Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 13. 10. 2011

Name / Vorname(n):

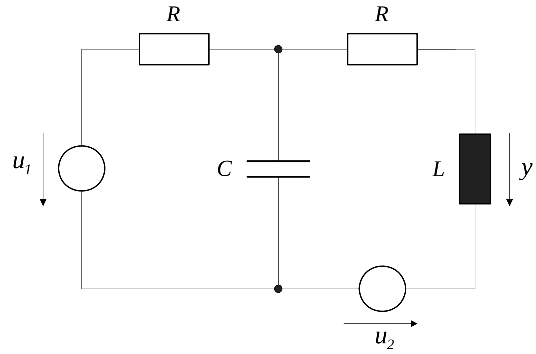
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	6	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus zwei idealen Ohmschen Widerständen (R), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Die von den idealen Spannungsquellen gelieferten Spannungen werden mit u_1 bzw. u_2 symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit zwei Eingangsgrößen u_1 und u_2 sowie einer Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u_1 + \mathbf{b}_2 u_2 \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d_1 u_1 + d_2 u_2$$

Geben Sie $\mathbf{A}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, d_1$ und d_2 an!

b) **Berechnen (!)** Sie für die Eingangsgrößen $u_1(t) = u_{1,0}\,\sigma(t)$ und $u_2(t) = u_{2,0}\,\sigma(t-2)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad\qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Geben Sie eine mathematische Begründung für die **Existenz der Grenzwerte** an!

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein *zeitdiskretes* System mit der Eingangsgröße (u_i) und der Ausgangsgröße (y_i):

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \qquad\qquad y_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Berechnen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion: $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$

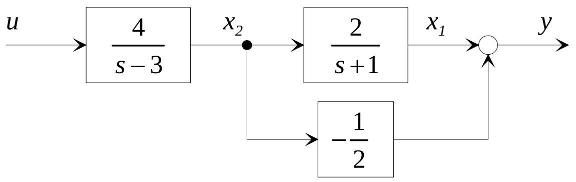
b) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie eine math. Begründung an!

c) Berechnen Sie die Gewichtsfolge des Systems.

d) Bestimmen Sie ausgehend von der Übertragungsfunktion eine Differenzengleichung 2.Ordnung zur Beschreibung des Einangs-Ausgans-Verhaltens.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das folgende lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y sowie den Zustandsgrößen x_1 und x_2:



a) Ermitteln Sie das dazugehörige Zustandsraummodell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u$$

b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Für die Übertragungsfunktionen zweier LZI-Systeme gilt:

System 1: $$G_1(s) = \left.\frac{y_1(s)}{u_1(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s-2}{s^3+s^2+4s+2}$$

System 2: $$G_2(s) = \left.\frac{y_2(s)}{u_2(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{2}{s^4+2s^3+s^2+s+3}$$

Bestimmen Sie für hinreichend große Werte von t die *eingeschwungenen* Antworten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der beiden Systeme auf die Eingangsgrößen:

$$u_1(t) = u_2(t) = 7 - 2\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 02. 02. 2012

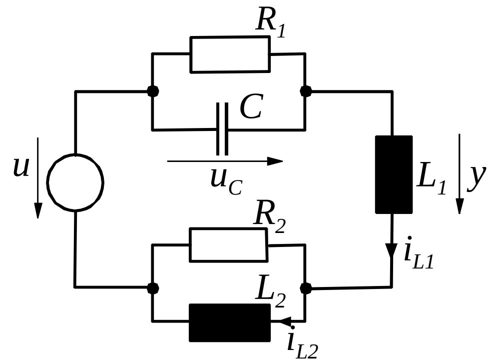
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	6	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Kapazität C, zwei Induktivitäten L_1 und L_2, sowie zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung an der Induktivität L_1 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C & i_{L1} & i_{L2} \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,,\ \ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

Aufgabe 2:
Gegeben sei das lineare zeitinvariante Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

a) Transformieren Sie obiges System in ein äquivalentes in Diagonalform:
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}u \ \text{ und } \ y = \bar{\boldsymbol{\delta}}^T\mathbf{z}\,.$$
b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
c) Bestimmen Sie die zur Diagonalform zugehörige Transitionsmatrix $e^{\Lambda t}$.
d) Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$. Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
e) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* in der $z_1 - z_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{z}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

