Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 18. 10. 2012

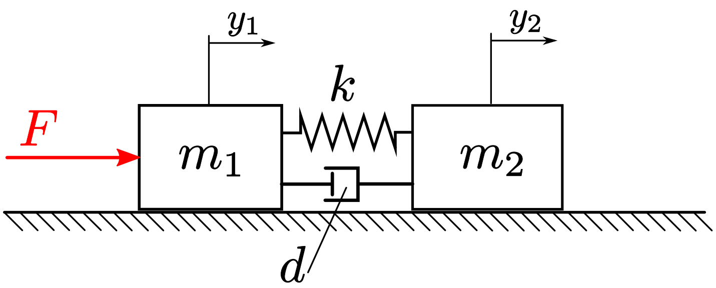
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgenden *reibungsfreien* mechanischen Aufbau zweier Massen m_1 und m_2, welche durch eine Feder mit der Federkonstante k und einen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d miteinander verbunden sind:



Die Positionen y_1 und y_2 der beiden Massen werden ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen.
Auf die Massen wirken die Erregerkraft F, die *wegproportionale Federkraft* und die *geschwindigkeitsproportionale Dämpferkraft*. Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße $y = y_2$ auf.

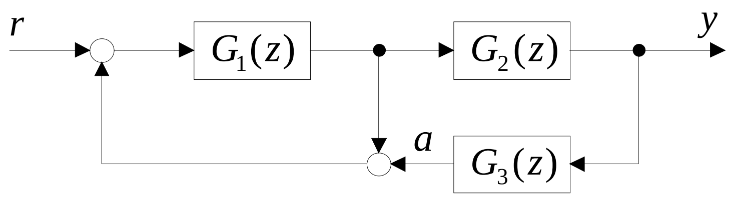
Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u.$

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgendes *zeitdiskrete* LZI-System mit der Eingangsgröße u_i, der Zustandsgröße $\mathbf{x}_i$ und der Ausgangsgröße y_i:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u_i$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems.
c) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
d) Als Anfangszustand wird nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ gewählt. Wie lautet die Ausgangsgröße y_i wenn die Eingangsgröße durch $u_i = \left(\frac{1}{4}\right)^i$ gegeben ist?

Aufgabe 3:
Gegeben sei eine Zusammenschaltung von drei zeitdiskreten Systemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktionen
$$P(z) = \frac{a(z)}{r(z)} \qquad \text{und} \qquad T(z) = \frac{y(z)}{r(z)}$$
als Funktion von $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$.

Für die Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$ gilt nun:
$$G_1(z) = 2\frac{z+1}{z-1} \qquad G_2(z) = \frac{1}{4z+2} \qquad G_3(z) = -3$$

b) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $T(z) = \dfrac{z+1}{-2z(z-2)}$ gilt.

c) Geben sie zu $T(z)$ ein dazugehöriges Zustandsraummodell
$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d\,u_i$$
$$y_i = \mathbf{c}_d^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i + d_d\,u_i$$
an.

Aufgabe 4:
Gegeben sei ein *lineares und zeitinvariantes System 2. Ordnung* mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ der Form
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ . & . \end{bmatrix}\mathbf{x}$$
Aus Versehen gingen einige Daten der Systemmatrix verloren. Dafür kennt man einen Eigenwert $s = -1$ und einen Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

a) Bestimmen Sie die vollständige Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
d) Skizzieren Sie in der Zustandsebene den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 31. 01. 2013

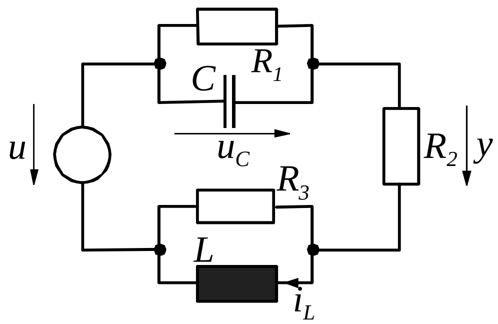
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	5	3	3	5	5
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L, einer Kapazität C und drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3. Hierbei gilt $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.
Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u .$$

Mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ und den vier Eingangsfunktionen

$$u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) = \sigma(t) \qquad\qquad u^{(3)}(t) = u^{(4)}(t) = 0$$

($\sigma(t)$ entspricht hierbei dem zeitkontinuierlichen Einheitssprung) ergeben sich folgende Lösungen:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -2+3e^{t} \\ 0.5+0.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t}+3e^{t} \\ 0.5+1.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Aufgrund des schlechten Winterwetters hat sich allerdings bei *einer Lösung ein Fehler eingeschlichen*!

a) Welche der obigen Lösungen ist fehlerhaft? *Begründen Sie ihre Antwort!*
b) Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{x}^{(5)}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}^{(5)}(t=0) = \mathbf{0}$ und die Eingangsfunktion $u^{(5)}(t) = \sigma(t)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s-2}{s^2+s+\alpha}.$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich von α für den $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.
b) Berechnen Sie die *stationäre* Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße

$$u(t) = 2 + 3\cos(t)$$

wenn für den Parameter $\alpha = -6$ gilt.

Aufgabe 4:
Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

e) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
f) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
g) Skizzieren Sie in der Zustandsebene den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 5:
Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -0.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_i \quad , \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.
d) Bestimmen Sie die zugehörige Gewichtsfolge (g_i) und stellen Sie diese *graphisch* dar.
e) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 22. 03. 2013

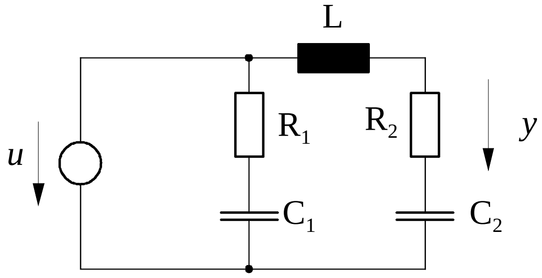
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	5	4	5	4	3
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L, zwei Kapazitäten C_1 und C_2 und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$

Für bestimmte Parameterwerte kann das mathematische Modell wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

b) Zeichnen Sie ein Strukturbild des gegebenen mathematischen Modells.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgendes System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

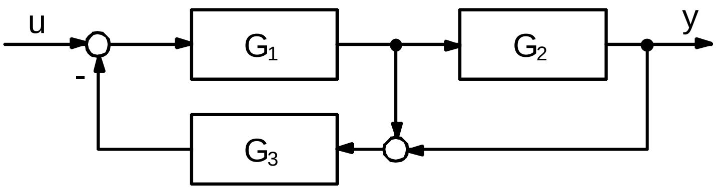
Die zugehörige Transitionsmatrix lautet:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.
c) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
d) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung mit Hilfe der Gewichtsfunktion an!*

Aufgabe 3:

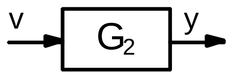
Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei *zeitdiskreten* Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* auf:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ in Abhängigkeit der drei Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$.

b) Das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des 2. Teilsystems wird beschrieben durch die Differenzengleichung:

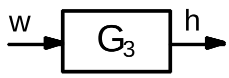
$$y_{i+1} + y_i = v_{i+1} - v_i \,.$$



Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z) = \left.\frac{y(z)}{v(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

c) In einem Labor wurde die *Sprungantwort* des 3. Teilsystems gemessen:

$$h_i = \frac{1}{5}\left[\sigma_i - (-4)^i\right] \quad \text{für} \quad w_i = \sigma_i$$



Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_3(z) = \left.\frac{h(z)}{w(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

d) Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $T(z)$ sei mit

$$T(z) = -\frac{1}{2}\frac{(z-1)(z+4)}{z^2+4z+4}$$

gegeben. Ist das Gesamtsystem $T(z)$ BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe 4:
Gegeben sei das freie System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{4t} \\ 4e^{4t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$.
b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
c) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
d) Skizzieren Sie in der Zustandsebene den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 5:
Gegeben sei ein mathematisches Modell mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -a & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u \quad \text{und} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.$$

Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters a so an, dass das Modell die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 05. 07. 2013

Name / Vorname(n):

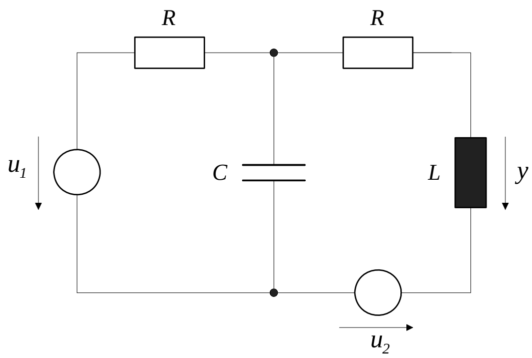
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	5	5	6	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen (R), einer Kapazität (C) und einer Induktivität (L). Die von den zwei Spannungsquellen gelieferten Spannungen werden mit u_1 bzw. u_2 symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit zwei Eingangsgrößen u_1 und u_2 sowie einer Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}_1\,u_1 + \mathbf{b}_2\,u_2 \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d_1\,u_1 + d_2\,u_2$$

Geben Sie die Systemdaten $\mathbf{A}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, d_1$ und d_2 an!

b) *Berechnen (!)* Sie für die Eingangsgrößen

$$u_1(t) = u_{1,0}\sigma(t-2)$$
$$u_2(t) = u_{2,0}\left(1 - e^{-3t}\cos t\right)\sigma(t)$$

mit den konstanten, reellen Parametern $u_{1,0}$ und $u_{2,0}$ die Grenzwerte

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)\,.$$

Geben Sie eine mathematische Begründung für die *Existenz der Grenzwerte* an!

Aufgabe 2:

Von einem linearen und zeitinvarianten System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad\qquad \text{mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ist bekannt, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ die Gleichung $(s^3 - 4s)(s-3) = 0$ erfüllen. Allerdings sind nicht alle Lösungen dieser Gleichung auch Eigenwerte von $\mathbf{A}$! In einem Laborversuch wurde außerdem für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}^T$ der Grenzwert

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}^T$$

beobachtet.

a) Ist das System asymptotisch stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ und die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Stellen Sie in der x_1 - x_2 -Ebene graphisch diejenigen Zustände dar, für die $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$ gilt.

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der x_1 - x_2 -Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgende rekursive Relation eines zeitdiskreten Systems mit der Eingangsfolge (u_i) und der Ausgangsfolge (y_i)

$$y_i + 2y_{i-1} + 0.5y_{i-2} = u_{i-1} + 2u_{i-2} \qquad (i = 0,1,2,...)$$

mit den Anfangswerten y_{-1} und y_{-2} und $u_{-1} = u_{-2} = 0$.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\dfrac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathrm{AW}=0}$.

b) Bestimmen Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d\ \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d\ u_i \qquad y_i = \mathbf{c}_d^{\,T}\mathbf{x}_i + d_d u_i.$$

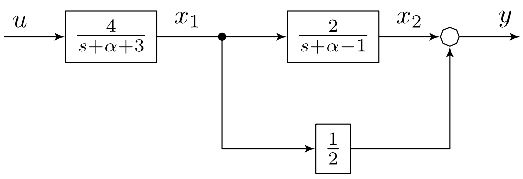
c) Zeichnen Sie das zum Zustandsraummodell gehörige Strukturbild.

d) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

e) Ermitteln Sie $\mathbf{x}_0$ in Abhängigkeit der Anfangswerte y_{-1} und y_{-2}.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das folgende lineare und zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u der Ausgangsgröße y sowie den Zustandsgrößen x_1 und x_2. Hierbei ist α ein reeller Parameter.



