Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 29. 01. 2014

Name / Vorname(n):

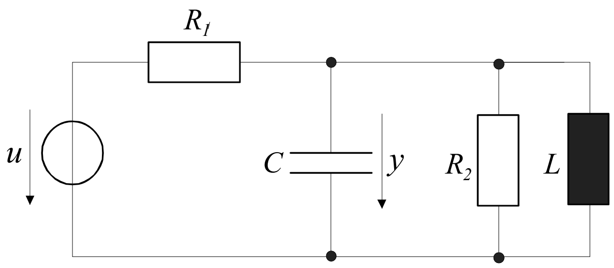
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	6	6	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrisches Netzwerk bestehend aus idealen Bauteilen: einer Kapazität (C), einer Induktivität (L) und zwei Ohmschen Widerständen (R_1, R_2). Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

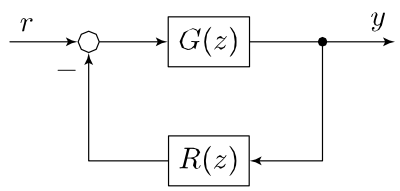
Aufgabe 2:

Betrachten Sie ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße u_i, der Ausgangsgröße y_i und der Gewichtsfolge g_i:

$$g_i = (-1)^i - (-2)^i.$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

Betrachten Sie nun folgende Zusammenschaltung:



mit

$$R(z) = \frac{2z+4}{z}.$$

b) Zeigen Sie, dass das Gesamtsystem folgende Übertragungsfunktion besitzt:

$$T(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z}{z^2 + 5z + 6}$$

c) Besitzt $T(z)$ die BIBO Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort*)

d) Geben Sie einen Zustandsraumdarstellung von $T(z)$ in der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_i \qquad y_i = \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_i + d_\mathrm{d}u_i$$

an und zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Von der Systemmatrix ist nur das charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^2 - 9$$

und ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ bekannt. Im Rahmen eines Experimentes wurde für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix}^T$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

beobachtet.

a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.
b) Zeigen Sie, dass die Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems durch

$$g(t) = 2e^{-3t}$$

gegeben ist. Ist das System BIBO stabil?
c) Berechnen Sie die Systemantwort $y(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u(t) = 2\sigma(t)$.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien *des freien Systems* (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der x_1 - x_2 -Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Es seien folgende *ungekürzte* Übertragungsfunktionen von linearen, zeitinvarianten Systemen gegeben (d.h. die Systemordnung entspricht jeweils dem Grad des Nennerpolynoms):

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 3.5}$$
$$G_2(s) = \frac{5s + 3}{s^3 + 2s^2 + 1}$$
$$G_3(s) = \frac{(2s^2 + s + 1)(s + 1)}{s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$
$$G_4(s) = \frac{s - 1}{s^3 + 4s^2 - 3s - 2}$$

Überprüfen Sie jedes dieser Systeme sowohl auf BIBO- als auch auf asymptotische Stabilität. (*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 28.03.2014

Name / Vorname(n):

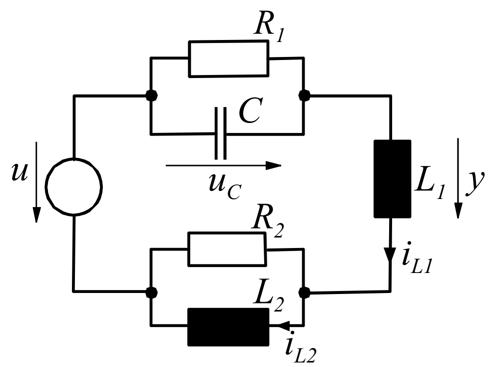
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	7	5
errreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Kapazität C, zwei Induktivitäten L_1 und L_2 , sowie zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung an der Induktivität L_1 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_\mathrm{C} & i_\mathrm{L1} & i_\mathrm{L2} \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Dabei ist α ein reeller Parameter.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α, für den das System asymptotisch stabil ist.

b) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ durch

$$G(s) = \frac{2s - 2\alpha + 4}{s^3 + (1-\alpha)s^2 + (3-\alpha)s + 3}$$

gegeben ist. (*Hinweis:* Fassen Sie das System als Serienschaltung zweier Teilsysteme auf.)

c) Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α an, für den das System die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Transformieren Sie obiges System in ein äquivalentes System in Diagonalform:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda z} + \boldsymbol{\delta} u, \qquad y = \overline{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{z}.$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$. Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Für eine *sinusförmige* Eingangsgröße $u(t)$ wurde *im eingeschwungenen Zustand*

$$y(t) = \sin(7t)$$

beobachtet. Ermitteln Sie den Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$.

d) Für eine unbekannte Eingangsgröße wurde ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ die Ausgangsgröße

$$y(t) = 3e^{-3t} - 3e^{-7t} \qquad \text{für } t \geq 0$$

beobachtet. Bestimmen Sie den zugehörigen Verlauf von $u(t)$.

e) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des freien *transformierten* Systems in der z_1-z_2-Ebene:

$$\mathbf{z}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Gegeben Sei folgende Differenzengleichung eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systems mit der Eingangsfolge (u_i) und der Ausgangsfolge (y_i):

$$6y_{i+2} + y_{i+1} - y_i = 6u_{i+1} + 12u_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

b) Existiert ein *asymptotisch stabiles* Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_i, \qquad y_i = \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_i + d_\mathrm{d}u_i$$

mit obiger Übertragungsfunktion? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*) Wenn ja, geben Sie ein solches an.

c) Existiert ein *nicht asymptotisch stabiles* Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \overline{\mathbf{A}}_\mathrm{d}\mathbf{x}_i + \overline{\mathbf{b}}_\mathrm{d}u_i, \qquad y_i = \overline{\mathbf{c}}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_i + \overline{d}_\mathrm{d}u_i$$

mit obiger Übertragungsfunktion? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*) Wenn ja, geben Sie ein solches an.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 28.05.2014

Name / Vorname(n):

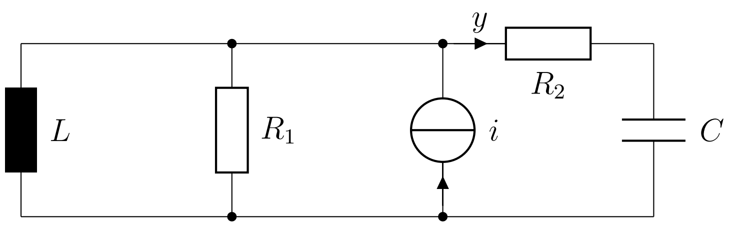
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ○ ja ○ nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	8	6	3
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Stromquelle, einer Kapazität C, einer Induktivität L und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Der von der Stromquelle gelieferte Strom wird mit i bezeichnet. Mit y wird der Strom durch den Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße y auf. Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C & i_L \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}i, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + di.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Zeichnen Sie das Strukturbild des Systems.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? (*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

d) Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

und stellen Sie sie *graphisch* dar.

e) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) des freien Systems in der x_1-x_2-Ebene:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

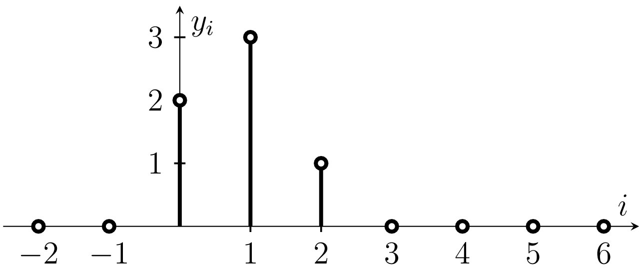
Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsfolge (u_i) und der Ausgangsfolge (y_i). Mit σ_i wird im Folgenden der zeitdiskrete Einheitssprung

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & i < 0 \\ 1 & i \geq 0 \end{cases}$$

bezeichnet. Für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $u_k = \sigma_i - \sigma_{i-2}$ wurde folgende Ausgangsfolge beobachtet:



a) Ermitteln Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Geben Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_i, \qquad y_i = \mathbf{c}_\mathrm{d}^T\mathbf{x}_i + d_\mathrm{d}u_i$$

an, welches die Übertragungsfunktion $G(z)$ besitzt.

