Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 24.10.2003

Name / Vorname(n):

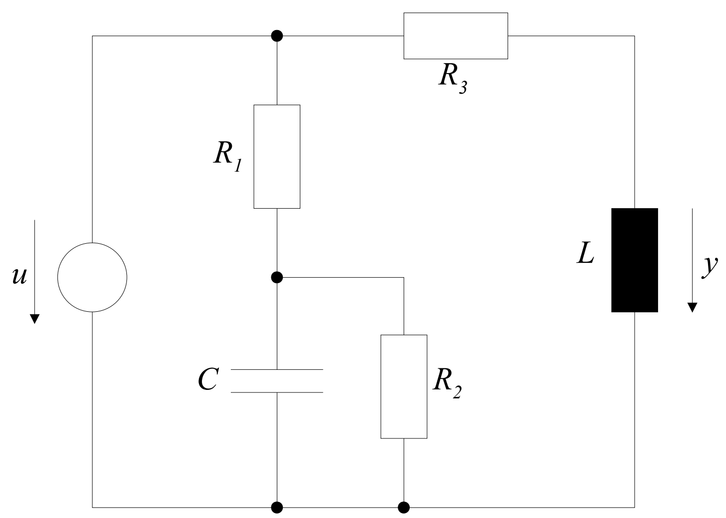
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad \textit{sowie} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Hinweis: Zur Berechnung dieser Frage sind *keine* längeren Rechnungen notwendig. Physikalische Überlegungen sind ausreichend!

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Geben Sie Bedingungen für die Parameter α und β an, damit das gegebene Modell beobachtbar wird.
b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Rechtseigenvektoren obigen Modells in Abhängigkeit des Parameters α .
c) Betrachten Sie nun das freie System ($u(t) = 0$) mit dem Anfangszustand

   $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

   Skizzieren Sie für die Fälle

   $$i)\, \alpha = -1 \quad und \quad ii)\, \alpha = 1$$

   den Verlauf der Trajektorien des mathematischen Modells in der (x_1, x_2)-Ebene (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte.

   Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) soll erkennbar sein.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die spektrale Darstellung der Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-t}$$

für das steuerbare mathematische Modell

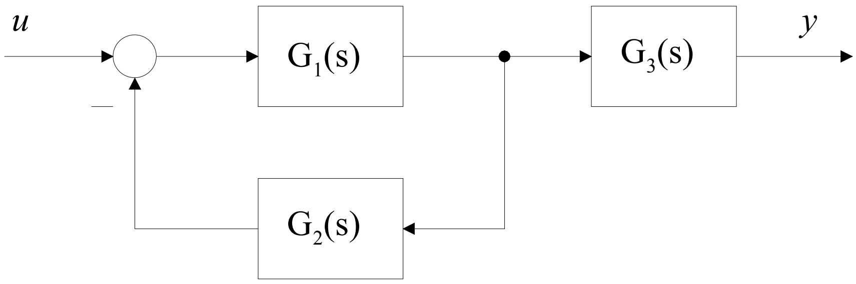
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Für den Eingangsvektor gelte: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$.

a) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
b) Geben Sie Bedingungen für die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 des Ausgangsvektors $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ an, so dass das mathematische Modell beobachtbar ist.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes Blockschaltbild eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Für die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme gelte:

$$G_1(s) = \frac{1}{s-2}, \quad G_2(s) = \frac{s+k}{s+3}, \quad G_3(s) = \frac{s-3}{s+2}.$$

Hierbei ist k ein reeller Parameter.

a) Untersuchen Sie, ob die drei Teilsysteme jeweils die BIBO-Eigenschaft besitzen.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Übertragungssystems.

c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters k für den obiges Übertragungssystem die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 03. 02. 2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

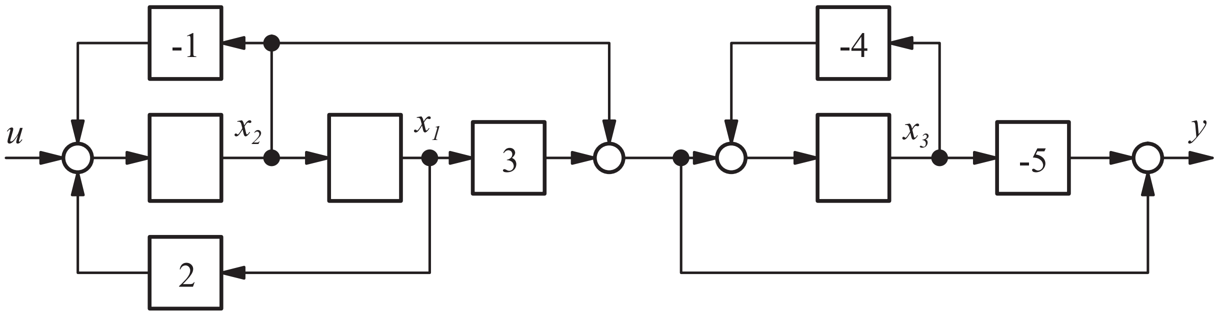
BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS 2003/04:

WS 2002/03:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	5	6	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Strukturbild eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + du$. Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := [x_1, x_2, x_3]^T$.

b) Stellen Sie das Übertragungssystem durch eine Zusammenschaltung von 2 geeignet gewählten Teilsystemen $\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 u_1,\ y_1 = \mathbf{c}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{z}_1 + d_1 u_1$ und $\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{z}_2 + \mathbf{b}_2 u_2,\ y_2 = \mathbf{c}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{z}_2 + d_2 u_2$ dar.

c) Bestimmen sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

d) Ist das mathematische Modell asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

e) Besitzt das Übertragungssystem die BIBO Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

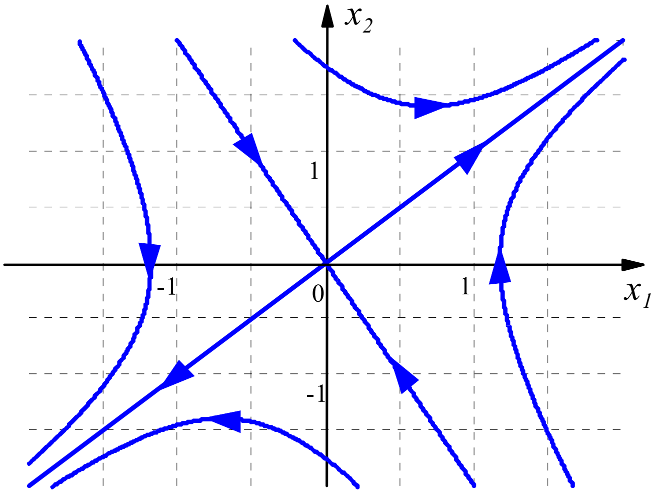
b) Auf das Übertragungssystem wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Eingangsfunktion $u(t) = 2e^{-3t}$ aufgeschaltet ($u(t) \equiv 0$ für $t < 0$). Für den Anfangszustand gelte $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Das zugehörige freie System ($u \equiv 0$) sei durch folgendes Trajektorienbild charakterisiert.



Ausgehend von 2 Anfangswerten $\mathbf{x}_0^{(1)}$ und $\mathbf{x}_0^{(2)}$, liegt für den Fall einer *verschwindender* Eingangsgröße $u^{(1)}(t) \equiv 0$ und $u^{(2)}(t) \equiv 0$, der zeitliche Verlauf der Meßgröße $y(t)$ vor:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y^{(1)}(t) = 3e^{t}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y^{(2)}(t) = e^{t} + e^{-2t}.$$

a) Ermitteln Sie die 2 Eigenwerte s_1 und s_2 des Systems.

b) Ermitteln Sie die zugehörigen Rechtseigenvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$, sowie den zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left[x_1^{(2)}(t) \quad x_2^{(2)}(t) \right]^T$ für den Anfangswert $\mathbf{x}_0^{(2)}$ und $t \geq 0$.

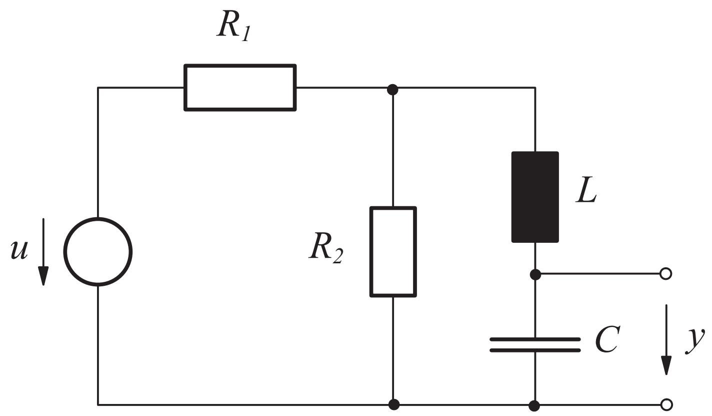
c) Ermitteln Sie den Ausgangsvektor $\mathbf{c}$ des mathematischen Modells.

d) Ist das mathematische Modell steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

e) Ist das mathematische Modell beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C. Fassen Sie das Netzwerk als ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 16. 03. 2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

