Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 24.11.2014

Name / Vorname(n):

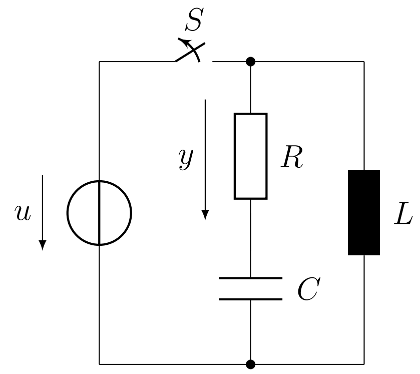
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	5	5	6	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einem Ohmschen Widerstand R, einer Induktivität L, einer Kapazität C sowie einem Schalter S. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Der Schalter S sei zunächst *geschlossen*.

a) Die Spannung an der Kapazität u_C sowie der Strom durch die Induktivität i_L werden als Zustandsgrößen im Vektor $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} u_\mathrm{C} & i_\mathrm{L} \end{bmatrix}^T$ zusammengefasst. Ermitteln Sie das mathematische Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $y(t)$ für eine konstante Spannung $u(t) = \sigma(t)$ ausgehend von einem entladenen Netzwerk $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

c) Wiederholen Sie die Aufgabe in Punkt a) für den Fall, dass der Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ *geöffnet* wird. Das Netzwerk ist zu diesem Zeitpunkt bereits geladen $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{C},0} & i_{\mathrm{L},0} \end{bmatrix}^T$.

Welche *qualitativ* unterschiedlichen Verläufe kann $y(t)$ für $t \geq 0$ abhängig von den Parameterwerten $R \geq 0$, $C > 0$ und $L > 0$ aufweisen? *Skizzieren* Sie diese und geben Sie die jeweiligen Bedingungen für die Parameterwerte R, C und L an.

Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte *des resultierenden Systems.*

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell eines linearen, zeitinvarianten Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u sowie der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2u$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? Besitzt es die BIBO-Eigenschaft? *Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.*

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ sowie deren Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

c) Skizzieren Sie für $u(t) \equiv 0$ den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der x_1–x_2-Ebene für folgende Anfangszustände $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines linearen, zeitinvarianten Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u sowie der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathrm{AW}=0}$ des Systems.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich von α, für den $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

c) Berechnen Sie die *stationären* Antworten $y(t)$ auf die Eingangsgröße

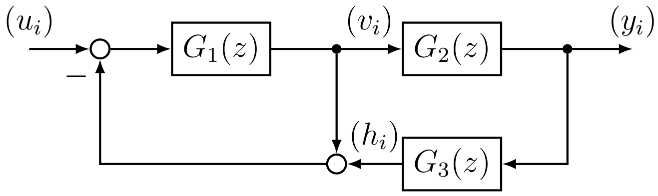
$$u(t) = 3 + 3\sin(2t),$$

für die Fälle

$$\text{(i)} \quad \alpha = -6 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \alpha = 6.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei *zeitdiskreten* Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\text{AW}=0}$ in Abhängigkeit der drei Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$.

b) Das Eingangs-Ausgangs–Verhalten des zweiten Teilsystems $G_2(z)$ wird durch die Differenzengleichung

$$y_{i+1} + 2y_i = v_{i+1} + \frac{1}{2}v_i$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z) = \left.\frac{y(z)}{v(z)}\right|_{\text{AW}=0}$.

c) In einem Labor wurde die *Sprungantwort* h_i des dritten Teilsystems $G_3(z)$ gemessen:

$$h_i = \frac{2}{3}\left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^i\right]\sigma_i \qquad \text{für} \quad y_i = \sigma_i := \begin{cases} 1 & i \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_3(z) = \left.\frac{h(z)}{y(z)}\right|_{\text{AW}=0}$.

d) Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $T(z)$ ergibt sich mit $G_1(z) = \frac{z+2}{z+1/4}$ und den Ergebnissen aus b) und c) zu

$$T(z) = \frac{z^2 + \frac{5}{2}z + 1}{(z+2)\left(3z + \frac{5}{4}\right)}.$$

Besitzt das Gesamtsystem die BIBO-Eigenschaft? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 29.01.2015

Name / Vorname(n):

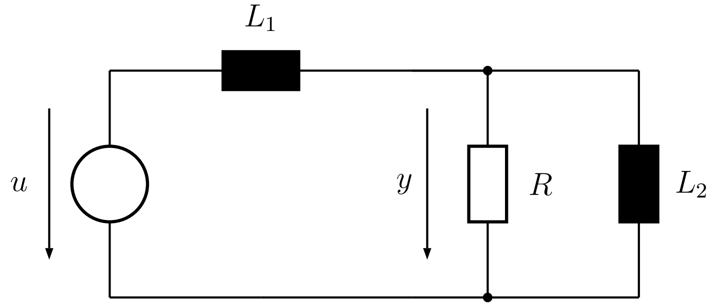
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	6	3	4	5	3	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Spannungsquelle, einem ohmschen Widerstand R und zwei Induktivitäten L_1 und L_2.



Die Quellenspannung der Spannungsquelle wird mit u, die Spannung am Widerstand R wird mit y bezeichnet. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun das System für die konkreten Parameterwerte $R = L_1 = L_2 = 1$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen des Systems für die Eingangsgrößen

i) $u = u_{\mathrm{R}} = 1$, ii) $u = u_{\mathrm{R}} = 0$.

d) Ist das System *asymptotisch stabil* bzw. *BIBO-stabil*? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes nichtlineare System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -x_2{}^2 + u \\ 2x_1 x_2{}^2 + u^2 - 1 \end{bmatrix}, \qquad y = g(\mathbf{x}, u) = \sin(x_1) + x_2.$$

Bestimmen Sie für die Ruhelage

$$u_{\mathrm{R}} = 1 \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T \qquad y_{\mathrm{R}} = -1$$

durch *Linearisierung* des nichtlinearen Systems ein lineares zeitinvariantes Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\,\Delta\mathbf{x} + d\,\Delta u\end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &:= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R}, \\ \Delta u &:= u - u_\mathrm{R}, \\ \Delta y &:= y - y_\mathrm{R},\end{aligned}$$

welches das nichtlineare System für „kleine“ Auslenkungen aus der Ruhelage näherungsweise beschreibt.

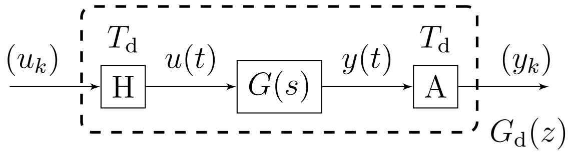
Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes Übertragungssystem mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{s+1}.$$

a) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ für den Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$ und stellen Sie diese graphisch dar. (*Beschriften Sie die Achsen!*)

b) Das System wird nun gemäß folgender Abbildung mit einem Abtast- und einem Halteglied, jeweils mit der Abtastzeit $T_\mathrm{d} = \ln 3$, versehen.



Ermitteln Sie die z-Übertragungsfunktion $G_\mathrm{d}(z)$ des resultierenden *zeitdiskreten* Systems.

c) Besitzt $G_\mathrm{d}(z)$ die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Geben Sie eine Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_k + d_\mathrm{d}u_k\end{aligned}$$

an, welches die Übertragungsfunktion $G_\mathrm{d}(z)$ aufweist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix}-2 & 3 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$.

a) Zeichnen Sie ein Strukturbild des Systems.

b) Existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}$$

in Diagonalform vorliegt? Wenn ja, so bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{P}$ und die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ und geben Sie die Transitionsmatrix $\hat{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}$ des *transformierten* Systems an.

c) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des Systems in der x_1-x_2-Ebene (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t):

