# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 01.07.2022

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y = u^2 - x_1 x_2$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_2)u - 2x_1 u \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_2) - 1 + 4x_3 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = -1$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 2:**

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ gegeben:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + \sqrt{3}s + 2}$$

Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = \cos(t) - 3\cos(t + 5)$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

*Hinweis:* $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

**Aufgabe 3:**

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems sei geben mit

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^4 - s^3 - 3s^2 + s + 2}.$$

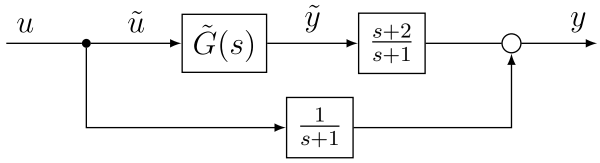
Ermitteln Sie ein *steuerbares und beobachtbares* Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{aligned}$$

welches diese Übertragungsfunktion besitzt.
*(Anmerkung: Gesucht ist <u>ein</u> Zustandsmodell welches steuerbar <u>und</u> beobachtbar ist, nicht zwei Zustandsmodelle mit je einer dieser Eigenschaften.)*

**Aufgabe 4:**

Betrachten Sie die Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme




mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$, wobei $\tilde{G}(s)$ die Übertragungsfunktion des zeitkontinuierlichen LZI Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

ist. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei das zeitdiskrete LZI System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems.

b) Geben Sie alle Polstellen und alle Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(z)$ an.

c) Ist dieses System BIBO - stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

d) Ist dieses System beobachtbar? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

**Aufgabe 6:**

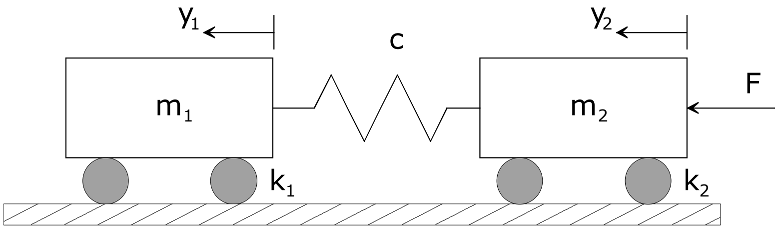
Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 27 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ existiert, so dass das transformierte System in *Diagonalform* vorliegt.
*(Hinweis: Diese Aufgabe kann gelöst werden ohne* $\mathbf{T}$ *zu ermitteln.)*

**Aufgabe 7:**

Betrachten Sie folgendes mechanisches System bestehend aus zwei Massen $m_1$ und $m_2$, die durch eine lineare Feder mit der Federkonstante $c > 0$ miteinander verbunden sind:




Die Feder befindet sich für $y_2 - y_1 = 0$ im entspannten Zustand. Neben der Federkraft wirkt auf beide Massen jeweils eine geschwindigkeitsproportionale Reibkraft mit den Proportionalitätsfaktoren $k_1 > 0$ bzw. $k_2 > 0$. Auf die Masse $m_2$ wirkt außerdem eine äußere Kraft $F$.

Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße $y = \ddot{y}_2 = \frac{d^2 y_2}{dt^2}$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

**Aufgabe 8:**

Betrachten Sie die Transitionsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - e^{-t} + e^{t} & e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} - e^{t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

des LZI Systems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Der Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ ist gegeben mit $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie $y(3)$, also den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt $t_2 = 3$.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 06.10.2022

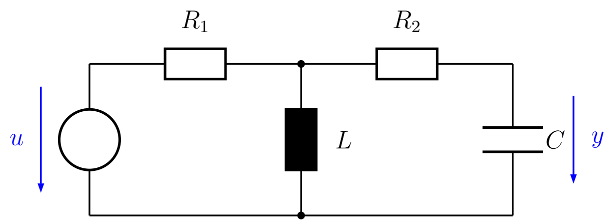
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus den ohmschen Widerständen $R_1$ und $R_2$, der Kapazität $C$, der Induktivität $L$ und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit $u$ symbolisiert, mit $y$ wird die Spannung an der Kapazität definiert.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei ein zeitdiskretes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u_k$, der Ausgangsgröße $y_k$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k\\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + u_k.\end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k\\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k + \tilde{d}u_k\end{aligned}$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

