Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 16.10.2002

Name / Vorname(n):

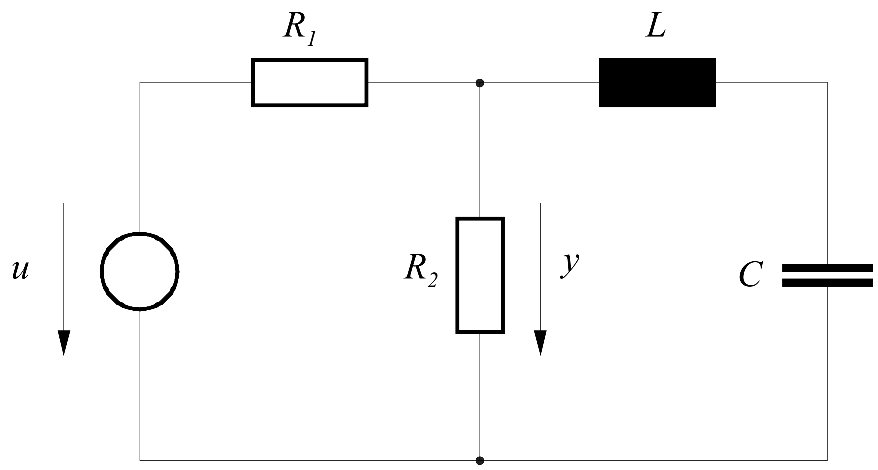
Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus der Induktivität L, der Kapazität C und zwei Ohmschen Widerständen R_1, R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.
Es gelte nun der Einfachheit wegen $R_1 = R_2 = R$.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Hinweis: Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine* längeren Rechnungen notwendig, physikalische Überlegungen sind ausreichend!

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes steuerbare mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & \beta \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Die Größe β ist hierbei ein reeller Parameter.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte der Systemmatrix.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Übertragungssystems.

c) Bestimmen Sie jene Parameterwerte von β für die das mathematische Modell nicht beobachtbar wird.

Der Parameter besitzt nun den Wert $\beta = 2$.

d) Bestimmen Sie eine Eingangsfunktion $u(t) = e^{pt}$ und einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ so, dass gilt:

$$y(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

Hinweis: $\quad e^{\gamma t} \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!● \quad \dfrac{1}{s-\gamma} \quad (t \geq 0)$

Aufgabe 3

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 3. Ordnung eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.

c) Besitzt das mathematische Modell die BIBO-Eigenschaft?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

d) Ist das mathematische Modell steuerbar?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 4

Gegeben sei ein mathematisches Modell 2. Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^T := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) =: \mathbf{x}_0$$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Untersuchen Sie das Modell auf asymptotische Stabilität.
(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) in der x_1-x_2 Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!).

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 4.2.2003

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

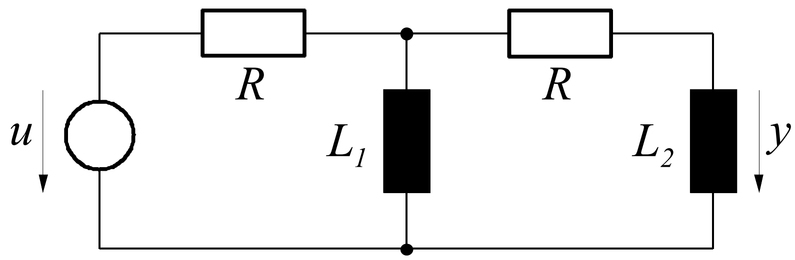
Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS2002/03:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	6	5	4	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Induktivitäten L_1, L_2 und zwei Ohmschen Widerständen R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein Übertragungssystem mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Es gelte $L_1 = L_2 = L$.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$
b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte: $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t),\quad \lim\limits_{t\to\infty} y(t).$
(*Hinweis:* Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine* längeren Rechnungen notwendig, physikalische Überlegungen sind ausreichend!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ \alpha & 0 & -(\alpha+3) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild des Übertragungssystems.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.
c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das obige mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das Übertragungssystem die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes asymptotisch stabile mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(α und β seien hierbei reelle Parameter)

Auf das Übertragungssystem wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 15e^{pt}$ aufgeschaltet und folgende Ausgangsgröße beobachtet (für $t \geq 0$): $y(t) = 10e^{2t} + 5e^{-3t}$

a) Bestimmen Sie die Werte von α, β und p.

b) Berechnen Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes nicht beobachtbare mathematische Modell eines Übertragungssystems 2.Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Weiters ist ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1 = -1$ bekannt.

a) Bestimmen Sie den zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ des obigen mathematischen Modells.

b) Ist das mathematische Modell *steuerbar* ? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)

c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, wenn für den zum zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ zugehörigen Eigenwert s_2 gilt:

$$s_2^{(1)} = -4, \qquad s_2^{(2)} = 0, \qquad s_2^{(3)} = 1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 18.3.2003

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung WS2002/03:

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	6	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild des Übertragungssystems.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.
c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das obige mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das Übertragungssystem die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(a_1, a_2, c_1 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)
Auf das Übertragungssystem werden jeweils (bei geeignet gewählten Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ folgende Eingangsfunktionen aufgeschaltet und Ausgangsgrößen beobachtet (für $t \geq 0$):

i. $u(t) = e^{-1t}$ liefert $y(t) = e^{-1t} + e^{-2t}$
ii. $u(t) = e^{pt}$ liefert $y(t) = e^{-2t} + e^{-3t}$ (p sei ein reeller Parameter)
iii. $u(t) = e^{-3t}$ liefert $y(t) = e^{-3t} + e^{-4t}$

a) Bestimmen Sie die Werte von a_1, a_2 und p.
b) Ermitteln Sie die Werte von c_1 und c_2.
c) Berechnen Sie für den zweiten Fall (ii.) den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines homogenen Systems 2.Ordnung mit verschiedenen Eigenwerten, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a_1, a_2 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)

Im Labor stellte man erstaunt fest, dass bei zwei *verschiedenen* Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ die *gleiche* Ausgangsfunktion $y(t) = e^{-3t}$ gemessen wurde (für $t \geq 0$).

a) Gibt es einen nichttrivialen (also vom Nullvektor verschiedenen) Anfangszustand, mit dem für $t \geq 0$ gilt: $y(t) \equiv 0$? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)

b) Ermitteln Sie den Wert von c_2.

c) Bestimmen Sie die Werte von a_1 und a_2.

d) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

e) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Hierbei muß der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Schriftliche Prüfung aus **Systemtechnik** am 27.06.2003

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

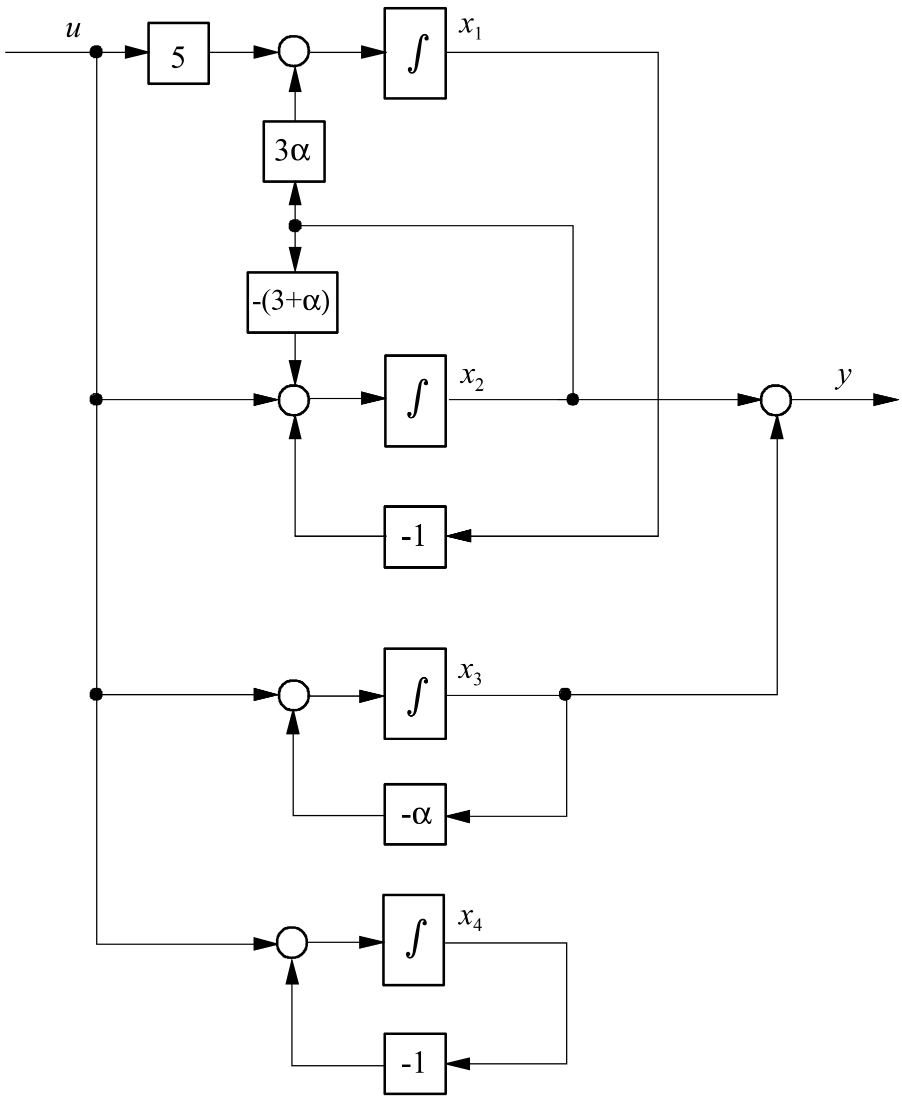
Geburtsdatum:

Bonuspunkte:

	1	2	3	
erreichbare Punkte	7	6	7	
erreichte Punkte				

Aufgabe1:

Gegeben sei das Strukturbild eines Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Die Größe α ist hierbei ein reeller Parameter.



a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$ auf. Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.

c) Bestimmen Sie *alle* Eigenwerte der Systemmatrix A.

d) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das Übertragungssystem die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 2. Ordnung.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Die zugehörige Lösung des *freien* Systems, ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-t} \\ e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

a) Ist das Modell steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Ist das Modell asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
c) Berechnen Sie die Systemmatrix **A**.
d) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten *t*) für $u(t) = 0$ folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien $(t \to \infty)$ erkennbar sein.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 3. Ordnung.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
b) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$ und skizzieren Sie deren Verlauf.
c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Übertragungssystems.
d) Ist obiges mathematische Modell steuerbar *und* beobachtbar? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*