Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 20. 10. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	4	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Hierbei ist α ein reeller Parameter, der nur die Werte $\alpha_1 = +1$ und $\alpha_2 = -1$ annehmen kann.

Betrachten Sie im Folgenden jeweils die *beiden* Fälle $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Rechts-Eigenvektoren der Dynamikmatrix **A**.

b) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

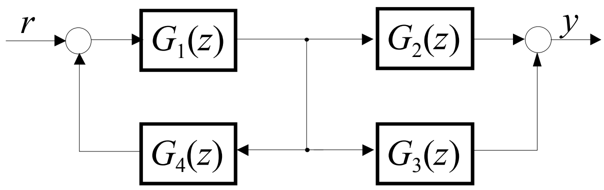
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein)

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Zusammenschaltung von vier Systemen mit den z-Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$ und $G_4(z)$.



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{r(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ als Funktion von $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$ und $G_4(z)$.

Für die Übertragungsfunktionen soll nun gelten:

$$G_1(z) = \frac{1}{z} \qquad G_2(z) = \frac{1}{z+\alpha},\ \alpha \text{ reell} \qquad G_3(z) = 1 \qquad G_4(z) = \frac{z}{z+1}$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T(z)$. Für welche Werte von α ist $T(z)$ BIBO-stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort*)

c) Setzen Sie nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Verlauf der Ausgangsgröße (y_i) an, wenn als Eingangsgröße $(r_i) = (1,0,0,0,0,0,...)$ gewählt wird.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein *nichtlineares* System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2^2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2^2 + 4x_2 + 3 + u^2$$
$$y = x_1^2$$

a) Bestimmen Sie unter der Annahme $u = u_R = 0$ *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

b) Geben Sie mathematische Modelle der Form

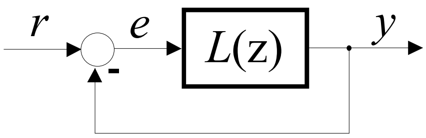
$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{z} + \mathbf{b}\,v \qquad\qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \mathbf{z}$$
$$\text{mit} \qquad\qquad u = u_R + v$$
$$w = \mathbf{c}^T\mathbf{z} + d\,v \qquad\qquad y = y_R + w$$

an, welche das Systemverhalten für *kleine Auslenkungen* aus den ermittelten Ruhelagen beschreiben.

c) Sind die in Punkt b) ermittelten Systeme asymptotisch stabil bzw. BIBO-stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort*)

Aufgabe 4:

Gegeben sei der folgende zeitdiskrete Regelkreis mit der Führungsgröße r, der Ausgangsgröße y und dem Regelfehler e:



a) Als Führungsgröße wird – bei verschwindendem Anfangszustand - die Folge $(r_i) = (1,0,0,0,0,0,\ldots)$ gewählt. Für die Elemente der zugehörigen Ausgangsfolge gilt dann:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0,1 \\ -2\cdot(-0.5)^{i-1} & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(z) = \left.\frac{y(z)}{r(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

b) Berechnen Sie die ersten fünf Elemente der Sprungantwort des Regelkreises.

c) Geben Sie den Verlauf des Regelfehlers e im eingeschwungenen Zustand an, wenn für die Elemente der Führungsgröße gilt:

$$r_i = 2 + \cos(i\pi) \quad \text{für} \quad i = 0,1,2,3,\ldots$$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 05. 02. 2007

Name / Vorname(n):

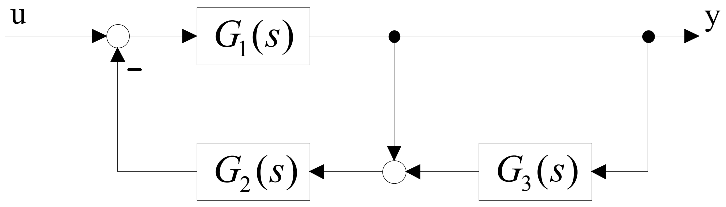
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	4	7	4	2	4
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Systemen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem $T(s)$ mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+2} \qquad G_3(s) = K$$