**Aufgabe 3:**

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ gegeben:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 5s + 6}$$

Ermitteln Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand* für die Eingangsgröße $u(t) = \sin(3t) - 2\cos(3t + 1)$.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei das zeitdiskrete LZI System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

a) Geben Sie alle Ruhelagen dieses Systems für $u_k \equiv u_R = 2$ an.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems.

c) Ist dieses System BIBO - stabil?

d) Ist dieses System asymptotisch stabil?
(*Hinweis: setzen Sie* $u_k = 0$ *zur Beantwortung dieser Frage.*)

(*Begründen Sie Ihre Antworten!*)

**Aufgabe 5:**

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y = u^2 - x_1 x_2$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2 + 2x_1 - 1 \\ \dot{x}_3 &= \sin(x_2) + x_1 u. \end{aligned}$$

Eine Ruhelage dieses Systems ist gegeben durch $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$ für $u \equiv u_R = 2$. Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u, \qquad \Delta y = \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} + d\Delta u$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

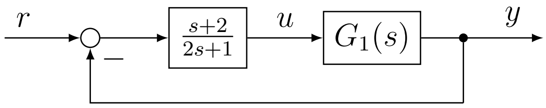
a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ dieses Systems.

b) Ist dieses System asymptotisch stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t_2 = 5$ sei gegeben mit $\mathbf{x}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie $\mathbf{x}(3)$, also den Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt $t_1 = 3$.

**Aufgabe 7:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$:




wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ ist.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

c) Ist das Gesamtsystem BIBO - stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

**Aufgabe 8:**

Welche der unten beschriebenen linearen zeitinvarianten Systeme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

mit Eingangsgröße $u$, Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und Ausgangsgröße $y$ sind beobachtbar? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

a) Das System $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ?

b) Eine Minimalrealisierung der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s+2}{s^2+s-2}$ ?

c) Ein steuerbares Zustandsmodell dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s^2+5s-1}$ ?

d) Ein Zustandsmodell dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s}{(s+2)(s-2)}$ für welches gilt: $\quad \mathrm{rang} \begin{bmatrix} c^T \\ 2\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = 2$ ?

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 06.12.2022

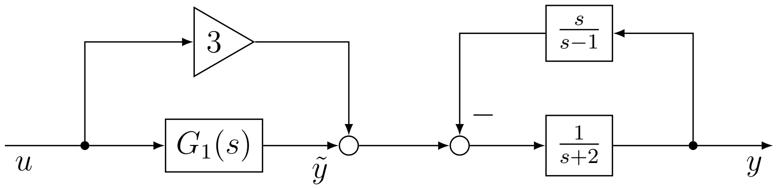
Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$:




wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $\tilde{y}$ ist. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Gesamtsystems.

**Aufgabe 2:**

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ gegeben:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = \sin(t) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}} t\right)$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

*Hinweis:* $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

**Aufgabe 3:**

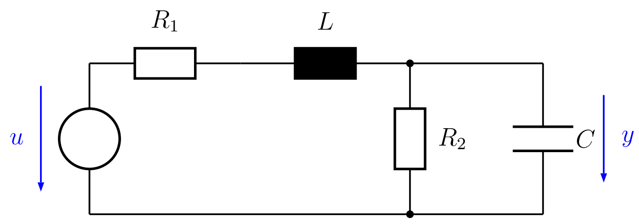
Die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines zeitkontinuierlichen LZI Systems sei gegeben mit

$$G(s) = \frac{s-2}{2s^3 + (2k-1)s^2 + (k+2)s + (3k-3)}.$$

Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $k$, für den dieses System BIBO-stabil ist.