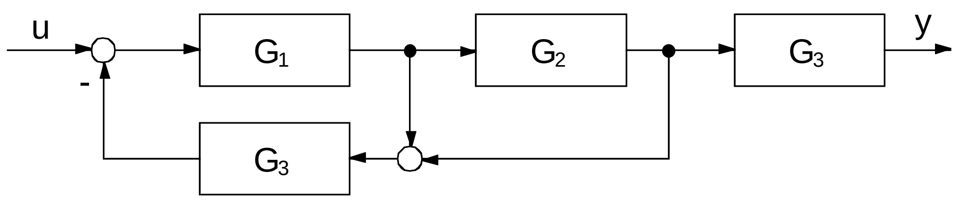
Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 3:
Gegeben sei ein *zeitdiskretes* System mit der Eingangsgröße u_i, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_i$ und der Ausgangsgröße y_i:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_i \qquad y_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Berechnen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$.
c) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
d) Berechnen Sie die Ausgangsgröße y_i, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ gewählt wird und auf das System die Eingangsgröße $u_i = 5 \cdot (0.5)^i$ aufgeschaltet wird.

Aufgabe 4:
Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = 5 \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{s+\alpha} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

Hierbei ist α eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass $T(s)$ durch
$$T(s) = \frac{5(s-1)}{s^2 + s(\alpha+12) + 7\alpha - 5}$$
gegeben ist.
b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich von α für welchen das Gesamtsystem die BIBO-Eigenschaft besitzt!
c) Berechnen Sie *für hinreichend große Werte t* die Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße
$$u(t) = 2 + 3\cos(t)$$
jeweils für die Werte
(i) $\alpha = -1$
(ii) $\alpha = 0$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 23. 03. 2012

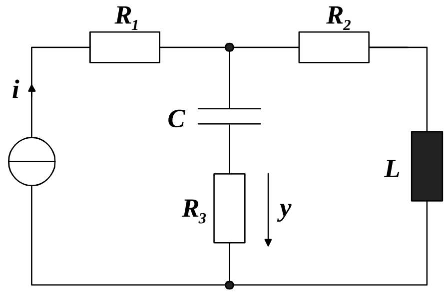
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	4	6	4	3	4	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer **Stromquelle**, einer Kapazität C, einer Induktivität L, sowie drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3. Der von der Stromquelle gelieferte Strom wird mit i symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_3 bezeichnet. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit dem Strom i als Eingangsgröße und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,i \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,i$$

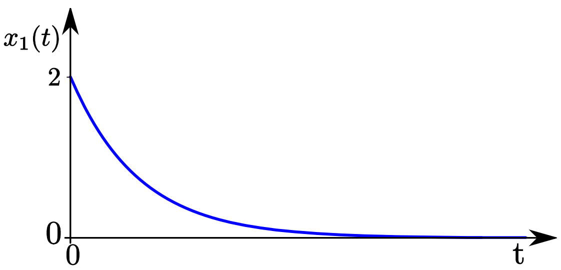
b) **Berechnen (!)** Sie für die Eingangsgröße $i(t) = 2\sigma(t)$ die Grenzwerte:

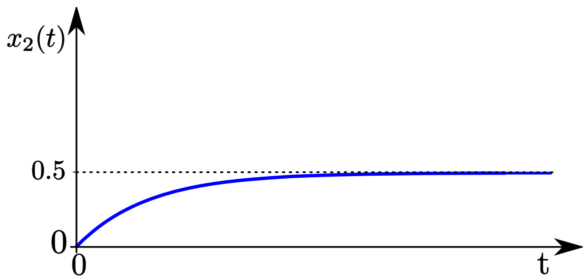
$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 2:
Gegeben sei ein *lineares und zeitinvariantes System 2. Ordnung* mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Einer der beiden Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt und liegt bei $s = -4$. Für einen bestimmten Anfangswert $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ wurden die folgenden zeitlichen Verläufe der beiden Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gemessen:





a) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

b) Bestimmen Sie den zweiten Eigenwert s_2.

c) Bestimmen Sie zwei zu den Eigenwerten s_1 und s_2 zugehörige Rechtseigenvektoren p_1 und p_2.

