
Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: „Dourdoumas“
am 11.10.2019

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	①	②	③
erreichbare Punkte	5	3	2
erreichte Punkte			

!! Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch* !!

Aufgabe 1:

Gegeben ist ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - 3x_2 - u\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ und der Eingangsgröße $u(t) = 2\sigma(t)(1 + e^{-t})$. Hierbei ist $\sigma(t)$ die Sprungfunktion.

- Stellen Sie die Funktion $u(t)$ graphisch dar und ermitteln Sie ihre LAPLACE-Transformierte.
- Ermitteln Sie die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte x_{10} und x_{20} .
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation die Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t)$, sofern diese existieren. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
- Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $x_2(t)$ für den Fall $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung

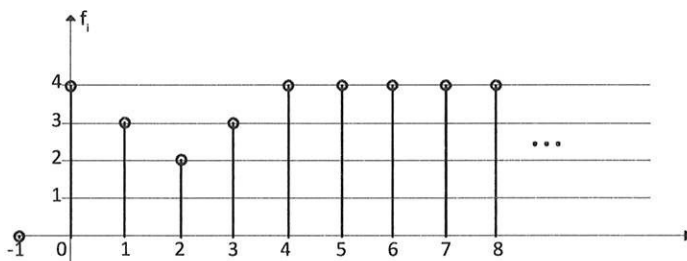
$$x_{i+1} = 0.7x_i + u_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1.5$ und der Eingangsgröße $u_i = 2 \cdot (-0.3)^i$.

- Berechnen Sie die z-Transformierte $\bar{x}(z)$.
- Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i .
- Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, sofern dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß nachfolgender Abbildung:



Beweisen Sie, dass die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ der Folge (f) durch

$$\bar{f}(z) = \frac{1 + z - z^2 - z^3 + 4z^4}{-z^3 + z^4}$$

gegeben ist.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**

Teil: Dourdoumas

am 17.12.2019

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \cos(t + \frac{\pi}{4}) + 3te^{-2t}$.

- Bestimmen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.
- Gegeben sei weiters die Funktion $g(t)$, welche durch Integration von $f(t)$ gewonnen wird, d. h.

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Bestimmen Sie die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{g}(s)$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die beiden Rekursionsgleichungen

$$f_{i+1} = \frac{2}{3}f_i - \frac{1}{3}g_i \quad \text{und} \quad g_{i+1} = \frac{1}{3}g_i - u_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

mit $u_i = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i - \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \sigma_{i-1}$ und den Anfangswerten f_0 und g_0 .

- Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte $\bar{u}(z)$ der Eingangsfolge (u).
- Bestimmen Sie weiters die z-Transformierten $\bar{f}(z)$ und $\bar{g}(z)$.
- Setzen Sie nun $f_0 = 0$ und $g_0 = 0$; ermitteln Sie eine explizite Darstellung für f_i auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{\alpha}{s^3 + 2s^2 + 10s}$$

mit dem konstanten Parameter α .

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters α so, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1,5$$

gilt. Begründen Sie warum hier der Grenzwertsatz angewandt werden darf.

- Ermitteln Sie nun auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.
- Bestimmen sie die stationäre Lösung $f_{st}(t)$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: „Dourdoumas“
am 14.1.2020

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	①	②	③
erreichbare Punkte	4	3	3
erreichte Punkte			

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!

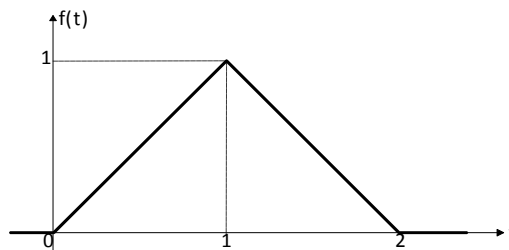
AUFGABE 1:

- a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -3x + u$$

mit $u(t) = 10 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ und dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$.

- b) Ermitteln Sie - falls sie existiert - die stationäre Lösung $x_{st}(t)$ und wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass $x(t) = x_{st}(t)$ für alle Werte $t \geq 0$ gilt.

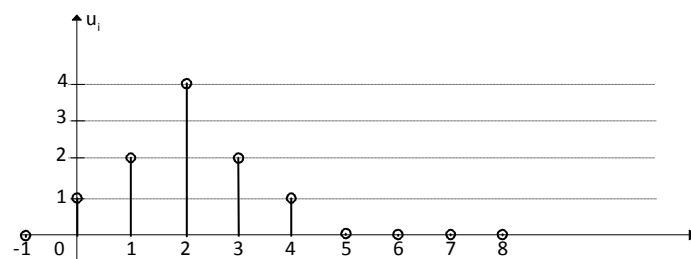
AUFGABE 2: Gegeben sei die Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung

- a) $F(s)$ sei die Laplace-Transformierte obiger Funktion. $G(s) := F(s)(1 + e^{-2.5s})$ sei die Laplace-Transformierte der Funktion $g(t)$. Stellen Sie $g(t)$ graphisch dar.
- b) Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte $H(s)$ der Funktion $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ mit $t \geq 2$.

AUFGABE 3: Gegeben sei die lineare Rekursionsgleichung für $i=0, 1, 2, \dots$

$$x_{i+1} - ax_i + \sigma_{i-1}u_{i-1} = 0$$

mit dem Parameter a , dem Anfangswert x_0 und der Größe u_i gemäß der Abbildung:



- a) Ermitteln Sie die z-Transformierte der Funktion u_i und bestimmen Sie durch Anwendung der z-Transformation die Funktion $X(z)$ in Abhängigkeit von x_0 und a .
- b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a und x_0 den Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, sofern dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**

Teil: Dourdoumas

am 13.3.2020

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	2	5	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{s + \beta}{s^3 - 2\alpha s^2 + (\alpha^2 + \beta^2)s}$$

mit den reellen Konstanten α und β . Geben Sie *notwendige* und *hinreichende* Bedingungen für α und β an, so dass der Grenzwert $f_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein System von (gekoppelten) Differentialgleichungen

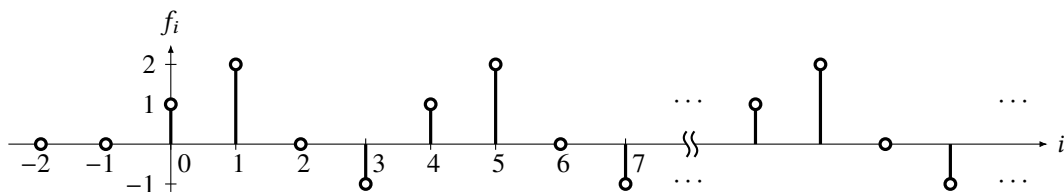
$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{1,0}$ und $x_2(0) = x_{2,0}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

- Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit von $\bar{u}(s)$ und den Anfangswerten.
- *Fall a)* Betrachten Sie zunächst den Fall $u(t) \equiv 0$ und $x_{1,0} = x_{2,0} = 1$.
 - i) Ermitteln Sie ausgehend von $\bar{x}_1(s)$ die Originalfunktion $x_1(t)$.
 - ii) Geben Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)$ an – sofern er existiert.
- *Fall b)* Behandeln Sie nun einen anderen Fall mit $u(t) = 10 e^{-t}$ und $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$.
 - i) Ermitteln Sie wiederum ausgehend von $\bar{x}_1(s)$ die Originalfunktion $x_1(t)$.
 - ii) Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{1,st}(t)$, sofern sie existiert.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Folge (f) mit den Elementen f_i gemäß folgender Abbildung:



- a) Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die z-Transformierte obiger Folge $\bar{f}(z)$.
- b) Die z-Transformierte $\bar{g}(z)$ der Folge (g) sei gegeben durch

$$\bar{g}(z) = 2z^{-2} \frac{z^3 + 2z^2 - 1}{z^4 - 1}.$$

Stellen Sie die Folge (g) graphisch dar. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**

Teil: Dourdoumas

am 30.6.2020

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	3,5	2	1,5	3
erreichte Punkte				

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -3x + u,$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = \gamma e^{-\alpha t}$ (γ, α konstant).

- Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{x}(s)$.
- Ermitteln Sie ausgehend von $\bar{x}(s)$ die Lösung $x(t)$ (*Hinweis*: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha \neq 3$ und $\alpha = 3$).
- Stellen sie (qualitativ) den Verlauf von $x(t)$ für $\alpha = 3, \gamma = 1, x_0 = 0$ graphisch dar.

Aufgabe 2:

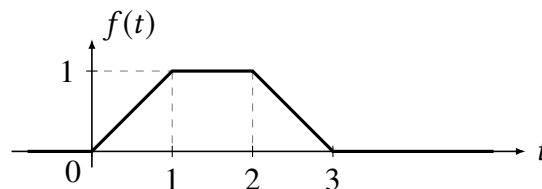
- Zeigen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise*, daß die z -Transformierte der Folge (f) mit den Elementen $f_i = 3i - i^2$ (mit $i = 0, 1, 2, \dots$) gegeben ist durch

$$\bar{f}(z) = 2z \frac{z-2}{(z-1)^3}.$$

- Ermitteln Sie den Grenzwert $f_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$, so dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Grenzwertsatzes der z -Transformation!

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der nachfolgend dargestellten Funktion $f(t)$.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\bar{x}(s) = \frac{x_0}{s+2} + \frac{s}{(s+2)(s^2+4)}.$$

- Ermitteln Sie *mathematisch nachvollziehbar* die zugehörige Originalfunktion $x(t)$.
- Bestimmen Sie die stationäre Lösung $x_{st}(t)$.
- Wählen Sie nun x_0 so, daß $x(t) \equiv x_{st}(t)$ für alle $t \geq 0$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**

Teil: Dourdoumas

am 30.7.2020

1. Durchgang

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	2
erreichte Punkte			

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!

Aufgabe 1:

- a) Betrachten Sie die z -Transformierte $\bar{f}(z)$ einer Folge (f) mit den Elementen f_i

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{z^3 + az^2 - 0,7z + 0,7}, \quad (a \text{ reell, konstant}).$$

Begründen Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* warum der Grenzwert $f_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ für $a > 0$ *nicht* existiert.

- b) Die Folge (g) mit den Elementen g_i besitze die z -Transformierte

$$\bar{g}(z) = \frac{z + 2}{-2z^2 + 2(1 + b)z - 2b}, \quad (b \text{ reell, konstant}).$$

Kann b so gewählt werden, daß $g_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} g_i = -3$ ist? Falls ja, bestimmen Sie b . Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie notwendige *und* hinreichende Bedingungen für die Existenz von g_∞ angeben.

Aufgabe 2:

Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem

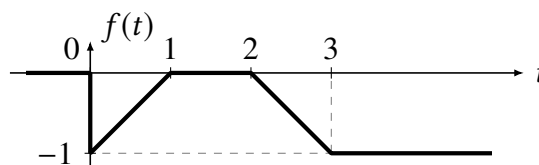
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{1,0}$, $x_2(0) = x_{2,0}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

- Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte und der LAPLACE-Transformierten $\bar{u}(s)$.
- Die Eingangsfunktion sei $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$; bestimmen Sie deren LAPLACE-Transformierte.
- Bestimmen Sie für $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$ mithilfe der LAPLACE-Transformation auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die Lösung $x_1(t)$ und die zugehörige stationäre Lösung $x_{1,st}(t)$.

Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der unten dargestellten Funktion $f(t)$.



- b) Ermitteln Sie die LAPLACE-Transformierte $\bar{g}(s)$ der Funktion $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$.