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die folgenden linearen zeitinvarianten Systeme mit den Zustandsvektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ und $\mathbf{w}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & -47 & -\frac{52}{5} & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{z}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{w}.$$

a) Überprüfen Sie die obigen drei Systeme jeweils auf *asymptotische Stabilität.* (*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

b) Welche der obigen Systeme lassen sich jeweils durch eine lineare Zustandstransformation ineinander überführen? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 25.03.2015

Name / Vorname(n):

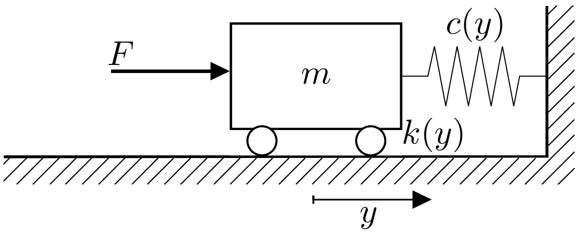
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	6	5	3	4	3	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes mechanische System bestehend aus einem Wagen mit der Masse m und einer *nichtlinearen* Feder:



Die Position y des Wagens wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Die Federkraft ist proportional zur Auslenkung y, wobei der Proportionalitätsfaktor c (die „Federkonstante") gemäß

$$c(y) = y^2 - 1$$

von y abhängt. Abgesehen von der Federkraft und der von außen vorgegebenen Kraft F wirkt auf den Wagen eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft mit dem ebenfalls von y abhängigen Proportionalitätsfaktor

$$k(y) = y^2.$$

Fassen Sie den Aufbau als ein nichtlineares System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein nichtlineares Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \qquad\qquad y = g(\mathbf{x}, u).$$

Für die folgenden Aufgaben gelte für die Masse $m = 1$.

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$, y_R des Systems für die (konstante) Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 0$.

c) Wählen Sie *eine* Ruhelage mit $y_\mathrm{R} > 0$ aus und bestimmen Sie dafür durch *Linearisierung* des nichtlinearen Systems ein lineares zeitinvariantes Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\,\Delta\mathbf{x} + d\,\Delta u\end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &:= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R}, \\ \Delta u &:= u - u_\mathrm{R}, \\ \Delta y &:= y - y_\mathrm{R},\end{aligned}$$

welches das nichtlineare System für „kleine" Auslenkungen aus der Ruhelage näherungsweise beschreibt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y.

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

b) Existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System in *Jordan-Form* vorliegt? Wenn ja, so geben Sie eine solche Transformationsmatrix $\mathbf{P}$ an. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des Systems.

d) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Systems durch

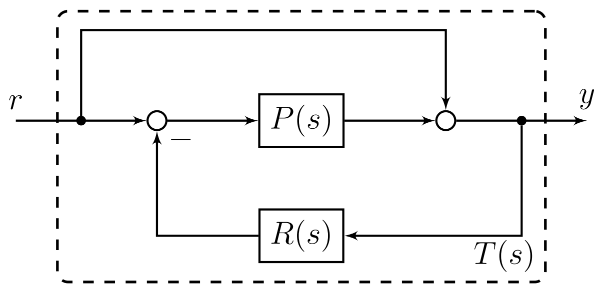
$$G(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+1}$$

gegeben ist.

e) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für den Eingangsgrößenverlauf $u(t) = 25e^{2t}$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung zweier linearer zeitinvarianter Systeme mit den Übertragungsfunktionen $P(s)$ und $R(s)$.



a) Ermitteln Sie zunächst allgemein die Übertragungsfunktion $T(s) = \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$ der Zusammenschaltung in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $P(s)$ und $R(s)$.

b) Zeigen Sie, dass für

$$P(s) = \frac{2s+4}{s^2+2s+1}, \qquad R(s) = -\frac{4s}{2s+4}$$

die Übertragungsfunktion $T(s)$ durch

$$T(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^2-2s+1}$$

gegeben ist.

