Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 23.10.2024

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	3	3	2	2	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei die lineare Rekursionsgleichung

$$f_{i+1} = f_i + \alpha f_{i-1} \qquad \text{mit} \qquad f_i = 0 \quad \text{für} \quad i < 0$$

und dem Anfangswert f_0.

a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte $\bar{f}(z)$.

b) Es sei nun $\alpha = 2$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} f_i$, falls dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Ermitteln Sie mithilfe der z-Transformation einen expliziten Ausdruck für f_i und werten Sie diesen für $f_0 = 3$ und $i = 5$ aus.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{x}(s)$ der Integral-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2\alpha x = -\beta \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

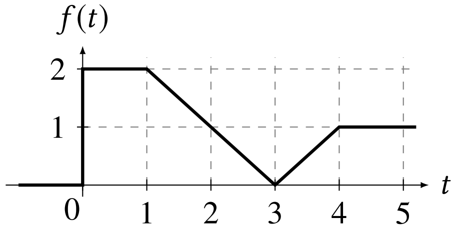
in Abhängigkeit des Anfangszustandes x_0; α und β sind reelle Konstanten.

b) Geben Sie *notwendige* und *hinreichende* Bedingungen für α und β an, so daß der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Zeitfunktion $x(t)$ für $\alpha = 0$ und $\beta = 4$. Existiert in diesem Fall der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$?

Aufgabe 3:

Die Funktion $f(t)$ habe nebenstehenden Verlauf: Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der Funktion $f(t)$.



Aufgabe 4:

Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierten von

a) $f(t) = \sin^2 3t$ und b) $g(t) = \sin(3t) \cdot \cos(3t)$.

Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $g(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 18.12.2024

Nachname / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	3	3	2	2	
erreichte Punkte					

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$x_{i+1} = 2x_i - 5\sigma_{i-2}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

mit dem Anfangswert x_0 und der diskreten Sprungfunktion σ_i. Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die zugehörige Lösung x_i.

Aufgabe 2:

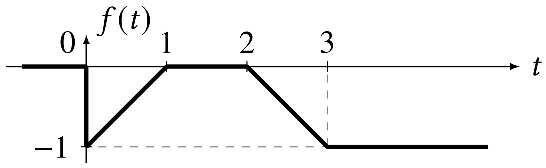
Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{-3t} \sin(t - \pi)$.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Laplace-Transformierte $\bar{f}(s)$.

b) Die Funktion $g(t)$ wird durch zweimalige Differentiation der Funktion $f(t)$ nach dem Argument t gebildet: $g(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$. Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige Laplace-Transformierte $\bar{g}(s)$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Laplace-Tranformierte $\bar{f}(s)$ der unten dargestellten Funktion $f(t)$.



b) Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte $\bar{g}(s)$ der Funktion $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Aufgabe 4:

Ermitteln Sie für die vorgegebenen z-Transformierten $f(z)$ und $g(z)$ in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise jeweils den Grenzwert der Originalfunktion

$$\lim_{i\to\infty} f_i \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} g_i,$$

falls dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

$$(i) \qquad f(z) = 2 + \frac{3z + 3}{(z^2 + 0.5z - 0.5)(z + 0.5)}$$

$$(ii) \qquad g(z) = 1 - \frac{2.5z^2}{(z^2 + 1.5z + 0.5)(z + 0.3)}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 31.1.2025

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	2	3	3	2
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

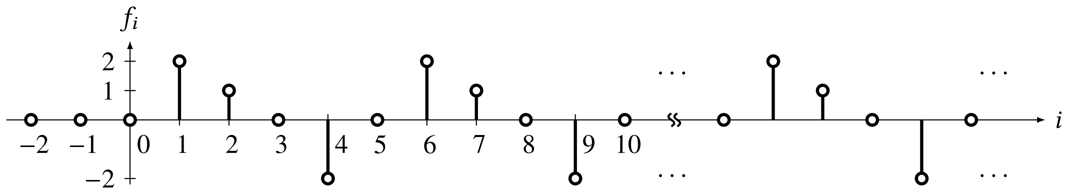
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y + t\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad \text{mit dem Anfangswert } y(0) = y_0\,.$$

