Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 29.10. 2009

Name / Vorname(n):

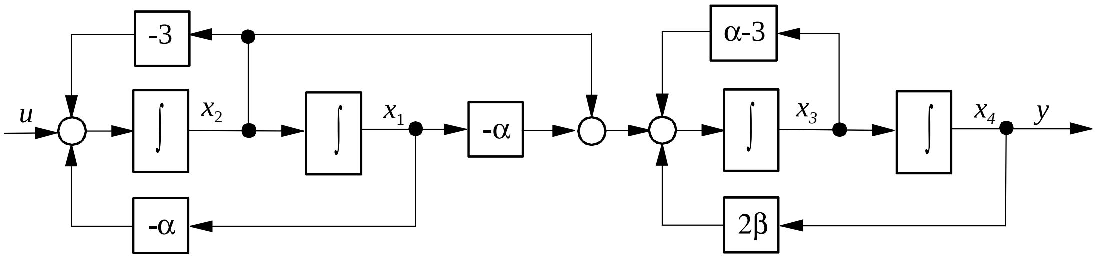
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	4	5	6	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Strukturbild eines Systems (Eingangsgröße u, Ausgangsgröße y):



Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\dfrac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β, für den die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt. Stellen Sie den ermittelten Bereich in der $\alpha\beta$-Ebene graphisch dar.

d) Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße

$$u(t) = 3 + 7\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

jeweils für die Parameterwerte

(i) $\alpha = 2$, $\beta = 3$
(ii) $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematisches Modell 2.Ordnung: $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$.

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ wurde die zugehörige Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} - 4e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

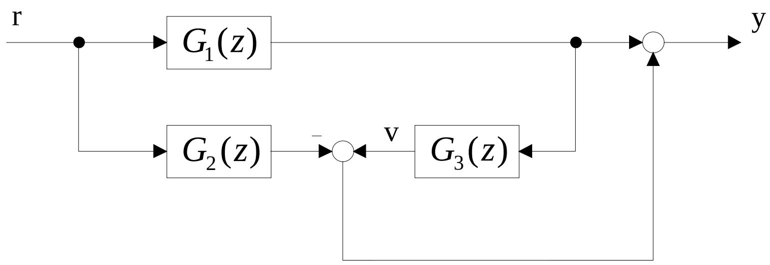
ermittelt.

a) Bestimmen Sie die zu obigem Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.

Aufgabe 3:

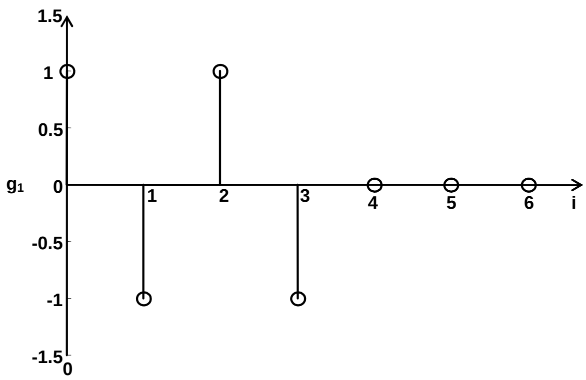
Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße *r* und der Ausgangsgröße *y*:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion:

$$T(z) = \left.\frac{y(z)}{r(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} .$$

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ des ersten Systems, das durch folgende Gewichtsfolge $\left(g_{1,i}\right)$ charakterisiert ist:



c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z)$ des zweiten Systems, das durch folgende Gewichtsfolge $\left(g_{2,i}\right)$ charakterisiert ist:

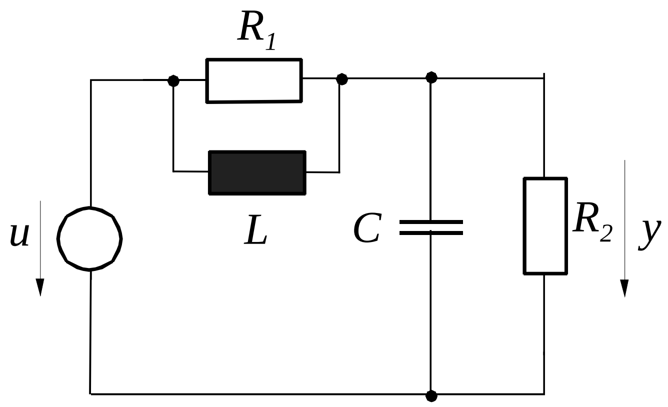
$$g_{2,i} = \begin{cases} 0 & i = 0,1 \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-2} + 4 & i \geq 2 \end{cases}$$

Die Übertragungsfunktion des dritten Systems lautet $G_3(z) = \frac{3}{2}$.

d) Untersuchen Sie die BIBO-Eigenschaft von $G_1(z)$, $G_2(z)$ und $G_3(z)$ (Begründen Sie ihre Antworten).