Hierbei ist K ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s+2}{s^3+4s^2+5s+3+K}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters K, für den das Gesamtsystem $T(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)$$

a) Ist das Modell asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

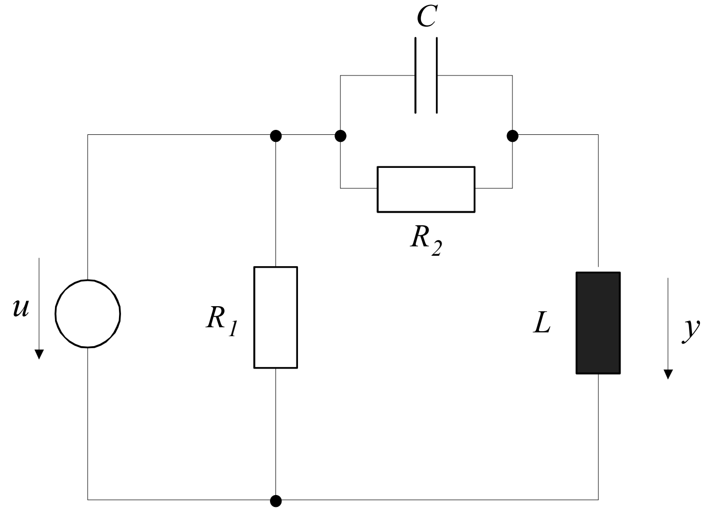
$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

d) Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u$$

Für die verwendeten Widerstände soll nun gelten: $R_1 = R_2 = R$

b) Berechnen (!) Sie für eine Eingangsgröße $u(t) = u_0\,\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 4:

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist gegeben mit:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0 = 0} = \frac{5}{(s+1)(s+4)}$$

Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ $(t\ ?\ 0)$ des Systems auf die Eingangsgröße:

$$u(t) = 16 - 6\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_i$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems.

b) Berechnen Sie die dazugehörige diskrete Gewichtsfunktion (g_i).

c) Ist das System asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

d) Ist das System BIBO-stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 16. 03. 2007

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	5
erreichbare Punkte	5	4	1	5	4
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell mit deren Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \qquad \mathbf{\Phi}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} & 3e^{3t} - 3e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

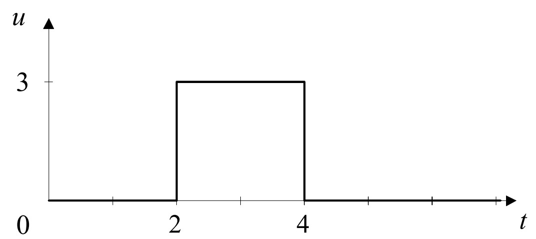
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2\,u$$

a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Berechnen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$.

c) Ist das System BIBO-stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

d) Als Anfangszustand wird nun $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$ gewählt. Wie lautet die Ausgangsgröße $y(t)$ wenn die Eingangsgröße $u(t)$ gegeben ist durch:



Aufgabe 2:

Für die Übertragungsfunktionen zweier LZI-Systeme gilt:

System 1: $$G_1(s) = \left.\frac{y_1(s)}{u_1(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s-2}{s^3+s^2+4s+2}$$

System 2: $$G_2(s) = \left.\frac{y_2(s)}{u_2(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s-2}{s^3+s^2+2}$$

