Systemdynamik

Institut für Regelungs- und
Automatisierungstechnik

(c) **Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik**

Technische Universität Graz

Hinweis: Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht*! Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 8. 6. 2021

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen und Begriffe **7**

1 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme **9**
1.1 Einführung . . . 9
1.2 Grundlegende Begriffe . . . 9
1.3 Linearität . . . 14
1.3.1 Linearisierung nichtlinearer Eingrößensysteme . . . 17
1.4 Zeitdiskrete Systeme . . . 21
1.5 Beispiele für dynamische Systeme . . . 22
1.5.1 Zeitkontinuierliche Systeme . . . 22
1.5.2 Zeitdiskrete Systeme . . . 29

II Zeitkontinuierliche Systeme **31**

2 Lineare Systeme im Zustandsraum **33**
2.1 Einführung . . . 33
2.2 Lösung der Systemgleichungen . . . 33
2.2.1 Freie Lösung . . . 34
2.2.2 Erzwungene Lösung . . . 35
2.2.3 Übertragungsfunktion . . . 36
2.3 Transitionsmatrix . . . 36
2.4 Ruhelagen . . . 39
2.5 Asymptotische Stabilität . . . 41

3 Zustandstransformationen **45**
3.1 Einführung . . . 45
3.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion . . . 46
3.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft . . . 47
3.2 Transformation auf Diagonalform . . . 47
3.2.1 Transformationsvorschrift . . . 48
3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix . . . 52
3.2.3 Komplexe Eigenwerte . . . 53
3.2.4 Mehrfache Eigenwerte . . . 57

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

4 Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit **59**
4.1 Einführung . . . 59
4.2 Steuerbarkeit . . . 59
4.2.1 Kriterium nach Kalman . . . 60
4.2.2 Kriterium nach Hautus . . . 62
4.3 Beobachtbarkeit . . . 63
4.3.1 Kriterium nach Kalman . . . 64
4.3.2 Kriterium nach Hautus . . . 65

5 Lineare Übertragungssysteme **67**
5.1 Einführung . . . 67
5.2 Bedeutung von $G(s)$ im Zeitbereich . . . 68
5.3 Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell . . . 69
5.3.1 Erste Normalform . . . 69
5.3.2 Zweite Normalform . . . 72
5.3.3 Minimalrealisierung . . . 76
5.4 Berechnung von $G(s)$ aus Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . 77
5.4.1 Umkehrung . . . 77
5.5 Pole und Nullstellen . . . 78
5.5.1 PN-Plan . . . 80
5.6 BIBO-Stabilität . . . 81
5.7 Das Routh-Schema . . . 83
5.8 Frequenzgang . . . 86
5.9 Zusammenschaltung von Übertragungssystemen . . . 88
5.9.1 Reihenschaltung . . . 88
5.9.2 Parallelschaltung . . . 90
5.9.3 Rückkopplung . . . 90
5.9.4 Allgemeine Strukturen . . . 92
5.10 Wichtige Übertragungsglieder . . . 94
5.10.1 Proportionalglied . . . 94
5.10.2 Verzögerungsglied erster Ordnung . . . 95
5.10.3 Verzögerungsglied zweiter Ordnung . . . 96
5.10.4 Integrator . . . 96
5.10.5 Differenzierer . . . 96
5.10.6 Vorhalteglied . . . 97

III Zeitdiskrete Systeme **99**

6 Zustandsraummethoden **101**
6.1 Einführung . . . 101
6.2 Lösung der Systemgleichungen . . . 101
6.2.1 Freie Lösung . . . 102
6.2.2 Erzwungene Lösung . . . 103

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

6.2.3 Übertragungsfunktion . . . 104
6.3 Ruhelagen . . . 104
6.4 Asymptotische Stabilität . . . 105
6.5 Zustandstransformationen . . . 106
6.5.1 Transformation auf Diagonalform . . . 106
6.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit . . . 107
6.6.1 Einführung . . . 107
6.6.2 Steuerbarkeit . . . 107
6.6.3 Beobachtbarkeit . . . 108

7 Übertragungssysteme 111
7.1 Einführung . . . 111
7.2 Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich . . . 112
7.3 Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell . . . 113
7.4 Berechnung von $G(z)$ aus Differenzengleichungen höherer Ordnung . . . 114
7.4.1 Umkehrung . . . 115
7.5 Pole und Nullstellen . . . 115
7.6 BIBO-Stabilität . . . 116

8 Englische Fachbegriffe 119

A Laplace-Transformation 123
A.1 Linearität . . . 123
A.2 Dämpfungsregel . . . 124
A.3 Verschiebungssatz . . . 124
A.4 Faltungsregel . . . 124
A.5 Differentiation im Zeitbereich . . . 125
A.6 Differentiation im Bildbereich . . . 125
A.7 Integration im Zeitbereich . . . 125
A.8 Anfangswertsatz . . . 125
A.9 Endwertsatz . . . 126
A.10 Korrespondenztabelle für reelle Funktionen . . . 127

B z-Transformation 129
B.1 Linearität . . . 129
B.2 Dämpfungsregel . . . 130
B.3 Verschiebung nach rechts . . . 130
B.4 Verschiebung nach links . . . 130
B.5 Faltungsregel . . . 130
B.6 Differentiation im Bildbereich . . . 131
B.7 Anfangswertsatz . . . 131
B.8 EndwertsatzA.9 . . . 131
B.9 Korrespondenztabelle . . . 132

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Teil I

Grundlagen und Begriffe

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 1

Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

1.1 Einführung

Die Vorlesung „Systemdynamik" verfolgt das Ziel, Studierenden der Studienrichtung „Elektrotechnik" die systemtheoretischen Grundlagen der Regelungstechnik zu vermitteln. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Systembegriff, der in zahlreichen Fachdisziplinen von elementarer Bedeutung ist. Ganz allgemein versteht man unter einem System die Verbindung von interagierenden Komponenten zu einer zweckgebundenen Einheit. Im Bereich der Elektrotechnik kann dies beispielweise eine aus elektronischen Bauteilen bestehende elektrische Schaltung sein. Ein Beispiel aus der Medizin ist das kardiovaskuläre System, das aus Herz und Blutgefäßen besteht und für die Aufrechterhaltung des Blutkreislaufs verantwortlich ist.

Mit Hilfe geeigneter mathematischer Modelle kann das Verhalten von Systemen nachgebildet werden. Solche Modelle können z.B. bei technischen Systemen durch Anwendung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, wie etwa den Newtonschen Axiomen hergeleitet oder aus experimentell gewonnenen Daten abgeleitet werden. Die resultierende mathematische Beschreibung ermöglicht die Analyse und Simulation der betrachteten Systeme und bildet die Grundlage für zahlreiche Methoden der System- und Regelungstheorie.

1.2 Grundlegende Begriffe

Die Wechselwirkung eines Systems mit seiner Umgebung erfolgt mittels seiner so genannten **Eingangs-** und **Ausgangsgrößen**, siehe hierzu Bild 1.1. Die Eingangsgrößen $u_1, \ldots, u_p$ wirken von der Umgebung auf das System ein und beeinflussen somit dessen Verhalten. Je nachdem, ob diese Beeinflussung gewollt oder ungewollt ist, spricht man von **Stell-** oder **Störgrößen**. Die Ausgangsgrößen $y_1, \ldots, y_q$ wirken vom System auf die Umgebung ein und beeinflussen so diese. In vielen Fällen besitzen Systeme *eine* Eingangsgröße u und *eine* Aus-

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

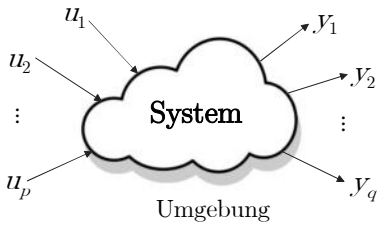


Bild 1.1: Interaktion zwischen einem System und seiner Umgebung

gangsgröße y, man nennt sie **Eingrößensysteme**[1].

Im vorliegenden Skriptum wird das zeitliche Verhalten von Systemen untersucht. Das bedeutet, dass die Eingangs- und Ausgangsgrößen Funktionen des Zeitparameters t sind.

Man nennt ein System **kausal**, wenn die Werte der Ausgangsgrößen zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 unabhängig von den zukünftigen Verläufen der Eingangsgrößen sind. Das bedeutet, dass die Werte $y_1(t_1), \ldots, y_q(t_1)$ ausschließlich von den Verläufen $u_1(t), \ldots, u_p(t)$ für $t \leq t_1$ abhängen. Bei realen technischen Systemen trifft dies zu, d.h. sie sind kausal.

Systeme, bei denen die Werte $y_1(t_1), \ldots, y_q(t_1)$ ausschließlich von $u_1(t_1), \ldots, u_p(t_1)$, also von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, werden **statische Systeme** genannt.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$y(t) = K\, u(t)$$

eines System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Der Parameter K sei eine (reelle) Konstante. Offensichtlich handelt es sich hier um ein statisches System.

■

Im Gegensatz dazu sind kausale **dynamische Systeme** dadurch charakterisiert, dass die Werte der Ausgangsgrößen zum Zeitpunkt t_1 nicht nur von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, sondern auch von deren Verläufen in der Vergangenheit, also für $t < t_1$.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

eines zeitkontinuierlichen Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Zur Ermittlung des Wertes der Ausgangsgröße zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 ist die Kenntnis des

[1] In Anlehnung an die englische Bezeichnung „single input - single output system" spricht man auch von **SISO-Systemen**.

Wertes der Ausgangsgröße zu einem Anfangszeitpunkt t_0 sowie der Verlauf der Eingangsgröße im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ erforderlich, was unmittelbar aus

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} u(t)\, dt$$

ersichtlich ist. Der Anfangswert $y(t_0)$ repräsentiert gewissermaßen die gesamte „Vorgeschichte" des Systems für $t < t_0$.

■

So genannte **Zustandsmodelle** spielen in der System- und Regelungstechnik eine besondere Rolle. Sie stellen eine einheitliche, von der Natur des Systems unabhängige, mathematische Beschreibung dar und bilden die Grundlage vieler regelungstechnischer Methoden. Für das Verständnis dieser Beschreibungsform ist der Begriff der so genannten **Zustandsgrößen** essentiell.

Wenn es möglich ist, für ein dynamisches System die Zeitfunktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ so anzugeben, dass die Werte der Ausgangsgrößen $y_1(t), \ldots, y_q(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 aus den Verläufen der Eingangsgrößen $u_1(t), \ldots, u_p(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ und den (konstanten) Werten $x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ berechnet werden können, so bezeichnet man $x_1, \ldots, x_n$ als Zustandsgrößen des Systems.

Die natürliche Zahl n, d.h. die Anzahl der Zustandsgrößen wird auch **Systemordnung** genannt. Man beachte, dass die Wahl der Zustandsgrößen für ein gegebenes System *nicht* eindeutig ist. Vielmehr gibt es für ein und dasselbe System *unendlich viele* Möglichkeiten, die benötigten n Zustandsgrößen zu wählen. Diese Freiheiten bei der Festlegung der Zustandsgrößen werden bei zahlreichen Verfahren der System- und Regelungstechnik vorteilhaft ausgenützt.

B Wählt man im vorangegangenen Beispiel exemplarisch

$$x := 3\, y$$

so gilt für die Systembeschreibung

$$\frac{dx}{dt} = 3\, u, \quad y = \frac{1}{3}\, x.$$

Der Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ kann somit über die Beziehung

$$y(t) = \frac{1}{3}\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau.$$

ermittelt werden. Offensichtlich kann $y(t)$ aus dem Verlauf von $u(\tau)$ im Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und dem Wert $x(t_0)$ eindeutig berechnet werden, d.h. x ist eine Zustandsgröße des Systems. Auf analoge Weise kann gezeigt werden, dass sich im vorliegenden Beispiel jede beliebige Wahl $x = \alpha\, y$ mit $\alpha \neq 0$ als Zustandsgröße qualifiziert.

■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

In weiterer Folge wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Systeme eine *endliche* Ordnung n besitzen und durch gewöhnliche **Differentialgleichungen** der Form

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

sowie q algebraische Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) \end{aligned} \tag{1.2}$$

beschrieben werden können. Man sagt, dass durch (1.1) und (1.2) ein **Zustandsmodell** des betrachteten Systems gegeben ist. Der Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt t_0, d.h. die „Vorgeschichte" des Systems, wird durch die Anfangswerte $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ repräsentiert.

Fasst man die Zustands-, Eingangs- und Ausgangsgrößen zu Vektoren

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

zusammen, sowie die (skalarwertigen) Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ bzw. $g_1, \ldots, g_q$ zu den Vektoren

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix},$$

so erhält man die Systembeschreibung (1.1) und (1.2) in kompakter Matrixschreibweise

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1.4}$$

wobei für den Anfangszustand

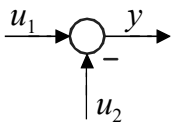
$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

gilt.

Man beachte, dass die rechte Seite der Differentialgleichung (1.3) sowie die Ausgangsgleichung (1.4) nicht explizit vom Zeitparameter t abhängen. Solche Systeme nennt man **zeitinvariant**. Die Dynamik des Systems, d.h. seine Reaktion auf Eingangsgrößen und Anfangszustände ist somit *unabhängig* vom Zeitpunkt der Durchführung eines Experimentes. Das bedeutet, dass bei gleichzeitiger zeitlicher Verschiebung der Verläufe der Eingangsgrößen sowie des Anfangszustands auch die Ausgangsgröße die gleiche zeitliche Verschiebung erfährt. Der Anfangszeitpunkt kann somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu $t_0 = 0$ gesetzt werden. Hängt die rechte Seite der Differentialgleichungen und/oder die Ausgangsgleichung in (1.3) hingegen explizit vom Zeitparameter t ab, so spricht man von einem **zeitvarianten** bzw. **zeitvariablen System**.

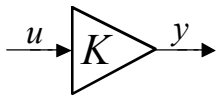
Häufig werden so genannte **Strukturbilder** zur Visualisierung von mathematischen Modellen eingesetzt. Dabei werden mathematische Operationen, wie z.B. Integration, Multiplikation und Addition durch entsprechende Blöcke dargestellt, die gemäß der Modellbeschreibung kombiniert werden. Da auch Simulationswerkzeuge, wie z.B. Simulink[2] auf einer solchen „blockorientierten" Eingabe basieren, stellen Strukturbilder oft die Grundlage für eine numerische Simulation des Systemverhaltens dar. Exemplarisch werden an dieser Stelle einige häufig verwendete Funktionsblöcke angegeben:

Summierer



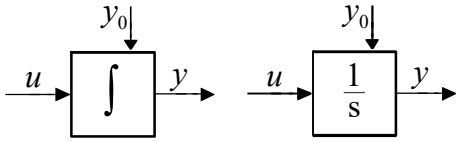
$y(t) = u_1(t) - u_2(t)$

Verstärker



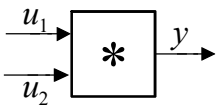
$y(t) = Ku(t)$

Integrierer



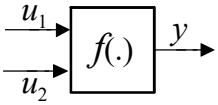
$y(t) = y_0 + \int_0^t u(\tau)d\tau$

Multiplizierer



$y(t) = u_1(t) \cdot u_2(t)$

Funktion



$y(t) = f(u_1, u_2)$

Aus (1.3) folgt, dass der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ prinzipiell durch Integration der rechten Seite der Differentialgleichung (1.3) ermittelt werden kann, d.h.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\right) d\tau. \tag{1.6}$$

Hierbei ist die Integration elementweise auf $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\right)$ anzuwenden. Aus (1.6) kann auch der wichtige Schluss gezogen werden, dass die Zustandsvariablen[3] *stetige* Funktionen der Zeit sind. In Bild 1.2 ist das zu (1.3) gehörige Strukturbild dargestellt, wobei vektorielle Größen überlicherweise durch fett gezeichnete Verbindungslinien dargestellt werden.

[2] www.mathworks.de

[3] hierbei werden (praktisch nicht realisierbare) Eingangsgrößen, die so genannte Dirac-Impulse enthalten, explizit ausgeschlossen.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

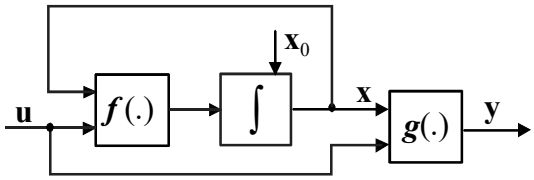


Bild 1.2: Strukturbild zu System (1.3), (1.4)

Die Lösungen $\mathbf{x}(t)$ der Systemgleichungen (1.3) hängen offensichtlich vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ und vom Verlauf der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(\tau)$ im Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ ab. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden durch

$$\mathbf{x}(t) = \Gamma \left(\begin{array}{l} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}(\tau),\ t_0 \leq \tau \leq t \end{array} \right) \quad \text{oder kurz} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} \end{array} \right) \tag{1.7}$$

symbolisiert. Systeme, deren rechte Seite ausschließlich vom Zustandsvektor $\mathbf{x}$ abhängt, werden **autonom** genannt. Nach einer anfänglichen Anregung durch den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ verläuft die „Bewegung" eines autonomen Systems ohne weitere Beeinflussung von außen. Das System ist „sich selbst überlassen". Die Beschreibung von autonomen Systemen ergibt sich unter der Annahme von $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ aus (1.3) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \tag{1.8}$$

Die Zustandsvariablen können als Koordinaten eines n-dimensionalen Koordinatensystems, dem so genannnten **Zustandsraum** interpretiert werden. Im Falle $n = 2$ spricht man von der **Zustandsebene**. Die Kurve, die eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ im Zustandsraum beschreibt, wenn der Zeitparameter t variiert, wird **Bahnkurve** oder **Trajektorie** genannt. Der Richtungssinn von Trajektorien für wachsende Zeiten t wird bei der graphischen Darstellung durch Pfeile gekennzeichnet. In Bild 1.3 ist exemplarisch eine Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum dargestellt, der Anfangszustand ist durch $\mathbf{x}_0$ gekennzeichnet.

1.3 Linearität

Ein System (1.3) heißt **linear**, wenn es bezüglich seiner Anfangszustände $\mathbf{x}_0$ und seiner Eingangsgrößen $\mathbf{u}$ dem **Superpositionsprinzip** genügt. Das bedeutet, dass die zu beliebigen Anfangszuständen und Eingangsgrößen gehörigen Lösungen (1.7) für beliebige Konstanten α

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

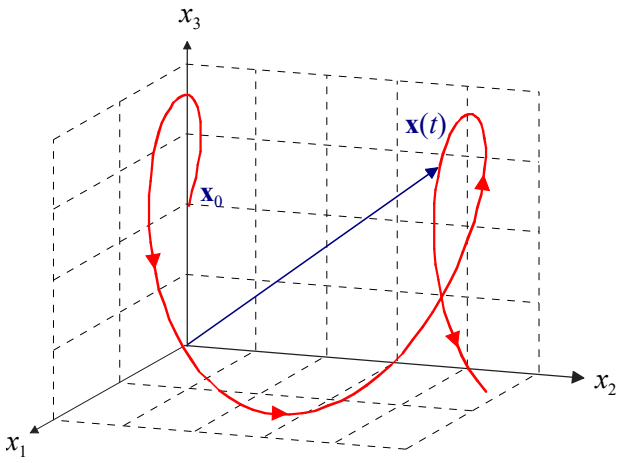


Bild 1.3: Trajektorie im dreidimensionalen Zustandsraum

und β den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{u}\end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}\\
&\text{(ii)} \quad \Gamma\begin{pmatrix}\alpha\,\mathbf{x}_{0,1} + \beta\,\mathbf{x}_{0,2}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \alpha\,\Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{0,1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \beta\,\Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{0,2}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\\
&\text{(iii)} \quad \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \alpha\,\mathbf{u}_1 + \beta\,\mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \alpha\,\Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}_1\end{pmatrix} + \beta\,\Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}_2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Außerdem muss gegebenenfalls die Ausgangsgleichung $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ensprechende Eigenschaften besitzen. In Analogie zu (1.9) wird die Abhängigheit der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}$ von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$ durch

$$\mathbf{y} = \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

symbolisiert. Es muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
&\text{(iv)} \quad \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix} = \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}\\
&\text{(v)} \quad \Upsilon\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} = \alpha\,\Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \beta\,\Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\\
&\text{(vi)} \quad \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \alpha\,\Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}_1\end{pmatrix} + \beta\,\Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{u}_2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Ein System, das den Bedingungen (1.9) und / oder (1.11) *nicht* genügt, nennt man **nichtlinear**.

B Gegeben sei das autonome System

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad x(0) =: x_0.$$

Es soll untersucht werden, ob das System linear ist. Da auf das System keine Eingangsgröße wirkt, muss lediglich Bedingung (1.9,ii) überprüft werden. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x(t) = e^{-t}\, x_0.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Linearitätsbedingung erfüllt ist. ■

B Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - u, \qquad x(0) =: x_0 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung erfüllt die Bedingung (1.11) nicht, das System ist somit nichtlinear. ■

Eine große Klasse von Systemmodellen, die den Bedingungen (1.9) und (1.11) genügen, besitzt die Form

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei **A**, **B**, **C** und **D** konstante Matrizen passender Dimensionen sind. Systeme der Form (1.12) repräsentieren eine wichtige Klasse von **linearen, zeitinvarianten Systemen**, die oft auch **LZI-Systeme** genannt werden. Für ein System der Ordnung n ist die **System-** oder **Dynamikmatrix A** eine $n \times n$ Matrix[4], die **Eingangsmatrix B** ist eine $n \times p$ Matrix, wobei p die Zahl der Eingangsgrößen ist. Unter der Annahme von q Ausgangsgrößen ist die **Ausgangsmatrix C** eine $q \times n$ Matrix und die **Durchgriffsmatrix D** hat die Dimension $q \times p$. Im Falle eines Eingrößensystems, d.h. für $p = q = 1$ lautet die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Der **Eingangsvektor b** ist ein n-dimensionaler Spaltenvektor, der **Ausgangsvektor** $\mathbf{c}^T$ ein n-dimensionaler Zeilenvektor und der **Durchgriff** d eine skalare Größe. Das zu (1.13) gehörige Strukturbild ist in Bild 1.4 dargestellt.

Die Gründe, warum diese Systemklasse in der System- und Regelungstechnik eine herausragende Rolle spielt, sind vielfältig:

[4] oft wird auch die Schreibweise (n, n)-Matrix verwendet

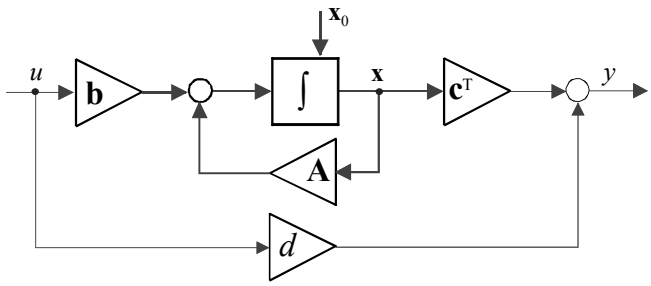


Bild 1.4: Sturkturbild eines zeitkontinuierlichen Zustandsmodells der Form (1.13)

- die Systeme sind aus mathematischer Sicht „gutmütig", d.h. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sind gesichert
- viele reale Systeme können hinreichend genau durch Systeme dieser Form beschrieben werden
- es existieren viele bewährte Verfahren, die für diese Systemklasse maßgeschneidert sind

Aus den oben genannten Gründen wird die Klasse der linearen, zeitinvarianten Systeme auch im Mittelpunkt aller weiteren Ausführungen in diesem Skriptum stehen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, können nichtlineare Systeme durch lineare Systeme approximiert werden, was in weiterer Folge die Anwendung von „linearen" Methoden erlaubt.

1.3.1 Linearisierung nichtlinearer Eingrößensysteme

In vielen Fällen führt die mathematische Modellierung von Systemen auf nichtlineare Modelle der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \tag{1.14}$$

$$y = g(\mathbf{x}, u). \tag{1.15}$$

Eine naheliegende Idee besteht darin, das Verhalten des nichtlinearen Systems durch ein lineares System zu approximieren. Eine solche Approximation wird im Allgemeinen nicht global, d.h. im gesamten Zustandsraum gültig sein. Eine in der Praxis bewährte Methode ist die so genannte **Linearisierung um einen Arbeitspunkt**. Ein Arbeitspunkt des nichtlinearen Systems ist hier dadurch charakterisiert, dass alle Systemgrößen, also Eingangsgröße, Zustandsgrößen und damit auch die Ausgangsgröße konstante Werte annehmen, d.h.

$$u(t) = u_R = \text{konst.},\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_R = \text{konst.}$$

Das System befindet sich also in einem „Gleichgewichtszustand", der auch **Ruhelage** genannt wird. Die konstanten Systemgrößen müssen die aus (1.14) resultierenden Bedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) \tag{1.16}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

erfüllen, für die zugehörige Ausgangsgröße gilt dann

$$y_R = g(\mathbf{x}_R, u_R). \tag{1.17}$$

Da das Systemverhalten „in der Nähe" des Arbeitspunktes beschrieben werden soll, ist es zweckmäßig, mit Abweichungen aus der betrachteten Ruhelage zu operieren. Aus diesem Grund setzt man

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \qquad u = u_R + \Delta u, \tag{1.18}$$

wobei $\Delta\mathbf{x}$, Δu Auslenkungen aus der Ruhelage repäsentieren. Damit lautet die Systembeschreibung (1.14) nun

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u).$$

Mit dem Ziel der Linearisierung um den Arbeitspunkt wird die nichtlineare Funktion $\mathbf{f}$ in eine Taylor-Reihe[5] entwickelt, d.h.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{ T.h.O.}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung (T.h.O.) und unter Berücksichtigung von (1.16) erhält man somit das vereinfachte System

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \tag{1.19}$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

wobei die $n \times n$ Matrix $\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)$ die so genannte Jacobi[6]-Matrix ist. Für die Ausgangsgröße y folgt auf analoge Weise nach einer Taylor-Reihenentwicklung, also

$$y = g(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u) = g(\mathbf{x}_R, u_R) + \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{ T.h.O.},$$

nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und unter Berücksichtigung von (1.17)

$$\Delta y = \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \tag{1.21}$$

[5] benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685 - 1731)
[6] benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851)

Man erkennt, dass es sich bei (1.19), (1.21) um ein lineares, zeitinvariantes System der Form (1.13) handelt, wobei

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R,u_R}, \qquad \mathbf{b} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R,u_R}, \qquad \mathbf{c}^T = \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_R,u_R} \qquad \text{und} \qquad d = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}_R,u_R}$$

gilt. Dieses System approximiert das Verhalten des nichtlinearen Systems (1.14) in einer Umgebung der betrachteten Ruhelage.