a) Ermitteln Sie das dazugehörige Zustandsraummodell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u\,.$$

b) Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α an, für den das System die BIBO Eigenschaft aufweist. *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{8})$$

den *eingeschwungenen* Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ jeweils für

i) $\alpha = 0$ ii) $\alpha = 2$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 27. 09. 2013

Name / Vorname(n):

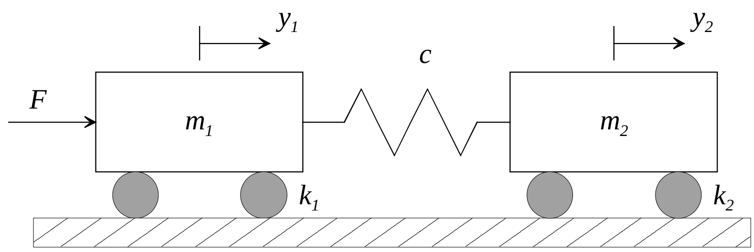
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes mechanische System zweier Massen m_1 und m_2 die durch eine „lineare“ Feder (Federkonstante c) miteinander verbunden sind:



Die Positionen y_1 und y_2 der Massen werden ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse m_1 wirken eine äußere Kraft F und eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft (Reibkonstante k_1). Auf die Masse m_2 wirkt ebenfalls eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft (Reibkonstante k_2). Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße $y = y_2$ auf.

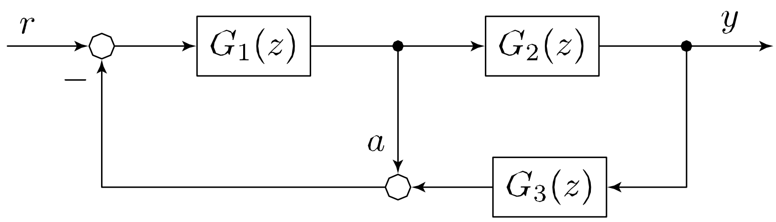
a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,F, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,F\;.$$

b) Zeichnen Sie das zu a) gehörige Strukturbild.

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Zusammenschaltung von drei zeitdiskreten Systemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktionen

$$P(z) = \frac{a(z)}{r(z)} \qquad \text{und} \qquad T(z) = \frac{y(z)}{r(z)}$$

als Funktion von $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$.

Für die Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$ gilt nun:

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z+2} \qquad G_2(z) = \frac{1}{2z-4} \qquad G_3(z) = -4$$

b) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $T(z) = \frac{1}{2}\frac{z-1}{z(2z-5)}$ gilt.

c) Geben sie zu $T(z)$ ein dazugehöriges Zustandsraummodell folgender Form an:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d\,r_i$$
$$y_i = \mathbf{c}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i + d_d\,r_i$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes System zweiter Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + d\,u\,.$$

Die Transitionsmatrix des Systems hat die Form

$$\mathbf{\Phi}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3e^{5t} + \alpha_1 e^{-3t} & e^{5t} + \alpha_2 e^{-3t} \\ 3e^{5t} + \alpha_3 e^{-3t} & \alpha_4 e^{5t} + \alpha_5 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

mit reellen Konstanten α_i ($i = 1, \ldots, 5$).

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Ermitteln Sie die Parameter α_i der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ und die Systemmatrix $\mathbf{A}$.
c) Können Sie trotz unbekannter Parameter $\mathbf{b}$ und d eine Aussage über die BIBO-Stabilität des Systems treffen? (*Begründen Sie Ihre Antwort!)*
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien *des freien Systems* (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der x_1-x_2-Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -\alpha & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Wie ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines linearen, zeitinvarianten Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ allgemein definiert?
b) Zeigen Sie, dass obiges System die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - \alpha + 2}{s^2 + 3s - 3\alpha + 2}$$

besitzt.
c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α für den das System die BIBO-Eigenschaft besitzt.
d) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = 2 - \cos(t)$$

die *eingeschwungenen* Verläufe der Ausgangsgröße $y(t)$ und der dritten Zustandsgröße $x_3(t)$ für die Fälle

i) $\alpha = 0$ ii) $\alpha = 10$.