Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik**
am 27.06.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	3	3	2	2	3	3	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei das nichtlineare mathematische Modell eines dynamischen Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -e^{x_1} + x_2 \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -x_1 + \sin(x_3) \\
\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} &= x_2 - \frac{x_1 x_2}{u} \\
y &= x_1^2 + x_2 x_3 + u
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie den Zustand $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R} \end{bmatrix}^T$, den Eingang u_R und den Ausgang y_R, sodass $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ für $u = u_R$ eine Ruhelage des Systems ist. Für welche Werte u_R existiert eine Ruhelage?

b) Linearisieren Sie das System in der zu $u_R = 1$ gehörigen Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\
\Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u
\end{aligned}$$

an, wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

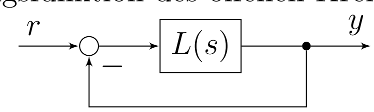
a) Geben Sie das Zustandsraummodell einer Minimalrealisierung von $G(s)$ an.

b) Geben Sie ein Zustandsraummodell von $G(s)$ an, das keine Minimalrealisierung ist.

c) Welche der Realisierungen aus a) und b) ist steuerbar? Welche ist beobachtbar?

Aufgabe 3:

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße r, Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+3}{s-1},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von K in der komplexen Ebene. Für welche Werte K ist $T(s)$ BIBO-stabil?

Hinweis: Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt s_0 gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln ψ_i der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i\cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m<n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K>0 \\ 2k \text{ für } K<0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0,1,\ldots,n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

Aufgabe 4:

Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters k, für den die einzelnen Polynome Hurwitzpolynome sind.

$$\begin{aligned}
i) \quad & p_1(s) = s^5 + 10s^4 + ks^3 + 2s^2 + (k+1)^2 s \\
ii) \quad & p_2(s) = ks^3 + \frac{k}{2}s^2 + 2s + 1 \\
iii) \quad & p_3(s) = 15s^2 + k^2 s + k
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

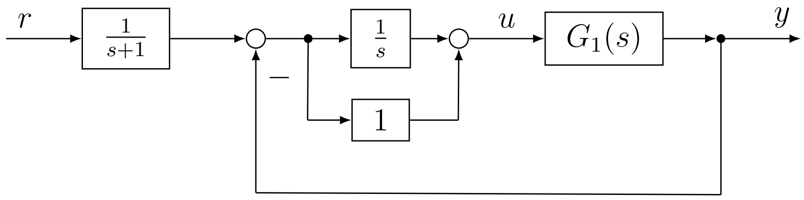
Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

Aufgabe 6:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y:



wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u$$

mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist. Achten Sie auf das negative Vorzeichen im Ausgangsvektor.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße r und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer vereinfachten Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

Aufgabe 7:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du,$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der skalaren Eingangsgröße u und dem skalaren Ausgang y. Zusätzlich sei die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ gegeben.

a) Leiten Sie die Berechnungsvorschriften der Parameter $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ her, wobei

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u$$

gilt.

b) In welchem Zusammenhang steht die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ des transformierten Systems mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ des ursprünglichen Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie kann $\mathbf{T}$ bestimmt werden, wenn $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix sein soll? Geben Sie alle Schritte an, die zur Berechnung von $\mathbf{T}$ nötig sind. Welche Eigenschaften muss $\mathbf{A}$ haben, sodass eine solche Transformation möglich ist?

Aufgabe 8:

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$, der Eingangsgröße $u_k \in \mathbb{R}$ und der Ausgangsgröße $y_k \in \mathbb{R}$.

a) Ist das freie System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Ermitteln Sie y_2, also den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitschritt $k = 2$, für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 05.10.2023

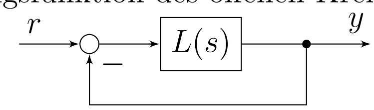
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	3	2	3	3	3	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße r, Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,



wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = K\frac{s+1}{s^2},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des geschlossenen Kreises.

b) Zeichnen Sie die Lage der Pole von $T(s)$ in Abhängigkeit von K in der komplexen Ebene (Wurzelortskurve). Geben Sie die Schritte an, die zu Ihrer Lösung führen.

c) Verwenden Sie die Wurzelortskurve, um zu bestimmen, für welche Werte von K $T(s)$ BIBO-stabil ist.

Hinweis: Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n}|s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt s_0 gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln ψ_i der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i\cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m<n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K>0 \\ 2k \text{ für } K<0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0,1,\ldots,n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-\alpha_k}.$$

Aufgabe 2:

Das System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y ist in der Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung angegeben:

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{dt^n} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m\frac{\mathrm{d}^m u}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u. \tag{1}$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des Systems. Erklären Sei dabei alle Rechenschritte!

b) Setzen Sie nun $n = 3$, $m = 1$ und $\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ein, und ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den reellen Parameter α, sodass $G(s)$ BIBO-stabil ist.

