Zusatzmaterial zu Kapitel 20

1 Zu Kapitel 20.1: „Eine Bemerkung zum „Entwurf eines Zustandsreglers”

Die Zustandsbeschreibung des Regelkreises lautet nach Gleichung (20.9)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}Vr \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}. \tag{1}$$

Zur Erinnerung: es geht darum, im Rückkopplungszweig den Vektor $\mathbf{h}$ so festzulegen, dass die n Eigenwerte der Systemmatrix $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)$ des Regelkreises beliebig(!) vorgegebene Werte λ_i annehmen. Die Eigenschaft der Steuerbarkeit des zu regelnden Systems ist hierfür eine notwendige und hinreichende Bedingung.

Die Notwendigkeit der Steuerbarkeit ist einleuchtend und kann durch einen „Widerspruchsbeweis” leicht gezeigt werden. Hierzu wird angenommen die Strecke ist nicht steuerbar. Dann existiert auf jeden Fall ein zum Eigenwert s gehöriger Linkseigenvektor $\boldsymbol{\rho}$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$

$$\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{A} = s\boldsymbol{\rho}^T \tag{2}$$

mit der Eigenschaft, dass er orthogonal zum Eingangsvektor $\mathbf{b}$ ist:

$$\boldsymbol{\rho}^T\mathbf{b} = 0. \tag{3}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\boldsymbol{\rho}^T(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T)$$

und formen diesen um. Aufgrund von Relation (3) gilt nämlich

$$\boldsymbol{\rho}^T(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) = \boldsymbol{\rho}^T\mathbf{A}.$$

Einfach formuliert: $\boldsymbol{\rho}$ ist ein Linkseigenvektor auch der Systemmatrix des geregelten(!) Systems. Unter Verwendung von (2) ergibt sich dann:

$$\boldsymbol{\rho}^T(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{h}^T) = s\boldsymbol{\rho}^T.$$

Das bedeutet: ist die Strecke nicht steuerbar, so besitzt der Regelkreis zwangsläufig (!) denselben Eigenwert s wie die Regelstrecke.