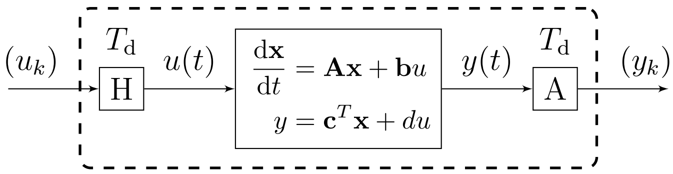
c) Zeichnen Sie den Pol-/Nullstellenplan von $T(s)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante Zustandsraummodell mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 3u.$$

Das System wird gemäß folgender Abbildung mit einem Abtast- und einem Halteglied mit der Abtastzeit $T_\mathrm{d} = 2 \ln 2$ versehen.



a) Ermitteln Sie die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_k + d_\mathrm{d}u_k \end{aligned} \qquad \text{mit } \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t = kT_\mathrm{d})$$

des resultierenden *zeitdiskreten* Systems.

b) Zeichnen Sie ein Strukturbild des zeitdiskreten Systems.

c) Ist das zeitdiskrete System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 5:

Überprüfen Sie, ob folgende Übertragungsfunktionen die BIBO-Eigenschaft besitzen:

i) $G_1(s) = \dfrac{1}{s^5+3s^3+7s^2+2s+1}$, ii) $G_2(s) = \dfrac{s+1}{s^2+3s+1}$,

iii) $G_3(s) = \dfrac{s^2+2s-3}{s^3+s^2-2}$, iv) $G_4(s) = \dfrac{s^2+3s+7}{2s^4+s^3+5s^2+5s+3}$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 08.05.2015

Name / Vorname(n):

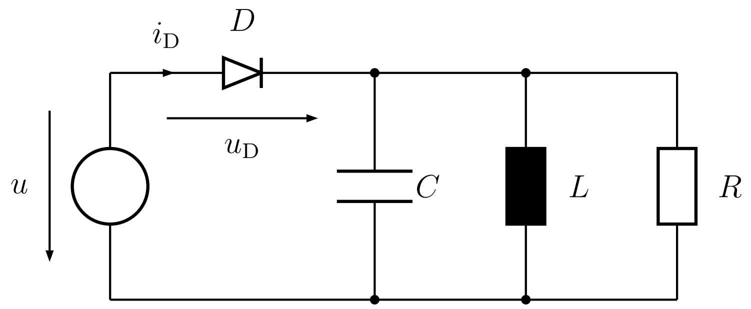
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	6	4	5	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung u, einer Diode D, einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R:



Zwischen Strom i_D und Spannung u_D an der Diode besteht der *nichtlineare* Zusammenhang

$$i_\mathrm{D} = I_\mathrm{S}\left(e^{k u_\mathrm{D}} - 1\right)$$

mit den positiven reellen Parametern I_S und k. Die von der Quelle gelieferte elektrische Leistung wird mit p bezeichnet, d.h. $p = u \cdot i_\mathrm{D}$. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $y = p$ auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein nichtlineares Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \qquad\qquad y = g(\mathbf{x}, u).$$

Für die folgenden Aufgaben gelte nun $I_\mathrm{S} = 1$, $k = 1$, $C = 1$, $L = 1$ und $R = 1$.

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$, y_R des Systems für die konstante Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R}$.

c) Wählen Sie für $u_\mathrm{R} = \ln 2$ eine Ruhelage aus und bestimmen Sie dafür durch *Linearisierung* des Systems ein lineares zeitinvariantes Modell der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\,\Delta\mathbf{x} + d\,\Delta u \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &:= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R}, \\ \Delta u &:= u - u_\mathrm{R}, \\ \Delta y &:= y - y_\mathrm{R}, \end{aligned}$$

welches das nichtlineare System für „kleine“ Auslenkungen aus der Ruhelage näherungsweise beschreibt.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Eine Studentin hat für $u(t) = e^t$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix}^T$ die Systemantwort

