Schriftliche Prüfung in **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 29.10.2020

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{-4t}\left[\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}t^2\right]$.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.

b) Die Funktion $g(t)$ wird durch Differentiation der Funktion $f(t)$ nach dem Argument t gebildet: $g(t) = \frac{df}{dt}$. Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{g}(s)$.

Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte der Folge (f) mit den Elementen $f_i = i(i-2)\cdot 5^{-i}$ mit $i = 0,1,2,...$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$, *falls* dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{\beta s^2 + (4\beta-1)s + 4(\beta-1)}{s^3+4s^2+4s}$$

einer Funktion $f(t)$. Hierbei ist β ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters β so, dass $\lim_{t\to\infty} f(t) = 4$ gilt. *Begründen* Sie, warum im vorliegenden Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

b) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfunktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 10.12.2020

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	2,5	4	3,5
erreichte Punkte			

Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*!

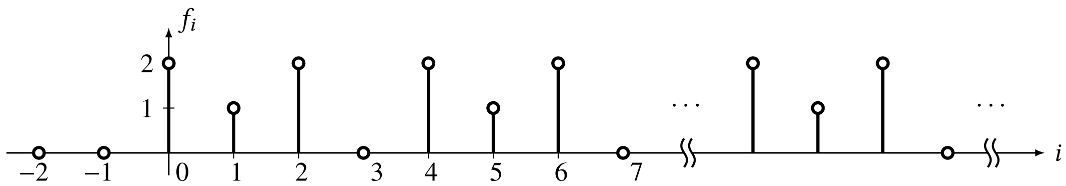
Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für die unten angegebenen LAPLACE-Transformierten die Grenzwerte der jeweiligen Originalfunktionen für $t \to \infty$, d. h. $\lim_{t\to\infty} f(t)$, falls diese jeweils existieren. Begründen Sie Ihre Antwort auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*!

a) $\bar{f}_1(s) = \dfrac{8}{-s^3 - 4s^2 - 4s}$ b) $\bar{f}_2(s) = \dfrac{-5}{s^3 + 2s + 1}$ c) $\bar{f}_3(s) = \dfrac{s-1}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ dieser Folge auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*.

b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = \frac{-4z^2 - 2z - 4}{z^2(z^4 - 1)}\,.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: zeigen und verwenden Sie dazu den Zusammenhang zwischen $\bar{g}(z)$ und $\bar{f}(z)$.

c) Zeigen Sie mithilfe des Endwertsatzes der z-Transformation *warum* der Grenzwert $g_\infty = \lim_{i\to\infty} g_i$ nicht existiert.

Aufgabe 3:

Geben sei die Integral-Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{3}\,x + \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$. Die Eingangsfunktion ist gegeben durch

$$u(t) = \cos(t - {}^{\pi}/_{3}) \cdot \sigma(t - {}^{\pi}/_{3})\,.$$

a) Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{x}(s)$ in Abhängigkeit des Anfangszustandes x_0.

b) Ermitteln Sie für $x_0 = 0$ durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 11.2.2021

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

BEGRÜNDEN SIE BITTE IHRE ANTWORTEN !

Aufgabe 1

Betrachten Sie zwei Folgen (f) bzw. (h) mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\bar{f}(z) = \frac{1+z^7}{z^{10}+z^{11}} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{h}(z) = \frac{1-z^{10}}{z^{12}-z^{14}}\,.$$

- Bestimmen Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$ und $h_\infty := \lim_{i\to\infty} h_i$, *falls* diese existieren. *Begründen Sie Ihre Antworten !*
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen (f) und (h).
- Ermitteln Sie die z-Transformierte der Folge $(g)=(f)-(h)$ mit den Elementen $g_i = f_i - h_i$.
- Skizzieren Sie die Folge (g) für $0 \le i \le 14$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0{,}75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0)$, $x_2(0)$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Laplace-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ sowie der Laplace-Transformierten $\bar{u}(s)$.
- Die Anfangswerte betragen nun $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und die Eingangsfunktion lautet $u(t) = \cos^2(\frac{\pi}{2} - t)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige Lösung $x_1(t)$ sowie die stationäre Lösung $x_{1,st}(t)$, *falls* diese existiert.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 25. März 2021

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

BEGRÜNDEN SIE BITTE IHRE ANTWORTEN !