B Es wird wieder das in Bild (1.8) dargestellte Pendel untersucht. Wie bereits gezeigt, lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{ml^2}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}.$$

Die Ruhelagen des (autonomen) Systems sind durch

$$x_{2,R} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sin x_{1,R} = 0$$

charakterisiert. Für

$$x_{1,R} = \pm 2i\pi, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

befindet sich das Pendel in der „hängenden" Ruhelage, während

$$x_{1,R} = \pm(2i+1)\pi, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

die „aufrechte" Ruhelage beschreibt. Für die Linearisierung um diese Arbeitspunkte berechnet man die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix},$$

d.h. das linearisierte mathematische Modell lautet

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_R} \Delta\mathbf{x}.$$

Daraus folgen unmittelbar die linearisierten Systembeschreibungen

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}$$

„hängende" Position

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}$$

„aufrechte" Position

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

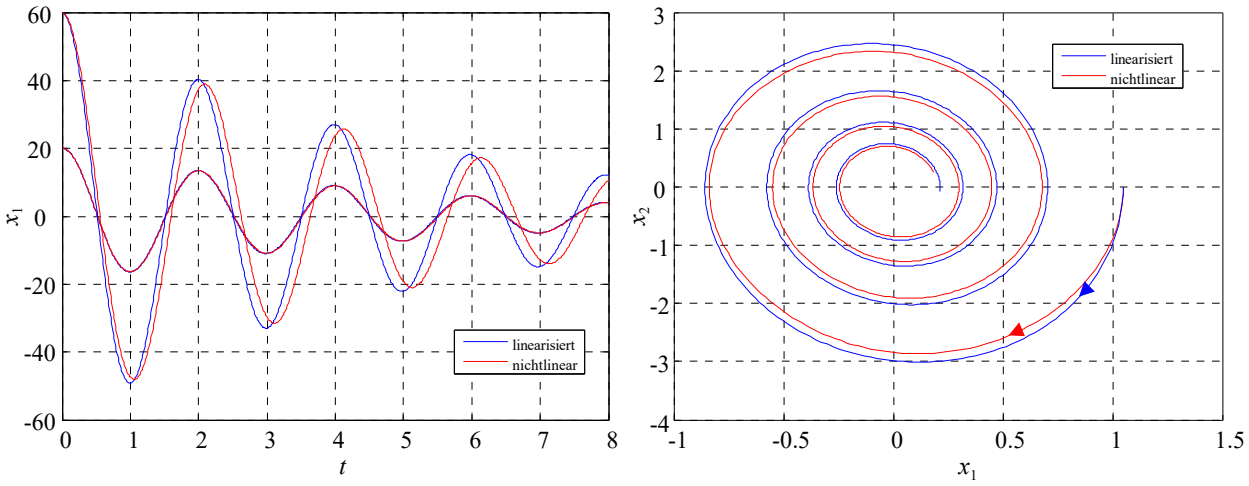


Bild 1.5: Gegenüberstellung des linearisierten Pendelmodells und des nichtlinearen Modell (rot). linkes Bild: Pendelwinkel über Zeit rechtes Bild: Verlauf der Trajektorien

In Bild 1.5 sind die Verläufe des Pendelwinkels von nichtlinearem und linearisiertem Modell dargestellt. Als Anfangsauslenkungen wurde $x_{1,0} = 0.35$ rad (=20°) bzw. $x_{1,0} = 1.05$ rad (=60°) gewählt, das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Stillstand, d.h. $x_{2,0} = 0$ rad s^{-1}. ■

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -(x-2)^2 + 9u^2, \quad y = x^2 + u$$

eines Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und der Zustandsgröße x. Ruhelagen müssen die Bedingung $(x_R - 2)^2 = 9u_R^2$ erfüllen. Für einen vorgegebenen Wert $u_R = 1$ ergeben sich somit die beiden Ruhelagen

$$x_{R,1} = 5 \qquad \text{und} \qquad x_{R,2} = -1.$$

Die zugehörigen Ausgangsgrößen nehmen die Werte $y_{R,1} = 26$ bzw. $y_{R,2} = 2$ an. Mit $f(x,u) = -(x-2)^2 + 9u^2$ und $g(x,u) = x^2 + u$ folgt unmittelbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 18u, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 1.$$

Für die (willkürlich gewählte) erste Ruhelage folgt somit die linearisierte Systembeschreibung

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -6\Delta x + 18\Delta u, \quad \Delta y = 10\Delta x + \Delta u.$$

■

1.4 Zeitdiskrete Systeme

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass die zeitlich veränderlichen Systemgrößen Funktionen des kontinuierlichen Zeitparameters $t \in \mathbb{R}$ sind. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **zeitkontinuierlichen Systemen**. Im Gegensatz dazu wird bei einem **zeitdiskreten System** die Zeitabhängigkeit von Systemgrößen durch einen ganzzahligen Index $k \in \mathbb{Z}$ charakterisiert. Die zeitlichen Verläufe der zeitabhängigen Systemgrößen werden durch Zahlenfolgen beschrieben. Der Wert der Systemgrößen wird also zu diskreten Zeitpunkten betrachtet. In vielen Fällen handelt es sich um äquidistante Zeitpunkte, d.h. der Abstand zweier aufeinanderfolgender Zeitpunkte ist konstant. Das zeitliche Verhalten von zeitdiskreten System kann mit Hilfe von **Differenzengleichungen** beschrieben werden. Begriffe, Linearität und Zeitinvarianz können vom zeitkontinuierlichen Fall geradlinig auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden. In weiterer Folge werden die Betrachtungen auf lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme, die durch Systeme von Differenzengleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k \end{aligned} \tag{1.22}$$

beschrieben werden können, beschränkt. Dabei ist (u_k) die Eingangsfolge, (y_k) ist die zugehörige Ausgangsfolge und $(\mathbf{x}_k)$ ist die (vektorielle) Zustandsfolge. Das Modell (1.22) besteht aus n linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie *einer* algebraischen Ausgangsgleichung. Weiters wird vorausgesetzt, dass durch den Index k Zeitpunkte beschrieben werden, die ganzzahligen Vielfachen einer konstanten **Diskretisierungszeit** T_d entsprechen. Die „Vorgeschichte" des Systems wird durch den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ repräsentiert. Das zu (1.22) gehörige Strukturbild ist in Bild 1.6 dargestellt, wobei, in Anlehnung an

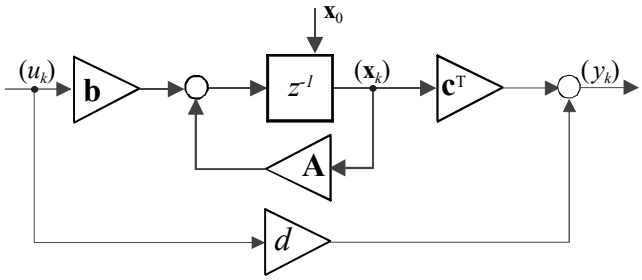
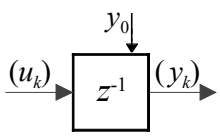


Bild 1.6: Sturkturbild eines zeitdiskreten Zustandsmodells der Form (1.22)

den Verschiebungssatz der z-Transformation, der Funktionsblock

Verschiebung (nach rechts)



$$(y_k) = (u_{k-1})$$

eine zeitliche Verschiebung der Eingangsfolge um *einen* Zeitschritt nach rechts symbolisiert.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

1.5 Beispiele für dynamische Systeme

1.5.1 Zeitkontinuierliche Systeme

Elektrische Systeme

Die Herleitung von Zustandsmodellen zur Beschreibung von idealisierten elektrischen Netzwerken, bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist ziemlich geradlinig. Die Systemordnung n wird im Allgemeinen durch die Anzahl der „Energiespeicher" bestimmt, also durch die Zahl der Kapazitäten und Induktivitäten. Es bietet sich an, als Zustandsvariablen die Spannungsabfälle an Kapazitäten und Ströme durch Induktivitäten zu wählen. Das Zustandsmodell ergibt sich dann aus der Anwendung der Kirchhoffschen[7] Regeln.

B Gegeben sei das in Bild 1.7 dargestellte ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus einer Spannungsquelle, zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2, der Kapazität C und der Induktivität L. Die Eingangsgröße sei die Spannung u, die Ausgangsgröße ist der Spannungsabfall am Widerstand R_2.

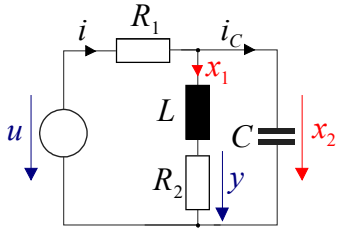


Bild 1.7: Elektrisches Netzwerk mit zwei Energiespeichern

Als Zustandsvariablen werden - wie oben erläutert - der Strom x_1 und die Spannung x_2 gewählt. Offensichtlich gilt dann

$$x_2 = L\frac{dx_1}{dt} + R_2 x_1,$$

d.h. die erste Zustandsdifferentialgleichung lautet

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_2}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2.$$

Weiters gilt

$$u = R_1 i + x_2,$$

wobei sich der Strom i gemäß

$$i = i_C + x_1 = C\frac{dx_2}{dt} + x_1$$

[7] benannt nach dem deutschen Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887)

errechnet. Daraus folgt

$$u = R_1 C \frac{dx_2}{dt} + R_1 x_1 + x_2,$$

und für die zweite Differentialgleichung gilt

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_1 C} x_2 + \frac{1}{R_1 C} u.$$

Die Ausgangsgleichung ist durch

$$y = R_2 \, x_1$$

gegeben. Zusammenfassend lautet somit das Zustandsmodell des elektrischen Systems

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R_2}{L} x_1 + \frac{1}{L} x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_1 C} x_2 + \frac{1}{R_1 C} u, \\ y &= R_2 \, x_1. \end{aligned}$$

■

Das vorangegangene Beispiel verdeutlicht, dass die Komponenten des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ verschiedene physikalische Dimensionen besitzen können. Im Beispiel ist x_1 ein elektrischer Strom (Einheit Ampère) während x_2 eine elektrische Spannung (Einheit Volt) darstellt.

Mechanische Systeme

Bei der translatorischen Bewegung von Massen ist es zweckmäßig, deren Positionen und Geschwindigkeiten als Zustandsvariablen einzuführen. Analog dazu können bei rotatorischen Bewegungen von Massen deren Drehwinkel und Winkelgeschwindigkeiten gewählt werden.

B Gegeben sei das in Bild 1.8, links dargestellte Masse-Feder System, bestehend aus einem Köper mit der Masse m und einer Feder mit linearer Federkennlinie, charakterisiert durch die Federkonstante c. Die Position der Masse wird mit y bezeichnet, wobei $y = 0$ der Lage bei entspannter Feder entspricht. Für die Reibung zwischen Körper und Untergrund wird Coulombsche[8] Reibung angenommen, der Reibungskoeffizient wird mit μ bezeichnet. Weiters wirkt auf den Körper eine äußere Kraft F. Die Anwendung des zweiten Newtonschen[9] Gesetzes liefert die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dt} = v, \qquad m\frac{dv}{dt} = -cy - \mu m g \operatorname{sign} v + F$$

wobei v die Geschwindigkeit des Körpers ist und g die Erdbeschleunigung repräsentiert. Führt man nun die Zustandsvariablen

$$x_1 = y \quad \text{und} \quad x_2 = v$$

[8] benannt nach dem französischen Physiker Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806)
[9] benannt nach dem englischen Forscher Isaac Newton (1642 - 1727)

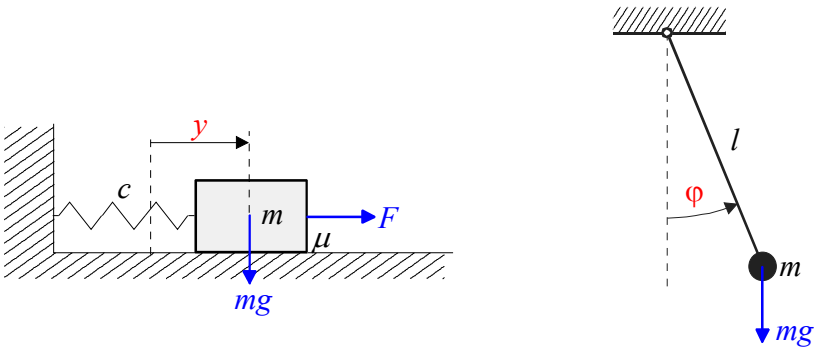


Bild 1.8: Mechanische Systeme: Masse-Feder System und Pendel

ein, so erhält man mit der Schreibweise $u := F$ die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{c}{m}\,x_1 - \mu g \,\mathrm{sign}\, x_2 + \frac{1}{m}\,u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

■

B Das mathematische Modell des in Bild 1.8, rechts dargestellten Pendels soll aufgestellt werden. Dabei wird idealisierend vorausgesetzt, dass das Pendel aus einem drehbar gelagerten, masselosen Stab der Länge l und einer punktförmigen Masse m am Stabende besteht. Das der Pendelbewegung entgegenwirkende Reibungsmoment (Lagerreibung) sei der Winkelgeschwindigkeit proportional (Proportionalitätsfaktor k). Mit Hilfe des Drallsatzes ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad ml^2\frac{d\omega}{dt} = -mgl\sin\varphi - k\omega \qquad \text{mit } k \geq 0,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist. Führt man als Zustandsvariablen den Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit ein, d.h.

$$x_1 = \varphi, \qquad x_2 = \omega,$$

so ergibt sich das folgende Zustandsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{ml^2}x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Die zum Pendelmodell gehörigen Trajektorien sind in Bild 1.9 für $k = 0$, d.h. für den reibungsfreien Fall, dargestellt. Die ungedämpften Pendelbewegungen sind hier deutlich zu erkennen. In Bild 1.10 sind die entsprechenden Trajektorien für $k > 0$ dargestellt.

■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

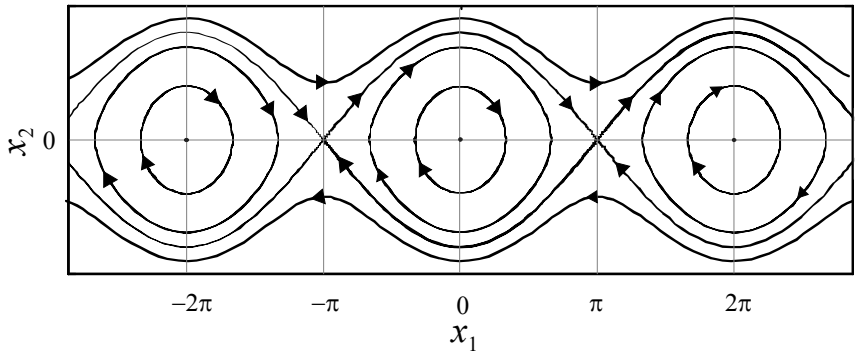


Bild 1.9: Trajektorien des Pendelmodells für $k = 0$

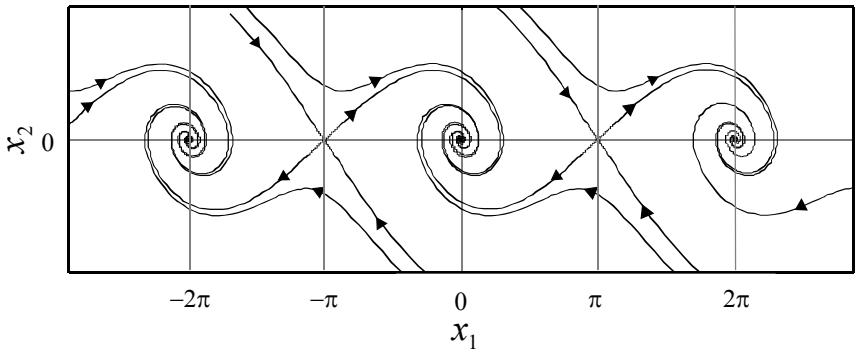


Bild 1.10: Trajektorien des Pendelmodells für $k > 0$

Räuber-Beute Modell

Nach Volterra und Lotka kann die Räuber-Beute Beziehung zweier (hinreichend großer) Populationen mit Hilfe der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

mit den positiven Konstanten $a, b, c, d > 0$ beschrieben werden. Hierbei repräsentiert x_1 die „Anzahl" der Beutetiere und x_2 stellt die „Anzahl" der Räuber dar. Das Modell beruht auf der Annahme, dass sich ohne natürliche Feinde, d.h. für $x_2 = 0$, die Beutetiere exponentiell mit der Rate a vermehren. Umgekehrt nimmt die Population der Räuber für $x_1 = 0$ wegen Nahrungsmangels exponentiell mit der Rate c ab. Die Wechselwirkungen zwischen den beiden Populationen werden durch die Terme bx_1x_2 und dx_1x_2 charakterisiert. In Bild 1.11 sind die zeitlichen Verläufe von x_1 und x_2 für $x_1(0) = 40$ und $x_2(0) = 20$ und die Modellparameter $a = 0.5$, $b = d = 0.01$, $c = 0.8$ dargestellt. Weiters ist für die gleichen Anfangswerte der Verlauf der Trajektorie in der Zustandsebene eingezeichnet. Man erkennt, dass sich eine geschlossene Trajektorie ergibt. Das bedeutet, dass x_1 und x_2 periodische Funktionen der Zeit sind.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

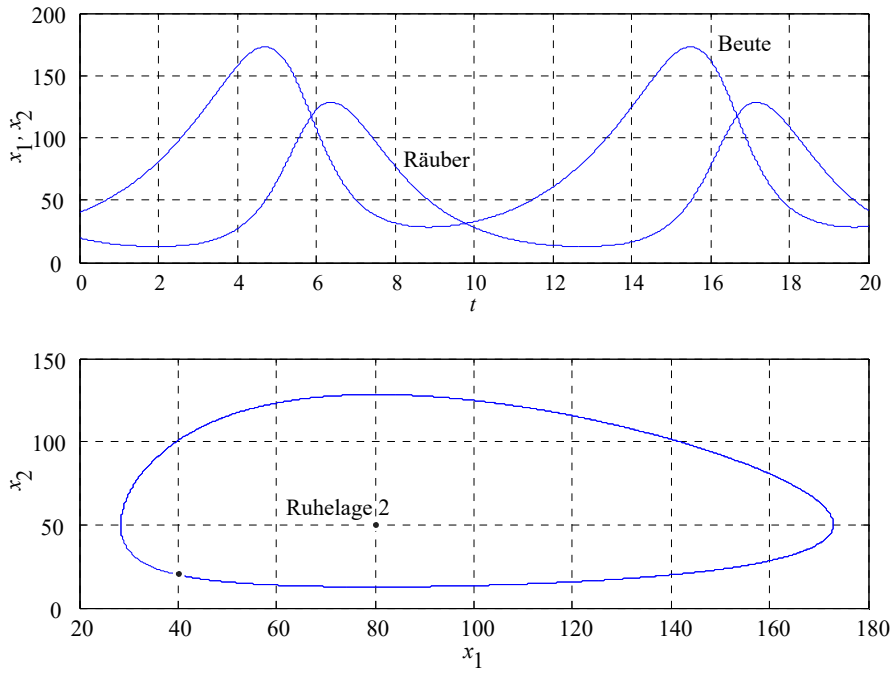


Bild 1.11: Räuber - Beute Beziehung

Weiters ist in Bild 1.11 eine so genannte Ruhelage des Systems eingezeichnet. Sie ist durch $x_{1,R}(t) = x_1(0)$ =konst. und $x_{2,R}(t) = x_2(0)$ =konst. charakterisiert. Das bedeutet, dass sich die beiden Populationen in einem Gleichgewicht befinden. Dieser spezielle Zustand ergibt sich aus den algebraischen Gleichungen

$$\frac{dx_{1,R}}{dt} = 0 = ax_{1,R} - bx_{1,R}\,x_{2,R} \quad \text{und} \quad \frac{dx_{2,R}}{dt} = 0 = -cx_{2,R} + dx_{1,R}\,x_{2,R}.$$

Die Ruhelage $x_{1,R} = x_{2,R} = 0$ stellt hier den „trivialen Fall" dar, für die praktisch relevante Ruhelage ergibt sich

$$x_{1,R} = \frac{c}{d}, \quad x_{2,R} = \frac{a}{b}.$$

Epidemiemodell („SIR-Modell")

Bei vielen klassischen Epidemiemodellen, wie auch bei dem hier vorgestellten Kermack-McKendrick Modell wird eine Gesamtpopulation in drei unterschiedliche Klassen eingeteilt. Die erste Klasse „S" (=susceptibles) umfasst gesunde und infizierbare, also nicht-immune, Personen. Die zweite Klasse „I" (=infectives) umfasst infektiöse Personen und die dritte Klasse „R" (=removals) wird durch Personen gebildet, die (nach einer Erkrankung) dauerhaft immun sind, wie es zum Beispiel bei Kinderkrankheiten wie Masern der Fall ist. Die „Anzahl" der Individuen in „S" wird mit x_1 bezeichnet, zu „I" gehören x_2 und zu „R" gehören x_3 Personen. Es wird vorausgesetzt, dass die Gesamtpopulation konstant ist, d.h.

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = N = \text{konstant}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Da Elemente der Klasse „S" durch Ansteckung zu Elementen der Klasse „I" werden und nach Gesundung schließlich zur Klasse „R" gehören, spricht man auch vom SIR-Modell. Es besteht aus den drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= ax_1x_2 - bx_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= bx_2. \end{aligned}$$

Die positive Konstante a wird Infektionsrate genannt, die positive Konstante b ist die Immunisierungsrate. Man beachte, dass sich im obigen mathematischen Modell die Tatsache widerspiegelt, dass die Gesamtpopulation konstant ist, denn es gilt

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Das Strukturbild zum mathematischen Modell ist in Bild 1.12 dargestellt. Wenn ausgehend

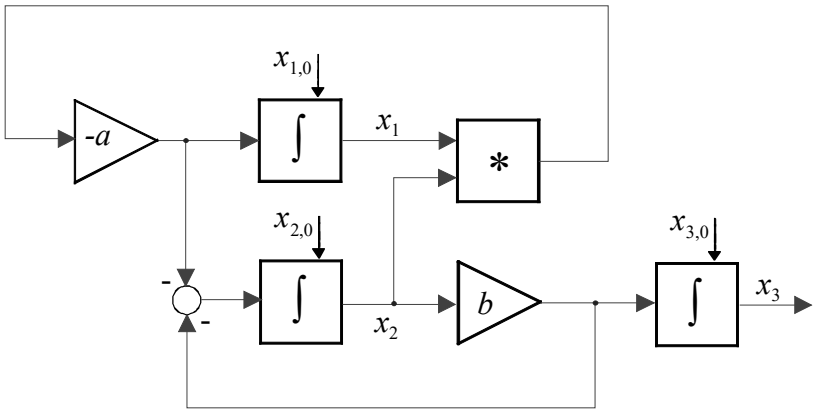


Bild 1.12: Strukturbild zum Epidemiemodell

von den Anfangswerten $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = N$ die Zahl der Infizierten, also x_2, zunimmt, d.h.

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=0} > 0,$$

so spricht man vom Ausbruch einer Epidemie. Dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn $x_1(0)$ größer als der Schwellwert

$$\rho := \frac{b}{a}$$

ist. In Bild 1.13 sind die Verläufe der Populationsgrößen dargestellt, wobei für die Gesamtpopulation $N = 1000$ gilt, die Infektionsrate a beträgt 0.002, die Immunisierungsrate b ist 2. Wie man leicht überprüfen kann, bricht für $x_1(0) = 800$ und $x_2(0) = 200$ keine Epidemie aus. Im Gegensatz dazu bricht für $N = 1000$, $a = 0.004$, $b = 0.4$ und $x_1(0) = 999$, $x_2(0) = 1$ eine Epidemie aus, was auch aus Bild 1.14 hervorgeht.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

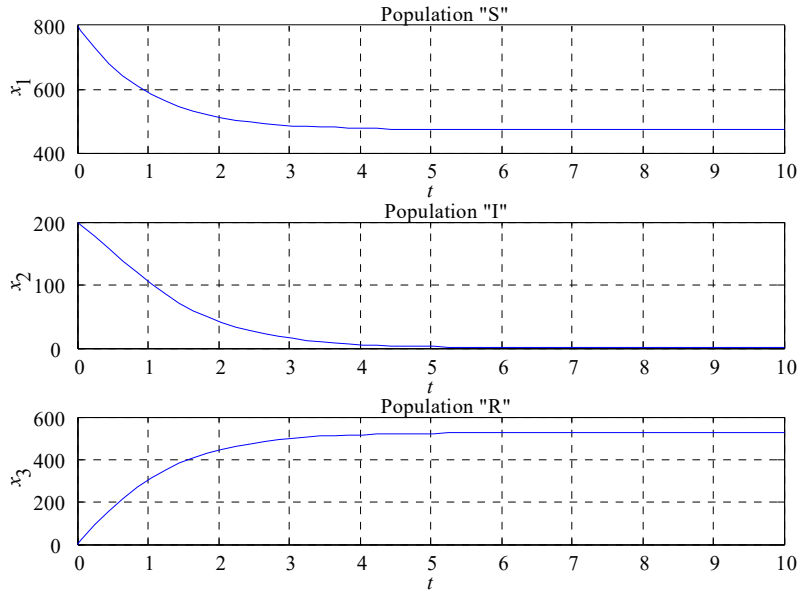


Bild 1.13: Krankheitsverlauf ohne Epidemie

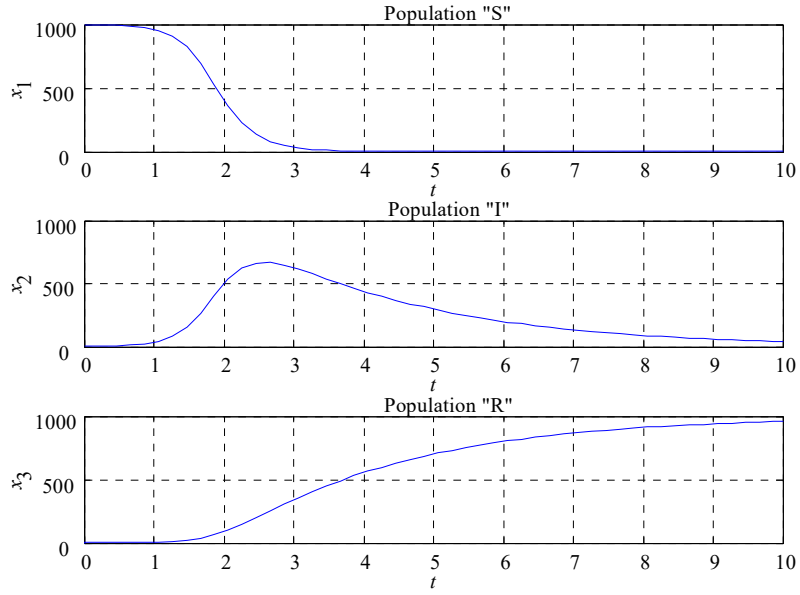


Bild 1.14: Ausbruch einer Epidemie

1.5.2 Zeitdiskrete Systeme

Verzinsung

Bei der Verzinsung eines Bankguthabens handelt es sich um einen zeitdikreten Prozess. Bezeichnet man mit x_k das Bankguthaben im Monat k und den konstanten Zinssatz mit a (in %), so errechnen sich - unter Annahme einer monatlichen Verzinsung - die Zinsen für diesen Monat zu $a\,x_k$. Zahlt man im Monat k zusätzlich noch einen Betrag u_k ein, so beträgt das Guthaben im nächsten Monat

$$x_{k+1} = x_k + a\,x_k + u_k = (1+a)\;x_k + u_k.$$

Ausgehend von einer Ersteinlage x_0 kann man über obige Differenzengleichung das Kapital in den nachfolgenden Jahren ermitteln. Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= (1+a)\;x_0 + u_0, \\ x_2 &= (1+a)\;x_1 + u_1 = (1+a)^2\;x_0 + (1+a)\,u_0 + u_1, \\ &\vdots \\ x_k &= (1+a)\;x_{k-1} + u_{k-1} = (1+a)^k\;x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (1+a)^{k-1-i}\,u_i. \end{aligned}$$

Angebot, Nachfrage und Preisentwicklung

Dieses Modell beschreibt auf vereinfachte Weise die dynamische Interaktion zwischen Angebot und Nachfrage einer bestimmten Ware, wie z.B. Mais. Mit $x_{1,k}$ wird die „Menge" der zum Zeitpunkt $t = kT_d$ zum Verkauf verfügbaren Ware bezeichnet, der (vorgebare) Preis pro Einheit beträgt u_k Die Bereitstellung der Ware (Anbau, Ernte ....) nimmt die Zeitspanne T_d in Anspruch. Ein hoher Preis u_k hat ein erhöhtes Angebot zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_d$ zur Folge (verstärkter Maisanbau bei hohen Maispreisen), d.h.

$$x_{1,k+1} = b + au_k,$$

wobei a und b nichtnegative Konstanten sind. Umgekehrt wird sich die Nachfrage $x_{2,k}$ gegenläufig zum Preis u_k verhalten, d.h. ein hoher Preis hat eine kleine Nachfrage zur Folge und umgekehrt. Dieser Tatsache wird durch die Relation

$$x_{2,k} = c - du_k$$

Rechnung getragen, wobei c und d konstante Parameter sind. Die zeitliche Entwicklung des Preises, d.h. der Übergang von u_k und u_{k+1}, muss sowohl Käufer- als auch Verkäuferinteressen berücksichtigen. Eine sinnvolle Strategie zur Gestaltung des Preises besteht nun darin, die Gleichgewichtsbedingung

$$x_{1,k+1} = x_{2,k+1}$$

zu erfüllen. Das bedeutet, dass zum Zeitpunkt $t = (k+1)T_d$ das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt, d.h. es gilt

$$b + au_k = c - du_{k+1}.$$

gelten. Daraus folgt unmittelbar

$$u_{k+1} = -\frac{a}{d}\,u_k + \frac{c-b}{d}.$$

In Bild 1.15 sind die zeitlichen Verläufe von Preis, Angebot und Nachfrage für die Parameterwerte $a = 1$, $b = 0$, $c = 150$ und $d = 2$ dargestellt. Ausgehend vom Startpreis $u_0 = 40$ gilt $\lim_{k\to\infty} u_k = 50$. Setzt man nun $a = 2.3$, so zeigt das System „instabiles" Verhalten.