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t - 4e^{-4t} \\ e^t + 2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

ermittelt. Hat sie richtig gerechnet, d.h. ist die angegebene Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ tatsächlich die Systemantwort für obige Eingangsgröße und Anfangsbedingung? (*Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!*)

b) Ermitteln Sie die Matrix $\mathbf{P}$ einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta} u, \qquad y = \overline{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{z}.$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Systemdaten $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\delta}$ und $\overline{\boldsymbol{\delta}}$ des transformierten Systems an.

c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des gegebenen Systems. Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Für eine unbekannte Eingangsgröße $u(t)$ wurde ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ die Ausgangsgröße

$$y(t) = 5 - 5e^{-2t} \qquad \text{für } t \geq 0$$

beobachtet. Bestimmen Sie den zugehörigen Verlauf von $u(t)$.

e) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des gegebenen Systems für $u(t) \equiv 0$ in der x_1-x_2-Ebene:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

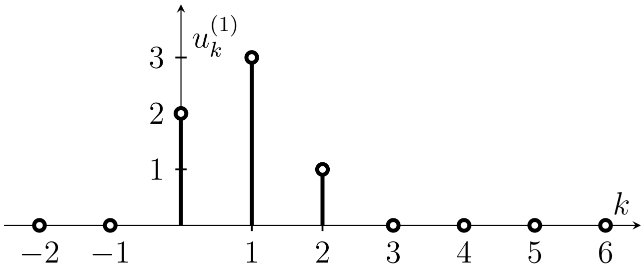
Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes Übertragungssystem mit der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k). Für die unten graphisch dargestellte Eingangsfolge $u_k^{(1)}$ wurde die Ausgangsfolge

$$y_k^{(1)} = 4\delta_k = \begin{cases} 4 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

beobachtet.



a) Als Eingangsfolge wird die *periodische* Folge

$$u_k^{(2)} = \begin{cases} 2 & k = 0, 3, 6, \ldots \\ 3 & k = 1, 4, 7, \ldots \\ 1 & k = 2, 5, 8, \ldots \end{cases}$$

vorgegeben. Ermitteln Sie *nachvollziehbar* die zugehörige Ausgangsfolge $(y_k^{(2)})$ und stellen Sie diese graphisch für $0 \leq k \leq 10$ dar. (*Hinweis:* Es sind keine aufwendigen Berechnungen nötig; mitunter ist eine Skizze von $(u_k^{(2)})$ hilfreich.)

b) Ermitteln Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems.

c) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_k, \qquad y_k = \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_k + d_\mathrm{d}u_k,$$

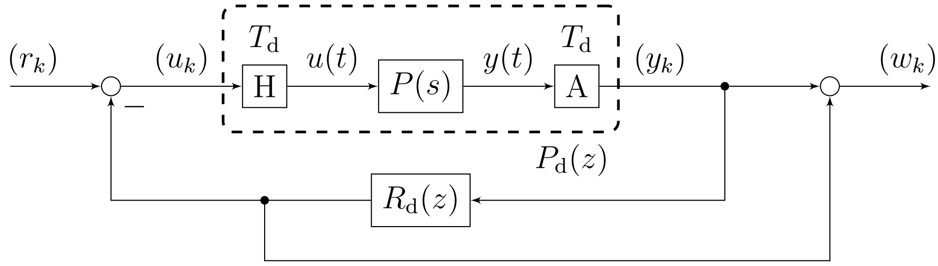
welches die Übertragungsfunktion $G(z)$ besitzt.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung eines zeitkontinuierlichen und eines zeitdiskreten Übertragungssystems mit den Übertragungsfunktionen

$$P(s) = \frac{36}{s^2 + s} \qquad \text{und} \qquad R_\mathrm{d}(z) = \frac{2z - 1}{z + 1}$$

sowie eines Abtasters und eines Haltegliedes mit der Abtastzeit $T_\mathrm{d} = \frac{1}{4}$.