Aufgabe 3:

Ein nichtlineares zeitinvariantes System der Form

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, x_3, u), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(x_1, x_2, x_3, u), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = f_3(x_1, x_2, x_3, u), \tag{4}$$

$$y = g(x_1, x_2, x_3, u) \tag{5}$$

wurde in der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R} \end{bmatrix}^T$, u_R, y_R linearisiert. Das linearisierte System ist gegeben durch die Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{x_{1,R}} & 0 & \sqrt{x_{3,R}} \\ \sin(x_{2,R}) + u_R & x_{1,R}\cos(x_{2,R}) & 0 \\ 0 & x_{3,R} & x_{2,R} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

den Eingansvektor $\mathbf{b}$ und den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ mit

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,R} \\ -\pi \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

und den Durchgriffsterm $d = 0$. Leider ist die Systembeschreibung des ursprünglichen nichtlinearen Systems verlorengegangen.

a) Schreiben Sie die Dynamik des *linearisierten* Systems an. Definieren Sie auch die Zustände, Eingang und Ausgang des linearisierten Systems.

b) Geben Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3 und g *des nichtlinearen Systems* an, sodass das linearisierte System der Dynamik in a) entspricht.

c) In einer Notiz finden Sie den Wert $x_{2,R} = \frac{\pi}{2}$. Ermitteln Sie die zugehörige Ruhelage $\mathbf{x}_R, u_R, y_R$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 4u$$

mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *beobachtbar* ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ für den dieses System *steuerbar* ist.

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u_k, der Ausgangsgröße y_k und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k$$
$$y_k = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

Aufgabe 6:

Von einem linearen zeitinvarianten Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

ist bekannt, dass die Transitionsmatrix die Form

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{M}_1 + e^t\mathbf{M}_2$$

mit konstanten aber unbekannten Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ hat.

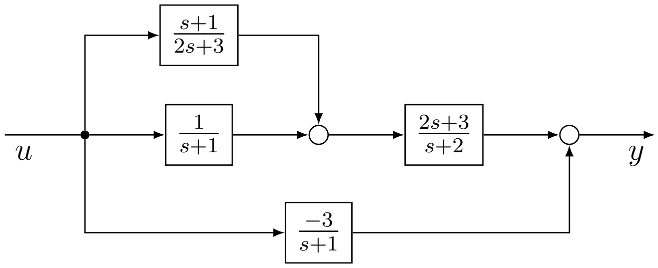
a) Wie lauten die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$?

b) Wie lautet die Inverse $\big(\mathbf{\Phi}(t)\big)^{-1}$ der Transitionsmatrix?

c) Bestimmen Sie $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ in Abhängigkeit der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

Aufgabe 7:

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

b) Geben Sie alle Pole und Nullstellen von $G(s)$ an. Ist $G(s)$ BIBO-stabil?

c) Ermitteln Sie für die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t-1)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand*.

Aufgabe 8:

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{8}$$

mit den Zuständen $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^T$ und der Eingangsfolge u_k.

a) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie für die Eingangsfolge $\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ die Zustände $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ und $\mathbf{x}_5$.

Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 12.12.2023

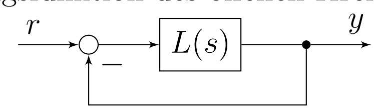
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	2	2	3	3	3	3	2	21
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei der abgebildete Standardregelkreis mit der Führungsgröße r, Ausgangsgröße y und der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$,

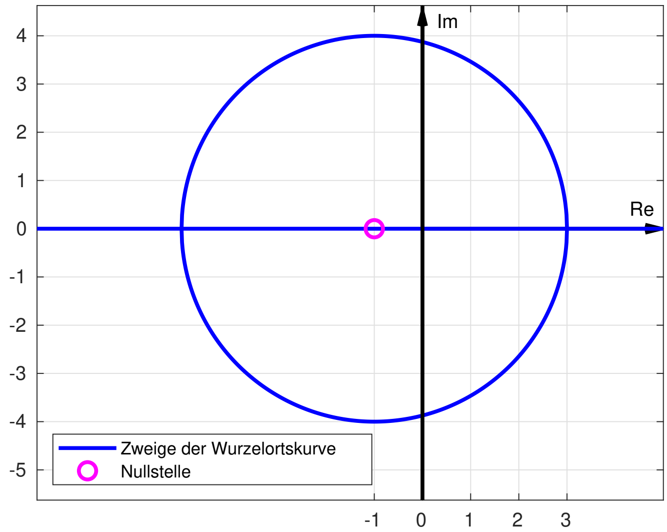


wobei

$$L(s) = K\frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\beta_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)},$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