Aufgabe 4:

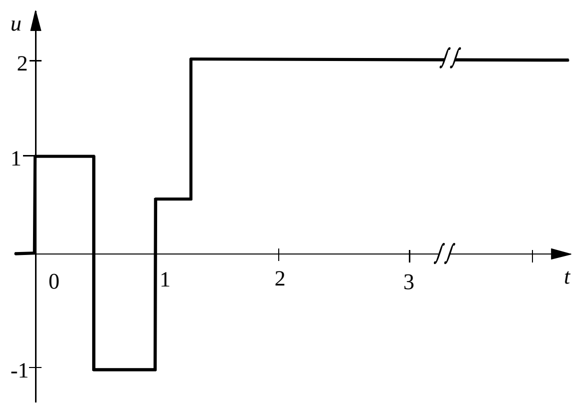
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität *L*, einer Kapazität *C* und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Hierbei gilt $R_1 = R_2 = R$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit *u* symbolisiert. Mit *y* bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor **x** ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

b) Bestimmen Sie für $u(t) = \sigma(t)$ die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ und $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Geben Sie eine mathematische Begründung an.)

c) Ermitteln sie die **eingeschwungenen Lösungen** von $\mathbf{x}(t)$ und $y(t)$ für folgende Eingangsgröße $u(t)$:



Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 01. 02. 2010

Name / Vorname(n):

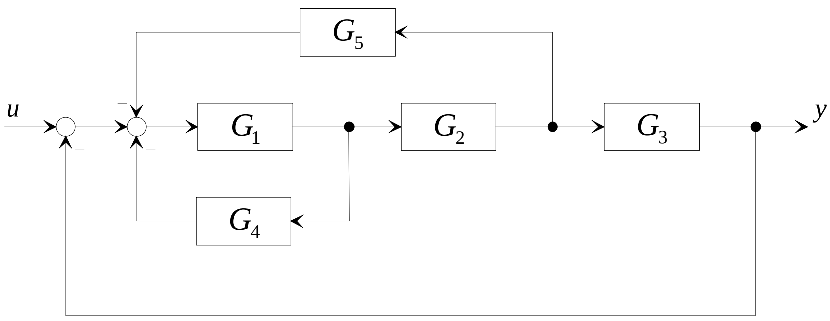
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	5	5	6	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von fünf Systemen mit den Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße *u*, der Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion $G(s)$ auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt (α und β sind reelle Parameter):

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s} \qquad G_4(s) = \alpha \qquad G_5(s) = \beta$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{x_0=0} = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + (1+\alpha)s^2 + \beta s + 1}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich der Parameter α und β, für den das System $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

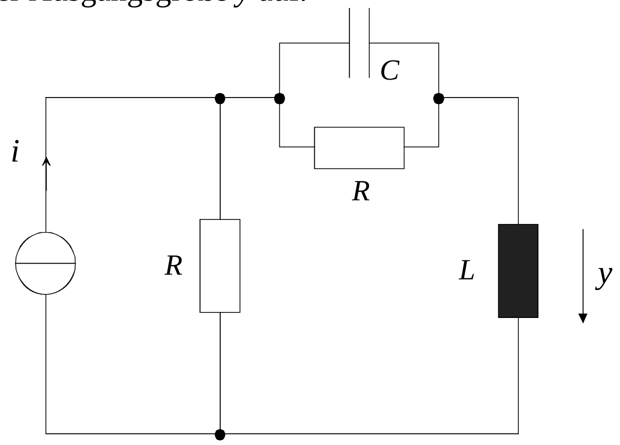
c) Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ $(t \gg 0)$ auf die Eingangsgröße $u(t) = 8\cos(t) + 2$, für zwei verschiedene Parameterkombinationen:

(i) $\alpha = 1$ und $\beta = 1$

(ii) $\alpha = 2$ und $\beta = 1$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Der von der **idealen Stromquelle** gelieferte Strom wird mit i symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,i \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,i$$

b) Welche Bedingungen müssen die Werte der Bauelemente erfüllen, damit das betrachtete System asymptotisch stabil ist?

c) **Berechnen (!)** Sie für eine Eingangsgröße $i(t) = i_0\,\sigma(t)$ die Grenzwerte $\mathbf{x}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ und $y_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* LZI-System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \qquad\qquad y_i = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

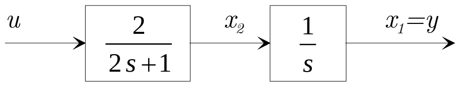
a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie math. Begründungen an!

c) Als Anfangszustand wird nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ gewählt. Wie lautet die Ausgangsgröße y_i, wenn für die Eingangsgröße $u_i = 2\sigma_i - 3\sigma_{i-4}$ gilt?

