Aufgabe 1:

Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Originalfunktion $f(t)$ der zugehörigen Laplace-Transformierten $\bar{f}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$; es sei

$$\bar{f}(s) = \frac{32}{s\,(s^2 + 12s + 32)}\,.$$

Aufgabe 2:

Ermitteln Sie die Originalfunktion $f(t)$ der zugehörigen Laplace-Transformierten

$$\bar{f}(s) = \frac{2}{(s+3)\,(s+2)^2}\,.$$

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie die Originalfunktion $f(t)$ der zugehörigen Laplace-Transformierten

$$\bar{f}(s) = \frac{3}{s\,(s^2 + 2s + 5)}\,.$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$.

a) Ermitteln Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$.

b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{\mathrm{st}}(t)$.

c) Wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass

$$x(t) = x_{\mathrm{st}}(t)$$

für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt.

d) Ermitteln Sie den Grenzwert $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, falls dieser existiert; geben Sie eine *mathematische Begründung* an!

Aufgabe 5:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -2x_1 + 2x_2\,, \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= 0{,}5x_1 - 2x_2 + 1{,}5u\,, \end{aligned}\right\}$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{0,1}$, $x_2(0) = x_{0,2}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit von $x_{0,1}$, $x_{0,2}$ und $\bar{u}(s)$.

b) Es seien nun $x_{0,1} = x_{0,2} = 0$ und $u(t) = 3\sigma(t)$; ermitteln Sie mithilfe der Grenzwertsätze der LAPLACE-Transformation die Grenzwerte

$$\text{i)} \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) \qquad \text{und} \qquad \text{ii)} \quad \lim_{t\to 0} x_2(t)\,,$$

sofern dieselben existieren. Geben Sie eine *mathematische Begründung* an!

c) Ermitteln Sie die Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie – sofern existent – auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* den Grenzwert $f_\infty = \lim_{t\to\infty} f(t)$ von

$$\text{a)} \quad \bar{f}_1(s) = \frac{s-2}{s^3-2s-4} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad \bar{f}_2(s) = \frac{1}{s^4-3s+1}\,.$$