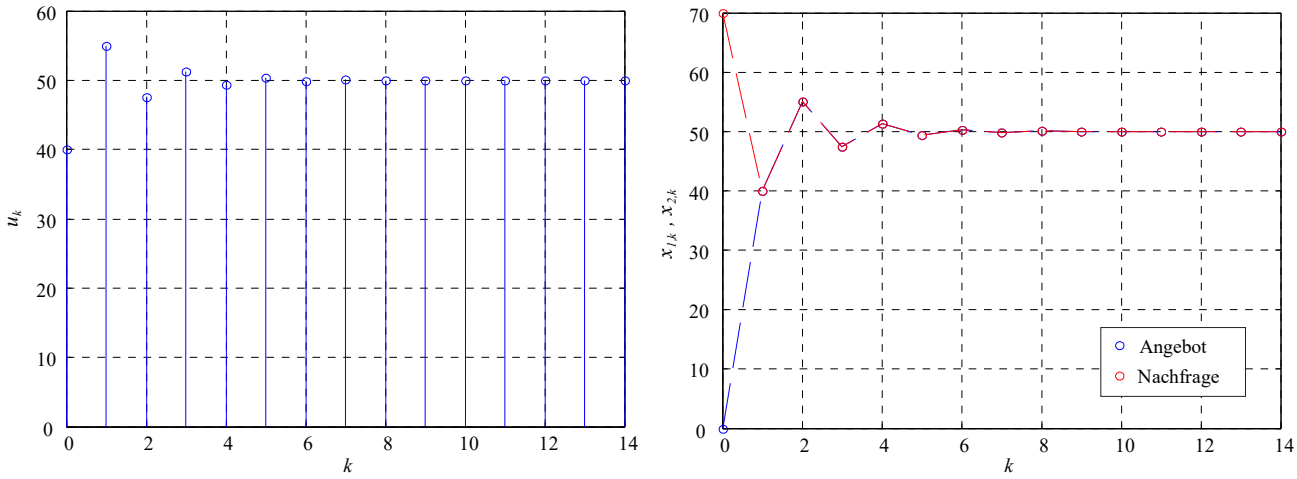


Bild 1.15: „Stabile" Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot

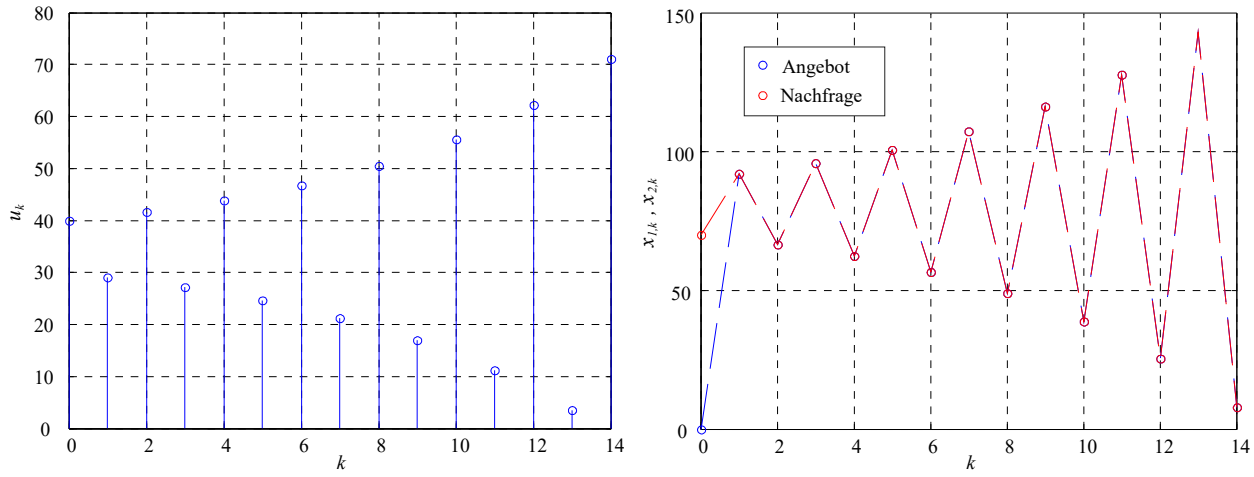


Bild 1.16: „Instabile" Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Teil II

Zeitkontinuierliche Systeme

Kapitel 2

Lineare Systeme im Zustandsraum

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \tag{2.1}$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,u \tag{2.2}$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0 = 0)$$

analysiert. Mit $\mathbf{x}$ wird der n-dimensionale Zustandsvektor bezeichnet, u ist die Eingangsgröße und y die Ausgangsgröße des Systems. Die Zeitinvarianz von (2.1) impliziert, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$, der Eingangsvektor $\mathbf{b}$, der Ausgangsvektor $\mathbf{c}$ und der Durchgriff d konstante Größen passender Dimensionen sind.

2.2 Lösung der Systemgleichungen

Da es sich bei den Zustandsgleichungen (2.1) um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Laplace-Transformation eingesetzt werden. Wendet man (A.9) auf (2.1) an, so erhält man

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\,\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\,\bar{u}(s),$$

wobei

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad \text{und} \quad \bar{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\,\bar{u}(s),$$

wobei $\mathbf{E}$ die $n \times n$ - Einheitsmatrix repräsentiert. Nach einer Multiplikation mit $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ von links findet man

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{b}\,\bar{u}(s). \tag{2.3}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Definiert man die $n \times n$ - Matrix

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \boldsymbol{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\right\}, \tag{2.4}$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes (A.8) - für die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau. \tag{2.5}$$

Der Lösungsvektor $\mathbf{x}(t)$ repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (2.1) als Reaktion auf einen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und die Eingangsgröße $u(t)$. Das Systemverhalten (2.5) kann in zwei additive Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil rührt von der „Vorgeschichte" des Systems her, also vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$, man spricht von der **freien Lösung** $\mathbf{x}_{frei}(t)$. Im Gegensatz dazu wird der zweite Anteil durch den Verlauf der Eingangsgröße $u(\tau)$ im Intervall $0 \le \tau \le t$ geprägt, man spricht von der **erzwungenen Lösung** $\mathbf{x}_{erzw}(t)$. Diese Erkenntnis kann man - unter Verwendung der in (1.7) eingeführten Notation - folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{x} = \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ u\end{pmatrix} = \mathbf{x}_{frei} + \mathbf{x}_{erzw} = \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix} + \Gamma\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ u\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Aufgrund der Struktur von (2.5) ist unmittelbar einzusehen, dass auch die restlichen Eigenschaften der Linearitätsbedingung (1.9) erfüllt sind.

Die Ausgangsgröße kann mittels Relation (2.2) berechnet werden, im Bildbereich gilt mit (2.3)

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T\,(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}_0 + \left[\mathbf{c}^T\,(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{b} + d\right]\,\bar{u}(s), \tag{2.7}$$

bzw. unter Verwendung von (2.5) im Zeitbereich

$$y(t) = \mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau + d\,u(t). \tag{2.8}$$

Analog zu (2.5) kann die Ausgangsgröße also in einen Anteil, der vom Anfangszustand herrührt und einen Anteil, der vom Verlauf der Eingangröße geprägt wird, zerlegt werden. Unter Verwendung der Notation (1.10) kann man schreiben

$$y = \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ u\end{pmatrix} = \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix} + \Upsilon\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ u\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Wie man sich überzeugen kann, sind auch die weiteren Eigenschaften von (1.11) gegeben.

2.2.1 Freie Lösung

Unter der freien Lösung eines Systems versteht man diejenige Lösung $\mathbf{x}(t)$, die sich ergibt, wenn das System *ausschließlich* durch den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ angeregt wird. Somit ist hier das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.10}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

zu untersuchen. Gemäß (2.5) gilt für die Lösung dann

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\,\mathbf{x}_0. \tag{2.11}$$

Die Matrix $\boldsymbol{\phi}(t)$ wird **Transitionsmatrix**[1] genannt, sie beschreibt den Übergang des Zustandsvektors von seinem Anfangswert zu seinem Wert zum Zeitpunkt t. Ihre Berechnung kann mit Hilfe von Formel (2.4) erfolgen, alternative Berechnungsmethoden folgen später.

B Für das autonome System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

ergibt sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix gemäß (2.4) zu

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Eine Partialbruchzerlegung und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \frac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} \\ -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors gilt somit

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\,\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}\right) x_{1,0} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t}\right) x_{2,0} \\ \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t}\right) x_{1,0} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t}\right) x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

■

2.2.2 Erzwungene Lösung

Die erzwungene Lösung oder Bewegung eines Systems ist diejenige Lösung $\mathbf{x}(t)$, die sich ergibt, wenn das System bei *verschwindendem* Anfangszustand[2] $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch die Eingangsgröße $u(t)$ angeregt wird. Nach (2.5) gilt unter diesen Umständen

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau. \tag{2.12}$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

[1] lat. *transire* = übergehen

[2] man sagt: "Das System befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe"

eines linearen, zeitinvarianten Systems erster Ordnung mit der Eingangsgröße u. Mit Hilfe von (2.12) findet man mit $\phi(t) = e^{-t}$ für die erzwungene Lösung

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot u(\tau)\, d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau}\, u(\tau)\, d\tau.$$

Wählt man beispielsweise als Eingangsgröße einen Einheitssprung, d.h. $u(t) = \sigma(t)$, so gilt

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

■

2.2.3 Übertragungsfunktion

Für die Ausgangsgröße folgt unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ aus (2.7) im Bildbereich unmittelbar

$$\bar{y}(s) = \left[\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{b} + d\right]\, \bar{u}(s). \tag{2.13}$$

Der Ausdruck

$$G(s) := \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{b} + d \tag{2.14}$$

ist die so genannte **Übertragungsfunktion** des Systems. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems im Bildbereich.

B Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2\, u.$$

Für die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems gilt dann

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 8s - 3}{s^2 - 5s - 2}.$$

■

Weiterführende Informationen über die Übertragungsfunktion finden sich in Kapitel 5

2.3 Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}(t)$ prägt das zeitliche Verhalten von linearen Systemen, siehe (2.5). In diesem Abschnitt werden einige elementare Eigenschaften der Transitionsmatrix vorgestellt. Zunächst wird ein System erster Ordnung untersucht, die dort gefundenen Erkenntnisse werden danach auf Systeme höherer Ordnung übertragen.

B Gegeben sei das mathematische Modell eines autonomen Systems erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{mit} \quad x_0 := x(t=0),$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

wobei a eine reelle Konstante ist. Die Lösung $x(t)$ kann mit (2.11) berechnet werden, wobei

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s-a)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = e^{at}\, x_0.$$

Offensichtlich erfüllt die Transitionsmatrix im skalaren Fall ($n = 1$) die Bedingungen

$$\phi(0) = 1, \qquad \frac{d\phi(t)}{dt} = a\phi(t), \qquad \phi^{-1}(t) = \phi(-t) \qquad \text{und} \qquad \phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) \tag{2.15}$$

und kann als unendliche Reihe

$$\phi(t) = e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} \tag{2.16}$$

angeschrieben werden. ■

Es wird nun gezeigt, dass die in obigem Beispiel angeführten Eigenschaften der Transitionsmatrix für den Fall $n > 1$ verallgemeinert werden können. Aus (2.11) folgt zunächst unmittelbar die Beziehung

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E}. \tag{2.17}$$

Setzt man (2.11) in (2.10) ein, so findet man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\phi}(t)\,\mathbf{x}_0,$$

woraus sich - $\mathbf{x}_0$ ist ein *beliebiger* Anfangszustand - die Beziehung

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\phi}(t) \tag{2.18}$$

ableiten lässt. Wie in Bild 2.1 angedeutet, gelten gemäß (2.11) für zwei beliebige Zeitpunkte $t = t_1$ und $t = t_1 + t_2$ die Beziehungen

$$\mathbf{x}(t_1) = \boldsymbol{\phi}(t_1)\,\mathbf{x}_0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_1 + t_2)\,\mathbf{x}_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Systemgleichungen muss auch die Beziehung

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2)\,\mathbf{x}(t_1)$$

gelten, sodass sich unmittelbar die Relation

$$\boldsymbol{\phi}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{\phi}(t_1) = \boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_2) \tag{2.19}$$

ergibt. Im Speziellen resultiert für $t_2 = -t_1$ daraus

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\phi}(-t), \tag{2.20}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

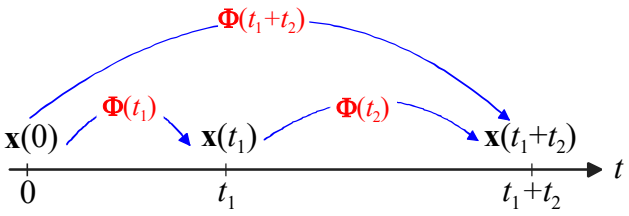


Bild 2.1: Bedeutung der Transitionsmatrix

d.h. die Transitionsmatrix ist für endliche Werte von t regulär.

Aufgrund der Analogien zwischen (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) und den Eigenschaften (2.15) der Exponentialfunktion liegt es nahe, die Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}(t)$ als **Matrix-Exponentialfunktion**, d.h. als matrixwertige Verallgemeinerung der skalaren Exponentialfunktion, zu interpretieren. Aus diesem Grund wird häufig die Schreibweise

$$\boldsymbol{\phi}(t) := e^{\mathbf{A}t}. \tag{2.21}$$

verwendet. In Anlehnung an (2.16) wird der Reihenansatz

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!} \tag{2.22}$$

gewählt. Hierbei gilt

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}\,, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\,\mathbf{A}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{A}^k = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}$$

Die Differentiation nach der Zeit bestätigt, dass die Matrix-Exponentialreihe (2.22) die Beziehung (2.18) erfüllt, denn es gilt:

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3\frac{t^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\phi}(t)$$

Es sei angemerkt, dass (2.22) in den wenigsten Fällen dazu geeignet ist, eine *geschlossene Darstellung* der Transitionsmatrix zu ermitteln. Das folgende Beispiel stellt eine Ausnahme dar.

B Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Für die Systemmatrix $\mathbf{A}$ gilt[3]

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i \geq 2,$$

[3] eine solche Matrix nennt man *nilpotent*.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

d.h. die Transitionsmatrix ist gemäß (2.22) gegeben durch

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man überprüfen kann, erfüllt $\boldsymbol{\phi}(t)$ die Bedingungen (2.17), (2.18), (2.19) und (2.20). ■

Für den Fall einer *idempotenten* Systemmatrix $\mathbf{A}$, d.h. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ kann mittels (2.22) eine Formel zur Berechnung der Transitionsmatrix abgeleitet werden. Es gilt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}\frac{t^3}{3!} + \ldots = \mathbf{E} + \mathbf{A}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!} = \mathbf{E} + \mathbf{A}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!} - \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!} - 1\right),$$

d.h. mit der Exponentialreihe (2.16) folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\left(e^t - 1\right). \tag{2.23}$$

B Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Da die Systemmatrix idempotent ist, kann man die Transitionsmatrix mittels (2.23) berechnen und es gilt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\left(e^t - 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t & e^t - 1 \\ \frac{1}{4}(e^t - 1) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}.$$

■

2.4 Ruhelagen

Ruhelagen sind spezielle Lösungen der Systemgleichungen (2.1), die dadurch charakterisiert sind, dass für den Zustandsvektor gilt:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \tag{2.24}$$

Das bedeutet, dass sich das System in einem „Gleichgewichtszustand" befindet, der auch **Ruhelage** genannt wird. In einer Ruhelage nehmen alle Systemgrößen, d.h. Eingangsgröße und Zustandsgrößen konstante Werte an, d.h. es gilt

$$\frac{d\mathbf{x}_R}{dt} = \mathbf{0}. \tag{2.25}$$

Da die Eingangsgröße konstant sein muss, d.h.

$$u(t) = u_R = \text{konst.}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

führt die Bedingung (2.25) auf das lineare Gleichungssystem

$$-\mathbf{A}\mathbf{x}_R = \mathbf{b}\, u_R \tag{2.26}$$

zur Ermittlung der Ruhelagen. Bezeichnet man mit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die Spalten der $n \times n$ - Matrix $\mathbf{A}$, d.h.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{array} \right]$$

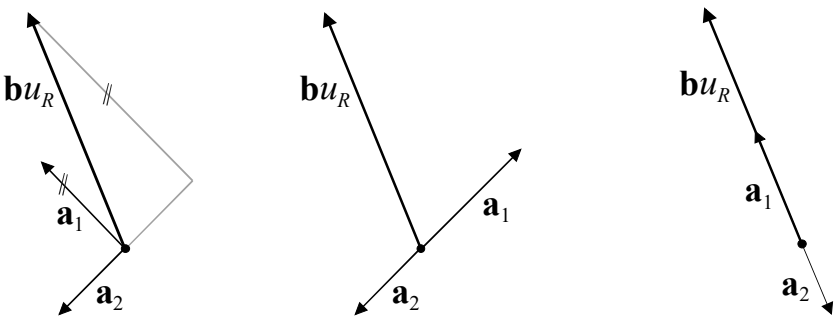
und mit $x_{1,R}, \ldots, x_{n,R}$ die Komponenten der gesuchten Ruhelage $\mathbf{x}_R$, also

$$\mathbf{x}_R = \left[\begin{array}{ccc} x_{1,R} & \ldots & x_{n,R} \end{array} \right]^T,$$

so kann (2.26) folgendermaßen dargestellt werden:

$$-\left(\mathbf{a}_1 x_{1,R} + \mathbf{a}_2 x_{2,R} + \ldots + \mathbf{a}_n x_{n,R}\right) = \mathbf{b}\, u_R$$

Die Ermittlung möglicher Ruhelagen reduziert sich also auf die Beantwortung der Frage, ob der Vektor $(\mathbf{b}\, u_R)$ als Linearkombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ dargestellt werden kann. Ist das der Fall, so gibt es mindestens eine Ruhelage, anderenfalls existiert keine Ruhelage. Eine geometrische Interpretation für $n = 2$ liefern die folgenden Abbildungen:



1 Ruhelage keine Ruhelagen ∞ viele Ruhelagen

Über den so genannten Rang einer Matrix kann die vorliegende Problemstellung prägnant formuliert werden. Er gibt an, wieviele linear unabhängige Spalten (bzw. Zeilen) eine Matrix besitzt. Offensichtlich kann der Vektor $(\mathbf{b}\, u_R)$ genau dann als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ dargestellt werden, wenn gilt:

$$\text{rang}\,(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{b}\, u_R)$$

Das bedeutet, dass die $n \times (n+1)$ - Matrix, die sich durch das Hinzufügen des Vektors $(\mathbf{b}\, u_R)$ als zusätzliche Spalte ergibt, den gleichen Rang besitzt wie die Matrix $\mathbf{A}$. Dies trifft auf jeden Fall zu, wenn $\mathbf{A}$ regulär ist, also den Höchstrang, d.h. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ besitzt. Dann gibt es genau *eine* Ruhelage, nämlich

$$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\, u_R$$

Im Falle einer singulären Matrix $\mathbf{A}$ mit $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{b}\, u_R) < n$ gibt es unendlich viele Ruhelagen, man spricht dann von einer *Ruhezone*.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Die gefundenen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

<table>
<tr><td>$\text{rang}\,(\mathbf{A}) = n$</td><td colspan="2">$\text{rang}\,(\mathbf{A}) < n$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,u_R$
genau eine Ruhelage</td><td>$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\,u_R)$
∞ viele Ruhelagen</td><td>$\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\,u_R)$
keine Ruhelage</td></tr>
</table>

B Es sollen die Ruhelagen des linearen, zeitinvarianten Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ermittelt werden. Es gilt:

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\,u_R) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u_R \end{bmatrix}$$

Für den Fall $u_R = 0$, d.h. $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\,u_R) = 1$ gibt es unendlich viele Ruhelagen, nämlich

$$\mathbf{x}_R = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei α eine beliebige reelle Konstante ist. Für $u_R \neq 0$, also $\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\,u_R) = 2$ existiert keine Ruhelage. ■

2.5 Asymptotische Stabilität

Zur Beurteilung der so genannten **asymptotischen Stabilität** wird das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0) \tag{2.27}$$

betrachtet. Das System (2.27) wird **asymptotisch stabil** genannt, wenn für *jeden* Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{2.28}$$

erfüllt ist. Das bedeutet, dass jede Trajektorie - unabhängig von ihrem Startpunkt $\mathbf{x}_0$ - für $t \to \infty$ in den Ursprung des Zustandsraumes einläuft.

Aus obiger Definition geht auch hervor, dass ein asymptotisch stabiles System (2.27) als einzige Ruhelage $\mathbf{x}_R$ den Koordinatenursprung des Zustandsraumes besitzt.

Da (2.28) für jeden beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ gelten muss, folgt aus (2.11) unmittelbar

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{0}. \tag{2.29}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Das bedeutet, dass jedes Element der Transitionsmatrix eines asymptotisch stabilen Systems für $t \to \infty$ verschwindet. Dies kann mit Hilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation überprüft werden. Dazu wird die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}} .$$

betrachtet. Dabei ist $\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A}$, das den Polynomgrad n besitzt. Die Adjunkte $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}$ ist eine Polynommatrix, deren Elemente Polynomgrade kleiner oder gleich $(n-1)$ besitzen. Die Elemente von $\bar{\boldsymbol{\phi}}(s)$ sind also gebrochen rationale Funktionen. Gemäß den Ausführungen über den Endwertsatz im Abschnitt A.9 ist (2.29) genau dann erfüllt, wenn die Nennerpolynome aller Elemente von $\bar{\boldsymbol{\phi}}(s)$ Hurwitzpolynome sind.

B Gegeben sei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{2.30}$$

Für $\bar{\boldsymbol{\phi}}(s)$ gilt dann

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 3s - 10}}_{\Delta(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}}_{(s\mathbf{E}-\mathbf{A})_{\text{adj}}}.$$

■

Die Nennerpolynome der Elemente von $\bar{\boldsymbol{\phi}}(s)$ sind sicher Hurwitzpolynome, wenn $\Delta(s)$ ein Hurwitzpolynom ist. Hierbei handelt es sich sogar um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Da die Nullstellen von $\Delta(s)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind, gilt zusammenfassend:

Das System (2.27) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil besitzen. Eine solche Matrix nennt man auch **Hurwitzmatrix**.

B Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ aus (2.30) lauten

$$s_1 = 2 \quad \text{und} \quad s_2 = -5.$$

Das bedeutet, dass (2.30) nicht asymptotisch stabil ist, was auch den in Bild 2.2 dargestellten Trajektorien zu entnehmen ist. ■

B Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix des Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{2.31}$$

lautet

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + 2,$$

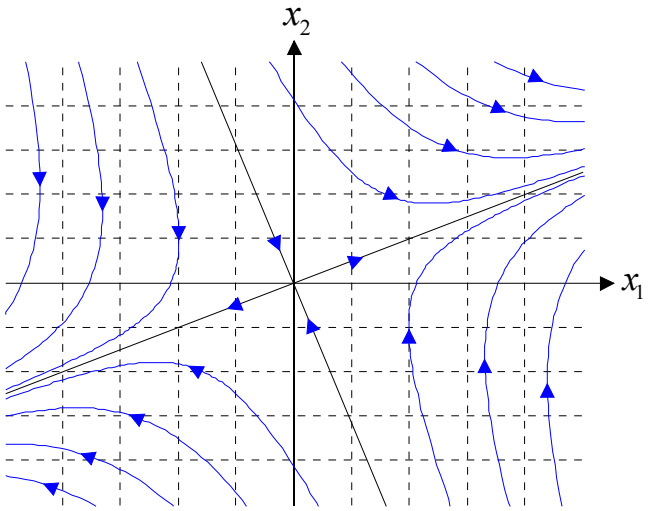


Bild 2.2: Trajektorien zu (2.30) - man spricht in diesem Zusammenhang von einem (instabilen) Sattelpunkt

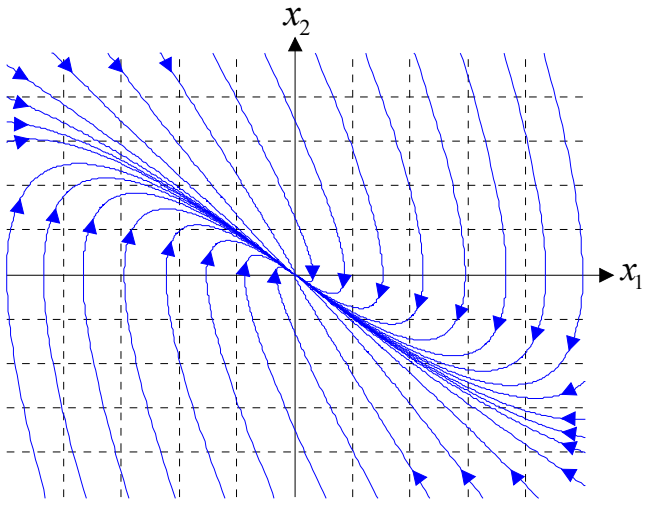


Bild 2.3: Trajektorien zu (2.31) - man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem stabilen Knoten

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

d.h. für die Eigenwerte gilt

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Das bedeutet, dass das System asymptotisch stabil ist. Dies wird durch die in Bild 2.3 dargestellten Trajektorien bestätigt. ■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 3

Zustandstransformationen

3.1 Einführung

Wie bereits erwähnt wurde, ist die Wahl der Zustandsvariablen zur Beschreibung eines dynamischen Systems nicht eindeutig, d.h. für ein und dasselbe System gibt es *unendlich viele* Zustandsbeschreibungen. Der Übergang zu „geeigneten" Zustandsvariablen kann viele Aufgabenstellungen drastisch vereinfachen.

Bei einer **linearen Zustandstransformation** sind der ursprüngliche Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der transformierte Zustandsvektor $\mathbf{z}$ über die (lineare) Relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{z} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{x} \tag{3.1}$$

verknüpft, wobei die konstante $n \times n$ Matrix $\mathbf{T}$ die so genannte **Transformationsmatrix** ist. Damit die Transformation umkehrbar eindeutig ist, muss $\mathbf{T}$ regulär sein, man spricht deshalb auch von einer **regulären Zustandstransformation**. Man beachte, dass die Transformation (3.1) einem Wechsel der Basisvektoren des n-dimensionalen Zustandsraumes entspricht, es handelt sich bei (3.1) also um eine lineare Koordinatentransformation.

Die Anwendung der Transformationsvorschrift (3.1) auf (2.1) bzw. (2.2) liefert zunächst

$$\mathbf{T}\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T}\,\mathbf{z} + \mathbf{b}\,u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{T}\,\mathbf{z} + d\,u$$

und in weiterer Folge (Multiplikation mit $\mathbf{T}^{-1}$ von links)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\,\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}\,u = \tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}\,u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}\;\mathbf{z} + d\,u = \tilde{\mathbf{c}}^T\,\mathbf{z} + d\,u. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Das transformierte System liegt somit in der gleichen Form wie das Originalsystem (2.1) vor, wobei gilt

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}, \tag{3.3}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

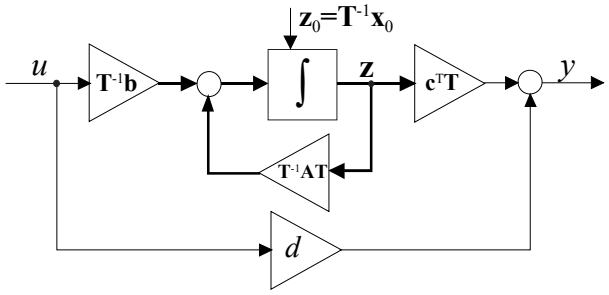


Bild 3.1: Strukturbild des transfomierten Systems (3.2)

der Durchgriffsterm d bleibt durch die Transformation unverändert. Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 3.1 dargestellt.
Es zeigt sich, dass einige wesentliche Systemeigenschaften *unabhängig* von der Wahl der Zustandsvariablen sind. Man nennt solche Eigenschaften **invariant** bezüglich einer regulären Zustandstransformation. Diese Erkenntnis ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass das transformierte System (3.2) bloß eine alternative Beschreibung des ursprünglichen Systems (2.1), (2.2) darstellt.

