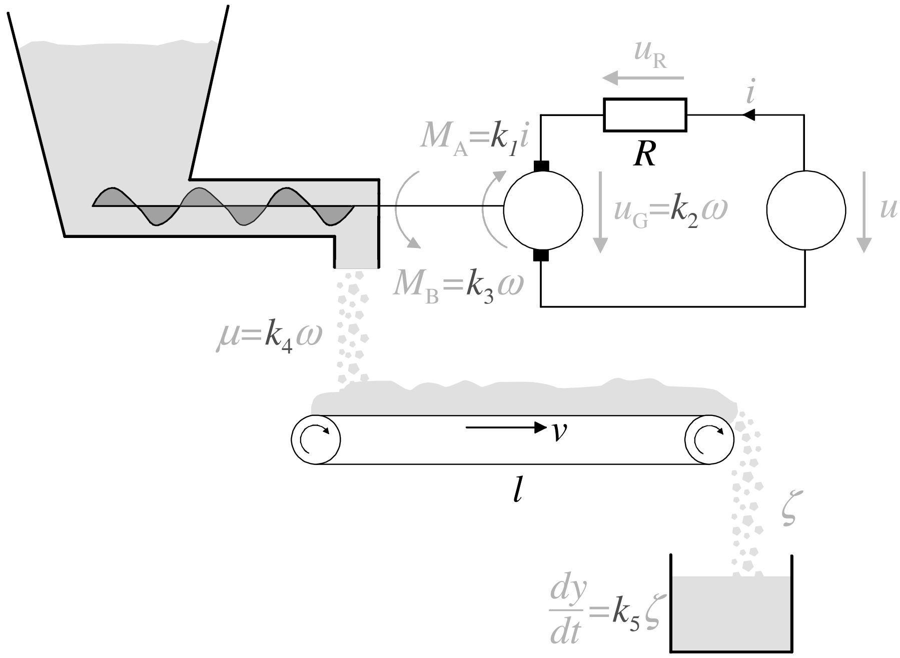
Lösungen zu Kapitel 14

Beispiel 1: Folgende Darstellung erleichtert das Aufstellen der Systemgleichungen:



(a) Das Spannungsgleichgewicht im Ankerkreis lautet

$$u = u_R + u_G, \tag{1}$$

wobei für die induzierte Spannung gilt:

$$u_G = k_2\omega.$$

Mit Hilfe von (1) und dem Ohmschen Gesetz $u_R = Ri$ kann der Ankerstrom ermittelt werden:

$$i = \frac{1}{R}\left(u - k_2\omega\right). \tag{2}$$

Der Drallsatz bezüglich der Motorwelle lautet

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_A - M_B,$$

mit

$$M_A = k_1 i \quad \text{und} \quad M_B = k_3\omega.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 i - k_3\omega \overset{(2)}{=} \frac{k_1}{R}u - \frac{k_1 k_2}{R}\omega - k_3\omega$$

bzw.

$$\frac{d\omega}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{J}\left(\frac{k_1 k_2}{R} + k_3\right)}_{=:\alpha_1}\omega + \underbrace{\frac{k_1}{JR}}_{=:\alpha_2} u = -\alpha_1\omega + \alpha_2 u$$

Der Massenstrom ζ ist gleich dem Massenstrom μ, verzögert um die Totzeit $T_t := \frac{l}{v}$, d.h.

$$\zeta = \mu(t - T_t) \tag{4}$$

Zusammen mit den vorgebenen Proportionalitäten ergibt sich somit das mathematische Modell der Anlage:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\omega}{dt} = -\alpha_1\omega + \alpha_2 u \\ &\mu = k_4\omega \\ &\zeta = \mu(t - T_t) \\ &\frac{dy}{dt} = k_5\,\zeta \end{aligned}} \tag{5}$$

(b) Mit Hilfe der *Laplace*-Transformation findet man:

$$s\omega(s) = -\alpha_1\omega(s) + \alpha_2 u(s)$$

bzw.

$$(s + \alpha_1)\,\omega(s) = \alpha_2 u(s).$$

Die gesuchte Übertragungsfunktion $P_1(s)$ lautet somit unter Ausnutzung von $\mu(s) = k_4\omega(s)$:

$$\boxed{u \to \mu: \quad P_1(s) = \frac{k_4\alpha_2}{s + \alpha_1}.} \tag{6}$$

Weiters erhält man durch Einsetzen von (4) in das *Laplace*-Integral die entsprechende Transformierte von ζ, d.h.

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \int_0^\infty \zeta(t)e^{-st}dt \overset{(4)}{=} \int_0^\infty \mu(t - T_t)e^{-st}dt = \\ &= \int_0^\infty \mu(t - T_t)e^{-s(t-T_t)}e^{-sT_t}dt = e^{-sT_t}\int_0^\infty \mu(t - T_t)e^{-s(t-T_t)}dt, \end{aligned}$$

d.h.

$$\zeta(s) = e^{-sT_t}\mu(s).$$

Die Übertragungsfunktion $P_2(s)$ lautet somit

$$\boxed{\mu \to \zeta: \quad P_2(s) = e^{-sT_t}.} \tag{7}$$

Die Übertragungsfunktion $P_3(s)$ errechnet sich aus (5) gemäß

$$sy(s) = k_5\zeta(s),$$

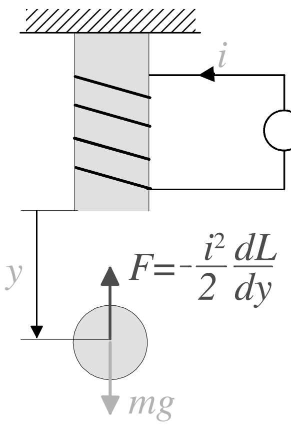
d.h.

$$\boxed{\zeta \to y: \qquad P_3(s) = \frac{k_5}{s}}$$

Für die vollständige übertragungsfunktion $P(s)$ gilt somit :

$$\boxed{u \to y: \qquad P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s) = \frac{k_5 k_4 \alpha_2}{s\,(s+\alpha_1)} e^{-sT_t}.}$$

Beispiel 2: In folgender Abbildung sind die auf die Kugel angreifenden Kräft eingezeichnet.