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$ sowie dem reellen konstanten Parameter a.

- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Laplace-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte $x_1(0) = x_{10}$ und $x_2(0) = x_{20}$ sowie der Laplace-Transformierten $\bar{u}(s)$.
- Die Eingangsfunktion lautet nun $u(t) = \sin(t)\sin(\frac{\pi}{2} - t)$ und der Parameter $a = 0$. Ermitteln Sie *mathematisch nachvollziehbar* mit Hilfe der Laplace-Transformation die zugehörige Lösung $x_1(t)$ sowie die stationäre Lösung $x_{1,st}(t)$, *falls* diese existiert.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Folgen (f), (h) und (p) mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\bar{f}(z) = \frac{1+z^6}{z^6+z^7}, \quad \bar{h}(z) = 1{,}5 + \frac{1-z^8}{z^9-z^{11}} \quad \text{und} \quad \bar{p}(z) = -1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^4}.$$

- Bestimmen Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$, $h_\infty := \lim_{i\to\infty} h_i$ und $p_\infty := \lim_{i\to\infty} p_i$, *falls* diese existieren. *Begründen Sie Ihre Antworten!*
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen (f), (h) und (p).
- Skizzieren Sie für $0 \le i \le 9$ die Folgen (f), (h) *und* (p).

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 29.4.2021

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Funktion $f(t)=e^{-5t}\left[2\sin(-t+\frac{\pi}{3})+t^3\right]$.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.

b) Durch Differentiation obiger Funktion $f(t)$ nach t wird die Funktion $g(t):=\frac{df}{dt}$ gebildet. Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{g}(s)$.

Aufgabe 2:

- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte der Folge (f) mit den Elementen $f_i=(-1+\frac{1}{3}i)i \quad (i=0,1,2,...)$.
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte der Folge (g) mit den Elementen $g_i=\alpha^i\cdot(i^2-3i)$ mit $i=0,1,2,...$ Hierbei ist α ein reeller konstanter Parameter.
- Ermitteln Sie den größtmöglichen Bereich des Parameters α damit der Grenzwert $g_\infty:=\lim_{i\to\infty} g_i$ existiert. Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert *falls* dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s)=\frac{(\alpha+5)s^2+(4\alpha+19)s+16}{s\left[(s+2)^2+\alpha^2\right]}$$

einer Funktion $f(t)$. Hierbei ist α ein reeller konstanter Parameter.

- Ermitteln Sie den größtmöglichen Bereich des Parameters α damit der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert.
- Bestimmen Sie *mathematisch nachvollziehbar* mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation denjenigen Wert des Parameters α, so dass der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)=4$ beträgt. Ermitteln Sie für diesen Fall in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfunktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 24. Juni 2021

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

AUFGABE 1

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

mit dem reellen Parameter a , den Anfangswerten $x_1(0)$, $x_2(0)$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

- Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit des Parameters a , der Anfangswerte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ sowie der LAPLACE-Transformierten $\bar{u}(s)$.
- Für die Anfangswerte gilt nun $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Parameter a beträgt $a = 4$. Als Eingangsfunktion $u(t)$ dient jeweils eine der folgenden zwei Funktionen:

  b$_1$) $u_1(t) = 2\sin^2 t$

  b$_2$) $u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 4 \\ 2 - 2\cos^2(t-4) & \text{für } t \ge 4 \end{cases}$

  Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* für jeden Fall die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

AUFGABE 2

Betrachten Sie die Folgen (f) bzw. (h) mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\bar{f}(z) = 1 + \frac{1-z^6}{z^6+z^7} \quad \text{bzw.} \quad \bar{h}(z) = \bar{f}(-z) - 1 .$$

- Ermitteln Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$ und $h_\infty := \lim_{i\to\infty} h_i$, *falls* diese existieren. *Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!*
- Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen (f) und (h).
- Ermitteln Sie die z-Transformierte der Folge $(g) = (f) + (h)$ mit den Elementen $g_i = f_i + h_i$.
- Skizzieren Sie die Folge (g) für $0 \le i \le 10$.