3.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion

Für die Übertragungsfunktion des Originalsystems gilt gemäß (2.14)

$$G(s) = \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Wird nun eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}$ durchgeführt, so gilt für die Übertragungsfunktion des transformierten Systems analog

$$\tilde{G}(s) = \tilde{\mathbf{c}}^T \left(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{b}} + d \overset{(3.3)}{=} \mathbf{c}^T\mathbf{T} \left(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} + d.$$

Unter Ausnutzung der Relation

$$(\mathbf{V}\mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^{-1}$$

für zwei beliebige reguläre $n \times n$ Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ kann für $\tilde{G}(s)$ auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \mathbf{c}^T \left[\left(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\right)\mathbf{T}^{-1}\right]^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T \left[\mathbf{T}^{-1}\left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\right]^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} + d = \\ &= \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} + d = G(s). \end{aligned}$$

Offensichtlich ändert sich also durch eine reguläre Zustandstransformation die Übertragungsfunktion *nicht*.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

3.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft

Wie gezeigt wurde, wird die Stabilität eines Systems (2.1) durch die Lage der n Eigenwerte s_i der Systemmatrix $\mathbf{A}$ geprägt. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Für das charakteristische Polynom der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ gilt analog

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

Unter Anwendung von (3.3) gilt weiter

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}). \tag{3.4}$$

Da für die Determinante des Produktes zweier $n \times n$ Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ immer

$$\det(\mathbf{V}\mathbf{W}) = \det(\mathbf{V})\det(\mathbf{W}) \tag{3.5}$$

gilt, kann (3.4) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\tilde{\Delta}(s) = \det\left[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{T}\right] = \det\mathbf{T}^{-1}\,\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\det\mathbf{T}.$$

Aus (3.5) folgt unmittelbar

$$\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{T}) = 1,$$

d.h. es gilt

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \Delta(s). \tag{3.6}$$

Die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ besitzt also das gleiche charakteristische Polynom wie die Matrix $\mathbf{A}$. Das bedeutet, dass die Eigenwerte des transformierten Systems identisch mit den Eigenwerten des Originalsystems sind. Erwartungsgemäß ändert sich durch eine lineare Zustandstransformation der Stabilitätscharakter eines Systems somit *nicht*.

3.2 Transformation auf Diagonalform

Bei der Transformation in die so genannte **Diagonalform** wird das Ziel verfolgt, das Originalsystem in ein System von n entkoppelten Differentialgleichungen umzuwandeln. Das bedeutet, dass in jeder Differentialgleichung nur mehr *eine* Zustandsgröße vorkommt. Diese Zustandsvariable wird nur von der Eingangsgröße u, nicht jedoch von anderen Zustandsvariablen beeinflusst. Die Entkopplung weist erhebliche Vorzüge gegenüber der ursprünglichen Struktur des Originalsystems auf. So kann man jede der n Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Rücksicht auf die anderen Differentialgleichungen lösen. Diese Tatsache kann beispielsweise bei der Berechnung der Transitionsmatrix des Originalsystems vorteilhaft ausgenützt werden.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -46 & 36 \\ -60 & 47 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -22 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Nach Anwendung einer Zustandstransformation der Form (3.1) mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das transformierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass das Modell des transformierten Systems aus zwei voneinander *entkoppelten* Differentialgleichungen besteht, da die Systemmatrix eine Diagonalmatrix ist. Man sagt, dass das transformierte System in Diagonalform vorliegt. Es ist offensichtlich, dass in dieser Form beispielsweise Aussagen über die Stabilität leicht möglich sind, da die (invarianten) Eigenwerte der Dynamikmatrix in der Hauptdiagonale angeordnet sind. ■

3.2.1 Transformationsvorschrift

Gesucht ist nun ein systematischer Weg zur Ermittlung der Transformationsvorschrift (3.1), die das System (2.1) in die Diagonalform überführt. Gemäß (3.3) muss die Relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \tag{3.7}$$

gelten, wobei $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix ist. Da die Eigenwerte der Dynamikmatrizen von ursprünglichem und transformiertem System identisch sind, entsprechen die Diagonalelemente von $\mathbf{\Lambda}$ den Eigenwerten s_i von $\mathbf{A}$, d.h.

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left(s_i\right).$$

Multipliziert man (3.7) von links mit $\mathbf{T}$, so erhält man (unter Berücksichtigung von $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$)

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}. \tag{3.8}$$

Es erweist sich als sinnvoll, die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ durch ihre Spalten darzustellen, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Setzt man diese Darstellung von $\mathbf{T}$ in (3.8) ein, so erhält man

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix},$$

bzw. in ausmultiplizierter Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t}_1 & \mathbf{A}\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\mathbf{t}_1 & s_2\mathbf{t}_2 & \dots & s_n\mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Ein spaltenweiser Vergleich ergibt unmittelbar

$$\mathbf{A}\,\mathbf{t}_i = s_i\,\mathbf{t}_i \qquad \text{mit} \qquad i = 1, \dots, n.$$

bzw.

$$(s_i\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\;\mathbf{t}_i = \mathbf{0} \qquad \text{mit} \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.9}$$

Man beachte, dass es sich bei (3.9) um die bekannte Eigenwertgleichung handelt, d.h. $\mathbf{t}_i$ ist ein zum Eigenwert s_i gehöriger (Rechts-)Eigenvektor $\mathbf{p}_i$. Die Transformationsmatrix lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} =: \mathbf{P}. \tag{3.10}$$

Die bisherige Vorgangsweise setzt voraus, dass die Spalten von $\mathbf{P}$, also die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind. Man nennt die Matrix $\mathbf{A}$ dann **diagonalähnlich**. *Hinreichend* hierfür ist, dass $\mathbf{A}$ lauter verschiedene, d.h. einfache Eigenwerte besitzt. Diese Eigenschaft von $\mathbf{A}$ wird in den folgenden Abschnitten angenommen, der Fall mehrfacher Eigenwerte wird danach gesondert behandelt.

B Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ lauten $s_1 = 2$ und $s_2 = -5$, die Eigenvektoren werden mittels (3.9) berechnet, d.h.

$$s_1 = 2: \qquad (s_1\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\;\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \overset{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$s_2 = -5: \qquad (s_2\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\;\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \overset{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht überprüfen kann gilt

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

d.h. das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Stellt man die Inverse der Matrix $\mathbf{P}$ durch ihre Zeilen dar, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

und setzt diese Darstellung in (3.8) ein, so ergibt sich

$$\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

und weiter

$$\begin{bmatrix} s_1\boldsymbol{\rho}_1^T \\ s_2\boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ s_n\boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{A} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$s_i\,\boldsymbol{\rho}_i^T = \boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad i = 1, \ldots, n,$$

d.h. $\boldsymbol{\rho}_i$ ist ein zu s_i gehöriger Links-Eigenvektor von $\mathbf{A}$. Das bedeutet, dass $\mathbf{P}$ Rechts-Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ als Spalten besitzt und $\mathbf{P}^{-1}$ entsprechende Links-Eigenvektoren als Zeilen. Aus der Relation

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \ldots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{p}_2 & \ldots & \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{p}_n \\ \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{p}_2 & & \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{p}_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{p}_2 & \ldots & \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\,\mathbf{p}_k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases} \qquad \text{wobei} \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Das bedeutet, dass der Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$ normal auf alle Rechts-Eigenvektoren mit Ausnahme von $\mathbf{p}_i$ steht. Für das System in Diagonalform gilt mit (3.11)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{p}_1 & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + du. \tag{3.12}$$

Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 3.2 dargestellt. Das System besteht aus n *entkoppelten*

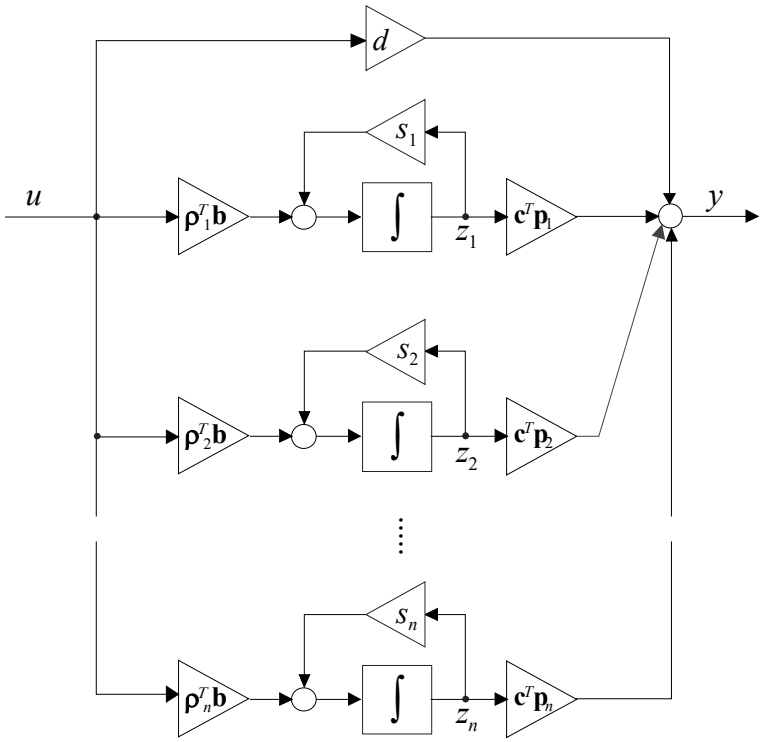


Bild 3.2: Struktur der Diagonalform

Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i\, z_i + \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\, u \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.13}$$

für die Ausgangsgleichung gilt

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i\, z_i + d\, u. \tag{3.14}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Wie man aus Bild 3.2 bzw. den Relationen (3.13) und (3.14) erkennt, kann der Verlauf der Zustandsvariable z_i für

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \, \mathbf{b} = 0, \tag{3.15}$$

d.h. $\mathbf{b}$ ist orthogonal zum Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$, durch die Eingangsgröße u *nicht* beeinflusst werden. Weiters leistet im Falle

$$\mathbf{c}^T \, \mathbf{p}_i = 0, \tag{3.16}$$

d.h. $\mathbf{c}$ ist orthogonal zum Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_i$, die Zustandsvariable z_i *keinen* Beitrag zur Ausgangsgröße y. Tritt also (3.15) und / oder (3.16) ein, so spielt die entsprechende Zustandsvariable z_i keine Rolle für das Übertragungsverhalten des Systems. Dies manifestiert sich auch in der Übertragungsfunktion $G(s)$. Transformiert man (3.13) und (3.14) in den Bildbereich, so findet man unter Annahme verschwindender Anfangswerte

$$\bar{z}_i(s) = \frac{\boldsymbol{\rho}_i^T \, \mathbf{b}}{s - s_i} \bar{u}(s) \qquad \text{und} \qquad \bar{y}(s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \, \bar{z}_i(s) + d \, \bar{u}(s).$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \, \boldsymbol{\rho}_i^T \, \mathbf{b}}{s - s_i} + d \, . \tag{3.17}$$

Nur wenn weder (3.15) noch (3.16) gilt, liefert der entsprechende Summand in obiger Formel einen Beitrag zur Übertragungsfunktion. Gibt es Summanden, die keinen Beitrag zu $G(s)$ leisten, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ kleiner ist als die Ordnung n des Zustandsmodells.

B Für die Übertragungsfunktion des in Diagonalform vorliegenden mathematischen Modells

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

findet man mit (3.17)

$$G(s) = \frac{3 \cdot 0}{s - 2} - \frac{2 \cdot 1}{s + 5} = -\frac{2}{s + 5}.$$

■

3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(t)$ des transformierten Systems (3.12) kann mühelos ermittelt werden, da die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix ist. Unter der Annahme von $u = 0$ gilt

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i \, z_i \qquad \text{mit} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$z_i(t) = e^{s_i t} \, z_{i,0}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t)\,\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & & \\ & e^{s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{s_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}_0 = \operatorname{diag}\left(e^{s_i\, t}\right)\,\mathbf{z}_0. \tag{3.18}$$

Das bedeutet, dass die Transitionsmatrix des transformierten Systems ebenfalls eine Diagonalmatrix ist. Für den Zustandsvektor des Originalsystems ergibt sich unter Anwendung von (3.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(e^{s_i\, t}\right)\,\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(e^{s_i\, t}\right)\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}_0, \tag{3.19}$$

d.h. für die Transitionsmatrix des Originalsystems gilt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(e^{s_i\, t}\right)\,\mathbf{P}^{-1}. \tag{3.20}$$

B Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte des Dynamikmatrix lauten $s_1 = 2$ und $s_2 = 1$, für die Matrix der Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Für die Transitionsmatrix findet man mit (3.20)

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2e^{t} & -3e^{2t} + 3e^{t} \\ 2e^{2t} - 2e^{t} & -2e^{2t} + 3e^{t} \end{bmatrix}.$$

. ■

Aus (3.18) ist weiters zu erkennen, dass die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{0} \qquad \overset{(3.20)}{\Rightarrow} \qquad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{0}$$

erfüllt ist, wenn alle Eigenwerte s_i der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Dies entspricht dem bereits bekannten Kriterium für die asymptotische Stabilität. Unabhängig vom Anfangszustand streben dann alle Trajektorien des autonomen Systems asymptotisch in den Ursprung des Zustandsraumes.

3.2.3 Komplexe Eigenwerte

Besitzt die diagonalähnliche Matrix **A** komplexe Eigenwerte, so kann die Diagonalisierung prinzipiell wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben durchgeführt werden. Wie man zeigen kann, sind die zu konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gehörigen Eigenvektoren ebenfalls konjugiert komplex. Da die Matrix **P** somit komplexe Elemente besitzt, erhält man ein transformiertes

System, bei dem $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Diagonalmatrix mit komplexen Elementen ist und die Vektoren $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ ebenfalls komplexe Elemente besitzen können. Da man üblicherweise an einer Systembeschreibung interessiert ist, bei der $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ ausschließlich reelle Elemente besitzen, muss die Transformationsvorschrift leicht modifiziert werden. Die prinzipielle Vorgangsweise wird zunächst für ein System zweiter Ordnung demonstriert und danach verallgemeinert.

Für ein System zweiter Ordnung mit dem konjugiert komplexen Eigenwertpaar

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

lautet die Dynamikmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

wobei für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

gilt. Die Transformationsvorschrift wird nun so erweitert, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems anstelle der komplexen Diagonalform (3.21) die ebenfalls sehr anschauliche und aufschlussreiche, reelle Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

annimmt. Aus $\tilde{\mathbf{A}}$ können nämlich die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte *direkt* abgelesen werden. Hierfür wird für die Transformationsmatrix (3.1) der Ansatz

$$\mathbf{T} = \mathbf{PQ} \tag{3.24}$$

gewählt, d.h. für die Dynamikmatrix des transformierten Systems gilt nach (3.3)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = (\mathbf{P}\,\mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{A}(\mathbf{P}\,\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APQ} \overset{(3.21)}{=} \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda Q}.$$

Die gesuchte Matrix $\mathbf{Q}$ ist also so zu bestimmen, dass

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Lambda Q} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

erfüllt ist. Die Ermittlung von $\mathbf{Q}$ erfolgt über die Relation

$$\mathbf{\Lambda Q} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Daraus folgen nach kurzer Rechnung die Zusammenhänge

$$q_{12} = -jq_{11} \quad \text{und} \quad q_{21} = -jq_{22},$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

d.h. die Matrix besitzt die Form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Für die Determinante von $\mathbf{Q}$ gilt

$$\det \mathbf{Q} = 2q_{11}q_{22},$$

d.h. die Matrix ist für $q_{11} \neq 0$ und $q_{22} \neq 0$ regulär. Das bedeutet, dass prinzipiell *jede* Matrix $\mathbf{Q}$ der Form (3.26) mit $q_{11} \neq 0$ und $q_{22} \neq 0$ die Systemmatrix in die gewünschte Form (3.25) transformiert. Es wird nun gezeigt, dass die Freiheiten bei der Wahl von $\mathbf{Q}$ dahingehend ausgenützt werden können, dass die resultierende Transformationsmatrix (3.24)

$$\mathbf{T} = \mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}\mathbf{p}_1 - jq_{22}\mathbf{p}_1^* & -jq_{11}\mathbf{p}_1 + q_{22}\mathbf{p}_1^* \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

reell und strukturell stark an die Matrix $\mathbf{P}$ angelehnt ist. Bei der Wahl der freien Parameter q_{11} und q_{22} wird die Tatsache ausgenützt, dass für die konjugiert komplexen Vektoren die Relationen

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Re}\mathbf{p}_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2j}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Im}\mathbf{p}_1$$

gelten. Wählt man nun

$$q_{11} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad q_{22} = \frac{j}{2},$$

d.h.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

so ergibt sich mit (3.27) für die reelle Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\mathbf{p}_1 & \operatorname{Im}\mathbf{p}_1 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Die modifizierte Transformationsmatrix (3.29) ist also ähnlich aufgebaut wie die Matrix $\mathbf{P}$. Anstelle der konjugiert komplexen Eigenvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ besitzt $\mathbf{T}$ nun Real- und Imaginärteil des Vektors $\mathbf{p}_1$ als Spalten.

B Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ lauten

$$s_1 = -1 + j2 \qquad \text{und} \qquad s_2 = s_1^* = -1 - j2,$$

zugehörige Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 - j2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} -1 + j2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Für die Transformationsmatrix (3.29) gilt somit

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc} \mathrm{Re}\,\mathbf{p}_1 & \mathrm{Im}\,\mathbf{p}_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{array} \right]$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{array} \right] \mathbf{z} + \left[\begin{array}{c} 0.2 \\ -0.1 \end{array} \right] u, \qquad y = \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \end{array} \right] \mathbf{z}.$$

■

Die beschriebene Vorgangsweise kann problemlos auf Systeme höherer Ordnung übertragen werden. Die Transformationsmatrix wird dabei nach folgendem Schema aufgebaut: Zu jedem reellen Eigenwert wird ein zugehöriger Eigenvektor als Spalte zu $\mathbf{T}$ hinzugefügt. Bei konjugiert komplexen Eigenwertpaaren werden den obigen Ausführungen entsprechend Real- und Imaginärteil eines zugehörigen Eigenvektors als Spalten zu $\mathbf{T}$ hinzugefügt.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & -9 & -3 \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] u, \qquad y = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ lauten

$$s_1 = -2 + j3, \qquad s_2 = s_1^* = -2 - j3 \qquad \text{und} \qquad s_3 = 1,$$

für die zugehörigen Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{p}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 + j3 \\ -5 - j12 \end{array} \right], \qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 - j3 \\ -5 + j12 \end{array} \right] \qquad \text{und} \qquad \mathbf{p}_3 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right].$$

Für die Transformationsmatrix gilt also

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc} \mathrm{Re}\,\mathbf{p}_1 & \mathrm{Im}\,\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -5 & -12 & -1 \end{array} \right]$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mathbf{z} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] u, \qquad y = \left[\begin{array}{ccc} 4 & -3 & -1 \end{array} \right] \mathbf{z}$$

■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

3.2.4 Mehrfache Eigenwerte

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ lauter verschiedene Eigenwerte besitzt, was *hinreichend* für die Existenz von n linear unabhängigen Eigenvektoren ist. Aber auch im Falle mehrfacher Eigenwerte kann es möglich sein, dass $\mathbf{A}$ diagonalähnlich ist und eine Diagonalisierung durchgeführt werden kann. Die Voraussetzung hierfür ist, dass es zu jedem Eigenwert s_i mit der Vielfachheit $m_i > 1$ (man sagt: „die **algebraische Vielfachheit** beträgt m_i") auch m_i linear unabhängige Eigenvektoren gibt (man sagt: „die **geometrische Vielfachheit** beträgt m_i"). Das bedeutet, dass die Bedingung

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A} - s_i\mathbf{E}) = n - m_i \tag{3.30}$$

erfüllt sein muss.

B Das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -12 \\ 5 & 16 & -20 \\ 4 & 12 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll mittels einer regulären Zustandstransformation in die Diagonalform übergeführt werden. Die Eigenwerte der Systemmatrix lauten

$$s_1 = s_2 = 1 \quad \text{und} \quad s_3 = 3.$$

Das bedeutet, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes s_1 gleich 2 beträgt. Wie man leicht überprüfen kann, ist die Bedingung (3.30) erfüllt, d.h.

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A} - s_1\mathbf{E}) = 1,$$

die geometrische Vielfachheit beträgt somit ebenfalls 2. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind beispielsweise durch

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Zusammen mit dem zum Eigenwert s_3 gehörigen Eigenvektor

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

und das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Man beachte, dass die Übertragungsfunktion eines diagonalisierbaren Systems - auch bei mehrfachen Eigenwerten von $\mathbf{A}$ - immer nur *einfache* Pole besitzt. Hat also die diagonalähnliche Matrix $\mathbf{A}$ mehrfache Eigenwerte, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von $G(s)$ auf jeden Fall kleiner ist als die Ordnung n des zugehörigen Zustandsmodells.

B Gegeben sei das diagonalisierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s+3} = \frac{s^2 - 4s - 12}{(s+1)(s-2)(s+3)}.$$

■

Ist für einen mehrfachen Eigenwert die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit, so ist eine Diagonalisierung nicht möglich. Das System kann dann in die so genannte Jordan[1]-Form transformiert werden, die eine Verallgemeinerung der Diagonalform darstellt.

. ■

[1] benannt nach dem französischen Mathematiker Marie Ennemond Camille Jordan, (1838 -1922)

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 4

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

4.1 Einführung

Wie sich in der Vorlesung „Regelungstechnik" zeigen wird, sind die Begriffe **Steuerbarkeit** und **Beobachtbarkeit** beim Entwurf von so genannten Zustandsreglern und Zustandsbeobachtern von zentraler Bedeutung. Stark vereinfacht besagt die Steuerbarkeit eines Systems, dass über seine Eingangsgröße jede Zustandsvariable beeinflusst werden kann. Im Gegensatz dazu bedeutet die Beobachtbarkeit eines Systems, dass in seiner Ausgangsgröße Information über jede Zustandsvariable enthalten ist.

4.2 Steuerbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{4.1}$$

steuerbar, wenn durch geeignete Wahl der Eingangsgröße $u(t)$ der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ *in endlicher Zeit* T aus einem beliebig vorgebbaren Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ in den beliebig vorgebbaren Endzustand $\mathbf{x}(T)$ bewegt werden kann.

Man beachte, dass die Eigenschaft der Steuerbarkeit lediglich aussagt, ob ein Übergang von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}(T)$ in endlicher Zeit prinzipiell möglich ist. Wie $u(t)$ zu wählen ist und wie der zugehörige Verlauf von $\mathbf{x}(t)$ für $0 < t < T$ aussieht, bleibt offen.

Hinweis: In der einschlägigen Literatur wird mitunter zwischen der sogenannten Erreichbarkeit und der (etwas anders als hier definierten) Steuerbarkeit unterschieden. Diese - im zeitdiskreten Fall etwas spitzfindige - Unterscheidung wird durch die hier eingeführte Definition der Steuerbarkeit umgangen.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

4.2.1 Kriterium nach Kalman

Der Zustand $\mathbf{x}(T)$ kann für das System (4.1) bekanntlich gemäß

$$\mathbf{x}(T) = \boldsymbol{\phi}(T)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^T \boldsymbol{\phi}(T-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau \tag{4.2}$$

ermittelt werden. Aus (4.2) folgt daraus unmittelbar

$$\boldsymbol{\phi}(T)\int_0^T \boldsymbol{\phi}(-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau = \mathbf{x}(T) - \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}_0. \tag{4.3}$$

Da die Matrix $\boldsymbol{\phi}(T)$ jedenfalls regulär ist, folgt aus (4.3) die Bedingung

$$\int_0^T \boldsymbol{\phi}(-\tau)\,\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau = \underbrace{\boldsymbol{\phi}(-T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_0}_{=:\mathbf{q}} \tag{4.4}$$

und $\mathbf{q}$ ist ein beliebiger Vektor. Stellt man die Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}(-\tau)$ als Matrix-Exponentialreihe dar, d.h.

$$\boldsymbol{\phi}(-\tau) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\tau + \mathbf{A}^2\frac{\tau^2}{2!} \mp \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!}, \tag{4.5}$$

so erhält man die Beziehung

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!}\mathbf{b}\,u(\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i\mathbf{b}\int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!}u(\tau)\,d\tau = \mathbf{q}. \tag{4.6}$$

Definiert man die - bei vorgegebener Wahl von u - konstanten Größen

$$\alpha_i := \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!}u(\tau)\,d\tau,$$

so lautet die Bedingung für Steuerbarkeit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathbf{A}^i\mathbf{b} = \mathbf{q}. \tag{4.7}$$

Da $\mathbf{q}$ ein beliebiger (konstanter) Vektor ist, müssen die Vektoren $\mathbf{b}$, $\mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}$, $\mathbf{A}^3\mathbf{b}, \ldots$ den gesamten n-dimensionalen Raum aufspannen. Das bedeutet, dass es n linear unabhängige Vektoren der Form $\mathbf{A}^i\mathbf{b}$ mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ gibt. Man kann zeigen, dass dies nur die ersten n Vektoren $\mathbf{b}$, $\mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ sein können. Nimmt man nämlich an, dass für $\delta < n$ die Bedingungen

$$\text{rang}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \ldots & \mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}\end{array}\right] = \delta \quad \text{und} \quad \text{rang}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \ldots & \mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b}\end{array}\right] = \delta$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

gelten, d.h. $\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b}$ ist linear abhängig, also

$$\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} = k_0\mathbf{b}+k_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \ldots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}, \tag{4.8}$$

so ist auch $\mathbf{A}^{\delta+1}\mathbf{b}$ linear abhängig, denn es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\delta+1}\mathbf{b} = \mathbf{A} \quad & \left(k_0\mathbf{b}+k_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \ldots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}\right) = k_0\mathbf{A}\mathbf{b}+k_1\mathbf{A}^2\mathbf{b} + \ldots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} = \\ = \quad & \tilde{k}_0\mathbf{b}+\tilde{k}_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \ldots + \tilde{k}_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

Die Steuerbarkeit ist somit gegeben, wenn die Bedingung

$$\operatorname{rang}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{array}\right] = n \tag{4.9}$$

erfüllt ist. Hierbei handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Definiert man nun die so genannte **Steuerbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{S}_u := \left[\begin{array}{cccc}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{array}\right], \tag{4.10}$$

so kann das Steuerbarkeitskriterium nach Kalman[1] prägnant formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix (4.10) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ steuerbar ist.

B Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\begin{array}{cc}1 & 3\\ 2 & -1\end{array}\right]\mathbf{x} + \left[\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right]u$$

soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Für die Steuerbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{S}_u = \left[\begin{array}{cc}0 & 3\\ 1 & -1\end{array}\right],$$

aus ihrer Regularität folgt die Steuerbarkeit des Systems. ■

Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Führt man eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}$ durch, so erhält man die transformierte Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}}u. \tag{4.11}$$

Die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix lautet dann

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}}_u \quad &= \quad \left[\begin{array}{cccc}\tilde{\mathbf{b}} & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}} & \ldots & \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}}\end{array}\right] \overset{(4.11)}{=} \left[\begin{array}{cccc}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{b} & \ldots & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{array}\right] = \\ &= \quad \mathbf{T}^{-1}\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{array}\right] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}_u.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\tilde{\mathbf{S}}_u$ genau dann regulär ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_u$ des Originalsystems regulär ist.

