Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 29. 10. 2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

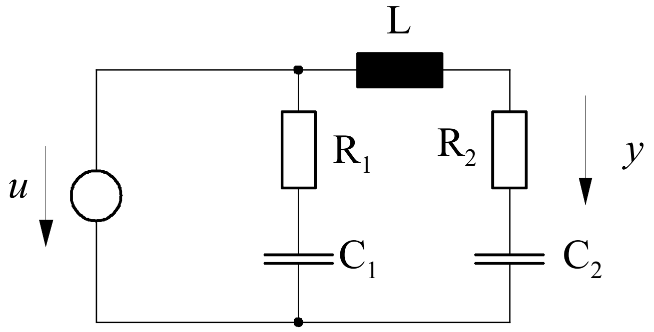
BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS 2003/04:

WS 2002/03:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), den Kapazitäten (C_1, C_2) und der Induktivität (L). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte: $\lim_{t\to\infty} y(t), \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t).$

(*Hinweis:* Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine längeren Berechnungen notwendig*. Physikalische Überlegungen [sofern korrekt begründet und schlüssig] sind ausreichend!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{4t} \\ 4e^{4t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

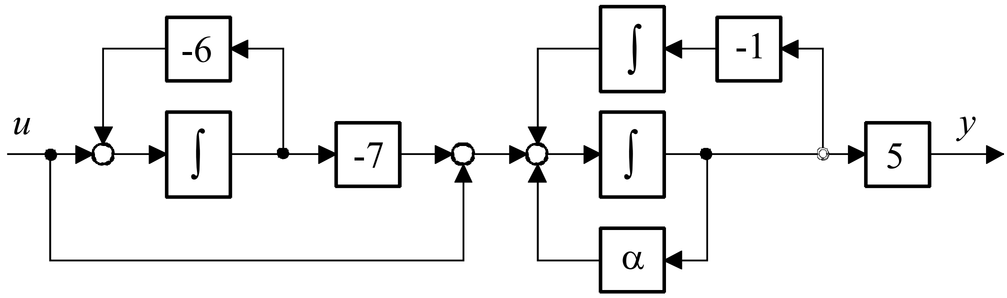
b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Die Größe α ist hierbei ein reller Parameter.



a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du$$

auf. Wählen Sie hierbei geeignete Zustandsvariablen und zeichnen Sie diese im Strukturbild ein.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.

c) Ist es möglich, dass obiges System nicht asymptotisch stabil ist und dennoch die BIBO Eigenschaft besitzt? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

Aufgabe 4:

Gegeben seien die mathematischen Modelle für zwei Systeme mit den Eingangsgrößen u_1 bzw. u_2 und den Ausgangsgrößen y_1 bzw. y_2 auf.

1) $$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u_1$$
$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_1 + u_1$$

2) $$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}u_2$$
$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2$$

a) Überprüfen Sie das System (1) auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit indem Sie die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_{u1}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{B}_{y1}$ bestimmen.

b) Überprüfen Sie anhand der im Punkt (a) berechneten Matrizen $\mathbf{S}_{u1}$ und $\mathbf{B}_{y1}$ das System (2) auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 8. 2. 2005

Name / Vorname(n):

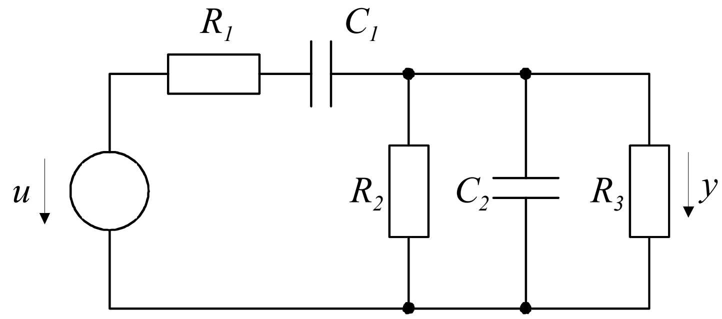
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	4	6
erreichte Punkte				

Aufgabe1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Kapazitäten (C_1, C_2) und drei Ohmschen Widerständen (R_1, R_2, R_3). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an Wiederstand R_3 (siehe Skizze). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad \textit{sowie} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Hinweis: Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine* längeren Rechnungen notwendig, physikalische Überlegungen sind ausreichend.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3:

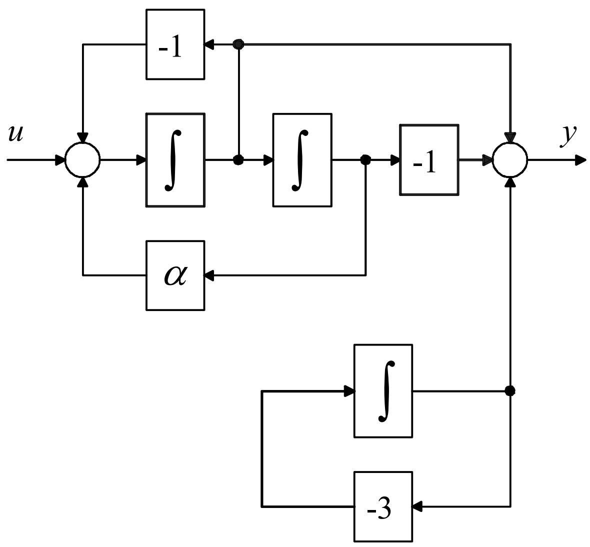
Gegeben sei ein freies *nichtlineares* System mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^T$:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + \lambda_2\left(1 - 3\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2\right)$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems.
b) Geben Sie ein lineares mathematisches Modell an, welches das Systemverhalten für kleine Abweichungen von der Ruhelage beschreibt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Die Größe α ist hierbei ein reeller Parameter.



a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

auf.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das System asymptotisch stabil ist.
c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das System die BIBO-Eigenschaft besitzt.
d) Ist das Modell steuerbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 14. 3. 2005

Name / Vorname(n):

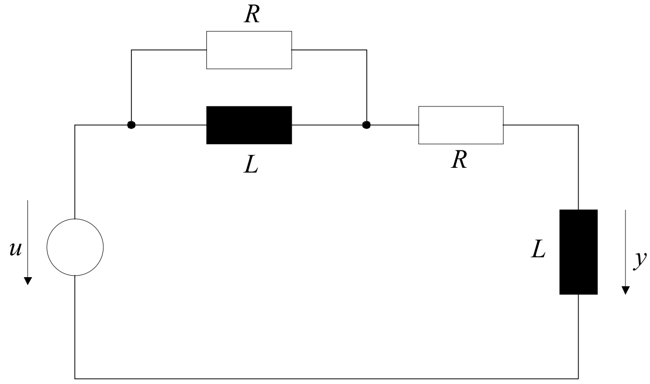
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Induktivitäten L und zwei Ohmschen Widerständen R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L (siehe Skizze). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Wählen Sie nun für die Bauteile folgende Werte:

$$R = 1\Omega$$
$$L = 1H$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ zu obigem System.

c) Für bestimmte Werte der Bauelemente lautet die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + 3s + 1}.$$

Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für hinreichend große Werte von t ($t \gg 0$), wenn als Eingangsgröße $u(t) = \sqrt{2}\sin(t)$ gewählt wird.

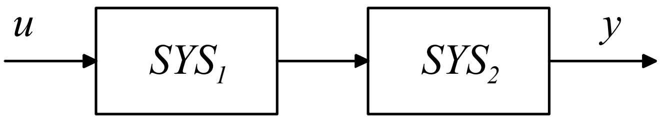
Aufgabe 2:

Gegeben seien die mathematischen Modelle zweier Systeme mit den Eingangsgrößen u_1 bzw. u_2, den Zustandsvektoren $\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ bzw. x_3 und den Ausgangsgrößen y_1 bzw. y_2:

$$SYS_1: \quad \frac{d\mathbf{z}_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \qquad SYS_2: \quad \frac{dx_3}{dt} = x_3 + u_2$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} -8 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 + u_1 \qquad y_2 = x_3$$

Betrachten Sie die Serienschaltung der beiden Systeme:



a) Ist das entstandene System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Systems.
c) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
d) Ist das System steuerbar *und* beobachtbar? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein mathematisches Modell 2. Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0) =: \mathbf{x}_0$ wurde eine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 + e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

ermittelt.

a) Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
b) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein freies *nichtlineares* System mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^T$:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -0.5\lambda_2 - \sin\lambda_1$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems.
b) Geben Sie ein lineares mathematisches Modell an, welches das Systemverhalten für kleine Abweichungen von der Ruhelage $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ beschreibt.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 24.6.2005

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS2004/05:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	5	4	6
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei seien α und β reelle Parameter mit $\beta \neq -1$.

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.
c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β, damit das obige mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β, damit das obige System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes *nicht steuerbare* mathematische Modell eines Systems 2.Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Weiters ist ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_1^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1 = -2$ bekannt.

a) Bestimmen Sie den zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ des obigen mathematischen Modells.
b) Ist das mathematische Modell *beobachtbar* ? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, wenn für den zum zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ zugehörigen Eigenwert s_2 gilt:

$$s_2^{(1)} = -1, \qquad s_2^{(2)} = 0, \qquad s_2^{(3)} = 1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes nichtlineare mathematische Modell mit den Zustandsgrößen λ_1, λ_2:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + 2$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{4}{\lambda_1^2} - 1$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

b) Geben Sie für jede Ruhelage ein lineares mathematisches Modell an, welches das Systemverhalten für kleine Abweichungen von dieser Ruhelage beschreibt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} -2 & c_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}u$$

(a_1, a_2 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)

Auf das System werden jeweils (bei geeignet gewählten Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ folgende Eingangsfunktionen aufgeschaltet und Ausgangsgrößen beobachtet (für $t \geq 0$):

i. $u(t) = 2e^{1t}$ liefert $y(t) = 20e^{-1t}$
ii. $u(t) = 2e^{2t}$ liefert $y(t) = 20e^{-2t}$
iii. $u(t) = 2e^{\xi t}$ liefert $y(t) = 20e^{-3t}$ (ξ sei ein reeller Parameter)

a) Bestimmen Sie die Werte von a_1, a_2 und ξ.

b) Ermitteln Sie den Wert von c_2.

c) Berechnen Sie für den dritten Fall (iii.) den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.