d) Geben Sie eine Eingangsfolge (u_i) an, sodass für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

$$y_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} u, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \gamma u.$$

Hinweis: Es handelt sich um eine Parallelschaltung zweier Teilsysteme.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich der Parameter α, β *und* γ, für den das System *asymptotisch stabil* ist. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich der Parameter α, β *und* γ, für den das System die *BIBO-Eigenschaft* besitzt. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 08. 07. 2014

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	6	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes autonome, *lineare und zeitinvariante* System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ . & . \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

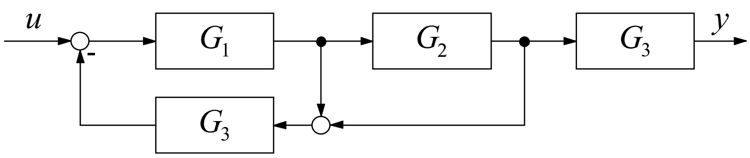
Aus Versehen gingen einige Daten der Systemmatrix verloren. Dafür kennt man einen Eigenwert $s = -1$ und einen Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

a) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ - Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von vier Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ beziehungsweise $G_3(s)$:



Fassen Sie diese als *ein* System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.
Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = 5\,, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{s+\alpha}\,, \qquad G_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

Hierbei ist α eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y durch

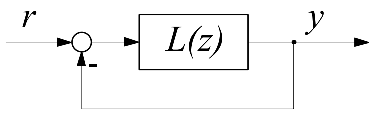
$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathrm{AW}=0} = \frac{5(s-1)}{s^2 + s(\alpha+12) + 7\alpha - 5}$$

gegeben ist.
b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α für welchen das System die BIBO-Eigenschaft besitzt!
c) Berechnen Sie *für hinreichend große Werte t* die Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße $u(t) \equiv 12$ für folgende Parameterwerte:

(i) $\alpha = -1$ (ii) $\alpha = 0$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das folgende Blockschaltbild eines zeitdiskreten Systems mit der Führungsgröße r und der Ausgangsgröße y:



a) Als Führungsgröße wird – bei verschwindendem Anfangszustand – die Folge $(r_i) = (1,0,0,0,0,0,...)$ gewählt. Für die Elemente der zugehörigen Ausgangsfolge gilt dann:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0,1 \\ -4 \cdot (-0.25)^{i-1} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{r(z)}\right|_{\mathrm{AW}=\mathbf{0}}$.

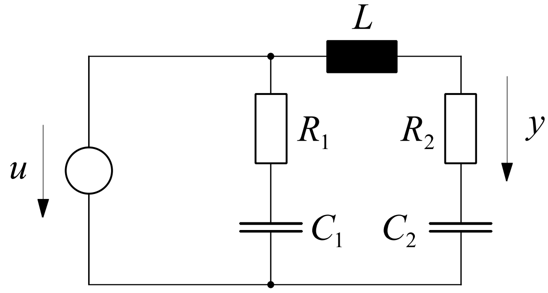
b) Berechnen Sie die ersten fünf Elemente der Sprungantwort des Systems.

c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $L(z)$.

d) Besitzt $L(z)$ die BIBO - Eigenschaft? *Geben Sie eine mathematische Begründung an.*

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L, zwei Kapazitäten C_1 und C_2 sowie zwei Ohm'schen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

Für bestimmte Parameterwerte sowie eine bestimmte Wahl der Zustandsgrößen kann das mathematische Modell wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathrm{AW}=\mathbf{0}}$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 26.09.2014

Name / Vorname(n):

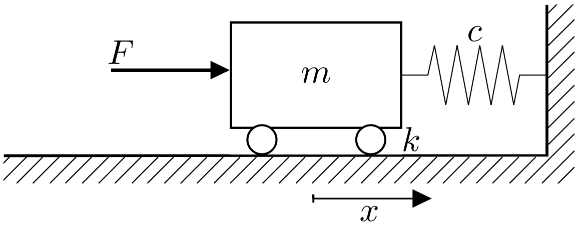
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	7	5	4	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes mechanische System bestehend aus einem Wagen mit der Masse m und einer linearen Feder mit der Federkonstante c:



Die Position y des Wagens wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Abgesehen von der Federkraft und der von außen vorgegebenen Kraft F wirkt auf den Wagen eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft mit dem Proportionalitätsfaktor k. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Ermitteln Sie die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) := \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}.$$

c) Für welche Werte des positiven reellen Parameters m und der nichtnegativen reellen Parameter c und k ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante Zustandsraummodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}u.$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

b) Transformieren Sie das System mithilfe einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ auf *Diagonalform*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta}u.$$

(Geben Sie die Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{\Lambda}$ sowie den Vektor $\boldsymbol{\delta}$ als Zahlenwerte an.)

c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des Systems.

d) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des freien Systems, d.h. für $u(t) \equiv 0$, in der x_1-x_2-Ebene (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t):

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

e) Skizzieren Sie für die konstante Eingangsgröße $u(t) \equiv 1$ den Verlauf der Trajektorien des Systems für die Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{x}_0^{(6)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

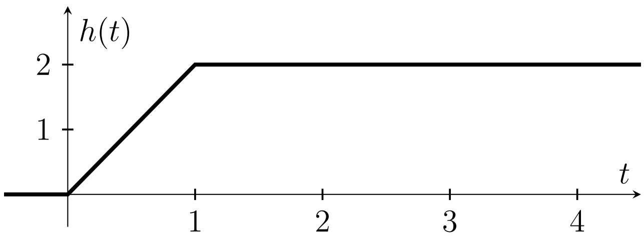
(*Hinweis:* Führen Sie eine Zustandstransformation $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{f}$ durch, wobei Sie den konstanten Vektor $\mathbf{f}$ so wählen, dass $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ gilt.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Im Rahmen eines Experiments wurde als Eingangsgröße ein Einheitssprung

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

vorgegeben. Die resultierende Sprungantwort $y(t) = h(t)$ ist graphisch dargestellt:



a) Ermitteln Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ und stellen Sie diese graphisch dar.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Es wird nun $u(t) = \sigma(t) - 2\sigma(t-1)$ vorgegeben. Berechnen Sie die resultierende Ausgangsgröße $y(t)$ und stellen Sie diese graphisch dar.

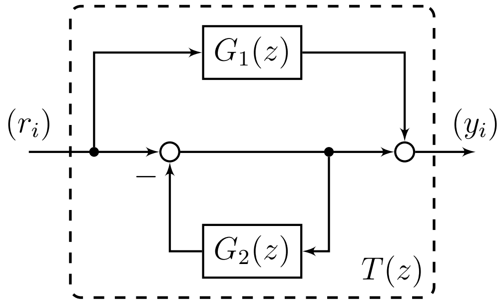
d) Existiert ein lineares zeitinvariantes *Zustandsraummodell* der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

welches obige Sprungantwort aufweist? Wenn ja, geben Sie es an. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung zweier zeitdiskreter linearer zeitinvarianter Systeme mit den Übertragungsfunktion $G_1(z)$ und $G_2(z)$:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion der Zusammenschaltung

$$T(z) = \frac{y(z)}{r(z)}$$

als Funktion von $G_1(z)$ und $G_2(z)$.

Für die Übertragungsfunktionen $G_1(z)$ und $G_2(z)$ gelte nun

$$G_1(z) = \frac{2}{2z+1}, \qquad G_2(z) = \frac{7}{2z+1}.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion

$$T(z) = \frac{4z^2+8z+17}{4z^2+18z+8}$$

gilt.

c) Besitzt die Übertragungsfunktion $T(z)$ die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Geben Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_\mathrm{d} r_i, \qquad y_i = \mathbf{c}_\mathrm{d}^T \mathbf{x}_i + d_\mathrm{d} r_i$$

an, welches die Übertragungsfunktion $T(z)$ besitzt.