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $P_\mathrm{d}(z)$ der Zusammenschaltung von $P(s)$, Halteglied und Abtaster. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Näherung $e^{\frac{1}{4}} \approx \frac{9}{7}$.)

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T_\mathrm{d}(z) = \frac{\tilde{w}(z)}{\tilde{r}(z)}$ zunächst allgemein in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $P_\mathrm{d}(z)$ und $R_\mathrm{d}(z)$. Zeigen Sie dann, dass mit obiger Näherung gilt:

$$T_\mathrm{d}(z) = \frac{3z}{z^2 + \frac{2}{9}z - \frac{2}{9}}.$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 02.07.2015

Name / Vorname(n):

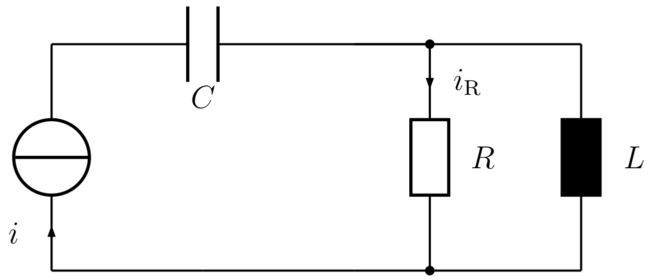
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	6	4	6	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Stromquelle mit dem Quellenstrom i, einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R:



Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = i$ und der Ausgangsgröße $y = i_R$ auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun das System für die Parameterwerte $C = 1$, $R = 1$, $L = 1$.

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$, y_R des Systems für die Eingangsgrößen

i) $u = u_R = 1$, ii) $u = u_R = 0$.

c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

d) Ist das System *asymptotisch stabil* bzw. *BIBO-stabil*? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist unbekannt, jedoch ist für einen (ebenfalls unbekannten) Zeitpunkt T der Wert der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ und ihrer zeitlichen Ableitung gegeben:

$$\mathbf{\Phi}(T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie folgende Werte der Transitionsmatrix:

i) $\mathbf{\Phi}(0)$, ii) $\mathbf{\Phi}(-T)$, ii) $\mathbf{\Phi}(2T)$.

b) Zeigen Sie, dass die Systemmatrix durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist.

c) Ermitteln Sie die Matrix $\mathbf{P}$ einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta}u, \qquad y = \overline{\boldsymbol{\delta}}^T\mathbf{z}.$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Systemdaten $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\delta}$ und $\overline{\boldsymbol{\delta}}$ des transformierten Systems an.

d) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des gegebenen Systems für $u(t) \equiv 0$ in der x_1-x_2-Ebene:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

e) Bestimmen Sie den Zeitpunkt T. (*Hinweis:* Betrachten Sie dazu die Eigenwerte der Transitionsmatrix.)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes *nichtlineare* System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} e^{2x_2} - x_1 \\ -2x_1 + (u-1)^2 \end{bmatrix}$$
$$y = x_1^2 + 2x_2.$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$, y_R des Systems für die konstante Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 3$.

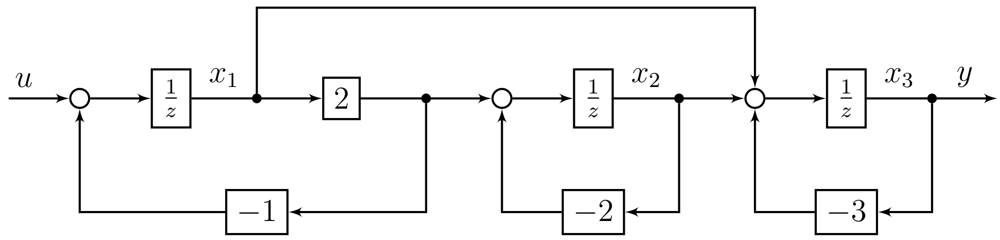
b) Wählen Sie eine der Ruhelagen aus und bestimmen Sie dafür durch *Linearisierung* des Systems ein lineares zeitinvariantes Modell der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\,\Delta\mathbf{x} + d\,\Delta u \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &:= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R}, \\ \Delta u &:= u - u_\mathrm{R}, \\ \Delta y &:= y - y_\mathrm{R}, \end{aligned}$$

