwerte“ (siehe Kapitel 4.2) besitzt die Transitionsmatrix $e^{\mathbf{A}t}$ folgende Struktur:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i e^{s_i t}. \tag{14}$$

Die konstanten (n, n)-Matrizen $\mathbf{F}_i$ können anhand der Berechnungsvorschrift[1]

$$\mathbf{F}_i := \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - s_j\mathbf{E}}{s_i - s_j}$$

gebildet. Die Gewichtsfunktion lautet dann nach (12) und (14)

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}^T\mathbf{F}_i\mathbf{b}e^{s_i t} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e^{s_i t} \tag{15}$$

[1] Siehe Zusatzmaterial ”*Sylvester*-Formel”.

mit

$$\eta_i := \mathbf{c}^T \mathbf{F}_i \mathbf{b}. \tag{16}$$

Dementsprechend ergibt sich nach (13) für die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}^T \mathbf{F}_i \mathbf{b} \frac{1}{s - s_i} + d = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{1}{s - s_i} + d \tag{17}$$

Die Konstanten η_i nach (16) lassen sich nach

$$\eta_i = \mathbf{c}^T \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\mathbf{A} - s_j \mathbf{E}}{s_i - s_j} \right) \mathbf{b}$$

bzw.

$$\eta_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - s_j \mathbf{E}\right) \mathbf{b}}{s_i - s_j} \tag{18}$$

berechnen.

Bemerkung: Die Größe η_i nach (18) verschwindet offensichtlich, wenn $\mathbf{b}$ ein Rechtseigenvektor von $\mathbf{A}$, d.h.

$$\left(\mathbf{A} - s_j \mathbf{E}\right) \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

und/oder wenn $\mathbf{c}$ ein Linkseigenvektor von $\mathbf{A}$ also

$$\mathbf{c}^T \left(\mathbf{A} - s_j \mathbf{E}\right) = \mathbf{0}$$

ist. In solch einem Fall erscheint die gewichtete Exponentialfunktion

$$\eta_i e^{s_i t}$$

und damit die „Eigenschwingung” $e^{s_i t}$ in der Gewichtsfunktion $g(t)$ *nicht*. Nachdem sowohl Eigenschwingungen (Eigenwerte) als auch die Gewichtsfunktion Invarianten des Systems sind, bedeutet dies eine strukturelle Änderung! Analoges gilt für die Übertragungsfunktion $G(s)$: nach (17) bedeutet das, dass der Term

$$\eta_i \frac{1}{s - s_i}$$

verschwindet. Damit ist die Ordnung der Übertragungsfunktion kleiner als die Ordnung des Systems! Das System verliert in solch einem Fall die Steuerbarkeit und/oder die Beobachtbarkeit.