**Aufgabe 4:**

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus den ohmschen Widerständen $R_1$ und $R_2$, der Kapazität $C$, der Induktivität $L$ und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit $u$ symbolisiert, mit $y$ wird die Spannung an der Kapazität definiert.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.\end{aligned}$$

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

**Aufgabe 6:**

Ermitteln Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ der folgenden Systeme für $u \equiv u_R = 1$:

a) Das zeitkontinuierliche LZI System $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$

b) Das zeitdiskrete LZI System $\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k.$

**Aufgabe 7:**

Welche der unten beschriebenen zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systeme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k, \qquad y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k + du_k$$

mit Eingangsgröße $u$, Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und Ausgangsgröße $y$ sind steuerbar? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

a) Das System $\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u_k.$

b) Eine Minimalrealisierung der Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+1}$.

c) Ein beobachtbares Zustandsmodell zweiter Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{z}{z^2-z}$.

d) Ein Zustandsmodell dritter Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{z}{(z+0.5)(z-0.5)}$ für welches gilt: $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0.5\mathbf{E} - \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{b} \end{bmatrix} = 2.$

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 7u.$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ so durch, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u$$

in *Diagonalform* vorliegt. Geben Sie die sich dadurch ergebenden Werte für $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 03.02.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y = x_1 - x_2 u$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= u - 1 \\ \dot{x}_3 &= \cos(x_1) u + x_2 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ eine Ruhelage dieses Systems für $u_R = 1$ ist.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 2:**

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ gegeben:

$$G(s) = 2\,\frac{s + \sqrt{3}}{s^2 + \sqrt{3}s + 2}$$

Ermitteln Sie für die Eingangsgröße

$$u(t) = 2\sin(t) - \sin(t+1)$$

die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems *im eingeschwungenen Zustand.*

*Hinweis:* $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

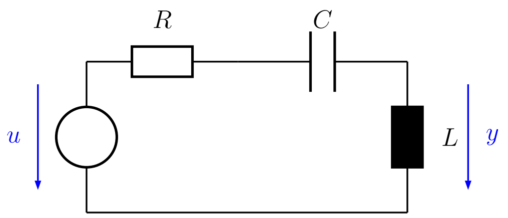
mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 2$ sei gegeben mit $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ermitteln Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

**Aufgabe 4:**

Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk bestehend aus dem ohmschen Widerstand $R$, der Kapazität $C$, der Induktivität $L$ und einer Spannungsquelle. Die Spannung an der Spannungsquelle wird mit $u$ symbolisiert, mit $y$ wird die Spannung an der Induktivität definiert.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf.

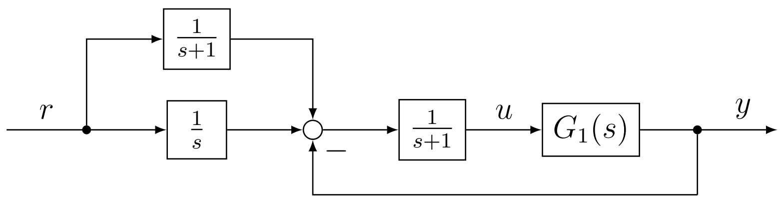
a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Systems.

**Aufgabe 5:**

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung mehrerer Übertragungssysteme mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$:




wobei $G_1(s)$ die Übertragungsfunktion des LZI Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + u$$

mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ ist.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$ des LZI Systems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)}$ des Gesamtsystems mit der Eingangsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$. Geben Sie $G(s)$ in einer Form ohne Doppel- bzw. Mehrfachbrüche an.

**Aufgabe 6:**

Die Differenzengleichung

$$y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} - y_{k-2} - \frac{1}{2}y_{k-3} = u_{k-3} - u_{k-1}$$

beschreibt das Übertragungsverhalten eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Systems mit der Eingangsfolge $(u_k)$ und der Ausgangsfolge $(y_k)$.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion dieses Systems.

b) Ist dieses System BIBO-stabil? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Geben Sie eine *Minimalrealisierung* dieses Systems an.