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad x_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

e) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße u_i, der Ausgangsgröße y_i und der Gewichtsfolge g_i:

$$g_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ (-2)^{i-1} - (-1)^{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

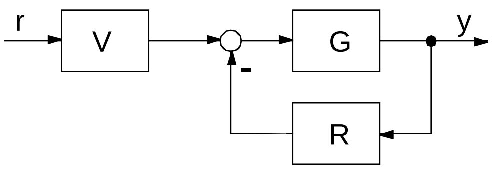
b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft ? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

c) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d u_i \qquad y_i = \mathbf{c}_d{}^T \mathbf{x}_i + d_d u_i$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $V(s)$, $G(s)$ und $R(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$V(s) = 10 \qquad G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-1)} \qquad R(s) = \frac{k}{s+1}$$

Hierbei ist k eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{AW=0} = \frac{10(s+2)(s+1)}{s^3 + 3s^2 + (k-1)s + 2k - 3}$$ gegeben ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Routh-Schemas bzw. des Hurwitz-Kriteriums den größtmöglichen Wertebereich von k für welchen das Gesamtsystem die BIBO-Eigenschaft besitzt!

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft ? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

c) Berechnen Sie *für hinreichend große Werte t* die Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße

$$u(t) = 1 + \cos(t)$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 04.07.2012

Name / Vorname(n):

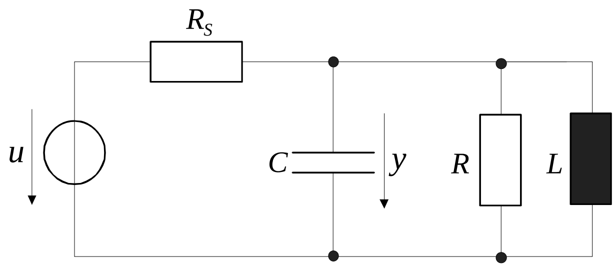
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrisches Netzwerk bestehend aus idealen Bauteilen: einer Kapazität (C), einer Induktivität (L) und zwei Ohmschen Widerständen (R, R_S). Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

b) Es gelte nun $R = L = C = 1$. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$ in Abhängigkeit vom Parameter R_S.

c) Bestimmen Sie den Parameter R_S so, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ eine doppelte Polstelle aufweist.

d) Berechnen Sie für das in Punkt c) ermittelte System die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße

$$u(t) = 3 + 2\sin(t)$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind zwei Systeme (SYS1 und SYS2) mit der Eingangsgröße u_i und der Ausgangsgröße y_i, $(i = 1, 2)$:

SYS1: $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 12 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

SYS2: $$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

a) Besitzen beide Systeme bei verschwindenden Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ dasselbe Ein-/Ausgangsverhalten? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an.)*

b) Existiert eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ für obige Systeme? Wenn ja, so berechnen Sie diese.

c) Bestimmen Sie die zu obigen Systemen gehörigen Gewichtsfunktionen $g_1(t)$ und $g_2(t)$.

Aufgabe 3:

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ ergeben sich für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t); \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = \sigma(t); \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0.$$

jeweils die Systemantworten:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

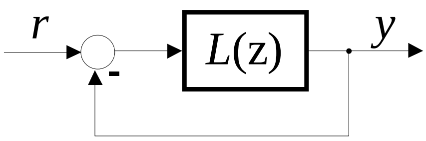
a) Bestimmen Sie die Antwort $\mathbf{x}^{(4)}(t)$ des Systems auf den Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = \sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$.

b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das folgende zeitdiskrete System (Regelkreis) mit der Führungsgröße *r* und der Ausgangsgröße *y*:



a) Als Führungsgröße wird – bei verschwindendem Anfangszustand - die Folge $(r_i) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ gewählt. Für die Elemente der zugehörigen Ausgangsfolge gilt dann:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0,1 \\ -2 \cdot (-0.5)^{i-1} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{r(z)}\right|_{AW=\mathbf{0}}$.

b) Berechnen Sie die ersten fünf Elemente der Sprungantwort des Systems.

c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $L(z)$.

d) Besitzt $L(z)$ die BIBO - Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an.)*