Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 23.10.2008

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	5	6	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 \\ \alpha & 0 & -(\alpha + 3) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter mit $\alpha \neq 3$.

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
b) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.
c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell 2.Ordnung $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$. In der durch fallende Börsenkurse ausgelösten Hektik gingen leider einige Daten der Dynamikmatrix verloren:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dafür kennt man einen Eigenwert $s_1 = -1$ und einen Rechts-Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

a) Ermitteln Sie alle Rechts-Eigenvektoren des obigen mathematischen Modells.
b) Bestimmen Sie a_{12} und a_{22} in Abhängigkeit des zweiten Eigenwerts s_2.
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, wenn für den zweiten Eigenwert s_2 gilt:

$$s_2^{(1)} = -2, \qquad s_2^{(2)} = 0, \qquad s_2^{(3)} = 1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete System mit der Eingangsgröße u_i, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_i$ und der Ausgangsgröße y_i:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -2.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_i$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
c) Berechnen Sie die zugehörige Gewichtsfolge (g_i) und stellen Sie diese graphisch dar.
d) Bestimmen Sie die Ausgangsgröße y_i des Systems, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ beträgt und als Eingangsgröße $u_i = 3\sigma_i$ aufgeschaltet wird.

Aufgabe 4:

Für die Übertragungsfunktionen zweier Systeme gilt:

System 1: $$G_1(s) = \left.\frac{y_1(s)}{u_1(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s+1}{s^3+s^2+s+2}$$

System 2: $$G_2(s) = \left.\frac{y_2(s)}{u_2(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s+1}{s^3+3s^2+s+2}$$

a) Geben Sie ein mögliches Zustandsraummodell für das erste System $G_1(s)$ an.
b) Berechnen Sie $y_1(t)$ und $y_2(t)$ für hinreichend große Werte von t ($t \gg 0$) für die Eingangsgröße:

$$u_1(t) = u_2(t) = 4 + 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 03. 02. 2009

Name / Vorname(n):

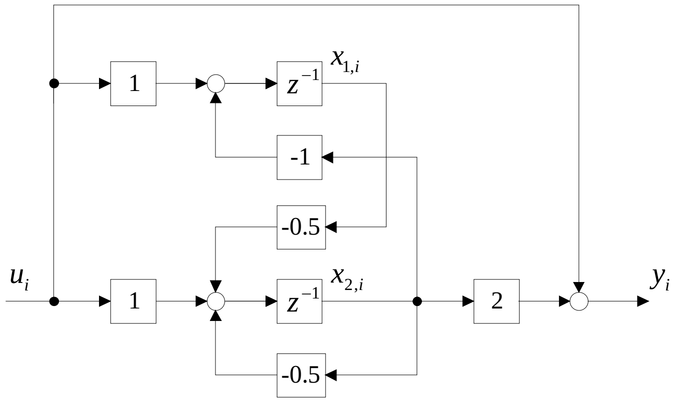
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	6	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Strukturbild eines *zeitdiskreten* Systems mit der Eingangsgröße u_i und der Ausgangsgröße y_i.



a) Geben Sie ein mathematisches Modell der Form $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d\, \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d\, u_i$, $y_i = \mathbf{c}_d^{\,T} \mathbf{x}_i + d_d\, u_i$ an.

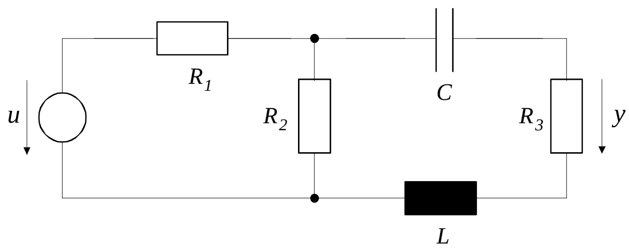
b) Berechnen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion: $G(z) = \left.\dfrac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0 = 0}$

c) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie math. Begründungen an!

d) Als Anfangszustand wird nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ gewählt. Wie lautet die Ausgangsgröße y_i, wenn für die Eingangsgröße $u_i \equiv 0$ gilt?

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Kapazität C, einer Induktivität L und drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_3. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Für die Widerstände gilt dabei $R_1 = R_2 = R_3 = R$.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

b) **Berechnen (!)** Sie für eine Eingangsgröße $u(t) = 2\,\sigma(t)$ die Grenzwerte $\mathbf{x}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ und $y_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Aufgabe 3:

Die Übertragungsfunktion eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist gegeben durch:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{-s+6}{(s+4)(s-1)}$$

a) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell *in Diagonalform*: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,,\; y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

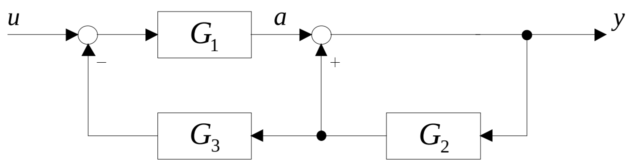
$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

d) Verändern sich die Eigenvektoren bei einer regulären Zustandstransformation? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Systemen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem $T(s)$ mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt ($\alpha \geq 0$):

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)} \qquad G_2(s) = \frac{s}{(s+\alpha)(s+1)} \qquad G_3(s) = \frac{-1}{s}$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{x_0=0} = \frac{(s+\alpha)(s+1)}{s^3 + (\alpha+2)s^2 + 3\alpha s + 2\alpha - 1}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α, für den das Gesamtsystem $T(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

c) Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort der *internen* Größe $a(t)$ ($t \gg 0$) auf die Eingangsgröße $u(t) = -2$, wenn $\alpha = 4$ gilt.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 13. 03. 2009