**Aufgabe 7:**

Geben Sie ein zeitkontinuierliches LZI System

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

*zweiter Ordnung* mit folgenden Eigenschaften an:

- Das System ist *nicht* beobachtbar.
- Die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Systems hat keine Nullstellen.

*(Anmerkung: Gesucht ist <u>ein</u> System mit <u>beiden</u> Eigenschaften, nicht zwei Systeme mit je einer dieser Eigenschaften.)*

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + 5u.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ existiert, so dass das transformierte System in *Diagonalform* vorliegt.
*(Hinweis: Diese Aufgabe kann gelöst werden ohne $\mathbf{T}$ zu ermitteln.)*

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 22.03.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei das nichtlineare mathematische Modell eines dynamischen Systems mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}=[x_1 \;\; x_2]^T$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{x_2^4}{x_1^2} + x_1 + \sqrt{u+1}, \\ y &= x_1^2 + u^2. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems für $u = u_R = 3$.

b) Linearisieren Sie das System in den unter Punkt a) gefundenen Ruhelagen und geben Sie jeweils das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} + d\Delta u \end{aligned}$$

an, wobei $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathbf{R}, \Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei das mathematische Modell eines dynamischen Systems mit der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? (<u>Begründen Sie Ihre Antwort!</u>).

b) Berechnen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

c) Geben Sie alle Anfangszustände $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ an, für die gilt:

$$y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sind die beiden Zustandsmodelle mit den Zustandsvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

Zeigen Sie, dass es keine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ gibt, die die beiden Systeme ineinander überführt.

**Aufgabe 4:**

Berechnen Sie die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{7s^2 + 29s + 320}{s^2 + 4s + 29}.$$

<u>Hinweis:</u> Bei der Lösung der Aufgabe sind die Korrespondenzen

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

und der so genannte Dämpfungssatz der Laplace-Transformation, also

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s), \qquad \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s - a)$$

hilfreich.

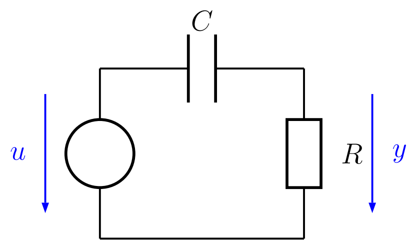
**Aufgabe 5:**

a) Wie lautet die Definition des Begriffes <u>Steuerbarkeit</u>?

b) Geben Sie <u>zwei</u> Kriterien zur Überprüfung der Steuerbarkeit eines linearen, zeitinvarianten Systems an.

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei ein aus idealen Bauelementen bestehendes elektrisches Netzwerk.




Mit $u$ wird die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung bezeichnet, $y$ ist der Spannungsabfall am Widerstand $R$. Betrachten Sie das Netzwerk als System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$.

a) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen und geben Sie ein Zustandsmodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

an.

b) Berechnen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$, wenn als Eingangsgröße der Einheitssprung gewählt wird und der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ verschwindet, d.h.

$$u(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}.$$

c) Berechnen Sie unter der Annahme $RC = 1$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn als Eingangsgröße die Funktion

$$u(t) = 3\sin(t), \quad \mathbf{x}_0 \text{...beliebig.}$$

gewählt wird.

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei die Realisierung einer (zeitdiskreten) Übertragungsfunktion $G(z)$:

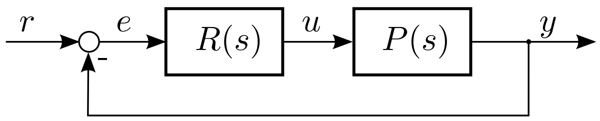
$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} u_k,$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

a) Handelt es sich bei der gegebenen Realisierung um eine Minimalrealisierung?

b) Geben Sie eine Realisierung von $G(z)$ an, die weder steuerbar, noch beobachtbar ist.

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Regelkreises mit der Führungsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$.




Für die Übertragungsfunktionen $R(s)$ und $P(s)$ gilt

$$R(s) = K, \qquad P(s) = \frac{1}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)},$$

wobei $K, T_1, T_2$ reelle Parameter sind.

a) Berechnen Sie die sogenannte Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ des Regelkreises, d.h.

