Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 28. 10. 2010

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	6	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei das freie System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y, wobei einige Parameter des Systems unbekannt sind:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad (\alpha \text{ und } \beta \text{ sind reelle Parameter})$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Ausgehend von einem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ wurde die Ausgangsgröße $y(t) = 3e^{-2t}$ gemessen. Außerdem sei auch ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ bekannt.

a) Bestimmen Sie die unbekannten Parameter α und β!
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$!
d) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für folgende Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) soll erkennbar sein!

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Differenzengleichung eines zeitdiskreten Systems mit der Eingangsfolge (u_i) und der Ausgangsfolge (y_i):

$$y_{i+2} + 3y_{i+1} + 2y_i = u_{i+1} + 2u_i \quad (i = 0,1,2,...)$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}}$.

b) Bestimmen Sie ein Zustandsraummodell der Form

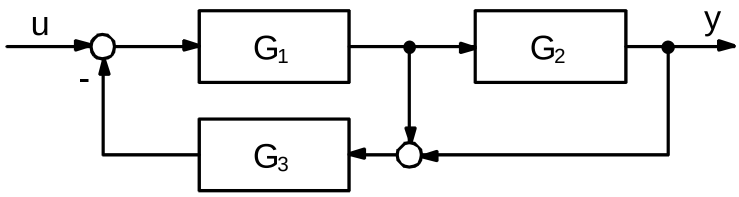
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{A}_d\, \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d\, u_i \\ y_i &= \mathbf{c}_d{}^T \mathbf{x}_i + d_d u_i \end{aligned}.$$

Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

c) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe3:

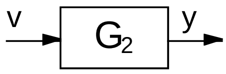
Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

Für das 1. Teilsystem gelte nun $G_1(s) = 4$.

b) Das Eingangs-Ausgangs-Verhalten des 2. Teilsystems

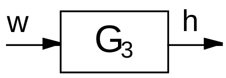


wird beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dt} + \beta y = \frac{dv}{dt} - v.$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ in Abhängigkeit des reellen Parameters β!

c) Beim 3. Teilsystem



handelt es sich um ein System 1. Ordnung. In einem Labor wurde dieses System untersucht und folgende *Sprungantwort* gemessen:

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \quad \text{für} \quad w(t) = \sigma(t)$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_3(s)$.

d) Zeigen Sie nun, dass $T(s)$ durch

$$T(s) = \frac{4(s-1)(s+2)}{s^2 + s(\beta+10) + 6\beta - 4}$$

gegeben ist.

e) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich von β für welchen die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $T(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt!

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes System mit der Eingangsgröße *u*, der Ausgangsgröße *y* und dem Zustandsvektor **x**:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Die Transitionsmatrix des obigen Systems lautet:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

d) Auf das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

wird die Eingangsgröße $u(t) = 9 + 3\cos(2t)$ aufgeschaltet. Bestimmen Sie den Ausgang $y(t)$ des Systems im *eingeschwungenen* Zustand.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 01.02.2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	5	6	5	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes zeitinvariante System 3. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} .$$

Ausgehend von den drei Anfangszuständen $\mathbf{x}^{(1)}(t_0)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t_0)$ und $\mathbf{x}^{(3)}(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ wurden die drei zugehörigen Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ und $\mathbf{x}_3(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zu obigem System gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Bestimmen sie die Eigenwerte und zugehörige Rechts-Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

Aufgabe 2

Gegeben seien das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sowie die zugehörige Übertragungsfunktion:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad G(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + (5-\alpha)s^2 + (6-5\alpha)s - 6\alpha}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

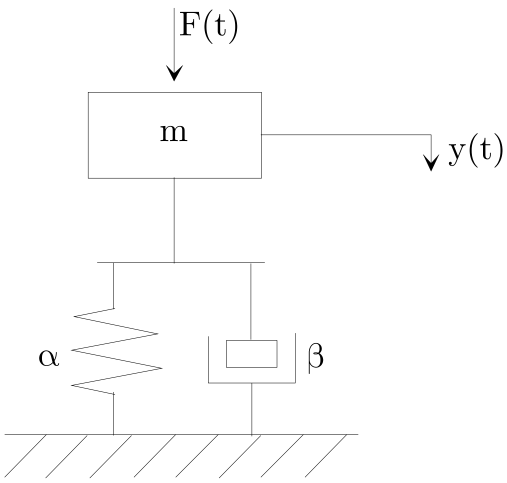
a) Zeichnen Sie das Strukturbild des Systems.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, für den das obige System asymptotisch stabil ist.

c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, für den das System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 3

Betrachten Sie folgendes mechanisches System bestehend aus der reibungsfrei gelagerten Masse m, einer Feder mit der positiven Federkonstante α und einem Dämpfer mit der positiven Dämpferkonstante β. Die Position y der Masse wird ausgehend von einem Gleichgewichtszustand gemessen. Auf die Masse wirken eine Federkraft proportional zur Position der Masse, eine geschwindigkeitsproportionale Dämpferkraft und eine äußere Kraft F. Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}F \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein zeitdiskretes, lineares und zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Als Eingangsgröße wird – bei verschwindendem Anfangszustand - die Folge $(u_i) = (1,0,0,0,0,0,\ldots)$ gewählt. Für die Elemente der zugehörigen Ausgangsfolge gilt dann:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0,1 \\ -2\cdot(-0.5)^{i-1} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

Ermitteln Sie die z-Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems.

b) Berechnen Sie die ersten fünf Elemente der Sprungantwort des Systems.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 25.03.2011

Name / Vorname(n):

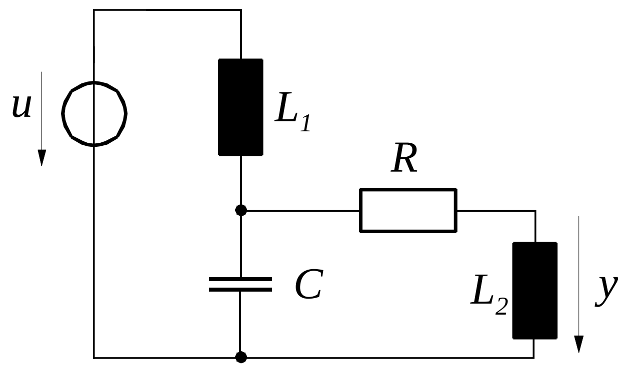
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	5	6	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

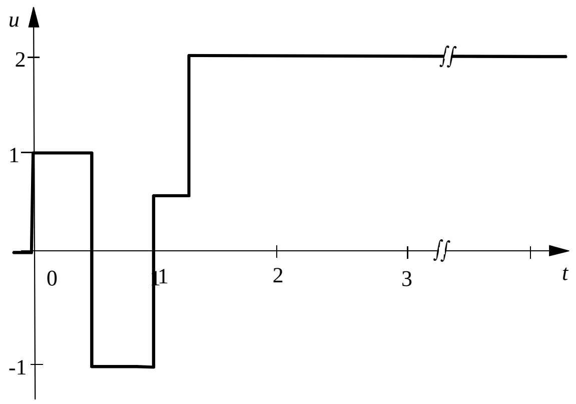
Betrachten Sie folgendes elektrisches Netzwerk bestehend aus idealen Bauteilen: den Ohmschen Widerständen (R), einer Kapazität (C) und zwei Induktivitäten (L_1, L_2). Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Für die Induktivitäten gilt: $L = L_1 = L_2$. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form:

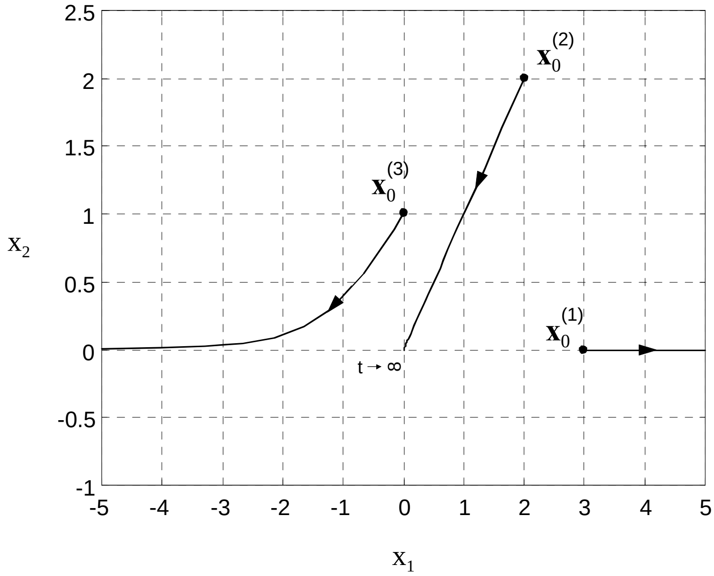
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

b) Ermitteln sie die **eingeschwungenen Lösungen** von $\mathbf{x}(t)$ und $y(t)$ für folgende Eingangsgröße $u(t)$:



Aufgabe 2:

Von einem LZI - System 2. Ordnung der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$ wurde für die Anfangswerte $\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}$ und $\mathbf{x}_0^{(3)}$ der zeitliche Verlauf der Trajektorien $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ $(i = 1,2,3)$ im Intervall $[0,\infty)$ aufgenommen:



Es ist außerdem bekannt, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix **A** bei $s_1 = 1$ und $s_2 = -3$ liegen.

a) Ermitteln Sie jeweils einen analytischen Ausdruck für die drei Lösungen $\mathbf{x}^{(i)}(t)$.

b) Berechnen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Ermitteln Sie die zugehörige Dynamikmatrix **A**.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das System asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

c) Ermitteln Sie die Menge der Anfangszustände $\mathbf{x}_0$, die durch die Eingangsfolge $(u_i) = (u_{\max}, -u_{\max}, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ nach zwei Zeitschritten in den Ursprung (d.h. $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$) gebracht werden können. Hierbei ist $u_{\max}$ ein reeller Parameter.

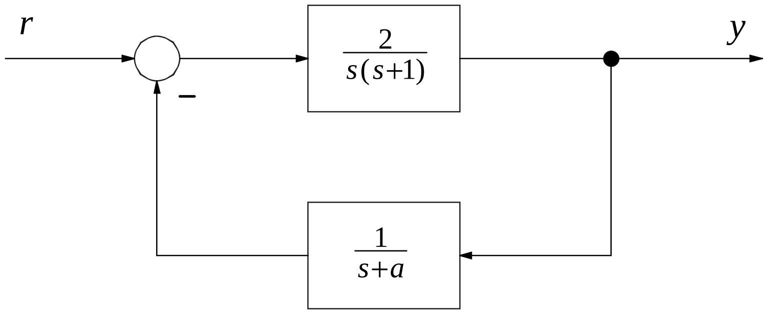
d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\dfrac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$.

e) Zeigen Sie, dass für die Gewichtsfolge des Systems gilt

$$g_i = 2\delta_i + (-1)^i(-2+3i) \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgender Regelkreis mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y :



Hierbei ist a ein reeller Parameter.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \left.\dfrac{y(s)}{r(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich von a damit die Übertragungsfunktion $T(s)$ die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Als Eingangsgröße wird nun die Sprungfunktion gewählt: $r(t) = \sigma(t)$

c) Berechnen Sie für die Parameterwerte $a = -2$ und $a = 2$ den *Grenzwert* der Ausgangsgröße $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 10. 06. 2011

Name / Vorname(n):

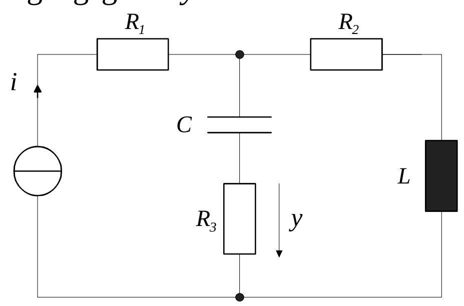
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	4	6	5	4	2
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus drei idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2 und R_3), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Der von der **idealen Stromquelle** gelieferte Strom wird mit i symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_3. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,i \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,i$$

b) **Berechnen (!)** Sie für die Eingangsgröße $i(t) = i_0\,\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad\qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Geben Sie eine mathematische Begründung für die **Existenz der Grenzwerte** an!

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad\qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie math. Begründungen an!

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

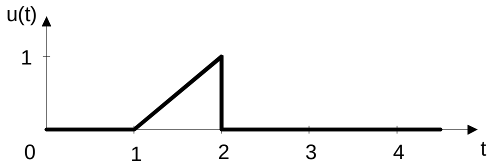
Aufgabe 3:

Das Eingangs-Ausgangsverhalten eines Systems mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* wird durch eine Differentialgleichung 2.Ordnung beschrieben:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=\frac{d^2u}{dt^2} \qquad y(0)=0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$$

a) Wie lautet die dazugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$?

b) Berechnen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für die Eingangsgröße $u(t)$:



c) Wie lautet die *eingeschwungene* Lösung $y(t)$ des Systems für die Eingangsgröße:

$$u(t)=3\sin(2t)+5\sigma(t)+3t\,\sigma(t)$$

Hinweis: $\arctan(5)\approx 79°$

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* LZI-System:

$$\mathbf{x}_{i+1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\mathbf{x}_i+\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}u_i \qquad y_i=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie eine math. Begründung an!

c) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems und stellen Sie diese graphisch dar.

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-a\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}u \qquad \text{und} \qquad y=\begin{bmatrix}0&0&0&3\end{bmatrix}\mathbf{x} \quad ,$$

mit dem reellen Parameter *a*. Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters *a* so an, dass das Modell die BIBO-Eigenschaft besitzt.