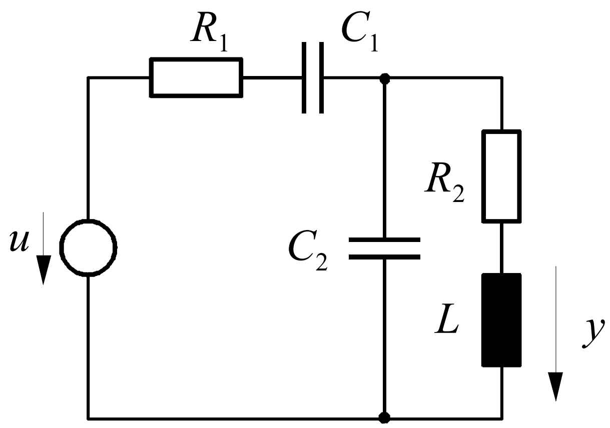
BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS 2003/04:

WS 2002/03:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	6
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), idealen Kapazitäten (C_1, C_2) und einer idealen Induktivität (L). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte
$\lim_{t\to\infty} y(t), \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t).$
(*Hinweis:* Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine längeren Berechnungen notwendig*. Physikalische Überlegungen [sofern korrekt begründet und schlüssig] sind ausreichend!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.$$

a) Ist das mathematische Modell asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Die Transitionsmatrix des obigen Modells lautet:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zu obigem Modell gehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.
b) Bestimmen Sie die zu obigem Modell gehörige Sprungantwort $h(t)$.
c) Auf das Übertragungssystem wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Eingangsfunktion $u(t) = Ue^{\xi t}$ aufgeschaltet. Die Antwort des mathematischen Modells auf diese Eingangsgröße soll nun für alle Zeiten $t \geq 0$ folgendermaßen lauten:

$$y(t) = 2e^{-5t} + e^{-3t}.$$

Bestimmen Sie die (konstanten) Größen $\mathbf{x}_0, U$ und ξ.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante mathematische Modell:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Hierbei bezeichnet α einen reellen Parameter.

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ einer regulären Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ so, dass die 3 Zustände $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ und $\mathbf{x}^{(3)}$ folgendermaßen transformiert werden:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \rightarrow \mathbf{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \rightarrow \mathbf{z}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \rightarrow \mathbf{z}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

b) Bestimmen Sie das transformierte mathematische Modell $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \quad y = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{z}.$

c) Für welche Werte α ist das transformierte System nicht beobachtbar? Gilt die mit Hilfe des transformierten Systems gewonnene Aussage auch für das Originalsystem? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik**
am 15. 06. 2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

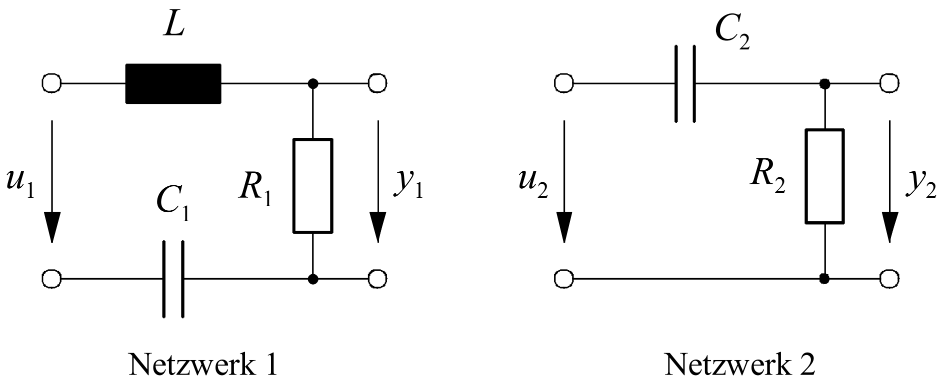
BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS 2003/04:

WS 2002/03:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgende elektrische Netzwerke bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), idealen Kapazitäten (C_1, C_2) und einer idealen Induktivität (L). Die Eingangsspannungen werden mit u_1 bzw. u_2 symbolisiert. Mit y_1 bzw. y_2 bezeichnen wir die Spannungen an den Widerständen R_1 bzw. R_2. Fassen Sie die Netzwerke als Systeme mit den Eingangsgrößen u_1 bzw. u_2 und den Ausgangsgrößen y_1 bzw. y_2 auf.



a) Wählen Sie geeignete Zustandsvariablen und ermitteln Sie mathematische Modelle der Form

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1 u_1, \quad y_1 = \mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + d_1 u_1,$$
$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2 u_2, \quad y_2 = \mathbf{c}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2 + d_2 u_2.$$

b) Betrachten Sie nun die Zusammenschaltung (Serienschaltung) der zwei Netzwerke, d.h. $u_2 = y_1$ und ermitteln Sie für den Fall $R_1 = R_2 = R$ ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du\ .$$

Der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ wird folgendermaßen definiert: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$.