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} \quad \text{wobei} \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = \bar{y}(s), \mathcal{L}\{r(t)\} = \bar{r}(s).$$

b) Setzen Sie nun $K > 0$ voraus. Welche Bedingungen müssen die Parameter $K, T_1, T_2$ erfüllen, damit $T(s)$ BIBO-stabil ist?

# Schriftliche Prüfung aus **Systemdynamik** am 26.04.2023

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

| Aufgabe | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 21 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei das nichtlineare mathematische Modell eines dynamischen Systems mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= 2 - u\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_2 x_3 + x_1^2\\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} &= \sin\left(\frac{1}{2}x_1\right) + x_3 u\\ y &= x_1 + x_3 u\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie den Zustand $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1,R} & x_{2,R} & x_{3,R}\end{bmatrix}^T$ und den Eingang $u_R$, sodass $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$ für $u = u_R$ eine Ruhelage des Systems ist, wobei $x_{1,R} = \pi$ gilt.

b) Linearisieren Sie das System in dieser Ruhelage und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u\end{aligned}$$

an, wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ gilt.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei das zeitkontinuierliche LZI System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -6\\ 2 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

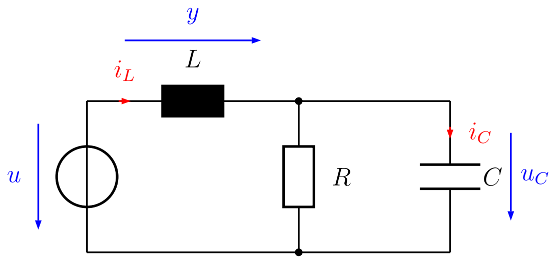
**Aufgabe 3:**

a) Definieren Sie den Begriff Beobachtbarkeit.

b) Nennen und erläutern Sie ein Kriterium zur Überprüfung der Beobachtbarkeit eines linearen, zeitinvarianten Systems.

**Aufgabe 4:**

a) Betrachten Sie das folgende ideale elektrische Netzwerk. Es enthält einen ohmschen Widerstand $R$, eine Kapazität $C$, eine Spule $L$, sowie eine Spannungsquelle mit der Spannung $u$. Mit $y$ wird die Spannung an der Spule bezeichnet.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ dieses Systems.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße $u$, der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + 3u.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z} + \tilde{d}u\end{aligned}$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Parameter $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}^T$ und $\tilde{d}$ an.

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei das mathematische Modell eines autonomen dynamischen Systems mit der Ausgangsgröße $y$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Geben Sie alle Anfangszustände $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ an, für die gilt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

**Aufgabe 7:**

Es sei folgende Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Übertragungssystems mit der Eingangsgröße $u$ und der Ausgangsgröße $y$ gegeben:

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 2z + 3}$$

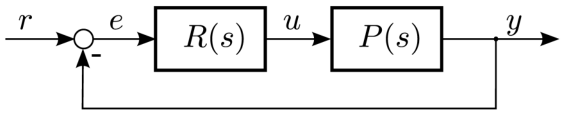
a) Geben Sie das Zustandsraummodell einer Minimalrealisierung von $G(z)$ an.

b) Ist das System aus a) BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie eine Realisierung an, die <u>keine</u> Minimalrealisierung ist.

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Regelkreises mit der Führungsgröße $r$ und der Ausgangsgröße $y$.




Für die Übertragungsfunktionen $R(s)$ und $P(s)$ gilt

$$R(s) = \frac{K}{s}, \quad P(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)},$$

wobei $K, T_1, T_2$ reelle Parameter sind.

a) Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ des Regelkreises:

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} \quad \text{wobei} \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = \bar{y}(s), \mathcal{L}\{r(t)\} = \bar{r}(s).$$

b) Welche Bedingungen müssen die Parameter $K, T_1, T_2$ erfüllen, sodass $T(s)$ BIBO-stabil ist?