Lösungen zu Kapitel 2

Beispiel 1:

(a) Die Ermittlung der Transitionsmatrix erfolgt mit Hilfe der *Laplace*-Transformation. Hierzu benutzen wir die Relation

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{\Phi}(t)\right\} = \mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Sie besagt, daß die Resolvente von $\mathbf{A}$ die *Laplace*-Transformierte der Transitionsmatrix ist.

Mit den angegebenen Daten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(s) &= (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s-4 & 2 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(s-4)(s-1)-4} \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s-4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s(s-5)} \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s(s-5)} & \frac{-2}{s(s-5)} \\ \frac{-2}{s(s-5)} & \frac{s-4}{s(s-5)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung der einzelnen Beiträge von $\mathbf{\Phi}(s)$ ergibt

$$\mathbf{\Phi}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\frac{1}{s} + \frac{4}{5}\frac{1}{s-5} & \frac{2}{5}\frac{1}{s} - \frac{2}{5}\frac{1}{s-5} \\ \frac{2}{5}\frac{1}{s} - \frac{2}{5}\frac{1}{s-5} & \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\frac{1}{s-5} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir unter Beachtung von

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$$

die gesuchte Transitionsmatrix:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(1+4e^{5t}) & \frac{2}{5}(1-e^{5t}) \\ \frac{2}{5}(1-e^{5t}) & \frac{1}{5}(4+e^{5t}) \end{pmatrix}.$$

Es ist ratsam das Ergebnis auf seine Richtigkeit zu überprüfen. Die sehr leicht durchzuführende Kontrolle der *notwendigen* Bedingung $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}$**,** ergibt

$$\mathbf{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+2) & 1-1 \\ \frac{2}{9}(1-1) & \frac{1}{3}(2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Ermittlung der System-Trajektorien kann im vorliegenden Fall leicht ohne Benutzung der berechneten Transitionsmatrix erfolgen. Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten nämlich

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

und

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{dx_1}{dt} = -2\frac{dx_2}{dt}$$

bzw. durch Integration

$$x_1(t) - x_1(0) = -2[x_2(t) - x_2(0)].$$

Wir erhalten damit

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) + [\frac{1}{2}x_1(0) + x_2(0)].$$

D.h. die Trajektorien in der x_1-x_2-Ebene sind Geraden mit der Steigung $(-\frac{1}{2})$. Man erkennt weiterhin, daß für Anfangswerte, die der Beziehung

$$\frac{1}{2}x_1(0) + x_2(0) = 0$$

genügen, der Zustand $\mathbf{x}(t)$ des Systems mit der Zeit sich *nicht* verändert. Obige Gleichung kennzeichnet eine sogenannte *Ruhezone* des Systems (vgl. Kapitel 6 „Stabilität").