[1] benannt nach dem ungarischen Elektrotechniker Rudolf Emil Kálmán (geboren 1930).

4.2.2 Kriterium nach Hautus

Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die Systemmatrix $\mathbf{A}$ lauter *verschiedene* Eigenwerte besitzt. Zu jedem der n Eigenwerte s_i gibt es je einen (Rechts-) Eigenvektor $\mathbf{p}_i$ bzw. einen Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i^T$, d.h. es gilt

$$\operatorname{rang}(s_i\mathbf{E}-\mathbf{A}) = n-1 \qquad \text{wobei} \qquad i=1,\ldots,n. \tag{4.12}$$

Da die n Eigenvektoren linear unabhängig sind, kann das System (4.1) mittels der regulären Zustandstransformation $\mathbf{x}=\mathbf{T}\,\mathbf{z}$, wobei. $\mathbf{T}=\mathbf{P}=\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{p}_1 & \ldots & \mathbf{p}_n\end{array}\right]$ in die Diagonalform

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{b} \end{bmatrix} u \tag{4.13}$$

transformiert werden. Gilt für die i-te Komponente des (transformierten) Eingangsvektors

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\,\mathbf{b} = 0, \tag{4.14}$$

so kann offensichtlich der Verlauf der i-ten Zustandsgröße des transformierten Systems durch u nicht beeinflusst werden und es liegt sicher kein steuerbares System vor. Gilt hingegen

$$\boldsymbol{\rho}_i^T\,\mathbf{b} \neq 0 \qquad \text{für} \qquad i=1,\ldots n, \tag{4.15}$$

so lautet die Steuerbarkeitmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b} & s_1\,\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b} & \ldots & s_1^{n-1}\,\boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b} & s_2\,\boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b} & & s_2^{n-1}\,\boldsymbol{\rho}_2^T\mathbf{b} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{b} & s_n\,\boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{b} & \ldots & s_n^{n-1}\,\boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{b} \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Die Links-Eigenvektoren können ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt werden, dass $\boldsymbol{\rho}_i^T\mathbf{b}=1$ für $i=1,\ldots n$ gilt. Die Matrix $\tilde{\mathbf{S}}_u$ ist somit eine so genannte Vandermonde[2]-Matrix der Form

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & \ldots & s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & & s_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & s_n & \ldots & s_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Da die Eigenwerte $s_1,\ldots,s_n$ voraussetzungsgemäß voneinander verschieden sind, ist $\tilde{\mathbf{S}}_u$ regulär, System (4.1) ist somit steuerbar.

Man beachte, dass die hier für den Fall verschiedener Eigenwerte hergeleiteten Ergebnisse auch uneingeschränkt für den Fall mehrfacher Eigenwerte gelten. Für den Fall mehrfacher Eigenwerte ist (4.12) eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit des Systems. Das

[2]benannt nach dem französischen Mathematiker Alexandre T. Vandermonde (1735 - 1796)

bedeutet, dass zu jedem mehrfachen Eigenwert nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren darf und in weiterer Konsequenz in der Dynamikmatrix des transformierten Systems nur *ein* entsprechender Jordanblock vorkommt. Die Bedingung (4.15) bedeutet, dass das zur *letzten* Zeile eines Jordanblocks gehörige Element des (transformierten) Eingangsvektors von Null verschieden sein muss.

Zusammenfassend kann das Hautus[3]-Kriterium folgendermaßen formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn kein Links-Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ auf den Eingangsvektor $\mathbf{b}$ normal steht.

Alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums

Einer alternativen Formulierung des Kriteriums liegt die Betrachtung der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \left(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A}\right) = \mathbf{0}^T \tag{4.18}$$

zugrunde, d.h. der Links-Eigenvektor $\boldsymbol{\rho}_i$ steht normal auf die Spalten der Matrix $(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A})$, wobei $i = 1, \ldots n$. Aufgrund von (4.12) wird durch die Bedingung

$$\operatorname{rang}\left[s_i\mathbf{E} - \mathbf{A} \vdots \mathbf{b}\right] = n \tag{4.19}$$

gewährleistet, dass der Links-Eigenvektor nicht orthogonal zu $\mathbf{b}$ ist.

Damit lautet die alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn für jeden Eigenwert s_i der Matrix $\mathbf{A}$ die Bedingung (4.19) erfüllt ist.

4.3 Beobachtbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \tag{4.20}$$

beobachtbar, wenn aus der Kenntnis von $u(t)$ und $y(t)$ in einem *endlichen* Zeitintervall $[0, T]$ der unbekannte Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ bestimmt werden kann.[4]

Der Verlauf der Ausgangsgröße als Reaktion auf den Anfangszustand und die Eingangsgröße lautet

$$y(t) = \mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + du(t),$$

wobei $\boldsymbol{\phi}(t)$ die zu (4.20) gehörige Transitionsmatrix ist. Die von der (gegebenen) Eingangsgröße u abhängigen Anteile des Ausdruckes sind ebenso bekannt wie die Ausgangsgröße y. Stellt man die obige Gleichung entsprechend um, so erhält man

$$\mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}_0 = \underbrace{y(t) - \int_0^t \mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau - du(t)}_{:=\hat{y}(t)}.$$

[3] benannt nach dem niederländischen Mathematiker Malo Hautus (geboren 1940).

[4] Man beachte, dass dabei T prinzipiell beliebig klein gemacht werden kann.

Das bedeutet, dass aus der Relation $\mathbf{c}^T\boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}_0 = \hat{y}(t)$ (über ein endliche Intervall betrachtet) der Anfangszustand ermittelt werden soll. Diese Aufgabenstellung entspricht formal der Aufgabe, aus dem Verlauf der Ausgangsgröße des autonomen Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{4.21}$$

den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ zu ermitteln. Die Beobachtbarkeit von (4.20) kann also anhand des Systems (4.21) untersucht werden.

4.3.1 Kriterium nach Kalman

Differenziert man die Ausgangsgröße

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

nach der Zeit, so erhält man mit (4.21)

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{c}^T\mathbf{A}^2\mathbf{x}, \qquad \dots \quad \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} = \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x},$$

bzw. in Matrixnotation

$$\begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dieses Ergebnisse besagt, dass der Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt t, also auch für $t = 0$ genau dann eindeutig ermittelt werden kann, wenn die so genannte **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{B}_y := \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

den Höchstrang besitzt. Damit lautet das Beobachtbarkeitskiterium nach Kalman: Das System (4.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitmatrix (4.22) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ beobachtbar ist.

B Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

soll auf Beobachtbarkeit untersucht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Beobachtbarkeit des Systems. ■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Die reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}$ führt auf die Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z}, \quad y = \underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T}\mathbf{z}. \tag{4.23}$$

Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix gilt dann

$$\tilde{\mathbf{B}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \overset{(4.23)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T\mathbf{T} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y\mathbf{T}$$

Das bedeutet, dass $\tilde{\mathbf{B}}_y$ genau dann regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{B}_y$ des Originalsystems regulär ist.

4.3.2 Kriterium nach Hautus

Mit analogen Überlegungen wie bei der Steuerbarkeit kann das Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus hergeleitet werden. Es zeigt sich, dass das System (4.20) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Eigenvektor $\mathbf{p}_i$ der Matrix $\mathbf{A}$ normal auf den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ steht.

Äquivalent ist die alternative Formulierung des Kriteriums nach Hautus: Das System (4.20) ist genau dann beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s_i\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n \tag{4.24}$$

für alle Eigenwerte s_i von $\mathbf{A}$ erfüllt ist.

Analog zur Steuerbarkeit gelten die gefundenen Ergebnisse auch hier uneingeschränkt im Falle mehrfacher Eigenwerte. Zu jedem mehrfachen Eigenwert darf nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren, d.h. in der Dynamikmatrix des transformierten Systems kommt nur *ein* entsprechender Jordanblock vor. Die Bedingung $\mathbf{c}^T\mathbf{p}_i \neq 0$ bedeutet, dass das zur *ersten* Spalte eines Jordanblocks gehörige Element des (transformierten) Ausgangsvektors von Null verschieden sein muss.

$$\alpha_1 = x_{2,0} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = x_{1,0} - x_{2,0}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 5

Lineare Übertragungssysteme

5.1 Einführung

Die **Übertragungsfunktion** $G(s)$ beschreibt das Übertragungsverhalten von linearen, zeitinvarianten Systemen im Bildbereich. Sie ist definiert als der Quotient der Laplace-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}. \tag{5.1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet. Im Rahmen dieses Skriptums wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion stets eine gebrochen rationale Funktion ist. Sie kann somit als Quotient zweier Polynome $\beta(s)$ und $\alpha(s)$ dargestellt werden, d.h.

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \tag{5.2}$$

wobei die Koeffizienten der Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade von Zähler- und Nennerpolynom der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(s) \leq \text{Grad } \alpha(s) \tag{5.3}$$

genügen, nennt man **realisierbar**, siehe auch Abschnitt 5.3. Alle praktisch relevanten Systeme erfüllen die Realisierbarkeitsbedingung. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(s) = \text{Grad } \alpha(s)$$

spricht man von einem **sprungfähigen System**. Sprunghafte Änderungen der Eingangsgröße u haben hier auch eine sprunghafte Änderung der Ausgangsgröße y zur Folge.

Für Systeme der Form (2.1), (2.2) kann die Übertragungsfunktion unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gemäß

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T \, (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \, \mathbf{b} + d \tag{5.4}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

berechnet werden, vgl. (2.14). Aus dieser Berechnungsvorschrift kann unmittelbar gefolgert werden, dass $G(s)$ eine gebrochen rationale Funktion ist und (5.3) gilt. Man beachte, dass das System genau dann sprungfähig ist, wenn für den Durchgriff $d \neq 0$ gilt. Dann gibt es nämlich eine direkte Verbindung zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, siehe hierzu auch Bild **??**.

In Strukturbildern wird eine Übertragungsfunktion $G(s)$ üblicherweise durch einen Block, wie er in Bild 5.1 dargestellt ist, repräsentiert.

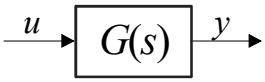


Bild 5.1: Blockdarstellung einer Übertragungsfunktion $G(s)$

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Die **Sprungantwort** des Systems, d.h. seine Reaktion auf $u(t) = \sigma(t)$ kann mittels

$$\bar{y}(s) = G(s)\,\bar{u}(s) = G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{(s-1)}{s\,(s+1)(s+2)}$$

berechnet werden. Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = -\frac{1/2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+2},$$

was im Zeitbereich der Funktion

$$y(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

entspricht. ■

5.2 Bedeutung von $G(s)$ im Zeitbereich

Gemäß (5.1) gilt für den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße y nach Anwendung des Faltungssatzes

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\,\bar{u}(s)\right\} = \int_0^t g\,(t-\tau)\;u\,(\tau)\,d\tau, \tag{5.5}$$

wobei

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}. \tag{5.6}$$

Die Ausgangsgröße y entspricht also dem Integral über die gewichtete Eingangsgröße u. Aus diesem Grund nennt man $g(t)$ auch **Gewichtsfunktion**. Wählt man als Eingangsgröße des Systems einen Dirac-Impuls, also $u(t) = \delta(t)$, so gilt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\,\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = g(t),$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

die Ausgangsgröße entspricht dann $g(t)$. Deshalb wird $g(t)$ auch **Impulsantwort** des Systems genannt.

B Die Impulsantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

lautet

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right).$$

■

5.3 Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell

Es gibt prinzipiell unendlich viele Möglichkeiten, Zustandsmodelle anzugeben, die eine vorgegebene Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

besitzen. Solche Zustandsmodelle nennt man **Realisierungen** von $G(s)$. Eine **Minimalrealisierung** zeichnet sich ferner dadurch aus, dass die Zahl der Zustandsgrößen minimal ist. Man beachte, dass genau dann eine Realisierung von $G(s)$ existiert, wenn (5.3) erfüllt ist.

An dieser Stelle werden zwei wichtige Normalformen vorgestellt. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein so genanntes **monisches Polynom** ist, der höchstwertige Koeffizient des Nennerpolynoms ist also auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Im Falle eines sprungfähigen Systems ($m = n$) ist eine Polynomdivision durchzuführen, d.h.

$$G(s) = \beta_n + \frac{\left(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n\right) s^{n-1} + \ldots + \left(\beta_1 - \alpha_1\beta_n\right) s + \left(\beta_0 - \alpha_0\beta_n\right)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}.$$

5.3.1 Erste Normalform

Die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Zustandsmodells sowie der Eingangsvektor $\mathbf{b}$ besitzen eine sehr einfache Struktur, es gilt nämlich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \tag{5.7}$$

Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$y = \left[\begin{array}{cccc} \beta_0 - \alpha_0\beta_n & \beta_1 - \alpha_1\beta_n & \dots & \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n \end{array} \right] \mathbf{x} + \beta_n u \tag{5.8}$$

In Bild 5.2 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in erster Normalform dargestellt.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s^2 + 6s}{2s^2 + 2s + 2} = \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + s + 1} = 2 + \frac{s - 2}{s^2 + s + 1}.$$

Das zugehörige Zustandsmodell in der ersten Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] u, \qquad y = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array} \right] \mathbf{x} + 2\,u$$

. ■

Besonders einfach kann die erste Normalform aufgestellt werden, wenn das betrachtete System nicht sprungfähig ist, denn dann gilt $\beta_n = 0$. Die Ausgangsgleichung (5.8) vereinfacht sich dann zu

$$y = \left[\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{x}.$$

B Das zu der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{21}{3s^3 + 6s + 9} = \frac{7}{s^3 + 2s + 3}$$

gehörige Zustandsmodell in erster Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u, \qquad y = \left[\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}.$$

■

Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in erster Normalform vorliegt, dann ist das System auf jeden Fall steuerbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u.$$

veranschaulicht werden. Verwendet man das Kalman-Kriterium, so besitzt die Stuerbarkeitsmatrix die ausgezeichnete Struktur

$$\mathbf{S}_u = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{array} \right],$$

d.h. sie ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die erste Normalform auch **Steuerbarkeitsnormalform** genannt.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Herleitung der ersten Normalform

Zur Herleitung der ersten Normalform wird $G(s)$ in der folgenden Form dargestellt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \underbrace{\frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}}_{=G^*(s)} \left(\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right). \quad (5.9)$$

Die erste Zustandsvariable x_1 des gesuchten Zustandsmodells wird so eingeführt, dass die Bedingung

$$G^*(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (5.10)$$

erfüllt wird, d.h.

$$s^n\bar{x}_1(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1}\bar{x}_1(s) + \ldots + \alpha_1 s\bar{x}_1(s) + \alpha_0\bar{x}_1(s) = \bar{u}(s)$$

Die restlichen Zustandsvariablen x_2 bis x_n werden nun so definiert

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(s) &: = s\bar{x}_1(s), \quad (5.11)\\ \bar{x}_3(s) &: = s\bar{x}_2(s) = s^2\bar{x}_1(s),\\ &\vdots\\ \bar{x}_n(s) &: = s\bar{x}_{n-1}(s) = s^{n-1}\bar{x}_1(s), \end{aligned}$$

dass die Relation

$$s^n\bar{x}_1(s) = s\bar{x}_n(s) = -\alpha_0\bar{x}_1(s) - \alpha_1\bar{x}_2(s) - \ldots - \alpha_{n-1}\bar{x}_n(s) + \bar{u}(s) \quad (5.12)$$

gilt. Im Zeitbereich können (5.11) und (5.12) folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ldots & & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5.13)$$

Man beachte, dass gemäß (5.10) die Relation $\bar{x}_1(s) = G^*(s)\,\bar{u}(s)$ gilt und mit (5.9) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= G(s)\bar{u}(s) = G^*(s)\left(\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right)\bar{u}(s) =\\ &= \left(\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right)\bar{x}_1(s). \end{aligned}$$

Mit (5.11) und (5.12) folgt

$$\bar{y}(s) = \beta_n s^n\bar{x}_1(s) + \beta_{n-1}s^{n-1}\bar{x}_1(s) + \ldots + \beta_1 s\bar{x}_1(s) + \beta_0\bar{x}_1(s) \overset{(5.12)}{=}$$

$$= \beta_n\left[-\alpha_0\bar{x}_1(s) - \alpha_1\bar{x}_2(s) - \ldots - \alpha_{n-1}\bar{x}_n(s) + \bar{u}(s)\right] + \left(\beta_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right)\bar{x}_1(s) =$$

$$= \left(\beta_0 - \beta_n\alpha_0\right)\bar{x}_1(s) + \left(\beta_1 - \beta_n\alpha_1\right)\bar{x}_2(s) + \ldots + \left(\beta_{n-1} - \beta_n\alpha_{n-1}\right)\bar{x}_n(s) + \beta_n\bar{u}(s).$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Das bedeutet im Zeitbereich

$$y(t) = \left[\begin{array}{cccc} (\beta_0 - \beta_n\alpha_0) & (\beta_1 - \beta_n\alpha_1) & \dots & \dots & \left(\beta_{n-1} - \beta_n\alpha_{n-1}\right) \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \beta_n u(t), \qquad (5.14)$$

d.h. (5.13) und (5.14) ergeben die erste Normalform.

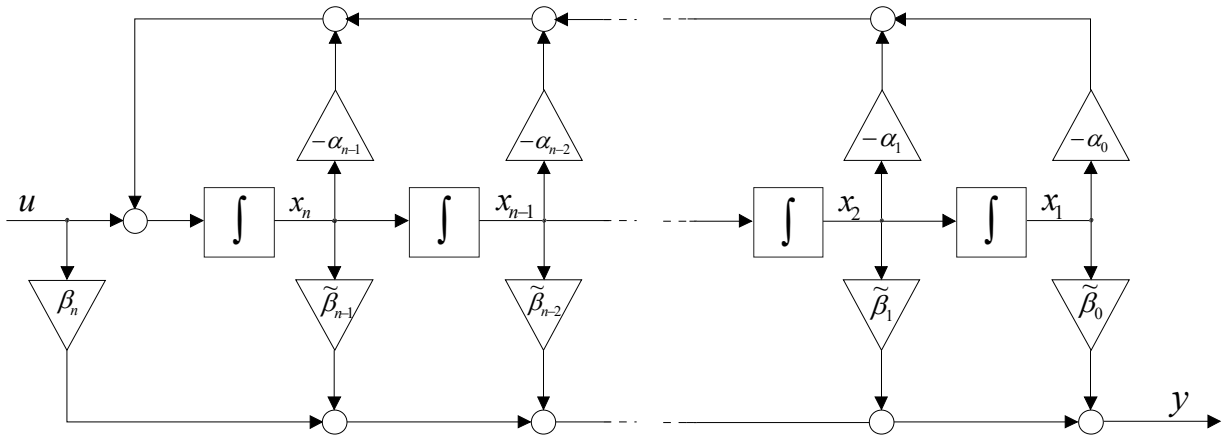


Bild 5.2: Strukturbild zur ersten Normalform, wobei $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i\beta_n$ gilt

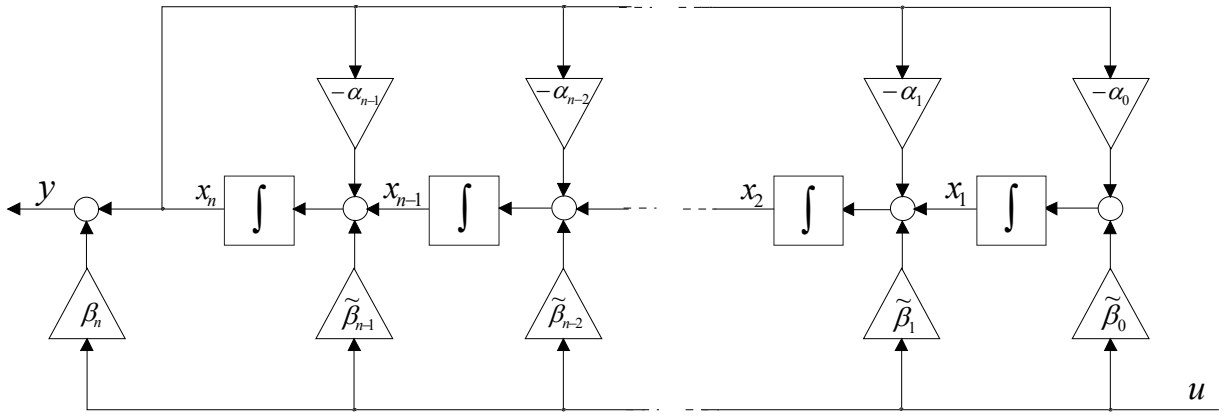


Bild 5.3: Strukturbild zur zweiten Normalform, wobei $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i\beta_n$ gilt

5.3.2 Zweite Normalform

Die so genannte zweite Normalform kann aus der ersten Normalform gewonnen werden, indem die Dynamikmatrix transponiert wird und die Vektoren **b** und **c** miteinander vertauscht werden, d.h.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0\beta_n \\ \beta_1 - \alpha_1\beta_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n \end{bmatrix} u \tag{5.15}$$

und

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \beta_n u. \tag{5.16}$$

In Bild 5.3 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in zweiter Normalform dargestellt.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + s + 2}.$$

Ein zugehöriges Zustandsmodell in der zweiten Normalform lautet dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

■

Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in zweiter Normalform vorliegt, dann ist das System jedenfalls beobachtbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \beta_n u$$

veranschaulicht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt nämlich (vgl. Steuerbarkeitsmatrix der ersten Normalform!)

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

diese ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die zweite Normalform auch **Beobachbarkeitsnormalform** genannt.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Hinweise zur ersten und zweiten Normalformen

Der Zusammenhang zwischen erster und zweiter Normalform hat zur Folge, dass die zwei Zustandsmodelle

$$\mathrm{M}_1: \quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u_1 \\ y_1 &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,u_1 \end{aligned} \qquad \mathrm{M}_2: \quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{c}\,u_2 \\ y_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{z} + d\,u_2 \end{aligned}$$

die gleiche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}_1(s)}{\bar{u}_1(s)} = \frac{\bar{y}_2(s)}{\bar{u}_2(s)}$$

besitzen. Dieses Ergebnis ist leicht zu erkennen, da für die (skalare) Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T\left(s\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b}+d = G^T(s) = \mathbf{b}^T\left[\left(s\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right]^T\mathbf{c}+d = \mathbf{b}^T\left(s\mathbf{E}-\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{c}+d$$

gilt. Wenn man die Strukturbilder 5.2 und 5.3 miteinander vergleicht, so erkennt man, dass sich ein Strukturbild aus dem anderen ergibt, wenn man

- Eingangs- und Ausgangsgrößen vertauscht, d.h. $u \leftrightarrows y$
- alle Pfeilrichtungen umkehrt
- Summationen und Abzweigungen vertauscht, d.h. $\bigcirc \leftrightarrows \cdot$

Man beachte weiters, dass die Dynamikmatrizen der beiden Normalformen in so genannter **Begleitform** vorliegen. Das bedeutet, dass man die charakteristischen Polynome der Matrizen *direkt* ablesen kann. Aus den obigen Ausführungen folgt nämlich unmittelbar, dass die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

das gleiche charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

besitzen.

B Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Beide Matrizen liegen in Begleitform vor, d.h. für die charakteristischen Polynome gilt

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^3 - 3s^2 - 2s + 1$$

und

$$\Delta_{\mathbf{B}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{B}) = s^4 - 5s^3 + 3s^2 - 2s + 1.$$

■

Die Normalformen können auch hilfreich sein, wenn eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung gegeben ist und ein zugehöriges Zustandsmodell benötigt wird.

B Gegeben sei die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dt^2} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + y = u,$$

die ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y beschreibt. Hier ist eine mögliche Wahl der Zustandsvariablen durch

$$x_1 := y, \quad x_2 := \frac{dy}{dt}, \quad x_3 := \frac{d^2y}{dt^2}$$

gegeben und das zugehörige Zustandsmodell lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y(t=0) & \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} & \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} \end{bmatrix}^T.$$

■

Nicht immer ist die Wahl der Zustandsvariablen so geradlinig wie im vorangegangenen Beispiel. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn in der Differentialgleichung auch Ableitungen der Eingangsgröße u auftreten.

B Gegeben sei ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Es wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

beschrieben. *Eine* Möglichkeit, ein Zustandsmodell zu finden, besteht darin, zuerst die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + 2s^2 + 1}$$

zu berechnen und dann auf eine der Normalformen überzugehen, also im Falle der ersten Normalform

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Berechnung des Anfangszustands $\mathbf{x}_0$ erfolgt über den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und Ein- bzw. Ausgangsgröße. Hierzu wird die Ausgasgsgleichung

$$y = -x_1 + x_2$$

benutzt. Für die zeitliche Ableitung von y gilt

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2 + u.$$

Daraus folgt durch Lösung[1] des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} - u \end{bmatrix}$$

der Zusammenhang

$$x_1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} + 3y - u\right) \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} - y - u\right),$$

d.h. der Anfangszustand lautet

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} + 3y - u\right)\big|_{t=0} & -\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} - y - u\right)\big|_{t=0} \end{bmatrix}^T.$$

■

5.3.3 Minimalrealisierung

Wie bereits erwähnt ist eine Minimalrealisierung eine Realisierung mit der minimalen Zahl von Zustandsgrößen, d.h. mit der kleinstmöglichen Systemordnung. Minimalrealisierungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie steuerbar *und* beobachtbar sind. Sie umfassen also ausschließlich jene „Systemanteile", die das Eingangs- Ausgangsverhalten prägen.

B Zur Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

ist eine Minimalrealisierung gesucht. Um die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit der Realsierung zu gewährleisten, werden zunächst alle möglichen Kürzungen durchgeführt, d.h.

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s\,(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 2s}.$$

Die Minimalrealisierung in erster Normalform lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

■

[1] die Lösbarkeit erfordert die Eigenschaft der Beobachtbarkeit.

5.4 Berechnung von $G(s)$ aus Differentialgleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \beta_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + \beta_1 \frac{du}{dt} + \beta_0 u, \tag{5.17}$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung der Laplace-Transformation

$$\left(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0\right) \bar{y}(s) = \left(\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right) \bar{u}(s).$$

Für $G(s)$ erhält man somit

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \tag{5.18}$$

die Realisierbarkeit des Systems ist gemäß (5.3) für $m \leq n$ gegeben.

B Die Beschreibung eines Systems sei in Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} - u$$

gegeben. Unter Annahme verschwindender Anfangswerte liefert die Laplace-Transformation

$$\bar{y}(s)\ \left(s^2 + 2s + 1\right) = \bar{u}(s)\ (s - 1)\,,$$

d.h. die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 1}.$$

■

5.4.1 Umkehrung

Es ist sehr einfach, aus einer gegebenen Übertragungsfunktion $G(s)$ eine Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung zu bestimmen. Hierzu ist lediglich zu beachten, dass die Multiplikation einer Laplace-Transformierten $\bar{f}(s)$ mit s^i der i-ten zeitlichen Ableitung von $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\}$ entspricht, siehe auch (A.11).

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Daraus folgt

$$\left(s^2+1\right)\bar{y}(s) = s\bar{u}(s),$$

was im Zeitbereich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \frac{du}{dt}$$

führt.

■

5.5 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (5.2) die Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2}.$$

Gibt man $G(s)$ in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)\,(s+2)} = \frac{1}{s+2},$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist.

■

Geht man nun von einer teilerfremden Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad \text{mit} \quad \mu(s), \nu(s) \ldots \text{teilerfremd} \tag{5.19}$$

aus, so sind diejenigen Werte von s, für die $\mu(s) = 0$ gilt, die so genannten **Nullstellen** von $G(s)$. Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch $\nu(s) = 0$ charakterisiert. In der *faktorisierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)} \quad \text{mit} \quad m \le n \tag{5.20}$$

ist $s = n_i$ eine Nullstelle und $s = p_k$ eine Polstelle von $G(s)$. Tritt der Faktor $(s-n_i)$ bzw. $(s-p_k)$ mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen

Pol. Da die Koeffizienten der Polynome $\mu(s)$ und $\nu(s)$ reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (5.20) folgt unmittelbar.

$$G(s) = 0 \quad \text{für} \quad s = n_i \qquad \text{und} \qquad |G(s)| \to \infty \quad \text{für} \quad s \to p_k \tag{5.21}$$

B Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 0.5}{s^2 + 1}$$

besitzt eine Nullstelle bei $s = 0.5$ und ein konjugiert komplexes Polpaar bei $s = \pm j$. In Bild 5.4 ist $|G(s)|$ über der komplexen $s-$Ebene dargestellt. Die in (5.21) angeführten Eigenschaften sind deutlich zu erkennen.