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild:



a) Ermitteln Sie das dazugehörige Zustandsraummodell:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u$$

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Skizzieren Sie für $u(t) \equiv 0$ den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 26. 03. 2010

Name / Vorname(n):

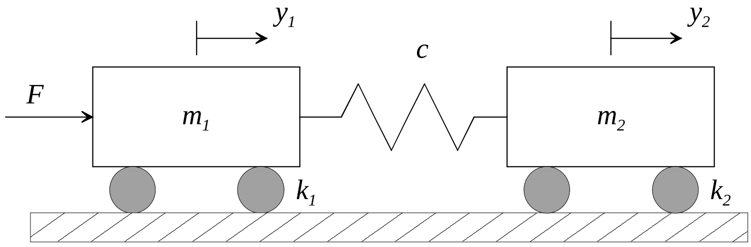
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	5	3	4	5	4	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes mechanische System zweier Massen m_1 und m_2 die durch eine „lineare“ Feder (Federkonstante c) miteinander verbunden sind:



Die Positionen y_1 und y_2 der Massen werden ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse m_1 wirken eine äußere Kraft F und eine geschwindigkeits-proportionale Reibkraft (Reibkonstante k_1). Auf die Masse m_2 wirkt ebenfalls eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft (Reibkonstante k_2). Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße $y = y_2$ auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,F, \quad y = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + d\,F$.

b) Zeichnen Sie das zu a) gehörige Strukturbild.

Aufgabe 2:

Die Übertragungsfunktion eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist gegeben durch:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{-7s+14}{(s-6)(s+1)}$$

a) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Art:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + d\,u$$

b) Berechnen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für den Fall $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $u(t) = e^{-t}$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form (a ist dabei ein reeller Parameter):

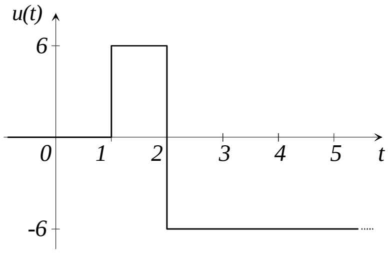
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Als Eingangsgröße soll die Funktion $u(t) = \sin(2t)$ verwendet werden.

a) Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters a so an, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ für große Zeiten ($t \gg 0$) ebenfalls durch eine harmonische Schwingung beschrieben wird.

b) Berechnen Sie die Ausgangsgröße im **eingeschwungenen** Zustand, wenn $a = 0$ gilt.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, wenn $a = 0$ gilt und als Eingangsgröße $u(t)$ folgende Funktion verwendet wird:



Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes LZI-System 2.Ordnung mit der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \qquad\qquad \mathbf{\Phi}(t) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{3t} + 2e^{-2t} & 3e^{3t} - 3e^{-2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{-2t} & 2e^{3t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 1\,u$$

a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$. Ist das System asymptotische stabil? Geben sie eine mathematische Begründung an!

b) Untersuchen Sie anhand der Gewichtsfunktion $g(t)$, ob das System die BIBO-Eigenschaft besitzt. Geben sie eine mathematische Begründung an!

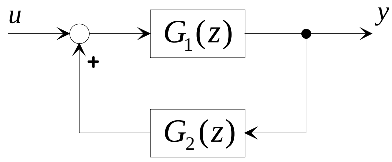
c) Skizzieren Sie für $u(t) \equiv 0$ den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 5:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße *r* und der Ausgangsgröße *y*:



a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(z)$ des ersten Teilsystems, das durch die Gewichtsfolge $\left(g_{1,i}\right)$ charakterisiert ist: $\left(g_{1,i}\right) = \left(0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\right)$

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_2(z)$ des zweiten Teilsystems, dessen Zustandsraummodell vorliegt:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \qquad w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

c) Besitzen die zwei Teilsysteme jeweils die BIBO-Eigenschaft? Geben Sie math. Begründungen an!

d) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\dfrac{y(z)}{u(z)}\right|_{AW=0}$. Besitzt die Übertragungsfunktion $G(z)$ die BIBO-Eigenschaft?