welches das nichtlineare System für „kleine“ Auslenkungen aus der Ruhelage näherungsweise beschreibt.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines linearen zeitinvarianten *zeitdiskreten* Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Ermitteln Sie das zugehörige Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_k,\\ y_k &= \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_k + d_\mathrm{d}u_k\end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T$.

b) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Ist es möglich eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}_k = \mathbf{P}\mathbf{z}_k$ zu finden, sodass das transformierte System in *Diagonalform* vorliegt? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems. (*Hinweis:* Betrachten Sie das System als eine Zusammenschaltung von drei Teilsystemen.)

e) Ermitteln Sie die Systemantwort (y_k) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße

$$u_k = (-4)^k\left(\sigma_k - \frac{1}{2}\sigma_{k-1}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0\\ \frac{1}{2}(-4)^k & k > 0.\end{cases}$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 25.09.2015

Name / Vorname(n):

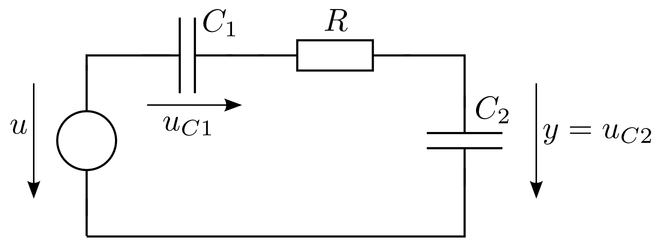
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	5	6	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung u, einem Ohmschen Widerstand R und zwei Kapazitäten C_1 und C_2. Mit y wird die Spannung an der Kapazität C_2 bezeichnet.



Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun folgendes System, das sich für konkrete Parameterwerte ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$ des Systems für die konstante Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 1$.

c) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes lineare und zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k \qquad y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k.$$

Durch einen Festplattendefekt ging der reelle Eintrag α der Systemmatrix verloren. Man kennt jedoch ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ den Verlauf der Ausgangsgröße y:

$$y_k = \frac{1 - 2 \cdot 3^k}{2^k}.$$

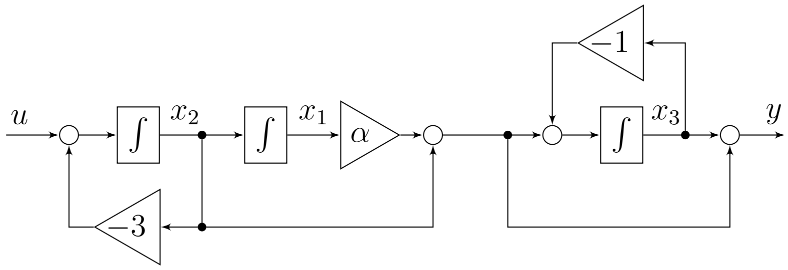
a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

b) Ermitteln Sie für die drei Zeitpunkte $k = 0, 1, 2$ den Wert der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{d},k}$ des Systems in Abhängigkeit des Parameters α.

c) Bestimmen Sie den fehlenden Eintrag α der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_\mathrm{d}$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines linearen zeitinvarianten Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Hierbei ist α eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ von u nach y durch

$$G(s) = \frac{s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

gegeben ist.

Es gelte nun $\alpha = 3$.

b) Bestimmen Sie alle Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ und erstellen Sie einen PN-Plan.

c) Berechnen Sie die zugehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ für die Eingangsgröße $u(t) = 12\sigma(t)$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u.$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des gegebenen Systems für $u(t) \equiv 0$ in der x_1-x_2-Ebene:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!