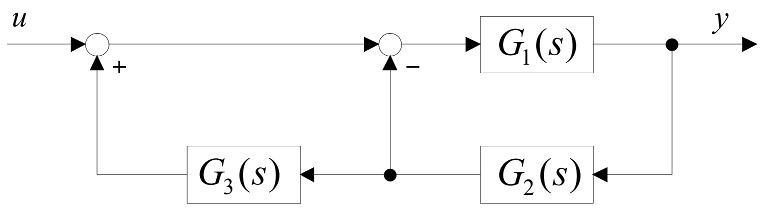
a) Bestimmen Sie die *eingeschwungenen* Antworten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ ($t \gg 0$) der beiden Systeme auf die Eingangsgrößen:

$$u_1(t) = u_2(t) = 7 - 2\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der 2.Normalform (Beobachtbarkeitsnormalform) ein mögliches Zustandsraummodell für das zweite System $G_2(s)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \left.\dfrac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$ als Funktion der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das folgende *zeitdiskrete* System:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} u_i$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das System asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

c) Ermitteln Sie die Menge der Anfangszustände $\mathbf{x}_0$, die durch die Eingangsfolge $(u_i) = (u_{\max}, -u_{\max}, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ in den Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gebracht werden können ($u_{\max}$ ist dabei ein reeller Parameter).

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)$

a) Ist das Modell asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 22.6.2007

NACHNAME:

Vorname(n):

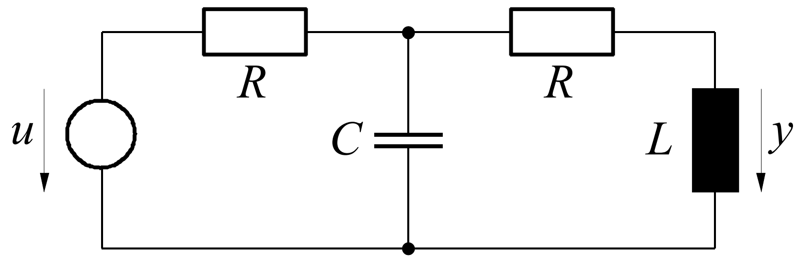
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3	4	5	
erreichbare Punkte	5	5	3	4	4	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Kapazität C, einer Induktivität L und zwei Ohmschen Widerständen R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

b) **<u>Berechnen</u>** (!) Sie für die Eingangsfunktion $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell 2.Ordnung $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Durch ein Versehen gingen leider einige Daten der Dynamikmatrix verloren:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dafür kennt man einen Eigenwert -1 und einen Rechts-Eigenvektor $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$.

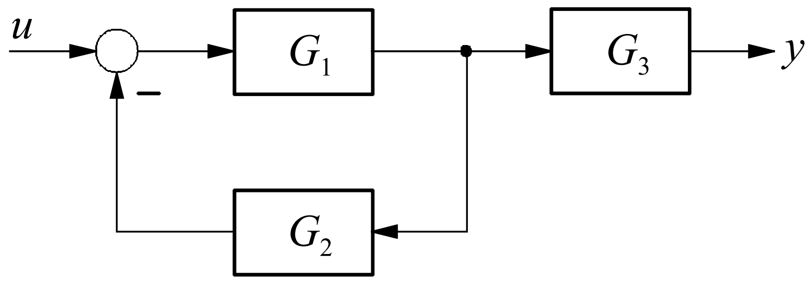
a) Bestimmen Sie die vollständige Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
b) Ermitteln Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(hierbei muß der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme (G_1, G_2, G_3) gelte:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s-2}, \quad G_2(s) = \frac{k}{s+3}, \quad G_3(s) = \frac{s-1}{s+2}.$$

(k ist hierbei ein reeller Parameter)

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Gesamtsystems.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters k, für den obiges Gesamtsystem die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße u_i, der Ausgangsgröße y_i und der Gewichtsfolge (g_i):

$$g_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ (-2)^{i-1} - (-1)^{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \left.\frac{y(z)}{u(z)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft ? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_d u_i \qquad y_i = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_i + d_d u_i$$

und zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild.

Aufgabe 5:

Von einem linearen und zeitinvarianten System $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ lauten für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0$$

die Systemantworten $\mathbf{x}^{(i)}(t) = \Gamma\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i)}(0) \\ u^{(i)}(\tau) \end{pmatrix}$ (mit $0 \le \tau \le t$ und $i = 1,2,3$):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf einen Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = \sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$.

b) Bestimmen Sie die Transistionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.