■

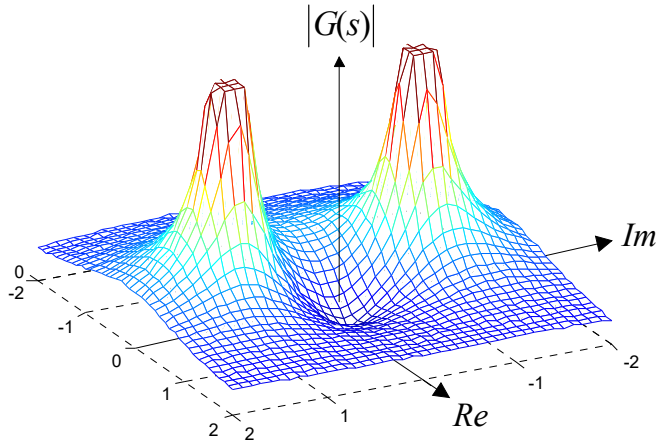


Bild 5.4: Graphische Darstellung von $|G(s)|$ über der komplexen $s-$Ebene zur Illustration von Pol- und Nullstellen.

B Die faktorisierte Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s+1)^2}$$

ist gegeben durch

$$G(s) = 2\,\frac{(s+1-j)(s+1+j)}{s(s+1)(s+1)}.$$

Daraus resultiert ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar an der Stelle

$$s = -1 \pm j,$$

ein reeller Pol bei

$$s = 0$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

sowie ein doppelter Pol an der Stelle

$$s = -1.$$

■

Man beachte, dass die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ von (2.1) und die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ in enger Relation zueinander stehen. Die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

die Pole sind die Nullstellen des Nennerpolynoms der gekürzten(!) rationalen Funktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)_{adj} \mathbf{b} + d.$$

Daraus kann die Schlußfolgerung gezogen werden, dass die Pole von $G(s)$ eine Teilmenge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ darstellen.

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u. \end{aligned}$$

Die zwei Eigenwerte lauten

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Aus der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

ist zu erkennen, dass es einen Pol bei

$$s = -1$$

gibt. ■

5.5.1 PN-Plan

Die graphische Darstellung der Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene wird PN-Plan genannt. Hierbei werden Pole durch ein **X** und Nullstellen durch ein **O** symbolisiert.

B Gegeben sei das System

$$G(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 6s - 4}{s^5 - 4s^4 + 3s^3 + 14s^2 + 26s} = \frac{(s-2)(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 - 6s + 13)} \tag{5.22}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Nullstellen} \quad & \{2, 1 \pm j\} \\ \text{Pole} \quad & \{0, -1 \pm j, 3 \pm j2\} \end{aligned}$$

Der zugehörige PN-Plan ist in Bild 5.5 zu sehen. Man beachte, dass aufgrund der Symmetrie des PN-Plans prinzipiell die Darstellung des grau hinterlegten Bereiches ausreicht. ■

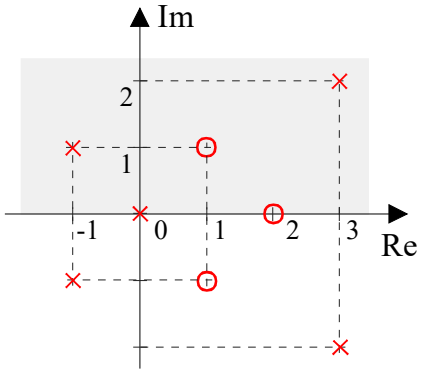


Bild 5.5: PN-Plan zu der Übertragungsfunktion (5.22)

5.6 BIBO-Stabilität

Ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output") genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsgröße $u(t)$ mit einer beschränkten Ausgangsgröße $y(t)$ reagiert, d.h.

$$|u(t)| \leq M < \infty \qquad \Rightarrow \qquad |y(t)| \leq N < \infty \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.23}$$

Mit (5.5) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)|\, |u(t-\tau)|\, d\tau \overset{(5.23)}{\leq} M \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von $|y(t)|$ für $t \to \infty$ auf, d.h. zur Erfüllung von (5.23) muss

$$M \int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort absolut integrabel sein muss, d.h.

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt < \infty. \tag{5.24}$$

Man beachte, dass es sich bei (5.24) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s - \kappa} \qquad \text{mit} \qquad \kappa \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Impulsantwort lautet

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ e^{\kappa t} & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Das Integral über den Absolutbetrag von $g(t)$, also

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt = \int_0^\infty \left|e^{\kappa t}\right|\, dt = \int_0^\infty e^{\kappa t}\, dt$$

existiert offensichtlich nur für negative Werte von κ. Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol $s = \kappa$ in der linken offenen Halbebene der komplexen $s-$Ebene liegt, d.h. $\mathrm{Re}\{s\} < 0$.

■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort $g(t)$ und der Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(s)| = \left|\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |g(t)| \left|e^{-st}\right| dt.$$

Gilt $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$, so kann weiter geschrieben werden

$$|G(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)|\, dt.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (5.24) ist also erfüllt - der Ausdruck $|G(s)|$ für $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ *endliche* Werte annimmt. Daraus kann mit Hilfe von (5.21) gefolgert werden, dass $G(s)$ ausschließlich Pole in der linken, offenen komplexen Halbebene besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von $G(s)$ einen negativen Realteil besitzen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (5.19) das Nennerpoynom von $G(s)$ ein Hurwitzpolynom sein muss.

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol mit nicht-negativem Realteil besitzt. ■

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2(s+2)(s+4)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von $G(s)$ einen negativen Realteil besitzen. ■

5.7 Das Routh-Schema

Die asymptotische Stabilität erfordert es, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Weiters ist ein Übertragungssystem genau dann BIBO-stabil, wenn seine Übertragungsfunktion ausschließlich Pole mit negativen Realteilen besitzen. Man beachte, dass die beiden Stabilitätskriterien die genaue Kenntnis der Lage der Eigenwerte bzw. Pole *nicht* erfordern. Vielmehr ist zu überprüfen, ob das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix bzw. das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein Hurwitzpolynom ist. Hierfür gibt es eine Reihe von Verfahren, die ohne die explizite Berechnung der Polynomnullstellen auskommen. Exemplarisch wird an dieser Stelle das so genannte **Routh-Schema**[2] vorgestellt, wobei auf den Beweis verzichtet wird.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zu untersuchende Polynom

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0. \tag{5.25}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass $p(s)$ ein Hurwitzpolynom ist, besteht darin, dass kein Polynomkoeffizient verschwindet und alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen. Ist diese Bedingung verletzt, so ist $p(s)$ sicher kein Hurwitzpolynom. Man beachte, dass für Polynome mit $\mathrm{Grad}\, p(s) \leq 2$ die angegebene Bedingung sogar *notwendig und hinreichend* ist.

B Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned}
p_1(s) &= 2s^4 + 2s^2 + s + 1, \\
p_2(s) &= s^5 + 3s^4 - 2s^3 + s^2 + 1, \\
p_3(s) &= 5s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 7s^3 + s^2 + 9s + 1, \\
p_4(s) &= -2s^2 - 2s - 1, \\
p_5(s) &= s^2 + 4s - 3, \\
p_6(s) &= s^2 + s + 1, \\
p_7(s) &= s + 8.
\end{aligned}$$

Die Polynome $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_5(s)$ erfüllen die angegebene notwendige Bedingung nicht, sie sind also keine Hurwitzpolynome. Das Polynom $p_3(s)$ erfüllt die Bedingung, der Nachweis ob es sich um ein Hurwitzpolynom handelt, erfordert allerdings weitere Schritte (siehe weiter unten). Die Polynome $p_4(s)$, $p_6(s)$ und $p_7(s)$ können direkt als Hurwitzpolynome klassifiziert werden, da sie die Bedingung erfüllen und einen Polynomgrad kleiner oder gleich 2 besitzen. ■

Zunächst werden beim Routh-Schema die Koeffizienten des Polynoms (5.25) in folgendem „Zick-Zack-Muster" angeordnet

$$\begin{array}{ccccccc}
a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & & \cdots
\end{array}, \tag{5.26}$$

[2] benannt nach dem englischen Mathematiker Edward Routh (1831 - 1907)

wobei bei geradem Polynomgrad n die letzte Spalte mit einem Nullelement aufgefüllt bzw. bei ungeradem Polynomgrad eine Nullspalte hinzugefügt wird.

B Für das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5,$$

ergibt sich nach (5.26)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} .$$

Hingegegen ergibt sich für

$$p_2(s) = 6s^5 + 7s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 10s + 11$$

die Koeffizientenanordnung

$$\begin{array}{cccc} 6 & 8 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 11 & 0 \end{array} .$$

■

Ausgehend von der 2-zeiligen Anordnung (5.26) werden weitere Zeilen nach folgendem Schema berechnet bis insgesamt $(n+1)$ Zeilen vorliegen: Der Koeffizient in der $k-$ten Spalte einer neuen Zeile entspricht der zweireihigen Determinante aus den Elementen der ersten und $(k+1)-$ten Spalte der beiden darüberliegenden Zeilen, geteilt durch das negative erste Elemente der darüberliegenden Zeile. Mit Hilfe des so entstehenden **Routh-Tableau**s kann nun entschieden werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt:

Das Polynom (5.25) ist *genau dann* ein Hurwitzpolynom, wenn alle $(n+1)$ Elemente der ersten Spalte sich von Null unterscheiden und das gleiche Vorzeichen besitzen.

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5.$$

Die oben angegebene notwendige Bedingung ist erfüllt. Ob das Polynom tatsächlich ein Hurwitzpolynom ist, kann nun mit dem Routh-Schema überprüft werden. Zunächst werden die ersten beiden Zeilen gemäß (5.26) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} .$$

Der oben angegebenen Berechnungsvorschrift folgend ermittelt man nun die dritte und vierte Zeile, d.h. es ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1\cdot 4 - 2\cdot 3}{(-2)} = 1 & \frac{1\cdot 0 - 2\cdot 5}{(-2)} = 5 & \\ \frac{2\cdot 5 - 1\cdot 4}{(-1)} = -6 & & \end{array} .$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Da das erste Element der vierten Zeile ein anderes Vorzeichen hat als die übrigen Elemente der ersten Spalte, ist $p(s)$ kein Hurwitzpolynom. Das Routh-Tableau muss hier also nicht vollständig berechnet werden. ■

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1.$$

Es soll mit dem Routh-Schema überprüft werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt. Zunächst werden wieder die ersten beiden Zeilen gemäß (5.26) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} .$$

Gemäß obiger Berechnungsvorschrift erhält man für die dritte Zeile

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \dfrac{1\cdot 1 - 3\cdot 2}{(-3)} = \dfrac{5}{3} & \dfrac{1\cdot 0 - 3\cdot 0}{(-3)} = 0 & \end{array} .$$

Da das erste Element der dritten Zeile das gleicheVorzeichen hat wie die übrigen Elemente, wird die nächste (und hier auch zugleich letzte) Zeile ermittelt und man findet

$$\begin{array}{lll} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & \\ \dfrac{3\cdot 0 - \frac{5}{3}\cdot 1}{(-\frac{5}{3})} = 1 & & \end{array} .$$

Alle Elemente der ersten Spalte sind von Null verschieden und haben das gleiche Vorzeichen, d.h. $p(s)$ ist ein Hurwitzpolynom. ■

Besonders von Vorteil ist der Einsatz des Routh-Schemas, wenn die Koeffizienten des zu untersuchenden Polynoms von freien Parametern abhängen.

B Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + Ks^2 + s + 1.$$

Es soll mit Hilfe des Routh-Schemas überprüft werden, für welche Werte des reellen Parameters K das Polynom $p(s)$ ein Hurwitzpolynom ist. Aus der Forderung, dass alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt unmittelbar die notwendige Bedingung, dass K positiv sein muss. Die ersten beiden Zeilen des Routh-Tableaus ergeben sich zu

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \end{array} .$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Für die weiteren Zeilen erhält man

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ \frac{1\cdot 1 - K\cdot 1}{(-K)} = \frac{K-1}{K} & \frac{1\cdot 0 - K\cdot 0}{(-K)} = 0 & \\ \frac{K\cdot 0 - \frac{K-1}{K}\cdot 1}{-\frac{K-1}{K}} = 1 & & \end{array} .$$

Damit alle Elemente der ersten Spalte gleiches Vorzeichen besitzen, muss

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

gelten. Da K sicher positiv ist, folgt daraus unmittelbar der gesuchte Wertebereich

$$K > 1.$$

■

5.8 Frequenzgang

Der so genannte Frequenzgang beschreibt den eingeschwungenen Zustand eines linearen, zeitinvarianten Systems bei harmonischer Erregung. Dabei wird hier vorausgesetzt, dass das betrachtete System BIBO-stabil ist, d.h. seine Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt ausschließlich Pole mit negativem Realteil. Weiters wird vereinfachend vorausgesetzt, dass alle Pole von $G(s)$ *einfach* sind, die gefundenen Ergebnisse gelten allerdings auch für den allgemeinen Fall mehrfacher Pole. Als Eingangsgröße $u(t)$ wird nun die komplexe harmonische Funktion

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s - j\omega} \tag{5.27}$$

gewählt[3]. Für die zugehörige Ausgangsgröße $y(t)$ gilt im Bildbereich

$$\bar{y}(s) = G(s)\,\frac{1}{s-j\omega} = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-n_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}\,\frac{1}{s-j\omega},$$

eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = \frac{c_0}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-p_i}.$$

[3]Man beachte, dass es sich hier um ein reines Gedankenexperiment handelt.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Für den Koeffizienten c_0 findet man

$$c_0 = \lim_{s\to j\omega} (s - j\omega)\, \bar{y}(s) = \lim_{s\to j\omega} \left[(s - j\omega) G(s)\, \frac{1}{(s - j\omega)} \right] = G(j\omega),$$

d.h.

$$\bar{y}(s) = \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Für die zugehörige Zeitfunktion gilt nun

$$y(t) = G(j\omega)\, e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{p_i t}.$$

Für „sehr große Werte von t", also im so genannten *eingeschwungenen Zustand* gilt

$$y(t) \approx G(j\omega)\, e^{j\omega t}, \tag{5.28}$$

d.h. die Ausgangsgröße entspricht der mit $G(j\omega)$ gewichteten Eingangsgröße. Diese komplexe Funktion

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\; e^{j \arg G(j\omega)} \tag{5.29}$$

ist der **Frequenzgang** des Systems. Salopp formuliert beschreibt er, wie sich im eingeschwungenen Zustand die Amplitude und die Phasenlage der harmonischen Eingangsgröße beim Durchlaufen des Systems verändern. Man beachte, dass die Eingangsgröße (5.27) als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion dargestellt werden kann, d.h.

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Nach (5.28) und (5.29) gilt im eingeschwungenen Zustand für die zugehörige Ausgangsgröße

$$y(t) = |G(j\omega)|\; e^{j(\omega t + \arg G(j\omega))} = |G(j\omega)|\, \cos\left(\omega t + \arg G(j\omega)\right) + j\; |G(j\omega)|\, \sin\left(\omega t + \arg G(j\omega)\right).$$

Aus der Linearität des Systems kann daher unmittelbar gefolgert werden, dass im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cos(\omega t + \phi) \quad &\Rightarrow \quad & y(t) = \hat{u}\; |G(j\omega)|\, \cos\left(\omega t + \phi + \arg G(j\omega)\right) \\ u(t) &= \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \quad &\Rightarrow \quad & y(t) = \hat{u}\; |G(j\omega)|\, \sin\left(\omega t + \phi + \arg G(j\omega)\right) \end{aligned}$$

B Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Für eine Eingangsgröße $u(t) = 3 \sin t$ ergibt sich für den Verlauf von $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) \approx 3\; |G(j)| \sin\left(t + \arg G(j)\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

■

Für jeden Wert von ω ergibt sich also eine komplexe Zahl $G(j\omega)$. Die graphische Darstellung dieser komplexen Zahlen in der komplexen Ebene als Funktion von ω wird **Frequenzgangs-Ortskurve**, **Nyquist-Ortskurve**[4] oder kurz **Ortskurve** genannt. In den so genannten **Frequenzkennlinien** werden jeweils Betrag und Phase von $G(j\omega)$ über ω dargestellt, man spricht in diesem Zusammenhang auch von den **Bode**[5]**-Diagrammen.**

5.9 Zusammenschaltung von Übertragungssystemen

Die Übertragungsfunktion eines aus mehreren Übertragungssystemen rückwirkungsfrei(!) zusammengesetzten Gesamtsystems kann durch Anwendung der folgenden „Rechenregeln für Übertragungsfunktionen" systematisch ermittelt werden.

5.9.1 Reihenschaltung

Für die in Bild 5.6 dargestellte Serienschaltung zweier Systeme mit den Übertragungsfunktionen $A(s)$ und $B(s)$ gilt

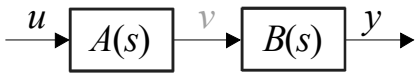


Bild 5.6: Reihenschaltung von Übertragungssystemen

$$\bar{y}(s) = B(s)\,\bar{v}(s) = B(s)\,A(s)\,\bar{u}(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s)\,B(s). \tag{5.30}$$

Die Übertragungsfunktion einer Serienschaltung entspricht also dem *Produkt* der einzelnen Übertragungsfunktionen. Man beachte, dass $G(s)$ ausschließlich Pole bzw. Nullstellen besitzt, die auch Pole bzw. Nullstellen von $A(s)$ und/oder $B(s)$ sind.

B Aus der Serienschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \text{und} \qquad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s)\,B(s) = \frac{s+2}{s\,(s+1)}.$$

[4]benannt nach dem (in Schweden geborenen) amerikanischen Physiker Harry Nyquist (1889-1976).
[5]benannt nach dem amerikanischen Wissenschaftler Hendrik Wade Bode (1905-1982).

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Die Pole von $G(s)$ liegen bei $s_1 = 0$ und $s_2 = -1$, die Nullstelle bei $s = -2$. ■

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass eine „Stabilisierung" mittels einer Serienschaltung nicht möglich ist.

B Gegeben sei ein instabiles[6] System mit der Übertragungsfunktion

$$B(s) = \frac{1}{s-5}.$$

Mit der Wahl

$$A(s) = \frac{s-5}{s+1}$$

gelingt es, ein BIBO-stabiles Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s)B(s) = \frac{(s-5)}{(s+1)}\frac{1}{(s-5)} = \frac{1}{s+1}$$

zu erzeugen. Der „instabile" Pol von $B(s)$ wird durch eine entsprechende Nullstelle von $A(s)$ kompensiert, man spricht von einer „**instabilen Kürzung**". In der Realität muss allerdings davon ausgegangen werden, dass das Signal v mit einer Störung überlagert ist, was in Bild 5.7 durch eine Störgröße d angedeutet ist. Damit gilt

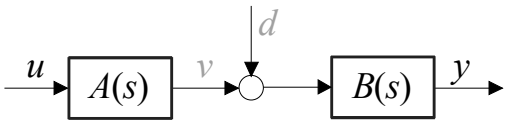


Bild 5.7: Zur Serienschaltung von Systemen

$$\bar{y}(s) = B(s)\,\left[\bar{v}(s) + \bar{d}(s)\right] = B(s)\,A(s)\,\bar{u}(s) + B(s)\,\bar{d}(s).$$

Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen Störung und Ausgangsgröße durch die instabile Übertragungsfunktion $B(s)$ beschrieben wird, das Gesamtsystem ist somit praktisch unbrauchbar. Diese Problematik tritt auch bei der numerischen Simulation der Serienschaltung auf. Aufgrund der numerischen Darstellung von Zahlen mit endlicher Genauigkeit ist die Größe v mit einem Fehler überlagert, der als Störung d interpretiert werden kann. ■

Das obige Beispiel veranschaulicht, dass instabile Kürzungen *unter keinen Umständen* durchgeführt werden dürfen. Ein weiterer Grund hierfür besteht darin, dass Übertragungsfunktionen stets nur Modelle der Realität darstellen und daher immer mit Unsicherheiten behaftet sind. *Exakte* Kürzungen sind somit grundsätzlich nicht möglich.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

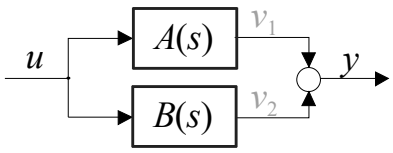


Bild 5.8: Parallelschaltung von Übertragungssystemen

5.9.2 Parallelschaltung

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ der in Bild 5.8 dargestellten Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen $A(s)$ und $B(s)$ kann mit Hilfe der Zusammenhänge

$$\bar{v}_1(s) = A(s)\,\bar{u}(s) \qquad \text{und} \qquad \bar{v}_2(s) = B(s)\,\bar{u}(s)$$

sowie

$$\bar{y}(s) = A(s)\,\bar{u}(s) + B(s)\,\bar{u}(s)$$

ermittelt werden, es gilt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = A(s) + B(s). \tag{5.31}$$

Die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung entspricht also der *Summe* der einzelnen Übertragungsfunktionen Man beachte, dass $G(s)$ ausschließlich Pole besitzt, die auch Pole von $A(s)$ und/oder $B(s)$ sind.

B Aus der Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \text{und} \qquad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s) + B(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s\,(s+1)}.$$

Die Übertragungsfunktion besitzt Pole bei $s = 0$ und $s = -1$ sowie Nullstellen bei $s = -2+\sqrt{2}$ und $s = -2 - \sqrt{2}$. ■

5.9.3 Rückkopplung

Die in Bild 5.9 dargestellte rückgekoppelte Struktur spielt vor allem in der Regelungstechnik eine bedeutende Rolle.

Es gilt

$$\bar{y}(s) = A(s)\,\bar{v}(s) \qquad \text{und} \qquad \bar{v}(s) = \bar{u}(s) - B(s)\bar{y}(s),$$

[6] unter einem instabilen System verstehen wir hier ein System, das nicht BIBO-stabil ist.

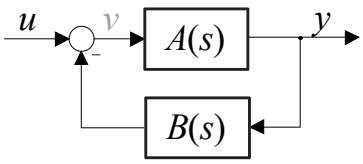


Bild 5.9: Rückgekoppelte Struktur

d.h.

$$\bar{y}(s) = A(s)\,\bar{u}(s) - A(s)\,B(s)\bar{y}(s).$$

Daraus folgt die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}. \tag{5.32}$$

Als Hilfestellung für die Ermittlung der Übertragungsfunktion von rückgekoppelten Strukturen kann die Merkregel

$$G_{gesamt} = \frac{G_{Vorwärtszweig}}{1 + G_{Schleife}} \tag{5.33}$$

dienen, siehe hierzu auch Bild 5.10.

Bild 5.10: Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion rückgekoppelter Systeme

B Aus der Zusammenschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \text{und} \qquad B(s) = \frac{1}{s}$$

gemäß Bild 5.9 ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)^2}.$$

Bemerkenswert ist, dass die Pole $s_{1,2} = -1$ von $G(s)$ weder Pole von $A(s)$ noch von $B(s)$ sind. Diese Möglichkeit, die Pole des „geschlossenen Kreises" zu beeinflussen, wird in der Regelungstechnik beim Entwurf von Regelgesetzen ausgenützt. ■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

5.9.4 Allgemeine Strukturen

Ein Algorithmus zu Berechnung der Übertragungsfunktion von komplexen Zusammenschaltungen von Übertragungssystemen ist die so genannte Mason-Formel[7], siehe z.B. [3]. Durch geschickte Anwendung der bereits eingeführten Rechenregeln für Übertragungsfunktionen (Serien-, Parallelschaltung und Rückkopplung) können komplizierte Strukturen auch ohne den etwas schwerfälligen Algorithmus von Mason problemlos aufgelöst werden.

B Die Übertragungsfunktion des in Bild 5.11 dargestellten Systems soll ermittelt werden. Es

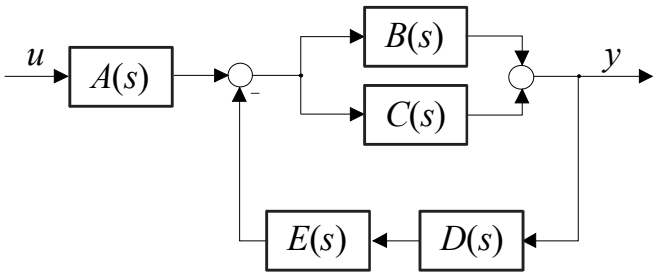


Bild 5.11: Zusammenschaltung mehrerer Übertragungsfunktionen

handelt sich um die Reihenschaltung der Übertragungsfunktion $A(s)$ und einer Rückkopplung mit

$$G_{Vorwärtszweig} = B(s) + C(s) \quad \text{und} \quad G_{Schleife} = [B(s) + C(s)]\, D(s)E(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s)\frac{B(s) + C(s)}{1 + [B(s) + C(s)]\, D(s)E(s)}.$$

■

Bei der Ermittlung der Übertragungsfunktion eines komplexen Systems aus den Übertragungsfunktionen der Teilsysteme ist unbedingt darauf zu achten, dass die Teilsysteme rückwirkungsfrei gekoppelt sind. Im folgenden Beispiel wird diese Problematik illustriert.

B Gegeben sei das in Bild 5.12 dargestellte Netzwerk, bestehend aus idealen Bauelementen. Die Eingangsgröße des Systems ist die Spannung u, die Ausgangsgröße ist die Spannung y. Diese Schaltung kann als Serienschaltung *zweier* RC-Tiefpass-Schaltungen interpretiert werden. Für den RC-Tiefpass erster Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße $x = x_1$ gilt

$$u = R\, i + x = RC\frac{dx}{dt} + x$$

[7] benannt nach dem amerikanischen Ingenieur Samuel Jefferson Mason (1921 - 1974)

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

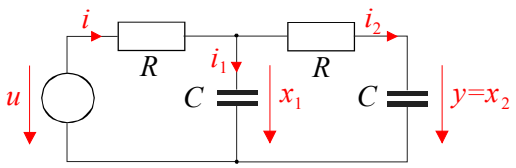


Bild 5.12: Netzwerk, bestehend aus zwei RC-Tiefpass-Schaltungen erster Ordnung

und es kann die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\dfrac{1}{RC}}{s + \dfrac{1}{RC}}$$

ermittelt werden. Die Anwendung der Relation (5.30) über die Serienschaltung zweier Übertragungssysteme liefert dann die (vermeintliche) Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 5.12, nämlich

$$H(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = G(s)\,G(s) = \frac{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2}{\left(s + \dfrac{1}{RC}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{1}{RC}\right)^2}{s^2 + \dfrac{2}{RC}s + \left(\dfrac{1}{RC}\right)^2}. \tag{5.34}$$

Zur Kontrolle wird nun die Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 5.12 direkt berechnet. Es gilt

$$x_1 = R\,i_2 + x_2 = RC\frac{dx_2}{dt} + x_2$$

sowie

$$u = Ri + x_1 = RC\frac{dx_1}{dt} + RC\frac{dx_2}{dt} + x_1.$$

Aus diesen beiden Relationen ergibt sich das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s + \frac{2}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\dfrac{1}{(RC)^2}}{s^2 + s\dfrac{3}{RC} + \dfrac{1}{(RC)^2}}.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (5.34), so erkennt man, dass

$$T(s) \neq H(s),$$

d.h. die Formel (5.30) darf hier offenbar nicht angewandt werden! Der Grund hierfür liegt darin, dass (5.34) impliziert, dass zwei unbelastete(!) RC-Tiefpasschaltungen in Serie geschaltet sind. Dies trifft aber bei der betrachteten Schaltung *nicht* zu. Wird zur „Entkopplung" der beiden Tiefpass-Schaltungen ein Spannungsfolger (Impedanzwandler) eingesetzt, wie in Bild 5.13 dargestellt, so ist die vorausgesetzte Rückwirkungsfreiheit gegeben und es gilt

$$T(s) = H(s).$$

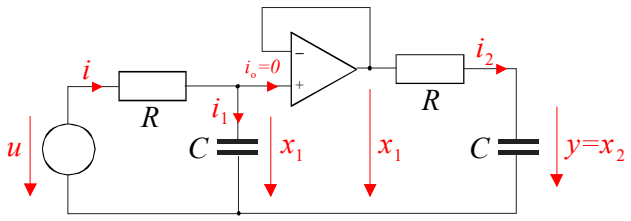


Bild 5.13: Modifikation des Schaltung durch Einbau eines Spannungsfolgers

5.10 Wichtige Übertragungsglieder

An dieser Stelle werden einige wichtige Übertragungsglieder vorgestellt. In den Blöcken, welche die einzelnen Übertragungssysteme in Strukturbildern repräsentieren, werden oft auch die zugehörigen Sprungantworten graphisch angedeutet.

5.10.1 Proportionalglied

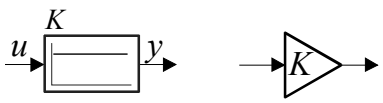
Beim Proportionalglied (**P-Glied**) ist die Ausgangsgröße y proportional zur Eingangsgröße u, d.h.

$$y(t) = K\,u(t) \tag{5.35}$$

Den (reellen) Proportionalitätsfaktor K bezeichnet man auch als Verstärkung oder Verstärkungsfaktor. Aus (5.35) folgt unmittelbar die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) = K. \tag{5.36}$$

In Strukturbildern repräsentieren üblicherweise die folgenden Symbole ein Proportionalglied:



Wie bereits erwähnt, ist im linken Block die Sprungantwort des P-Gliedes angedeutet.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

5.10.2 Verzögerungsglied erster Ordnung

Das Übertragungsverhalten eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (**VZ_1-Glied** oder **PT_1-Glied**) mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y wird durch die Differentialgleichung

$$T\frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \tag{5.37}$$

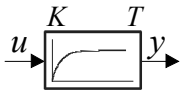
beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter T die so genannte Zeitkonstante des Systems und K ist der Verstärkungsfaktor. Die Anwendung der Laplace-Transformation liefert die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1+sT}. \tag{5.38}$$

Für die Sprungantwort eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung gilt

$$h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \tag{5.39}$$

siehe auch Bild 5.14. Daher werden solche Systeme üblicherweise durch folgendes Symbol dargestellt:



Aus Bild 5.14 geht auch hervor, dass zum Zeitpunkt $t = T$ der Wert der Sprungantwort ca. 63% des stationären Endwertes $h_\infty = K$ beträgt. Weiters kann aus dem dargestellten Verlauf von $h(t)$ die Zeitkonstante T als derjenige Zeitpunkt abgelesen werden, bei dem die rot eingezeichnete Tangente an $h(t)$ den Wert $h_\infty = K$ annimmt, d.h. es gilt

$$T = \frac{K}{\frac{dh}{dt}\big|_{t=0}}.$$

In der Praxis wird häufig auf die Faustformel zurückgegriffen, die besagt, dass der stationäre

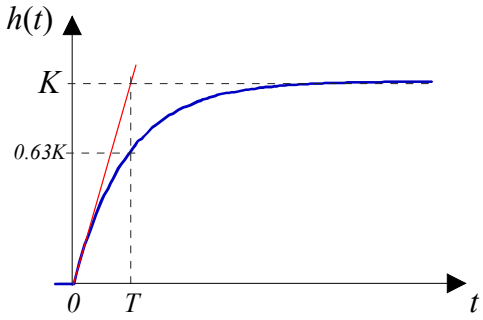


Bild 5.14: Sprungantwort eines PT_1 Elementes mit der Zeitkonstante T

Endwert h_∞ für $t \geq 5T$ erreicht ist. Durch Einsetzen in (5.39) erkennt man, dass der durch diese Faustformel entstehende Fehler kleiner als 1% von h_∞ ist.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

5.10.3 Verzögerungsglied zweiter Ordnung

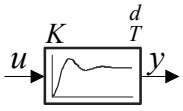
Verzögerungsglieder zweiter Ordnung (**VZ_2-Glied** oder **PT_2-Glied**) werden durch die Differentialgleichung

$$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2dT \frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \tag{5.40}$$

beschrieben. Hierbei sind die positiven Parameter d und T der Dämpfungsfaktor und die Zeitkonstante, K ist der Verstärkungsfaktor. Aus obiger Differentialgleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2dTs + (sT)^2}. \tag{5.41}$$

Für $d < 1$ besitzt $G(s)$ ein konjugiert komplexes Polpaar, was zu dem im Block



angedeuteten „oszillierenden" Verlauf der Sprungantwort führt. Für $d \geq 1$ besitzt $G(s)$ zwei reelle Pole und kann somit als Reihenschaltung zweier Verzögerungsglieder erster Ordnung interpretiert werden.

5.10.4 Integrator

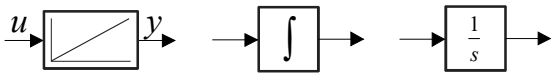
Der Integrator (**I-Glied**) wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = u \tag{5.42}$$

beschrieben, für die zugehörige Übertragungsfunktion gilt

$$G(s) = \frac{1}{s}. \tag{5.43}$$

Folgende Symbole



werden in Strukturbildern für den Integrator verwendet, wobei im linken Block die Rampe als Sprungantwort des Systems dargestellt ist

5.10.5 Differenzierer

Ein idealer Differenzierer (**D-Glied**) bildet die zeitliche Ableitung des Eingangssignales, d.h.

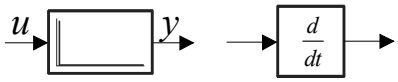
$$y = \frac{du}{dt}, \tag{5.44}$$

für die (nicht realisierbare) Übertragungsfunktion folgt

$$G(s) = s. \tag{5.45}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Üblicherweise werden in Strukturbildern die Symbole



verwendet, wobei im linken Block der Dirac-Impuls als Sprungantwort des Systems angedeutet ist.

5.10.6 Vorhalteglied

Das dynamische Verhalten des realen Differenzierers (**DT_1-Glied**), auch Vorhalteglied bezeichnet, wird durch die Differentialgleichung

$$T\frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{du}{dt} \tag{5.46}$$

beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter T die Zeitkonstante. Für die Übertragungsfunktion des Systems ergibt sich

$$G(s) = \frac{s}{1+sT}. \tag{5.47}$$

Beim DT_1-Glied handelt es sich also um ein D-Glied mit Verzögerungsverhalten erster Ordnung. Seine Sprungantwort lautet

$$h(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}},$$

sie ist in Bild 5.15 graphisch dargestellt. Wie man leicht überprüfen kann, gilt unabhängig von

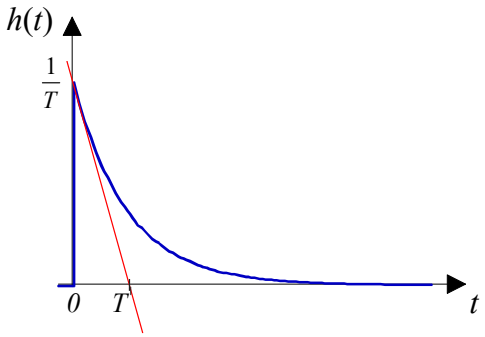


Bild 5.15: Sprungantwort DT_1-Glied

T die Relation $\int_0^\infty h(t)dt = 1$. Daraus kann man folgern, dass für $T \to 0$ die Sprungantwort $h(t)$ dem Dirac-Impuls $\delta(t)$ entspricht, das DT_1-Glied geht dann in einen idealen Differenzierer über.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Teil III

Zeitdiskrete Systeme

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 6

Zustandsraummethoden

6.1 Einführung

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind zeitdiskrete lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme, die durch n Differenzengleichungen erster Ordnung der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d\,u_k, \tag{6.1}$$

$$y_k = \mathbf{c}_d^T\mathbf{x}_k + d_d\,u_k. \tag{6.2}$$

beschrieben werden können. Es handelt sich hierbei um ein System mit der Eingangsfolge $(u_k) = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ und der Ausgangsfolge $(y_k) = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$. Mit der Folge $(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots)$, deren Elemente n-dimensionale Spaltenvektoren sind, wird der zeitliche Verlauf des Zustandsvektors bezeichnet, der Anfangszustand des Systems wird durch $\mathbf{x}_0$ symbolisiert. Die quadratische Matrix[1] $\mathbf{A}_d$ ist die System- oder Dynamikmatrix, $\mathbf{b}_d$ ist der Eingangsvektor, $\mathbf{c}_d$ ist der Ausgangsvektor und d_d der (skalare) Durchgriffsterm. Es wird weiters vorausgesetzt, dass dem zeitdiskreten System eine konstante (positive) Diskretisierungszeit T_d zugrunde liegt, d.h. einem Wert des (ganzzahligen) Zeitindex k entspricht der Zeitpunkt $t = k\,T_d$.

6.2 Lösung der Systemgleichungen

Im Vergleich zu Differentialgleichungssystemen ist die Lösung von Systemen von Differenzengleichungen einfacher, da hier die Lösungsvorschrift bereits enthalten ist. Ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ können bei gegebenem Verlauf der Eingangsgröße (u_k) die Werte des Zustandsvektors zu den diskreten Zeitpunkten $t = kT_d$ für $k = 1, 2, \ldots$ durch wiederholtes Einsetzen in (6.1) ermittelt werden, d. h.

$$\begin{array}{ll} k=0: & \mathbf{x}_0 \ldots \text{Anfangszustand} \\ k=1: & \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_d\,u_0 \\ k=2: & \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_d\,u_1 = \mathbf{A}_d^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}_d\mathbf{b}_d\,u_0 + \mathbf{b}_d\,u_1 \\ \vdots & \vdots \\ \text{allgemein:} & \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}_d^{k-1-i}\,\mathbf{b}_d\,u_i \end{array} \tag{6.3}$$

[1] Der Index d soll verdeutlichen, dass es sich hierbei um Systemdaten eines zeit$d$iskreten Systems handelt.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Diese Vorgangsweise erlaubt die numerische Berechnung der Elemente der Folge $(\mathbf{x}_k)$ und in weiterer Folge der Ausgangsfolge (y_k) mittels (6.2).

Eine *geschlossene* Lösung kann mit Hilfe der z-Transformation ermittelt werden. Wendet man diese auf (6.1) an, so erhält man

$$z\,\tilde{\mathbf{x}}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_d\,\tilde{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{b}_d\,\tilde{u}(z)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = \mathfrak{Z}\{(\mathbf{x}_k)\} \qquad \text{und} \qquad \tilde{u}(z) = \mathfrak{Z}\{(u_k)\}\,.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\,z\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\,\mathbf{b}_d\,\tilde{u}(z). \tag{6.4}$$

Wie aus (6.3) bzw. (6.4) zu erkennen ist, setzt sich - analog zum zeitkontinuierlichen Fall - die Lösung (6.3) aus dem freien und dem erzwungenen Anteil additiv zusammen. Die Erfüllung der Linearitätsbedingungen kann leicht überprüft werden.

Definiert man die $n \times n$ - Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_d(z) := z\,(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} \qquad \text{d.h.} \qquad (\boldsymbol{\phi}_{d,k}) = \mathfrak{Z}^{-1}\left\{z\,(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\right\} \overset{(6.3)}{=} \left(\mathbf{A}_d^k\right), \tag{6.5}$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes (B.9) der z–Transformation - für die Lösung

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\phi}_{d,k}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{\phi}_{d,k-1-i}\,\mathbf{b}_d\,u_i. \tag{6.6}$$

Für die Elemente der Ausgangsgröße (y_k) gilt dann gemäß (6.2)

$$y_k = \mathbf{c}_d^T\,\boldsymbol{\phi}_{d,k}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}_d^T\,\boldsymbol{\phi}_{d,k-1-i}\,\mathbf{b}_d\,u_i + d_d\,u_k. \tag{6.7}$$

6.2.1 Freie Lösung

Die freie Lösung ist diejenige Lösung, die sich ergibt, wenn das System ausschließlich durch den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ angeregt wird, d.h. man betrachtet das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_k.$$

Für den Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt $t = kT_d$ gilt

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d^k\,\mathbf{x}_0 \overset{(6.6)}{=} \boldsymbol{\phi}_{d,k}\,\mathbf{x}_0. \tag{6.8}$$

Die Matrix $\boldsymbol{\phi}_{d,k}$ beschreibt somit den Zusammenhang des Zustandsvektors $\mathbf{x}_k$ mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$. In Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall wird $\boldsymbol{\phi}_{d,k}$ als Transitionsmatrix

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

bezeichnet. Sie besitzt aufgrund ihrer Struktur für $k, i \geq 0$ selbstverständlich die Eigenschaften

$$\boldsymbol{\phi}_{d,0} = \mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\phi}_{d,k+1} = \mathbf{A}_d\, \boldsymbol{\phi}_{d,k} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\phi}_{d,k+i} = \boldsymbol{\phi}_{d,k} \boldsymbol{\phi}_{d,i}. \tag{6.9}$$

Unter Annahme einer regulären Matrix $\mathbf{A}_d$ folgt weiters

$$\boldsymbol{\phi}_{d,k}^{-1} = \boldsymbol{\phi}_{d,-k}. \tag{6.10}$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Nach (6.8) gilt für die freie Lösung

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\phi}_{d,k} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 \\ -0.8 & -0.4 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}_0.$$

Für die z-Transformierte der Transitionsmatrix findet man

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_d(z) = z\,(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1} = z \begin{bmatrix} z+0.4 & 0.2 \\ 0.8 & z+0.4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+0.4 & -0.2 \\ -0.8 & z+0.4 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt dann durch Rücktransformation die „kompakte" Darstellung

$$\boldsymbol{\phi}_{d,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\phi}_{d,k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-0.8)^k & \frac{1}{4}(-0.8)^k \\ (-0.8)^k & \frac{1}{2}(-0.8)^k \end{bmatrix} \qquad \text{für } k \geq 1$$

der Transitionsmatrix. ■

6.2.2 Erzwungene Lösung

Bei der erzwungenen Lösung wird das System bei verschwindendem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch die Eingangsgröße (u_k) angeregt, es gilt

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{\phi}_{d,k-1-i}\, \mathbf{b}_d\, u_i, \tag{6.11}$$

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$x_{k+1} = 0.5 x_k + u_k$$

mit dem Anfangszustand $x_0 = 0$. Aus (6.11) folgt für die Elemente der Folge (x_k) unmittelbar

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} 0.5^{k-1-i}\, u_i \qquad \text{für} \qquad k \geq 1.$$

■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

6.2.3 Übertragungsfunktion

Setzt man in (6.4) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, so gilt

$$\tilde{\mathbf{x}}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\,\mathbf{b}_d\,\tilde{u}(z)$$

und man erhält für die z-Transformierte der Ausgangsfolge

$$\tilde{y}(z) = \mathfrak{Z}\{(y_k)\} = \left[\mathbf{c}_d^T\ (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\,\mathbf{b}_d + d_d\right]\ \tilde{u}(z). \tag{6.12}$$

Die gebrochen rationale Funktion

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T\ (z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d)^{-1}\,\mathbf{b}_d + d_d \tag{6.13}$$

ist die so genannte **z-Übertragungsfunktion** des zeitdiskreten Modells (6.1), (6.2).

B Gegeben sei das mathematische Modell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad y_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k.$$

Mit Hilfe von (6.13) findet man

$$G(z) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z+0.5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{z^2+0.5z} = \frac{z-1}{z\,(z+0.5)}.$$

■

6.3 Ruhelagen

Die Ruhelagen von (6.1) können über die Bedingung

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \tag{6.14}$$

ermittelt werden. Für die „konstante" Eingangsfolge, d.h.

$$(u_k) = (u_R, u_R, \ldots) \qquad \text{d.h.} \qquad u_k = u_R = \text{konst.}$$

erhält man die Relation

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_R + \mathbf{b}_d\,u_R,$$

woraus sich das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})\,\mathbf{x}_R = -\mathbf{b}_d\,u_R$$

ergibt. Wenn die Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ regulär ist, also den Höchstrang besitzt, gibt es genau eine Ruhelage

$$\mathbf{x}_R = -\,(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})^{-1}\,\mathbf{b}_d\,u_R. \tag{6.15}$$

Anderenfalls gilt analog zum zeitkontinuierlichen Fall

$\operatorname{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E} \vdots \mathbf{b}\, u_R)$	$\operatorname{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E}) < \operatorname{rang}(\mathbf{A}_d - \mathbf{E} \vdots \mathbf{b}\, u_R)$
∞ viele Ruhelagen	keine Ruhelage

Man beachte, dass die Eigenwerte λ_i der Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ mit den Eigenwerten z_i der Matrix $\mathbf{A}_d$ über die Relation

$$\lambda_i = z_i - 1 \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, n$$

in Verbindung stehen. Das bedeutet, dass die Matrix $(\mathbf{A}_d - \mathbf{E})$ genau dann singulär ist, wenn $\mathbf{A}_d$ einen Eigenwert an der Stelle $z = 1$ besitzt.

6.4 Asymptotische Stabilität

Man nennt das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\, \mathbf{x}_k \tag{6.16}$$

asymptotisch stabil, wenn für *jeden beliebigen* Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ die Bedingung

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \tag{6.17}$$

erfüllt ist. Aus dieser Definition kann gefolgert werden, dass ein asymptotisch stabiles System genau *eine* Ruhelage im Ursprung des Zustandsraumes besitzt. Aus (6.17) folgt weiters, dass die Transitionsmatrix (6.5) der Bedingung

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{\phi}_{d,k} = \mathbf{0} \tag{6.18}$$

genügen muss, d.h. *jedes* Element der Matrix verschwindet für $t \to \infty$. Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall kann mit Hilfe des Endwertsatzes der z-Transformation gefolgert werden, dass dies genau dann der Fall ist, wenn *alle* Eigenwerte von $\mathbf{A}_d$ betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Das System (6.16) ist somit genau dann asymptotisch stabil, wenn das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}_d$ ein **Einheitskreispolynom** ist.

B Gegeben sei das autonome System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

Da die Dynamikmatrix $\mathbf{A}_d$ in Begleitform vorliegt, kann ihr charakteristisches Polynom direkt abgelesen werden, d.h.

$$\Delta(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d) = z^3 + 0.5z^2 + 0.5z = z\left(z^2 + 0.5z + 0.5\right).$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Die Nullstellen des Polynoms liegen bei

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{1}{4}\left(-1 \pm j\sqrt{7}\right)$$

Aufgrund

$$|z_1| = 0 \quad \text{und} \quad |z_2| = |z_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

liegen alle Eigenwerte im Einheitskreis, das System ist somit asymptotisch stabil. ■

6.5 Zustandstransformationen

Zustandstransformationen können auf dieselbe Weise wie im zeitkontinuierlichen Fall durchgeführt werden, d.h. der Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ des Originalsystems (6.1) steht mit dem Zustandsvektor $\mathbf{v}_k$ des transformierten Systems in der Relation

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{T}\,\mathbf{v}_k. \tag{6.19}$$

Dabei wird die quadratische Matrix $\mathbf{T}$ als regulär vorausgesetzt. Setzt man (6.19) in (6.1) und (6.2) ein, so erhält man die Beschreibung

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_d\mathbf{T}\,\mathbf{v}_k + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}_d\,u_k, && (6.20)\\ y_k &= \mathbf{c}_d^T\mathbf{T}\,\mathbf{v}_k + d_d\,u_k. && (6.21) \end{aligned}$$

für das transformierte System.

6.5.1 Transformation auf Diagonalform

Für die Transformation auf Diagonalform wird wie im zeitkontinuierlichen Fall vorausgesetzt, dass die Matrix $\mathbf{A}_d$ diagonalähnlich ist. Das bedeutet, dass auch n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ zu den n Eigenwerten $z_1, \ldots, z_n$ der Matrix $\mathbf{A}_d$ existieren. Sind die n Eigenwerte voneinander verschieden, so trifft dies auf jeden Fall zu. Wählt man nun

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \ldots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix},$$

so liegt die transformierte Systembeschreibung (6.20) in der Diagonalform vor. Da die Zeilen von $\mathbf{P}^{-1}$ die zu den Eigenwerten gehörigen Links-Eigenvektoren sind, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix},$$

gilt für das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} &= \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}\mathbf{v}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T\mathbf{b}_d \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T\mathbf{b}_d \end{bmatrix} u_k, && (6.22)\\ y_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T\mathbf{p}_1 & \ldots & \mathbf{c}_d^T\mathbf{p}_n \end{bmatrix}\mathbf{z}_k + d_d\,u_k. \end{aligned}$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Alle Überlegungen, die für zeitkontinuierliche Systeme angestellt wurden, können also unverändert auf zeitdiskrete Systeme übertragen werden.

Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix des in Diagonalform vorliegenden Systems (6.22) kann mühelos ermittelt werden. Es gilt offensichtlich

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{d,0} = \mathbf{E}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_{d,k} = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} z_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & z_n^k \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left(z_i^k\right) \quad \text{für} \quad k > 0 \tag{6.23}$$

Durch Rücktransformation kann nun die Transitionsmatrix des Originalsystems ermittelt werden, es gilt

$$\boldsymbol{\phi}_{d,k} = \mathbf{P} \operatorname{diag}\left(z_i^k\right) \mathbf{P}^{-1}. \tag{6.24}$$

Man erkennt, dass die Elemente der Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}_{d,k}$ Linearkombinationen von Potenzen z_i^k der Eigenwerte von $\mathbf{A}_d$ sind. ■

6.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

6.6.1 Einführung

Man nennt das System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d u_k, \\ y_k &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_k + d_d u_k \end{aligned} \tag{6.25}$$

steuerbar, wenn es möglich ist, durch geeignete Wahl der Eingangsgröße den beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in endlicher Zeit $t = N T_d$ in einen beliebigen Endzustand $\mathbf{x}_N$ zu überführen.

Man nennt das System **beobachtbar**, wenn aus der Kenntnis von Eingangs- und Ausgangsgröße in einem endlichen Zeitintervall der unbekannte Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ ermittelt werden kann.

6.6.2 Steuerbarkeit

Kriterium nach Kalman

Aus (6.3) folgt

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i,$$

d.h.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{A}_d^{N-1-i} \mathbf{b}_d u_i = \underbrace{\mathbf{x}_N - \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0}_{:=\mathbf{q}},$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

wobei $\mathbf{q}$ ein Vektor ist, der sich aus den beliebig vorgegebenen Werten $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}_N$ errechnet. Jeder Vektor $\mathbf{q}$ muss also als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{b}_d$, $\mathbf{A}_d\,\mathbf{b}_d, \ldots,$ $\mathbf{A}_d^{N-1}\,\mathbf{b}_d$ dargestellt werden können. Mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 4.2 kann gefolgert werden, dass dies genau dann möglich ist, wenn die Vektoren $\mathbf{b}_d$, $\mathbf{A}_d\,\mathbf{b}_d, \ldots,$ $\mathbf{A}_d^{n-1}\,\mathbf{b}_d$ linear unabhängig sind. Aus den obigen Überlegungen folgt weiters, dass der Übergang zwischen zwei *beliebigen* Zuständen in der minimalen Zeit $t = nT_d$ abgeschlossen werden kann.

Das System (6.25) ist also genau dann steuerbar, wenn die (diskrete) Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_{d,u} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_d & \mathbf{A}_d\mathbf{b}_d & \ldots & \mathbf{A}_d^{n-1}\mathbf{b}_d \end{array}\right] \tag{6.26}$$

regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar $(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$ steuerbar ist.

Kriterium nach Hautus

Völlig analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (6.25) genau dann steuerbar ist, wenn kein Linkseigenvektor von $\mathbf{A}_d$ orthogonal zu $\mathbf{b}_d$ ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte z_i der Matrix $\mathbf{A}_d$ die Bedingung

$$\operatorname{rang}\left[z_i\,\mathbf{E} - \mathbf{A}_d \vdots \mathbf{b}_d\right] = n \tag{6.27}$$

erfüllt ist.

6.6.3 Beobachtbarkeit

Kriterium nach Kalman

Für die Elemente der Ausgangsfolge gilt

$$\begin{aligned}
y_0 &= \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{x}_0 + d_d\,u_0 \\
y_1 &= \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_0 + d_d\,u_1 \\
y_2 &= \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^2\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d\,\mathbf{b}_d\,u_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_1 + d_d\,u_2 \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^{n-1}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^{n-2}\,\mathbf{b}_d\,u_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^{n-3}\,\mathbf{b}_d\,u_1 + \ldots + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_{n-2} + d_d\,u_{n-1}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T\mathbf{A}_d \\ \mathbf{c}_d^T\mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T\mathbf{A}_d^{n-1} \end{array}\right] \mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} d_d\,u_0 \\ \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_0 + d_d\,u_1 \\ \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d\,\mathbf{b}_d\,u_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_1 + d_d\,u_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^{n-2}\,\mathbf{b}_d\,u_0 + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{A}_d^{n-3}\,\mathbf{b}_d\,u_1 + \ldots + \mathbf{c}_d^T\,\mathbf{b}_d\,u_{n-2} + d_d\,u_{n-1} \end{array}\right].$$

Das System ist genau dann beobachtbar, wenn obiges Gleichungssystem bezüglich $\mathbf{x}_0$ eindeutig lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die (diskrete) Beobachbarkeitmatrix

$$\mathbf{B}_{d,y} := \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{c}_d^T \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

regulär ist. Man sagt auch, dass das Paar $(\mathbf{A}_d, \mathbf{c}_d)$ beobachtbar ist.

Kriterium nach Hautus

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall kann gefolgert werden, dass das System (6.25) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Rechtseigenvektor von $\mathbf{A}_d$ orthogonal zu $\mathbf{c}_d^T$ ist, bzw., wenn für alle Eigenwerte z_i der Matrix $\mathbf{A}_d$ die Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T \\ z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}_d \end{bmatrix} = n \tag{6.29}$$

erfüllt ist.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Kapitel 7

Übertragungssysteme

7.1 Einführung

Die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ beschreibt das Übertragungsverhalten von zeitdiskreten linearen, zeitinvarianten Systemen. Sie ist definiert als der Quotient der z-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)}. \tag{7.1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt $k = 0$ in Ruhe befindet. Im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen handelt es sich bei der z-Übertragungsfunktion stets um eine gebrochen rationale Funktion, d.h. $G(z)$ kann als Quotient zweier Polynome in der Form

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}, \tag{7.2}$$

dargestellt werden, wobei die Polynomkoeffizienten von $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade der Bedingung

$$\operatorname{Grad}\beta(z) \leq \operatorname{Grad}\alpha(z) \tag{7.3}$$

genügen, werden als realisierbar bzw. **kausal** bezeichnet. Im Falle

$$\operatorname{Grad}\beta(z) = \operatorname{Grad}\alpha(z)$$

spricht man von einem sprungfähigen System.

Für Systeme der Form (6.1), (6.2) kann die z-Übertragungsfunktion unter der Annahme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gemäß (6.13) mit der Formel

$$G(z) = \mathbf{c}_d^T \left(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_d\right)^{-1} \mathbf{b}_d + d_d \tag{7.4}$$

berechnet werden.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

7.2 Deutung von $G(z)$ im Zeitbereich

Gemäß (7.1) gilt für den Verlauf der Ausgangsfolge nach Anwendung des Faltungssatzes (B.9)

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{G(z)\,\tilde{u}(z)\} = (g_k) * (u_k) = \left(\sum_{i=0}^{k} g_{k-i}\,u_i\right), \tag{7.5}$$

wobei

$$(g_k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{G(z)\}. \tag{7.6}$$

Der Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k entspricht also einer gewichteten Summe der Eingangsfolgenelemente bis zu diesem Zeitpunkt. Aus diesem Grund nennt man (g_k) auch **Gewichtsfolge**. Wählt man als Eingangsgröße nun einen zeitdiskreten Impuls, also

$$(u_k) = (\delta_k) = (1, 0, 0, \ldots) \qquad \text{d.h.} \qquad \tilde{u}(z) = 1$$

so gilt

$$(y_k) = \mathfrak{Z}^{-1}\{G(z)\} = (g_k),$$

weshalb (g_k) auch Impulsantwort des Systems genannt wird.

Besitzt die Impulsantwort eines Systems nur endlich viele, von Null verschiedene Elemente, so spricht man von einem **FIR-System**[1]. Die Übertragungsfunktion eines FIR-Systems ist durch ein Nennerpolynom der Form $\alpha(z) = z^n$ charakterisiert. Im Gegensatz dazu werden Systeme, deren Impulsantworten unendliche viele, von Null verschiedene Elemente besitzen, auch **IIR-Systeme**[2] genannt.

B Gegeben sei die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 0.5}{z^3} = z^{-1} - 0.5z^{-3}.$$

Hierbei handelt es sich um ein FIR-System, die zugehörige Impulsantwort lautet

$$(g_k) = (0, 1, 0, -0.5, 0, 0, \ldots).$$

Im Gegensatz dazu repräsentiert

$$G(z) = \frac{z}{z - 0.1}$$

ein IIR-System mit der Impulsantwort

$$(g_k) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots) = \left(0.1^k\right).$$

■

[1] engl.: *finite impulse response*
[2] engl.: *infinite impulse response*

7.3 Übergang von $G(z)$ zu einem Zustandsmodell

Da der Zusammenhang (7.4) zwischen der z-Übertragungsfunktion und dem Zustandsmodell (6.1), (6.2) exakt dem zeitkontinuierlichem Fall entspricht, können alle Überlegungen unverändert übernommen werden. Das bedeutet, dass zu einer z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta_n z^n + \ldots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

in bekannter Weise die Realisierungen in erster Normalform bzw. zweiter Normalform angegeben werden können.

B Gegeben sei die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + 1.2z + 0.2}.$$

Die zugehörige Realisierung in erster Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -1.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad y_k = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k,$$

das entsprechende Strukturbild ist in Bild 7.1 dargestellt. ■

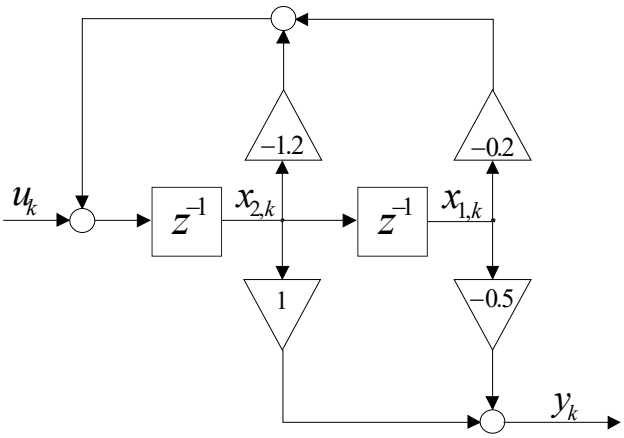


Bild 7.1: Strukturbild eines zeitdiskreten Modells in erster Normalform

B Gegeben sei die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 + 0.9z + 0.1}{z^2 - 0.1z + 0.1} = 1 + \frac{z}{z^2 - 0.1z + 0.1}.$$

Die entsprechende Realisierung in zweiter Normalform lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k.$$

■

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

7.4 Berechnung von $G(z)$ aus Differenzengleichungen höherer Ordnung

Liegt die Beschreibung eines Systems mit der Eingangsgröße (u_k) und der Ausgangsgröße (y_k) in Form einer Differenzengleichung höherer Ordnung vor, also

$$\alpha_n y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \ldots + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = \beta_m u_{k+m} + \beta_{m-1} u_{k+m-1} + \ldots + \beta_1 u_{k+1} + \beta_0 u_k,$$

und werden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, so gilt nach Anwendung des Verschiebungssatzes der z-Transformation

$$G(z) = \frac{\mathfrak{Z}\{(y_k)\}}{\mathfrak{Z}\{(u_k)\}} = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0}.$$

Die Kausalität ist gemäß (7.3) für $m \leq n$ gegeben.

B Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k.$$

Die entsprechende z-Übertragungsfunktion lautet

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2 - z + 1}.$$

■

Oft sind Differenzengleichungen so angeschrieben, dass man den Wert der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k aus *vergangenen* Werten der Ausgangsgröße und dem Verlauf der Eingangsfolge berechnen kann. Die Ermittlung der zugehörigen z-Übertragungsfunktion kann natürlich analog erfolgen.

B Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_k = y_{k-1} - y_{k-2} + u_{k-1} - u_{k-2}.$$

Die Anwendung der z-Transformation liefert

$$\tilde{y}(z) = z^{-1}\tilde{y}(z) - z^{-2}\tilde{y}(z) + z^{-1}\tilde{u}(z) - z^{-2}\tilde{u}(z).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z-1}{z^2 - z + 1},$$

das System besitzt also die gleiche z-Übertragungsfunktion wie im vorangegangenen Beispiel.
■

B Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_k = y_{k-1} + u_{k+1}.$$

Hierbei handelt es sich offenbar um ein nicht-kausales System, denn zur Ermittlung der Ausgangsgröße zum Zeitpunkt k wird der *zukünftige* Wert der Eingangsgröße benötigt. Dies manifestiert sich in der z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z^2}{z-1},$$

durch die Verletzung der Kausalitätsbedingung (7.3). ■

7.4.1 Umkehrung

Die Ermittlung einer Differenzengleichung aus einer z-Übertragungsfunktion beruht ebenso auf der Anwendung des Verschiebungssatzes.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{u}(z)} = \frac{z+0.2}{z^2+0.1z+0.15}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{y}(z)\left(z^2+0.1z+0.15\right) = \tilde{u}(z)\left(z+0.2\right),$$

woraus sich die Differenzengleichung

$$y_{k+2} + 0.1y_{k+1} + 0.15y_k = u_{k+1} + 0.2u_k$$

ergibt.

■

7.5 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (7.2) die Polynome $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

B Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \frac{z+0.1}{z^2+0.3z+0.02}.$$

Gibt man $G(z)$ in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{z+0.1}{(z+0.1)(z+0.2)} = \frac{1}{z+0.2}$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist.

■

Geht man nun von einer aus teilerfremden Polynomen gebildeten, d.h. nicht weiter kürzbaren, Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)} \quad \text{mit} \quad \mu(z), \nu(z) \ldots \text{teilerfremd} \tag{7.7}$$

aus, so sind diejenigen Werte von z, für die $\mu(z) = 0$ gilt, die so genannten **Nullstellen** von $G(z)$. Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch $\nu(z) = 0$ charakterisiert. In der *faktorisierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (z - n_i)}{\prod_{k=1}^{n} (z - p_k)} \quad \text{mit} \quad m \leq n \tag{7.8}$$

ist $z = n_i$ eine Nullstelle und $z = p_k$ eine Polstelle von $G(z)$. Tritt der Faktor $(z - n_i)$ bzw. $(z - p_k)$ mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen Pol. Da die Koeffizienten der Polynome $\mu(z)$ und $\nu(z)$ reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (7.8) folgt unmittelbar

$$G(z) = 0 \quad \text{für} \quad z = n_i \qquad \text{und} \qquad |G(z)| \to \infty \quad \text{für} \quad z \to p_k. \tag{7.9}$$

7.6 BIBO-Stabilität

Ein zeitdiskretes lineares, zeitinvariantes System mit der z-Übertragungsfunktion $G(z)$ wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output") genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsfolge mit einer beschränkten Ausgangsfolge reagiert. Unter einer beschränkten Folge versteht man in diesem Kontext eine Folge, deren Elemente betragsmäßig beschränkt sind. Somit muss bei BIBO-Stabilität

$$|u_k| \leq M < \infty \qquad \Rightarrow \qquad |y_k| \leq N < \infty \qquad \forall k \geq 0. \tag{7.10}$$

gelten. Mit (7.5) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y_k| = \left| \sum_{i=0}^{k} g_{k-i}\, u_i \right| \leq \sum_{i=0}^{k} |g_{k-i}|\ |u_i| \overset{(7.10)}{\leq} M \sum_{i=0}^{k} |g_{k-i}| = M \sum_{i=0}^{k} |g_i|\,.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von $|y_k|$ für $k \to \infty$ auf, d.h. zur Erfüllung von (7.10) muss

$$M \sum_{i=0}^{\infty} |g_i| \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort (g_k) absolut summierbar sein muss, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty. \tag{7.11}$$

Man beachte, dass es sich bei (7.11) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

B Gegeben sei die z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{z-\tau} \qquad \text{mit} \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

mit der zugehörigen Impulsantwort

$$(g_k) = \left(\tau^k\right).$$

Die Summe über den Absolutbetrag der Elemente von (g_k), also

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\tau^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |\tau|^k$$

existiert offensichtlich nur für Werte von τ, die betragsmäßig kleiner als eins sind. Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol $z = \tau$ einen Betrag besitzt, der kleiner als eins ist.

■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort (g_k) und der z-Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(z) = \mathfrak{Z}\left\{(g_k)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\, z^{-k}.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} g_k\, z^{-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|\ \left|z^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|\ |z|^{-k}$$

Gilt $|z| \geq 1$, so kann weiter geschrieben werden

$$|G(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|\,.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (7.11) ist also erfüllt - der Ausdruck $|G(z)|$ für $|z| \geq 1$ *endliche* Werte annimmt. Daraus kann gefolgert werden, dass $G(z)$ ausschließlich Pole *im Inneren des Einheitskreises* besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von $G(z)$ im Einheitskreis liegen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (7.7) das Nennerpoynom von $G(z)$ ein Einheitskreispolynom sein muss.

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z + 0.1}{z(z - 0.2)(z + 1)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol besitzt, der nicht im Einheitskreis liegt. ■

B Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 1}{(z + 0.1)^2(z - 0.5)(z + 0.9)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von $G(z)$ im Einheitskreis liegen.

■

Kapitel 8

Englische Fachbegriffe

Anfangswertsatz	initial value theorem
Anfangszustand	initial state
asymptotisch stabil	asymptotically stable
asymptotische Stabilität	asymptotic stability
autonom	autonomous
Begleitform	companion form
beobachtbar	observable
Beobachtbarkeit	observability
Bebachtbarkeitsnormalform	observable-form realization, observable canonical form
BIBO Stabilität	BIBO stability
Determinante	determinant
Diagonalform	diagonal form
Differentialgleichung	differential equation
Dirac Impuls	Dirac delta function
Durchgriffsterm	direct transmission term
Eigenwert	eigenvalue
Eigenvektor	eigenvector
Eingrößensystem	single input - single output system
Einheitskreis	unit circle
Einheitsmatrix	identity matrix
Einheitssprung	unit step
Endwertsatz	final value theorem
Erreichbarkeit	reachability
Faltung	convolution
Faltungsintegral	convolution integral
Faltungssumme	convolution sum
Frequenzgang	frequency response
Impuls	impulse
instabil	unstable
Jordan-Form	Jordan canonical form

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Jordanblock ... Jordan block
Koeffizient ... coefficient
konjugiert komplex ... conjugate complex
Knotenpunkt ... node
  stabil ... nodal sink, stable node
  instabil ... nodal source, unstable node
kürzen ... to cancel
Kürzung ... cancellation
Laplace Transformation ... Laplace transform
linear, zeitinvariant (LZI) ... linear, time-invariant (LTI)
linear unabhängig ... linearly independent
Linearisierung ... linearization
Lösung, freie ... zero-input response
  erzwungene ... zero-state response
Matrix ... matrix, *pl.* matrices
  adjungierte ... adjoint matrix
  diagonale ... diagonal matrix
  Hurwitz- ... Hurwitz matrix
  in Begleitform ... companion matrix
  inverse ... inverse matrix
  quadratische ... square matrix
  reguläre ... nonsingular matrix
  schiefsymmetrische ... skew symmetric matrix
  singuläre ... singular matrix
  symmetrische ... symmetric matrix
  transponierte ... transpose matrix, transposed matrix
Minimalrealisierung ... minimal realization
Nenner ... denominator
Normalform ... canonical form
Nullstelle ... zero
Parallelschaltung ... parallel connection
Phasenportrait ... phase portrait
PN plan ... pole-zero map
Pol, Polstelle ... pole
Polynom ... polynomial
  charakteristisches ... characteristic polynomial
  Hurwitz- ... Hurwitz polynomial
  monisches ... monic polynomial
  Nenner- ... denominator polynomial
  Zähler- ... numerator polynomial
Rang ... rank
realisierbar ... proper
Reihenschaltung ... series connection
Routh Schema ... Routh test

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Rückkopplung . . . . . feedback
Ruhelage . . . . . equilibrium point
Sattelpunkt . . . . . saddle point
Sprungantwort . . . . . step response
sprungfähig . . . . . biproper
Sprungfunktion . . . . . step function
Stabilität . . . . . stability
    asymptotische . . . . . asymptotic stability
    BIBO . . . . . BIBO stability
steuerbar . . . . . controllable
Steuerbarkeit . . . . . controllability
Steuerbarkeitsmatrix . . . . . controllability matrix
Steuerbarkeitsnormalform . . . . . controllable-form realization, controllable canonical form
Systemordnung . . . . . system order
teilerfremd . . . . . coprime
Trajektorie . . . . . trajectory
Transitionsmatrix . . . . . state transition matrix
Übertragungsfunktion . . . . . transfer function
Vektor . . . . . vector
    Spalten- . . . . . column vector
    Zeilen- . . . . . row vector
Vielfachheit . . . . . multiplicity
Wirbelpunkt . . . . . spiral point
    stabil . . . . . spiral sink
    instabil . . . . . spiral source
Zähler . . . . . numerator
zeitdiskret . . . . . discrete-time
zeitinvariant . . . . . time-invariant
zeitvariant . . . . . time-variant
Zustandsebene . . . . . state plane
    -modell . . . . . state model
    -raum . . . . . state space
    -variable . . . . . state variable
    -transformation . . . . . state transformation
    -vektor . . . . . state vector

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Anhang A

Laplace-Transformation

Die (einseitige) **Laplace-Transformation** ordnet einer Zeitfunktion $f(t)$ über die Berechnungsvorschrift

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt \tag{A.1}$$

eine Funktion $\bar{f}(s)$ der komplexen Variable s zu. Dabei wird an dieser Stelle vereinfachend angenommen, dass $f(t)$ für negative Werte des Parameters t verschwindet, d.h.

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0.$$

Weiters wird vorausgesetzt, dass $f(t)$ auf jedem endlichen Zeitintervall stückweise stetig ist und - für geeignet gewählte reelle Konstanten M und γ - der Ungleichung

$$|f(t)| \leq M\, e^{\gamma t} \tag{A.2}$$

genügt. Dann ist das Integral (A.1) für alle s mit $\mathrm{Re}\{s\} > \gamma$ absolut konvergent[1], man spricht auch vom Existenzbereich von $\bar{f}(s)$. Jeder transformierbaren Funktion $f(t)$ im **Zeitbereich** wird durch (A.1) eine Funktion $\bar{f}(s)$ im **Bildbereich** zugeordnet. Diese Korrespondenz zwischen der **Originalfunktion** $f(t)$ und der zugehörigen **Bildfunktion** $\overline{f}(s)$ wird durch

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{und} \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \tag{A.3}$$

bzw. durch das „Hantelsymbol"

$$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \overline{f}(s) \tag{A.4}$$

symbolisiert.

A.1 Linearität

Die Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \tag{A.5}$$

für beliebige komplexe Konstanten α_1 und α_2.

[1] das Laplace-Integral ist also in einer rechten Halbebene absolut konvergent. In den meisten Fällen kann die Funktion $\bar{f}(s)$ in die gesamte komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

A.2 Dämpfungsregel

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann

$$\mathcal{L}\left\{f(t)e^{\alpha t}\right\} = \bar{f}(s-\alpha), \tag{A.6}$$

wobei α eine beliebige komplexe Konstante ist.

A.3 Verschiebungssatz

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Für die Laplace-Transformierte der auf der Zeitachse um $\tau > 0$ (nach rechts) verschobenen Funktion $f(t-\tau)$ gilt

$$\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\} = e^{-s\tau}\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}. \tag{A.7}$$

Man beachte hierzu auch die Darstellung in Bild A.1, die nochmals verdeutlichen soll, dass die verschobene Funktion $f(t-\tau)$ für $t < \tau$ identisch Null ist.

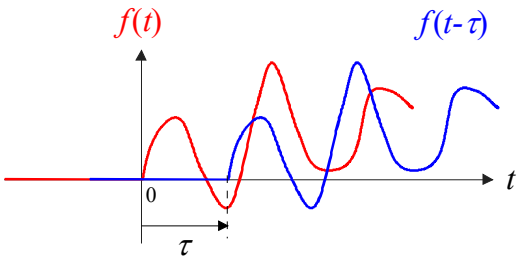


Bild A.1: zur Illustration des Verschiebungssatzes

A.4 Faltungsregel

Gegeben seien zwei Zeitfunktionen mit den zugehörigen Laplace-Transformierten, also $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ und $\bar{g}(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$. Es gilt dann

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s)\,\bar{g}(s)\right\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{A.8}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von der Faltung der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ und verwendet häufig die Kurzschreibweise

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

A.5 Differentiation im Zeitbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Für die Laplace-Transformierte der zeitlichen Ableitung von $f(t)$ gilt dann

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\bar{f}(s) - f(0). \tag{A.9}$$

Eine wiederholte Anwendung des Differentiationssatzes liefert für die $n-$te Ableitung von $f(t)$ die Korrespondenz

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \left.\frac{d^i f}{dt^i}\right|_{t=0}. \tag{A.10}$$

Man beachte, dass sich im Falle verschwindender Anfangswerte obige Relation zu

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n \bar{f}(s) \tag{A.11}$$

vereinfacht. Eine n-fache Differentiation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Bildbereich mit s^n.

A.6 Differentiation im Bildbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann die Relation

$$-\mathcal{L}\{t\ f(t)\} = \frac{d\bar{f}(s)}{ds}. \tag{A.12}$$

Eine $n-$facher Differentiation nach s führt auf das Ergebnis

$$\mathcal{L}\{t^n\ f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n}. \tag{A.13}$$

A.7 Integration im Zeitbereich

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter $\bar{f}(s)$. Es gilt dann

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\,\bar{f}(s). \tag{A.14}$$

A.8 Anfangswertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$. Der Wert der Zeitfunktion $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ kann mit Hilfe des Anfangswertsatzes

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\bar{f}(s) \tag{A.15}$$

berechnet werden.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

A.9 Endwertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$. Der Wert der Zeitfunktion $f(t)$ für $t \to \infty$ kann mit Hilfe des Endwertsatzes

$$f_\infty := \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,\bar{f}(s) \tag{A.16}$$

ermittelt werden. Man beachte, dass die Anwendung von (A.16) nur dann zulässig ist, wenn der Grenzwert von $f(t)$ für $t \to \infty$ existiert. Dies kann ebenfalls im Bildbereich überprüft werden. Ist die Funktion $\bar{g}(s) = s\,\bar{f}(s)$ eine gebrochen rationale Funktion, d.h.

$$\bar{g}(s) = \frac{\kappa(s)}{\lambda(s)},$$

wobei $\kappa(s)$ und $\lambda(s)$ teilerfremde (gekürzte) Polynome sind, so existiert f_∞ genau dann, wenn das Polynom $\lambda(s)$ ausschließlich Nullstellen mit negativem Realteil besitzt. Ein solches Polynom wird auch **Hurwitzpolynom**[2] genannt.

[2]benannt nach dem deutschen Mathematiker Adolf Hurwitz (1859-1919)

A.10 Korrespondenztabelle für reelle Funktionen

$f(t)$	○—●	$\bar{f}(s)$
$\delta(t)$		1
$\sigma(t)$		$\frac{1}{s}$
t		$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!},\ \ n \geq 0$		$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$		$\frac{1}{s-\alpha}$
$te^{\alpha t}$		$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t},\ \ n \geq 0$		$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\cos \omega t$		$\frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}\sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$t\cos \omega t$		$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\sin \omega t$		$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Anhang B

z-Transformation

Die (einseitige) **z-Transformation** ordnet einer Zahlenfolge (f_k) über die Berechnungsvorschrift

$$\tilde{f}(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, z^{-k} \tag{B.1}$$

eine Funktion $\tilde{f}(z)$ der komplexen Variable z zu. Dabei wird an dieser Stelle vereinfachend angenommen, dass die Folgenelemente von (f_k) für negative Werte von k verschwinden, d.h.

$$f_k = 0 \quad \text{für} \quad k < 0.$$

Für Zahlenfolgen (f_k), deren Elemente - für geeignet gewählte reelle Konstanten M und γ - der Ungleichung

$$|f_k| \leq M \, \gamma^k$$

genügen, konvergiert die Summe (B.1) im Gebiet $|z| > \gamma$. Jeder transformierbaren Folge $(f_k) = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$ wird somit durch (B.1) eine Funktion $\tilde{f}(z)$ im **Bildbereich** zugeordnet. Diese Korrespondenz wird durch

$$\tilde{f}(z) = \mathfrak{Z}\{(f_k)\} \qquad \text{und} \qquad (f_k) = \mathfrak{Z}^{-1}\left\{\tilde{f}(z)\right\} \tag{B.2}$$

bzw. durch das „Hantelsymbol"

$$(f_k) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \tilde{f}(z) \tag{B.3}$$

symbolisiert[1].

B.1 Linearität

Die z-Transformation ist eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathfrak{Z}\{\alpha_1 (f_{1,k}) + \alpha_2 (f_{2,k})\} = \alpha_1 \, \mathfrak{Z}\{(f_{1,k})\} + \alpha_2 \, \mathfrak{Z}\{(f_{2,k})\} \tag{B.4}$$

für beliebige komplexe Konstanten α_1 und α_2.

[1] Häufig wird auch die Schreibweise $\tilde{f}(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\}$ und $(f_k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\tilde{f}(z)\right\}$ verwendet.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

B.2 Dämpfungsregel

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger z-Transformierter $\tilde{f}(z)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}\left\{(\alpha^k f_k)\right\} = \tilde{f}(\frac{z}{\alpha}), \tag{B.5}$$

wobei α eine beliebige komplexe Konstante ist.

B.3 Verschiebung nach rechts

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Die z-Transformierte der um $n > 0$ Schritte (nach rechts) verschobenen Folge (f_{k-n}) lautet

$$\mathfrak{Z}\left\{(f_{k-n})\right\} = z^{-n}\,\tilde{f}(z). \tag{B.6}$$

Man beachte, dass die Elemente der verschobenen Folge für $k < n$ identisch Null sind.

B.4 Verschiebung nach links

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Die z-Transformierte der um $n > 0$ Schritte (nach links) verschobenen Folge (f_{k+n}) lautet

$$\mathfrak{Z}\left\{(f_{k+n})\right\} = z^n\,\tilde{f}(z) - z^n \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i}. \tag{B.7}$$

Sind alle Elemente der Folge (f_k) für $k < n$ identisch Null, so vereinfacht sich (B.7) zu

$$\mathfrak{Z}\left\{(f_{k+n})\right\} = z^n\,\tilde{f}(z). \tag{B.8}$$

B.5 Faltungsregel

Gegeben seien zwei Zahlenfolgen mit den zugehörigen z-Transformierten $\tilde{f}(z) = \mathfrak{Z}\left\{(f_k)\right\}$ und $\tilde{g}(z) = \mathfrak{Z}\left\{(g_k)\right\}$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}^{-1}\left\{\tilde{f}(z)\,\tilde{g}(z)\right\} = \left(\sum_{i=0}^{k} f_{k-i} g_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} g_{k-i} f_i\right). \tag{B.9}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von der Faltung der Folgen (f_k) und (g_k) und verwendet die Kurzschreibweise

$$\mathfrak{Z}^{-1}\left\{\tilde{f}(z)\,\tilde{g}(z)\right\} = (f_k) * (g_k) = (g_k) * (f_k).$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

B.6 Differentiation im Bildbereich

Sei (f_k) eine Zahlenfolge mit zugehöriger Transformierter $\tilde{f}(z)$. Es gilt dann

$$\mathfrak{Z}\{(k\, f_k)\} = -z\, \frac{d\, \tilde{f}(z)}{dz}. \tag{B.10}$$

B.7 Anfangswertsatz

Gegeben sei die z-Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge $(f_k) = (f_0, f_{1,} f_{2,\ldots})$. Das Element f_0 kann mit Hilfe des Anfangswertsatzes

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} \tilde{f}(z) \tag{B.11}$$

berechnet werden.

B.8 EndwertsatzA.9

Gegeben sei die z-Transformierte $\tilde{f}(z)$ einer Folge (f_k). Das Folgenelement f_k für $k \to \infty$ kann mit Hilfe des Endwertsatzes

$$f_\infty := \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\ \tilde{f}(z) \tag{B.12}$$

ermittelt werden. Man beachte, dass die Anwendung von (B.12) nur dann zulässig ist, wenn der Grenzwert f_∞ existiert. Dies kann ebenfalls im Bildbereich überprüft werden. Ist die Funktion $\tilde{g}(z) = (z-1)\ \tilde{f}(z)$ eine gebrochen rationale Funktion, d.h.

$$\tilde{g}(z) = \frac{\kappa(z)}{\lambda(z)},$$

wobei $\kappa(z)$ und $\lambda(z)$ teilerfremde (gekürzte) Polynome sind, so existiert f_∞ genau dann, wenn das Polynom $\lambda(z)$ ausschließlich Nullstellen besitzt, die betragsmäßig kleiner als 1 sind. Das bedeutet, dass alle Nullstellen von $\lambda(z)$ im Einheitskreis der komplexen z-Ebene liegen. Ein solches Polynom wird auch **Einheitskreispolynom** oder **Schurpolynom** genannt.

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

B.9 Korrespondenztabelle

(f_k)	○—●	$\tilde{f}(z)$
$(\delta_k) = (1, 0, \ldots)$		1
$(\sigma_k) = (1, 1, \ldots)$		$\dfrac{z}{z-1}$
(k)		$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
(k^2)		$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
(α^k)		$\dfrac{z}{z-\alpha}$
$(k\alpha^k)$		$\dfrac{z\alpha}{(z-\alpha)^2}$
$(k^2\alpha^k)$		$\dfrac{z\,(z+\alpha)\,\alpha}{(z-\alpha)^3}$
$(\cos \omega k T_d)$		$\dfrac{z(z-\cos \omega T_d)}{z^2 - 2z\cos \omega T_d + 1}$
$(\sin \omega k T_d)$		$\dfrac{z \sin \omega T_d}{z^2 - 2z\cos \omega T_d + 1}$
$\left(\alpha^k \cos \omega k T_d\right)$		$\dfrac{z(z-\alpha\cos \omega T_d)}{z^2 - 2z\alpha\cos \omega T_d + \alpha^2}$
$\left(\alpha^k \sin \omega k T_d\right)$		$\dfrac{z\alpha \sin \omega T_d}{z^2 - 2z\alpha\cos \omega T_d + \alpha^2}$
$(k \cos \omega k T_d)$		$\dfrac{z\left[(z^2+1)\cos \omega T_d - 2z\right]}{(z^2 - 2z\cos \omega T_d + 1)^2}$
$(k \sin \omega k T_d)$		$\dfrac{z(z^2-1)\sin \omega T_d}{(z^2 - 2z\cos \omega T_d + 1)^2}$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz

Literatur

[1] Ackermann J.: Abtastregelung, 3. Auflage, Springer Verlag, 1988

[2] Chen C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993

[3] Chen C.T.: Linear System Theory and Design, Saunders College Publishing, 1984

[4] FÖllinger_O.: Regelungstechnik, 6.Auflage, Hüthig Verlag, 1990

[5] FÖllinger_O.: Lineare Abtastsysteme, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, 1990

[6] Horn M., Dourdoumas N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004

[7] Kailath T.: Linear Systems, Prentice Hall, 1980

[8] Landgraf C., Schneider G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer Verlag, 1970

[9] Lunze J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik TU Graz