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 11. 06. 2010

Name / Vorname(n):

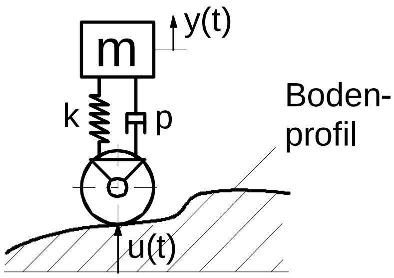
Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	5	3	5	6	2	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Rad-Aufhängung eines Autos:



Hierbei handelt es sich um ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System mit der Federkonstante k, der (geschwindigkeitsproportionalen) Dämpferkonstante p und der Masse m sowie einem starren, masselosen Rad. Wir betrachten nur die Vertikalbewegung der Anordnung!
Als Eingangsgröße wird die Höhe $u(t)$ des während der Fahrt zeitlich veränderlichen Bodenprofils verwendet. Die Ausgangsgröße $y(t)$ beschreibt die Position der Karosserie, wobei diese ausgehend vom Gleichgewichtszustand (Ruheposition) gemessen wird.

a) Bestimmen Sie bei verschwindenden Anfangszuständen die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

b) Für bestimmte Parameterwerte ergibt sich folgende Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2}.$$

Bestimmen Sie für verschwindende Anfangswerte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $u(t) = \sigma(t)$ die Ausgangsgröße $y(t)$. Geben Sie eine *graphische Darstellung* des Ausganges $y(t)$ an. *Hierbei soll der Verlauf für $t \to \infty$ erkennbar sein!*

c) Ermitteln Sie ein Zustandsraummodel der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Aufgabe 2:

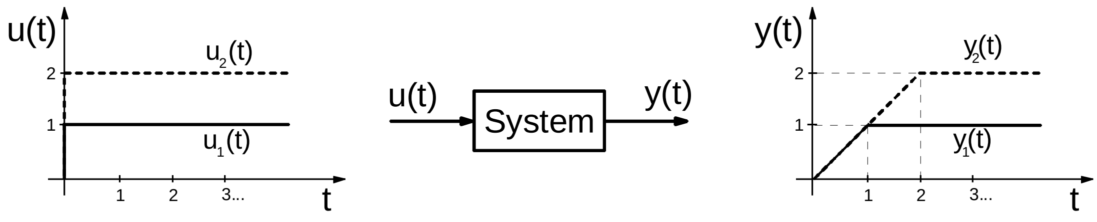
Betrachten Sie ein System mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$, d.h.

$$y(t) = \Gamma\left[u(\tau)\right] \quad \text{für} \quad 0 \le \tau \le t.$$

An diesem System wurden folgende Versuche durchgeführt:

- Bei einem ersten Versuch wurde die Sprungfunktion $u_1(t) = \sigma(t)$ auf das System geschaltet und die Ausgangsgröße $y_1(t)$ beobachtet.
- Bei einem weiteren Versuch wurde als Eingangsgröße die doppelte Sprungfunktion $u_2(t) = 2\sigma(t)$ gewählt und die Ausgangsgröße $y_2(t)$ beobachtet.

In den folgenden Diagrammen sind die gewählten Eingangs- und die erhaltenen Ausgangsgrößen dargestellt:



Stellen Sie fest, ob es sich um ein lineares oder ein nichtlineares System handelt! *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe 3:

Gegeben sei das freie mathematische Modell 2. Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 .$$

Ausgehend von zwei Anfangszuständen $\mathbf{x}_0^{(1)}$ und $\mathbf{x}_0^{(2)}$ wurden die zugehörigen Lösungen

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ermittelt.

a) Wie lauten die Anfangswerte $\mathbf{x}_0^{(1)}$ und $\mathbf{x}_0^{(2)}$?
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ und die Systemmatrix $\mathbf{A}$.
d) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für folgende Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{x}_0^{(5)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

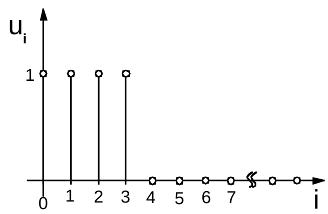
Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) soll erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(z) = \left. \frac{y(z)}{u(z)} \right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}}$.
d) Bestimmen Sie die zugehörige Gewichtsfolge (g_i) und stellen Sie diese *graphisch* dar.
e) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
f) Berechnen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und folgender Eingangsfunktion u_i



den Grenzwert $\lim_{i \to \infty} y_i$.

Aufgabe 5:

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion mit dem reeller Parameter K:

$$T(s) = \left. \frac{y(s)}{u(s)} \right|_{\mathbf{x}_0 = 0} = \frac{s+2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters K, für den die Übertragungsfunktion $T(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.