Außerdem sind die Zweige der Wurzelortskurve, sowie eine Nullstelle des geschlossenen Regelkreises in der folgenden Abbildung zu sehen.



a) Ergänzen Sie die Abbildung der Wurzelortskurve um Zeichen für Pole und Nullstellen von $L(s)$, die in der Abbildung fehlen. Zeichnen Sie auch die Richtungen der Zweige der Wurzelortskurve ein.

b) Bezeichnen Sie die entsprechenden Bereiche der Wurzelortskurve für $K < 0$ und $K > 0$ in der Abbildung.

c) Berechnen Sie den/die Verzweigungspunkt/e und zeichen Sie diese/n in der Abbildung ein.

d) Bestimmen Sie anhand der Wurzelortskurve für welche Werte K der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

Hinweis: Folgende Formeln können zur Lösung der Aufgabe genutzt werden:

$$|K| = \frac{\prod_{k=1}^{n} |s-\alpha_k|}{\prod_{i=1}^{m} |s-\beta_i|} = \frac{|\nu(s)|}{|\mu(s)|},$$

für den Asymptotenschnittpunkt s_0 gilt

$$s_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\alpha_k - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re}\beta_i}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n,$$

mit den Neigungswinkeln ψ_i der Asymptoten, wobei

$$\psi_i = \frac{i \cdot 180}{n-m} \qquad \text{wenn } m < n, \text{ wobei } i = \begin{cases} 2k+1 \text{ für } K > 0 \\ 2k \text{ für } K < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

und in Verzweigungspunkten gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-\beta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s-\alpha_k}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist das autonome System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

mit den Zuständen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Eine Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \ldots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

wird durchgeführt. Die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ des transformierten Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}$$

liegt dabei in Diagonalform vor.

a) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift für $\tilde{\mathbf{A}}$ her.

b) Zeigen Sie, dass die Spalten $\mathbf{t}_i$ der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ die Rechts-Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sind.
Hinweis: Das Ergebnis aus a) kann hierbei behilflich sein.

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters k, für den die einzelnen Polynome Hurwitzpolynome sind.

a) $p_1(s) = s^3 + s^6 + s^2 + s + (k-2)$

b) $p_2(s) = -s^4 - s^3 - 2s^2 - 2(k+1)s - 1$

c) $p_3(s) = 17.3s^2 + 31.8s + 12.4$

Aufgabe 4:

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \cos(u) \\ y &= x_1 x_2 u. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 2\pi$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System an in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u. \end{aligned}$$

c) Definieren Sie die Größen $\Delta\mathbf{x}$, Δu und Δy des linearisierten Systems.

Aufgabe 5:

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems sei geben mit

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^4 - s^3 - 3s^2 + s + 2}.$$

Ermitteln Sie ein *steuerbares und beobachtbares* Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

welches diese Übertragungsfunktion besitzt.
(Anmerkung: Gesucht ist ein Zustandsmodell welches steuerbar und beobachtbar ist, nicht zwei Zustandsmodelle mit je einer dieser Eigenschaften.)

Aufgabe 6:

Die Übertragungsfunktion eines Übertragungssystems ist gegeben als

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{u\}} = \frac{1}{1 + L(s)}, \tag{1}$$

mit dem Eingangssignal u, dem Ausgangssignal y. Für die Funktion $L(s)$ gilt dabei

$$L(s) = \frac{(s^2 + 4s + 4)(s - 3) + 1}{s(s + 5)(s + 2)}. \tag{2}$$

a) Spalten Sie $L(s)$ in Teilübertragungsfunktionen $L_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, auf. Dabei müssen die Zähler- und Nennergrade von $L_i(s)$ kleiner oder gleich 1 sein.

b) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Übertragungssystems mithilfe der Teilübertragungsfunktionen $L_i(s)$.

c) Ist $G(s)$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 7:

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und der Ausgangsgröße $y \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Aussage!*)

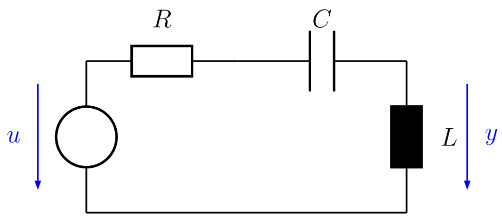
c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_2 = 3$ sei gegeben mit

$$\mathbf{x}(t = t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t = t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1$.

Aufgabe 8:

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus dem ohmschen Widerstand R, der Kapazität C, der Induktivität L und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit u symbolisiert, mit y wird die Spannung an der Induktivität definiert.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du.$$