Weiters gilt: $u := u_1, \quad y := y_2$.

c) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} y(t), \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t). \qquad \textit{Anmerkung}: \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(*Hinweis:* Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine längeren Berechnungen notwendig*. Physikalische Überlegungen [sofern korrekt begründet und schlüssig] sind ausreichend!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & -3/4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u\,.$$

a) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

b) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

a) Ermitteln Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Sprungantwort $h(t)$.

d) Auf das System wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Eingangsfunktion

$$u(t) = 1 + e^{-2(t-2)}\sigma(t-2)$$

aufgeschaltet. Für den Anfangszustand gelte $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für $t \geq 0$.

Hinweis: $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-a}$

Aufgabe 3:

Das Verhalten eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = u.$$

a) Wählen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und bestimmen Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

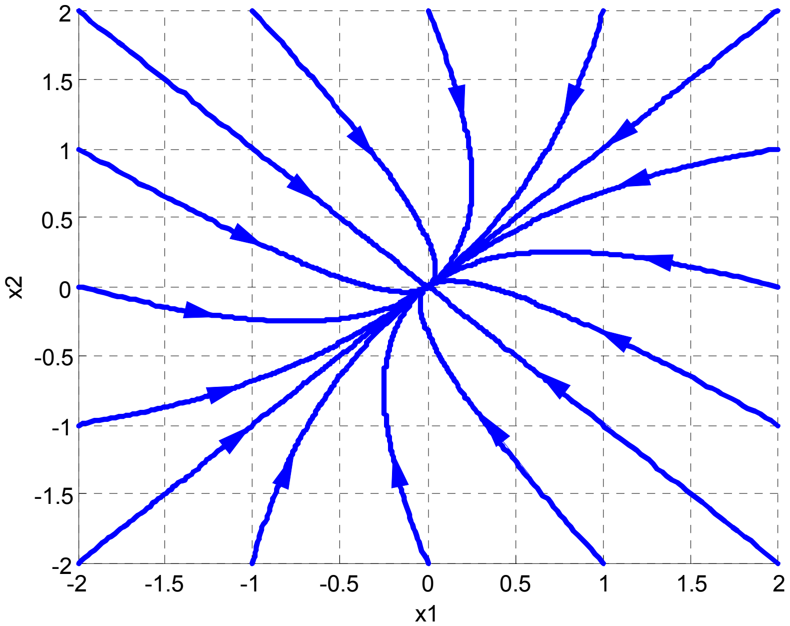
c) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft. *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*

Aufgabe 4:

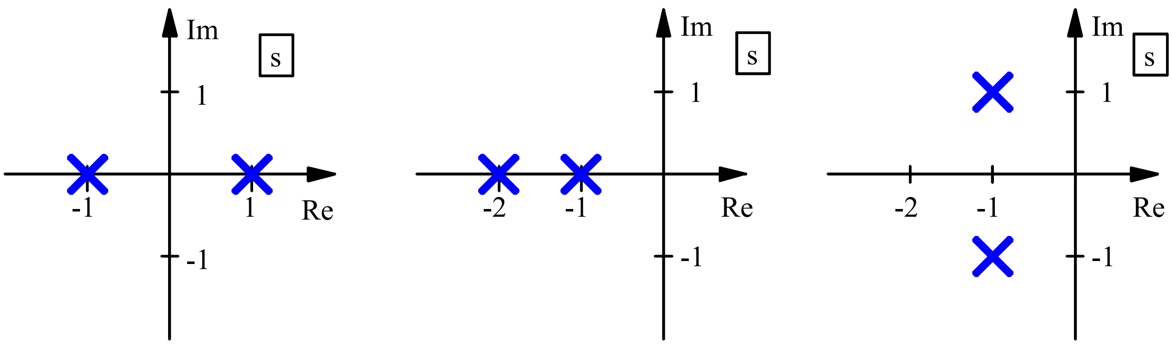
Gegeben sei das Trajektorienfeld eines linearen zeitinvarianten freien Systems der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

(Die Pfeilrichtung entspricht dem Verlauf der Trajektorie für anwachsende Zeiten t)



a) Ermitteln Sie, welche der 3 folgenden Eigenwert-Konfigurationen zu obigem System passt. *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*



(I) (II) (III)

b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

c) Bestimmen Sie für die im Punkt (a) gewählten Eigenwerte s_1, s_2 die zugehörigen Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.