

---

# Schriftliche Prüfung in **Signaltransformationen**

## Teil: Dourdoumas

am 29.10.2020

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

---

	①	②	③
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

**Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion  $f(t) = e^{-4t} \left[ \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} t^2 \right]$ .

- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE-Transformierte  $\bar{f}(s)$ .
- Die Funktion  $g(t)$  wird durch Differentiation der Funktion  $f(t)$  nach dem Argument  $t$  gebildet:  $g(t) = \frac{df}{dt}$ . Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte  $\bar{g}(s)$ .

**Aufgabe 2:**

- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte der Folge ( $f$ ) mit den Elementen  $f_i = i(i-2) \cdot 5^{-i}$  mit  $i = 0, 1, 2, \dots$
- Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert  $f_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ , falls dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{\beta s^2 + (4\beta - 1)s + 4(\beta - 1)}{s^3 + 4s^2 + 4s}$$

einer Funktion  $f(t)$ . Hierbei ist  $\beta$  ein reeller Parameter.

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters  $\beta$  so, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 4$  gilt. *Begründen* Sie, warum im vorliegenden Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf.
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfunktion  $f(t)$ .

# Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**

## Teil: Dourdoumas

am 10.12.2020

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

---

	1	2	3
erreichbare Punkte	2,5	4	3,5
erreichte Punkte			

*Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!*

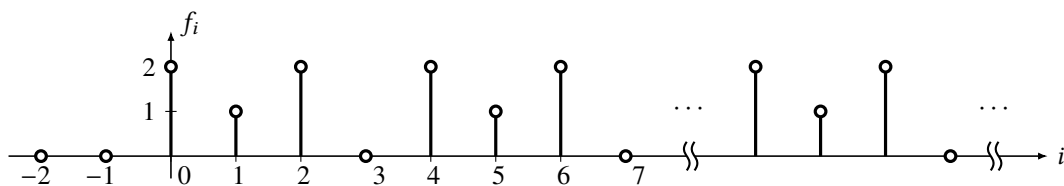
**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie für die unten angegebenen LAPLACE-Transformierten die Grenzwerte der jeweiligen Originalfunktionen für  $t \rightarrow \infty$ , d. h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , falls diese jeweils existieren. Begründen Sie Ihre Antwort auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*!

$$\text{a) } \bar{f}_1(s) = \frac{8}{-s^3 - 4s^2 - 4s} \quad \text{b) } \bar{f}_2(s) = \frac{-5}{s^3 + 2s + 1} \quad \text{c) } \bar{f}_3(s) = \frac{s - 1}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Folge ( $f$ ) mit den Elementen  $f_i$  gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie die  $z$ -Transformierte  $\bar{f}(z)$  dieser Folge auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*.

b) Die  $z$ -Transformierte  $\bar{g}(z)$  der Folge ( $g$ ) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = \frac{-4z^2 - 2z - 4}{z^2(z^4 - 1)}.$$

Stellen Sie die Folge ( $g$ ) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: zeigen und verwenden Sie dazu den Zusammenhang zwischen  $\bar{g}(z)$  und  $\bar{f}(z)$ .

c) Zeigen Sie mithilfe des Endwertsatzes der  $z$ -Transformation *warum* der Grenzwert  $g_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$  nicht existiert.

**Aufgabe 3:**

Geben sei die Integral-Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3}x + \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

mit dem Anfangswert  $x(t = 0) = x_0$ . Die Eingangsfunktion ist gegeben durch

$$u(t) = \cos(t - \pi/3) \cdot \sigma(t - \pi/3).$$

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte  $\bar{x}(s)$  in Abhängigkeit des Anfangszustandes  $x_0$ .

b) Ermitteln Sie für  $x_0 = 0$  durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Lösung  $x(t)$ . Begründen Sie Ihre Antwort!

---

**Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen****  
**Teil: Dourdoumas**  
**am 11.2.2021**

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

---

	①	②
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

---

**BEGRÜNDEN SIE BITTE IHRE ANTWORTEN !**

**Aufgabe 1**

Betrachten Sie zwei Folgen  $(f)$  bzw.  $(h)$  mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\bar{f}(z) = \frac{1+z^7}{z^{10}+z^{11}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{h}(z) = \frac{1-z^{10}}{z^{12}-z^{14}}.$$

- Bestimmen Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte  $f_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$  und  $h_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} h_i$ , falls diese existieren. Begründen Sie Ihre Antworten!
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen  $(f)$  und  $(h)$ .
- Ermitteln Sie die z-Transformierte der Folge  $(g) = (f) - (h)$  mit den Elementen  $g_i = f_i - h_i$ .
- Skizzieren Sie die Folge  $(g)$  für  $0 \leq i \leq 14$ .

**Aufgabe 2**

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0,75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

mit den Anfangswerten  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  und der Eingangsfunktion  $u(t)$ .

- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Laplace-Transformierten  $\bar{x}_1(s)$  und  $\bar{x}_2(s)$  in Abhängigkeit der Anfangswerte  $x_1(0)$  und  $x_2(0)$  sowie der Laplace-Transformierten  $\bar{u}(s)$ .
- Die Anfangswerte betragen nun  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  und die Eingangsfunktion lautet  $u(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ . Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige Lösung  $x_1(t)$  sowie die stationäre Lösung  $x_{1,st}(t)$ , falls diese existiert.