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Lösung $y(t)$.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $y_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, sofern er existiert.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte obiger Folge $\bar{f}(z)$.

b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = \frac{6z^3 + 3z^2 - 6}{z^5 - 1}\,.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie den Anfangswert $x(0) = \lim\limits_{t\to 0} x(t)$ der LAPLACE-Transformierten

$$\bar{x}(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}\,.$$

b) Ermitteln Sie *mathematisch nachvollziehbar* die zugehörige Originalfunktion $x(t)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{h}(z)$ einer Folge (h):

$$\bar{h}(z) = \frac{z - 2}{(-2z^2 - \alpha z - \beta)(z - 1)}\,,$$

mit den Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für α und β an, damit der Grenzwert $h_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} h_i$ existiert und bestimmen Sie ihn.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 14.03.2025

Nachname / Vorname(n):

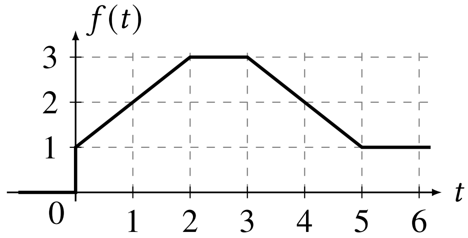
Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	2	3	3	2
erreichte Punkte				

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

Die Funktion $f(t)$ habe nachfolgenden Verlauf:



Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der Funktion $f(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{\beta s^2 + (9\beta - 1)s + 9(\beta - 1)}{s^3 + 6s^2 + 9s}$$

einer Funktion $f(t)$. Hierbei ist β ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters β so, dass $\lim_{t\to\infty} f(t) = 5$ gilt. *Begründen* Sie, warum im vorliegenden Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

b) Ermitteln Sie für $\beta = 1$ in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfunktion $f(t)$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung

$$x_{i+1} = 0.4x_i + 5u_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße $u_i = (-\frac{1}{\pi})^{-i}$.

a) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, *sofern* dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die z-Transformierte einer Folge (f):

$$\bar{f}(z) = 1 + \frac{z^4 - 16}{z^5 - 2z^4}$$

a) Berechnen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Folge (f).

b) Skizzieren Sie die Elemente f_i der Folge (f) für $i = 0, 1, \ldots, 10$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: IRT
am 7.5.2025

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	3	3	2	2
erreichte Punkte				

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

Aufgabe 1:

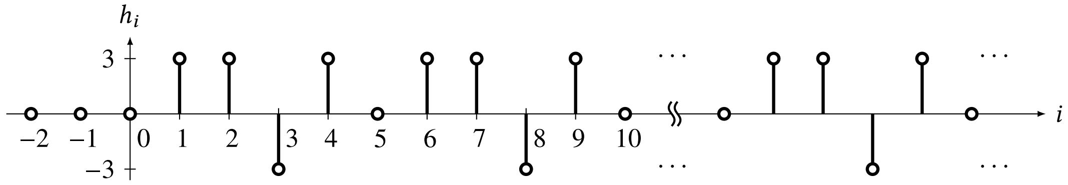
a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Originalfunktion $y(t)$ der LAPLACE-Transformierten

$$\bar{y}(s) = \frac{10}{s\,(s^2 + 4s + 5)} .$$

b) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $y_{\mathrm{st}}(t)$, sofern sie existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge (h) mit den Elementen h_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte obiger Folge $\bar{h}(z)$.

b) Die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f) sei gegeben durch

$$\bar{f}(z) = \frac{z^5 + z^4 - z^3 + z^2}{z^5 - 1} .$$

Stellen Sie die Folge (f) graphisch dar. Wie hängen $\bar{f}(z)$ und $\bar{h}(z)$ zusammen?

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + t\mathrm{e}^{2t} , \qquad \text{mit dem Anfangswert } x(0) = x_0 .$$

a) Bestimmen Sie mithilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $x_\infty := \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, sofern er existiert. Begründen Sie!

Aufgabe 4:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f):

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{(-2z^2 + \beta z + \alpha)(z - 1)} ,$$

mit den Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Geben Sie *notwendige und hinreichende* Bedingungen für α und β an, so daß der Grenzwert $f_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} f_i$ existiert und bestimmen Sie diesen.