Name / Vorname(n):

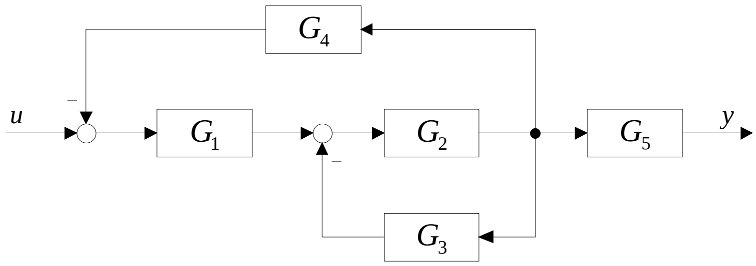
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	4	4	3	6	4	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von fünf Systemen mit den Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion $T(s)$ auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt (α und β sind reelle Parameter, $\alpha \geq 0$):

$$G_1(s) = 4 \qquad G_2(s) = \frac{1}{s} \qquad G_3(s) = \beta \qquad G_4(s) = \frac{1}{s+\alpha} \qquad G_5(s) = \frac{3}{s+3}$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{x_0=0} = \frac{12(s+\alpha)}{\left[s^2 + (\alpha+\beta)s + 4 + \alpha\beta\right](s+3)}$$

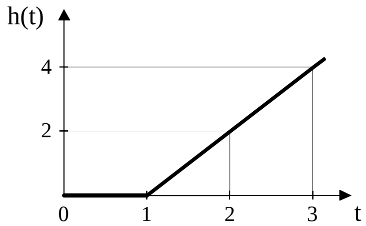
gegeben ist.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, wenn als Eingangsgröße $u(t) = 6\sigma(t)$ gewählt wird und die Parameter mit $\alpha = 1$ und $\beta = 2$ festgelegt werden.

c) Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ $(t \gg 0)$ auf die Eingangsgröße $u(t) = 6 + \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, wenn $\alpha = 1$ und $\beta = -2$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Sprungantwort $h(t)$ eines LZI-Systems:

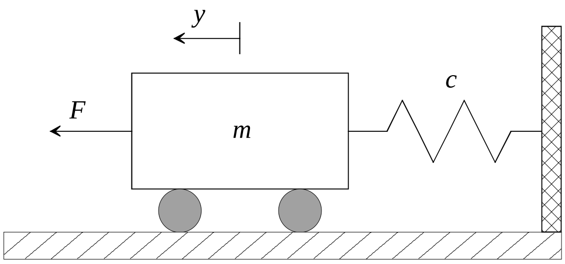


a) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

b) Berechnen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$, wenn als Eingangsgröße $u(t) = 4\sigma(t) - 2\sigma(t-2)$ gewählt wird und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gilt. Stellen Sie die Funktion $y(t)$ graphisch dar.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes mechanische System mit der Masse m und einer Feder, die durch eine lineare Federkennlinie (Federkonstante c) beschrieben wird:



Die Position y der Masse wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse wirken zusätzlich eine äußere Kraft F und eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft (Reibkonstante k). Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,F, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,F.$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2\,u$$

a) Ist das Modell asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie mathematische Begründungen an!

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Skizzieren Sie für $u(t) \equiv 0$ den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* LZI-System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i \qquad\qquad y_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das System asymptotisch bzw. BIBO-stabil? Geben Sie math. Begründungen an!

c) Als Anfangszustand wird nun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ gewählt. Wie lautet die Ausgangsgröße y_i, wenn für die Eingangsgröße $u_i = (-0.5)^i$ gilt?

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 19.6.2009

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	7	6	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Gewichtsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems (für $t \geq 0$):

$$g(t) = \frac{1}{t+1}$$

a) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
b) Berechnen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$ und verschwindende Anfangszustände. Stellen Sie die Funktion $y(t)$ graphisch dar.

Hinweis:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines homogenen Systems 2.Ordnung mit verschiedenen Eigenwerten, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a_1 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)
Im Labor stellte man erstaunt fest, dass bei zwei verschiedenen Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ die gleiche Ausgangsfunktion $y(t) = e^{-3t}$ gemessen wurde (für $t \geq 0$).

a) Bestimmen Sie einen nichttrivialen (also vom Nullvektor verschiedenen) Anfangszustand, mit dem für $t \geq 0$ gilt: $y(t) \equiv 0$. (*Hinweis: Das System ist linear!*)
b) Ermitteln Sie den Wert von c_2.
c) Bestimmen Sie den Wert von a_1.
d) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
e) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Aufgabe 3:

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist gegeben mit:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{1}{2s^4 + 2s^3 + (\alpha+2)s^2 + s + \alpha + \beta}$$

(α und β seien hierbei reelle Parameter.)

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β, für den obiges System die BIBO-Eigenschaft besitzt. Stellen Sie diesen Bereich in der α-β-Ebene graphisch dar.

b) Für die Parameter gelte nun $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0$. Bestimmen Sie die eingeschwungene Antwort $y(t)$ ($t \gg 0$) des Systems auf die Eingangsgröße:

$$u(t) = 2 + 3\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße u_i, der Ausgangsgröße y_i und der Gewichtsfolge g_i:

$$g_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ (-2)^{i-1} - (-1)^{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft ? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d u_i \qquad y_i = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_i + d_d u_i$$

und zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild.