Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 23.06.2021

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	3	3	2	2	3	3	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = \pi$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 2:

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y gegeben:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t + 5)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand*.

Hinweis: $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u(t)$, der Ausgangsgröße $y(t)$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + u. \end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 4:

Die Übertragungsfunktion $G(z)$ eines zeitdiskreten LZI Systems sei geben mit

$$G(z) = \frac{z^2 - z - \frac{3}{4}}{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{5}{2}z - 1}.$$

Ermitteln Sie ein *steuerbares und beobachtbares* Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + du_k \end{aligned}$$

welches diese Übertragungsfunktion besitzt.

Aufgabe 5:

Die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

sei gegeben mit

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-3t} - e^{-t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} & e^{-4t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-4t} & 0 & e^{-3t} - e^{-t} & e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

a) Ist dieses System asymptotisch stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

b) Ermitteln Sie alle Ruhelagen dieses Systems.

c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ sei gegeben mit

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Ermitteln Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Aufgabe 6:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u &= \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \end{bmatrix}u \\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} - 5u \end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *beobachtbar* ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *steuerbar* ist.

Aufgabe 7:

Gegeben sei das zeitdiskrete LZI System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems.

b) Geben Sie alle Polstellen und alle Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

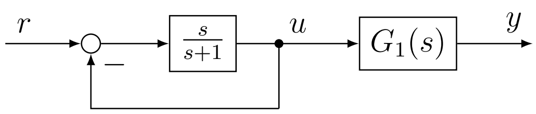
c) Ist dieses System BIBO - stabil?

d) Ist dieses System asymptotisch stabil für $u_k \equiv 0$?

(*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

Aufgabe 8:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y:



wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

c) Ist das Gesamtsystem BIBO - stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 28.10.2021

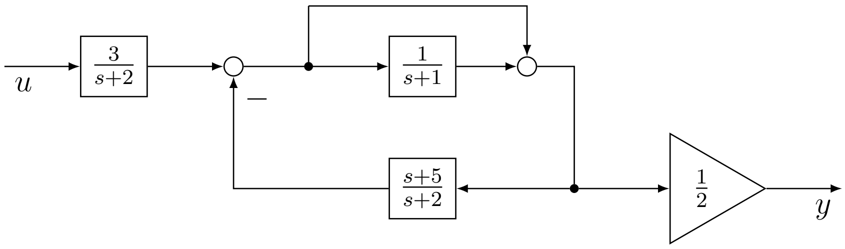
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	3	2	2	3	2	3	3	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = \sin(3t+2)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand*.

Hinweis: $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(-\varphi) = -\arctan(\varphi)$

Aufgabe 2:

a) Geben Sie die *Definition* von *Steuerbarkeit* und von *Beobachtbarkeit* eines zeitkontinuierlichen linearen zeitinvarianten Zustandsraummodells mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y an.

b) Untersuchen sie das zeitkontinuierliche LZI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Aufgabe 3:

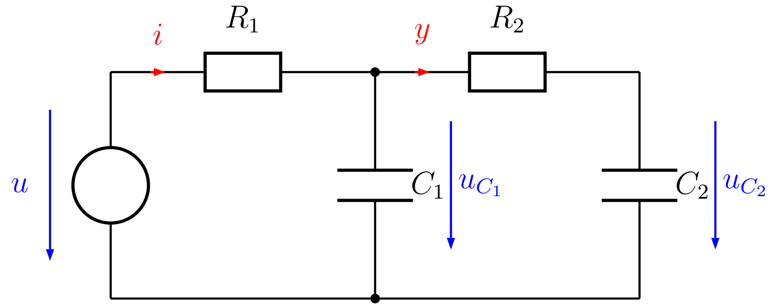
Gegeben sei das folgende nichtlineare System:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cos(x_1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u - x_2^2 + x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3^3.$$

Ermitteln Sie für $u = u_R = 1$ *alle* Ruhelagen des Systems.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideales elektrisches Netzwerk bestehend aus den ohmschen Widerständen R_1 und R_2, den Kapazitäten C_1 und C_2 und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit u symbolisiert, mit y wird der Strom durch den Widerstand R_2 definiert.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$.

a) Ist das System asymptotisch stabil für $u(t) \equiv 0$?

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Ist das System BIBO-stabil?

d) Handelt es sich bei diesem System um eine Minimalrealisierung?

(*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

Aufgabe 6:

Die Transitionsmatrix des zeitkontinuierlichen LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

sei gegeben mit

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 6-5e^{-3t} & 12-2e^{t}-10e^{-3t} & 6-6e^{t} \\ 3e^{-3t}-3 & 6e^{-3t}+e^{t}-6 & 3e^{t}-3 \\ 1-e^{-3t} & 2-2e^{-3t} & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Zustand zum Zeitpunkt $t_2 = 3$ ist gegeben mit $\mathbf{x}(t = t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie den Wert der Ausgangsgröße y zum Zeitpunkt $t_1 = 2$, also $y(t = t_1)$.

Aufgabe 7:

Betrachten Sie das lineare zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie dass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ dieses Systems einen *doppelten* Eigenwert bei 2 besitzt.

b) Zeigen Sie dass eine reguläre lineare Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ existiert, so dass die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ des transformierten Systems

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 8:

Die Differenzengleichung

$$u_{k-2} + u_{k-3} = y_k + \frac{3}{2}y_{k-1} + \frac{1}{2}y_{k-2}$$

beschreibt das Übertragungsverhalten eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systems mit der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k).

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion dieses Systems an.

b) Ist dieses System BIBO-stabil?

c) Geben Sie eine Minimalrealisierung dieses Systems in erster Normalform (Steuerbarkeitsnormalform) an.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 01.12.2021

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	2	3	3	3	3	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $y = u + x_3$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3 \\
\dot{x}_3 &= u + \sin(x_3)
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 1$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\
\Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u
\end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + (1+\alpha)u
\end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *beobachtbar* ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *steuerbar* ist.

Aufgabe 3:

Die Transitionsmatrix des zeitkontinuierlichen LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

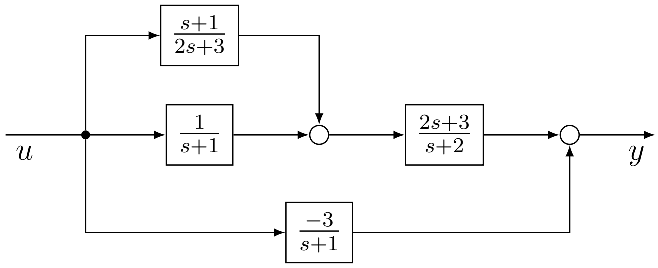
sei gegeben mit

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1-t & 2e^t - 4t - 2 & 2e^t - 3t - 2 \\ t & 4t - 5e^t + 6 & 3t - 5e^t + 5 \\ -t & 6e^t - 4t - 6 & 6e^t - 3t - 5 \end{bmatrix}.$$

Der Zustand zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{10}{3}$ ist gegeben mit $\mathbf{x}(t = t_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie den Wert der Ausgangsgröße y zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{4}{3}$, also $y(t = t_1)$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

Hinweis: $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(-\varphi) = -\arctan(\varphi)$

Aufgabe 5:

Gegeben sind die Zustandsmodelle von vier zeitkontinuierlichen LZI-Systemen:

System 1: $\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{(1)}$ $\qquad y^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}$

System 2: $\dot{x}^{(2)} = -3x^{(2)} - 4u^{(2)}$ $\qquad y^{(2)} = 3x^{(2)}$

System 3: $\dot{x}^{(3)} = -x^{(3)} + u^{(3)}$ $\qquad y^{(3)} = x^{(3)}$

System 4: $\dot{\mathbf{x}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(4)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u^{(4)}$ $\qquad y^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(4)}$

a) Welche dieser vier Zustandsmodelle sind eine *Realisierung* der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+3}$? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

b) Welche dieser vier Zustandsmodelle sind eine *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+3}$? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

Aufgabe 6:

Gegeben sei das zeitdiskrete LZI System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems.

b) Geben Sie alle Polstellen und alle Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

c) Ist dieses System BIBO - stabil?

d) Ist dieses System asymptotisch stabil für $u_k \equiv 0$?

(*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u_k, der Ausgangsgröße y_k und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k - 2u_k.$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k$$
$$y_k = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 8:

Geben Sie für ein Zustandsmodell *dritter Ordnung* mit Eingangsgröße u und Zustandsvektor $\mathbf{x}$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

für $u = u_R = 2$ jeweils eine mögliche Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und einen möglichen Eingangsvektor $\mathbf{b}$ an, so dass das System

a) eine Ruhelage besitzt.

b) keine Ruhelage besitzt.

c) unendlich viele Ruhelagen besitzt.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 02.02.2022

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	3	3	3	2	3	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y gegeben:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand* für folgende Eingangsgrößen:

a) $u(t) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$

b) $u(t) = \cos(t+2)$

c) $u(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t + 2\right) + 4\sin(t)$

Hinweis: $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

Aufgabe 2:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $y = x_1$ sei gegeben durch

$$\dot{x}_1 = x_2 u - x_1 \qquad \dot{x}_2 = 2 - x_3 \qquad \dot{x}_3 = u + \cos(x_1)$$

Linearisieren Sie das System in der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \pi & \pi & 2 \end{bmatrix}^T$ für $u_R = 1$ und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} u_k \\
y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k
\end{aligned}
$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Geben Sie *alle* Ruhelagen des Systems für $u_k \equiv u_R = -1$ an.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$.

c) Ist das System BIBO-stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche lineare zeitinvariante System

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Zeigen Sie, dass ein LZI System *dritter Ordnung* existiert, welches dieselbe Übertragungsfunktion wie das gegebene System besitzt. Geben Sie ein solches System in erster Normalform (Steuerbarkeitsnormalform) an.

b) Ist das gegebene System (vierter Ordnung) beobachtbar?

c) Ist das gegebene System (vierter Ordnung) steuerbar?

Aufgabe 6:

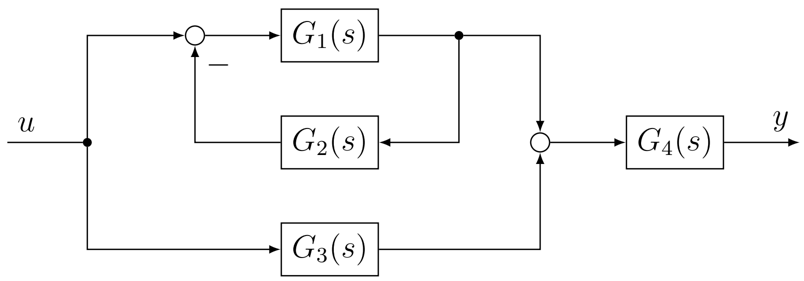
Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}
$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

Aufgabe 7:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ und $G_4(s)$:



mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems.
Anmerkung: Setzen Sie hier <u>nicht</u> die Übertragungsfunktionen aus Punkt b) ein!

b) Geben Sie eine Übertragungsfunktion $G_3(s)$ an so dass für

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{s-1} \qquad G_4(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

gegeben ist. Geben Sie $G_3(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

Aufgabe 8:

Mit einem zeitkontinuierlichen LZI System wurden vier Experimente mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0)$ und Eingangsfunktionen $u(t)$ durchgeführt:

- Experiment 1: $\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u^{(1)}(t) = 0$
- Experiment 2: $\mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad u^{(2)}(t) = 0$
- Experiment 3: $\mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u^{(3)}(t) = \sigma(t)$
- Experiment 4: $\mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad u^{(4)}(t) = -3\sigma(t)$.

Die Ausgangsfunktion $y(t)$ wurde bei Experiment 1, 2 und 3 für $t \geq 0$ aufgezeichnet:

- Experiment 1: $y^{(1)}(t) = e^{-t} - e^{-2t}$
- Experiment 2: $y^{(2)}(t) = e^{-t}$
- Experiment 3: $y^{(3)}(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t} - e^{-t}$.

Ermitteln Sie die Ausgangsfunktion $y^{(4)}(t)$ für Experiment 4 für $t \geq 0$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 25.03.2022

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	3	3	3	3	2	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $y = x_3 u - x_1$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \cos(3x_1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 u - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2) - u \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 1$ ist.

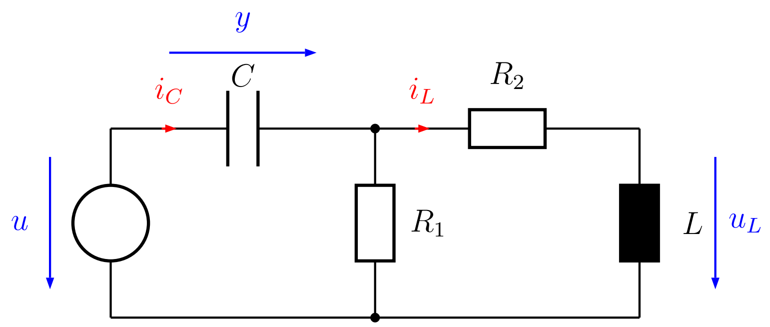
b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes ideales elektrisches Netzwerk bestehend aus den ohmschen Widerständen R_1 und R_2, der Kapazität C der Induktivität L und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit u symbolisiert, mit y wird die Spannung an der Kapazität definiert.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete LZI System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

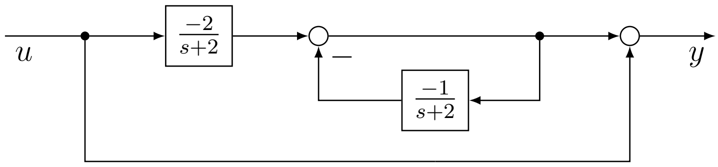
a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems. Geben Sie alle Polstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

b) Ist dieses System beobachtbar? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Ist dieses System asymptotisch stabil für $u_k \equiv 0$? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = 4\cos(t-2)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

Aufgabe 5:

Die Differenzengleichung

$$y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2} = u_{k-1} - u_{k-3}$$

beschreibt das Übertragungsverhalten eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systems mit der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k).

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion dieses Systems an.

b) Ist dieses System BIBO-stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Geben Sie eine Minimalrealisierung dieses Systems in erster Normalform (Steuerbarkeitsnormalform) an.

Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Transitionsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t} + 1\right) - e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - 1\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-2t} + 1\right) \end{bmatrix}$$

des LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Der Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t_2 = 3$ ist gegeben mit $\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie $y(1)$, also den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt $t_1 = 1$.

Aufgabe 7:

Geben Sie ein zeitkontinuierliches LZI System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

zweiter Ordnung mit folgenden Eigenschaften an:

- Die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Systems hat eine Polstelle bei $s = -1$ und eine Nullstelle bei $s = 1$.
- Das System ist *nicht* BIBO-stabil.

(Anmerkung: Gesucht ist ein System mit beiden Eigenschaften, nicht zwei Systeme mit je einer dieser Eigenschaften.)

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ existiert, so dass das transformierte System in *Diagonalform* vorliegt.
(Hinweis: Diese Aufgabe kann gelöst werden ohne $\mathbf{T}$ zu ermitteln.)

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 04.05.2022

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	2	3	3	3	2	2	3	3	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y gegeben:

$$G(s) = \frac{s}{(s+3)^2}$$

Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = 2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) - \sin\left(\sqrt{3}\,t - 1\right)$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

Hinweis: $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

Aufgabe 2:

a) Geben Sie die Definition von Steuerbarkeit und die Definition von Beobachtbarkeit eines zeitkontinuierlichen linearen zeitinvarianten Zustandsraummodells mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y an. *(Anmerkung: Gesucht sind die <u>Definitionen</u> von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, nicht Kriterien für Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.)*

b) Untersuchen sie das zeitkontinuierliche LZI-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 15u$$

auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u(t)$, der Ausgangsgröße $y(t)$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u. \end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u \end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 4:

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems sei geben mit

$$G(s) = \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s}{s^4 + \frac{3}{2}s^3 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}}.$$

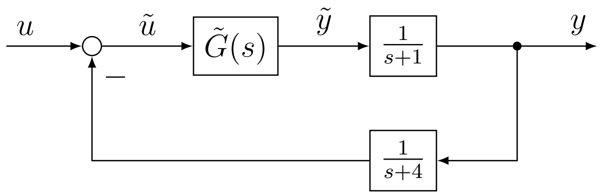
Ermitteln Sie ein *steuerbares und beobachtbares* Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

welches diese Übertragungsfunktion besitzt.
(Anmerkung: Gesucht ist ein Zustandsmodell welches steuerbar und beobachtbar ist, nicht zwei Zustandsmodelle mit je einer dieser Eigenschaften.)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme



mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y, wobei $\tilde{G}(s)$ die Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen LZI Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

ist. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

Aufgabe 6:

Geben Sie ein zeitdiskretes LZI System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + du_k \end{aligned}$$

zweiter Ordnung mit folgenden Eigenschaften an:

- Das System ist BIBO-stabil.
- Das System ist *nicht* asymptotisch stabil.

(Anmerkung: Gesucht ist ein System mit beiden Eigenschaften, nicht zwei Systeme mit je einer dieser Eigenschaften.)

Aufgabe 7:

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$, der Eingangsgröße $u_k \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße $y_k \in \mathbb{R}$.

a) Wie viele Ruhelagen hat dieses System für $u_k \equiv u_R = 1$?

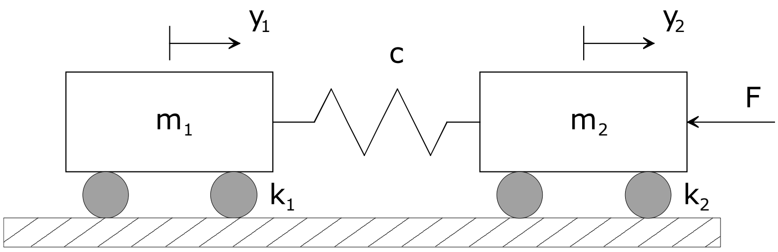
b) Ist das System asymptotisch stabil?

c) Ermitteln Sie y_2, also den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitschritt $k = 2$, für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

(*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

Aufgabe 8:

Betrachten Sie folgendes mechanische System bestehend aus zwei Massen m_1 und m_2, die durch eine lineare Feder mit der Federkonstante $c > 0$ miteinander verbunden sind:



Die Feder befindet sich für $y_2 - y_1 = 0$ im entspannten Zustand. Neben der Federkraft wirkt auf beide Massen jeweils eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft mit den Proportionalitätsfaktoren $k_1 > 0$ bzw. $k_2 > 0$. Auf die Masse m_2 wirkt außerdem eine äußere Kraft F.

Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße $y = \dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt}$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$