(a) Es gilt nach *Newton*

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - F \tag{1}$$

Laut Angabe ist die Induktivität umgekehrt proportional zu dem Abstand y. Für die Hubkraft ergibt sich damit:

$$F = -\frac{i^2}{2}\frac{dL}{dy} = -\frac{i^2}{2}\left(-\frac{c}{y^2}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{i}{y}\right)^2.$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{c}{2m}\left(\frac{i}{y}\right)^2$$

Mit den Zustandsvariablen

$$x_1 = y \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

lautet das mathematische Modell für das Labormodell:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = g - \dfrac{c}{2m}\left(\dfrac{i}{x_1}\right)^2 \\ \hline y = x_1 \end{array}} \tag{2}$$

(b) In den Ruhelagen (Gleichgewichtszuständen)

$$\mathbf{x}_R = \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{pmatrix}$$

verschwinden die zeitlichen Ableitungen der Zustandsgrößen. Die Eingangsgröße i ist konstant, d.h.

$$i = i_R.$$

Daraus resultieren folgende Gleichungen zur Ermittlung der Ruhelagen:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{R2} \\ 0 &= g - \frac{c}{2m}\left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Aus obigen (nichtlinearen) Gleichungen ergibt sich der gesuchte Wert x_{R1} zu

$$x_{R1} = \pm\sqrt{\frac{c}{2mg}}\, i_R.$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Ruhelage des Systems lautet somit:

$$\boxed{\mathbf{x}_R = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{c}{2mg}}\, i_R \\ 0 \end{pmatrix}.} \tag{4}$$

(c) Für die Linearisierung setzt man an:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{R1} + \xi_1 \\ x_2 &= x_{R2} + \xi_2 \\ i &= i_R + \eta \end{aligned} \tag{5}$$

Für die erste Differentialgleichung in (2) ergibt sich:

$$\frac{d\left(x_{R1} + \xi_1\right)}{dt} = \frac{d\xi_1}{dt} = x_{R2} + \xi_2.$$

Unter Verwendung von (4) ergibt sich somit:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2. \tag{6}$$

Die zweite Differentialgleichung aus (2) lautet

$$\frac{dx_2}{dt} = g - \frac{c}{2m}\left(\frac{i}{x_1}\right)^2 =: f(x_1, i)$$

wobei

$$f(x_{R1}, i_R) = 0$$

gilt. Unter Verwendung von (5) bedeutet das

$$\frac{d\left(x_{R2} + \xi_2\right)}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt} = g - \frac{c}{2m}\left[\frac{(i_R + \eta)}{(x_{R1} + \xi_1)}\right]^2 = f(x_{R1} + \xi_1, i_R + \eta). \tag{7}$$

Die Entwicklung der "rechten Seite" um (x_{R1}, i_R) nach *Taylor* kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$f(x_{R1} + \xi_1, i_R + \eta) = f(x_{R1}, i_R) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{R1} \\ i = i_R}} \xi_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{\substack{x_1 = x_{R1} \\ i = i_R}} \eta + \ldots$$

Durch Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung erhalten wir das um die Ruhelage linearisierte System.

Für die benötigten partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{c}{m}\frac{i^2}{x_1^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial i} = -\frac{c}{m}\frac{i}{x_1^2}$$

Damit vereinfacht sich (7) zu

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt} &= \left(\frac{c}{m}\frac{i_R^2}{x_{R1}^3}\right)\xi_1 - \left(\frac{c}{m}\frac{i_R}{x_{R1}^2}\right)\eta = \\ &= \frac{c}{m}\left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2\left(\frac{\xi_1}{x_{R1}}\right) - \frac{c}{m}\left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2\left(\frac{\eta}{i_R}\right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Relation (3), d.h

$$\left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2 = \frac{2mg}{c}$$

erhält man folgende Beziehung

$$\frac{d\xi_2}{dt} = 2g\left(\frac{\xi_1}{x_{R1}}\right) - 2g\left(\frac{\eta}{i_R}\right)$$

Das linearisierte Differentialgleichungssystem in Matrizenschreibweise lautet somit:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{d\xi_1}{dt} \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{x_{R1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2g}{i_R} \end{pmatrix} \eta} \tag{8}$$

Hinweis: Obiges Ergebnis kann auch mit Hilfe der bekannten Näherung

$$(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon \qquad \text{für} \quad |\varepsilon| \ll 1$$

ermittelt werden. Dazu ist in (7) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \left[\frac{(i_R+\eta)}{(x_{R1}+\xi_1)}\right]^2 &= \left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2 \frac{\left(1+\dfrac{\eta}{i_R}\right)^2}{\left(1+\dfrac{\xi_1}{x_{R1}}\right)^2} \approx \left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2 \left(1+2\frac{\eta}{i_R}\right)\left(1-2\frac{\xi_1}{x_{R1}}\right) \\ &\approx \left(\frac{i_R}{x_{R1}}\right)^2 \left(1+2\frac{\eta}{i_R}-2\frac{\xi_1}{x_{R1}}\right) \end{aligned}$$

einzusetzen. Wie man leicht überprüfen kann, ergibt sich dann nach kurzer Rechnung das mathematische Modell (8).