Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 06.10.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(t) = e^{-4t}\left[\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+t\right]$.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\overline{f}(s)$.

b) Die Funktion $g(t)$ wird durch Differentiation der Funktion $f(t)$ nach dem Argument t gebildet:

$$g(t) = \frac{df}{dt}.$$

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\overline{g}(s)$.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte der Folge (f) mit den Elementen $f_i = i^2 - 2i \quad (i = 0,1,2,...)$ durch

$$\overline{f}(z) = \frac{z(-z+3)}{(z-1)^3}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte der Folge (g) mit den Elementen

$$g_i = (0.4)^i \cdot (i^2 - 2i) \quad (i = 0,1,2,...).$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $g_\infty := \lim_{i\to\infty} g_i$, falls dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte

$$\overline{f}(s) = \frac{(\alpha+1)s^2 + (4\alpha+3)s + 4\alpha}{s(s+2)^2}$$

einer Funktion $f(t)$. Hierbei ist α ein konstanter Parameter.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters α so, dass $\lim_{t\to\infty} f(t) = 4$ gilt. *Begründen* Sie, warum in diesem Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

b) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 18.12.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	3	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 - 2u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ und der Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t) + e^{-t}$. Hierbei ist $\sigma(t)$ die Sprungfunktion.

a) Stellen Sie die Funktion $u(t)$ graphisch dar.

b) Ermitteln Sie die LAPLACE-Transformierten $\overline{x}_1(s)$ und $\overline{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der Anfangswerte x_{10} und x_{20}.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ und $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern diese existieren. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

d) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 0.75x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße $u_i = (-0.5)^i$.

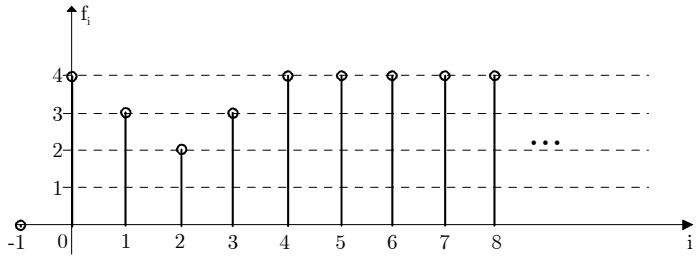
a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $\overline{x}(z)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, sofern dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*!

c) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine Folge (f) mit Elementen f_i gemäß nachfolgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass die z-Transformierte $\overline{f}(z)$ der Folge (f) durch

$$\overline{f}(z) = \frac{4z^4 - z^3 - z^2 + z + 1}{z^3(z-1)}$$

gegeben ist.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 12.01.2018

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = 10e^{-t}$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Bestimmen Sie im Bildbereich die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ und $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern diese existieren. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$f(t) = e^{-2t}(t^2 + 6t)$$

durch

$$F(s) = \frac{6s + 14}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2,...$$

mit den reellen Parametern α und β. Es ist bekannt, dass für den Anfangswert $x_0 = 0$ und die Eingangsgröße $u_i = (0,5)^i$ die z-Transformierte $X(z)$ der Folge x_i durch

$$X(z) = \frac{4z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

gegeben ist.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$ mit Hilfe der z-Transformation, falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
b) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Folge x_i für obige Werte von x_0 und u_i.
c) Ermitteln Sie die Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus Signaltransformationen
Teil: Dourdoumas
am 16.3.2018

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

GEBEN SIE IHRE ANTWORTEN MATHEMATISCH NACHVOLLZIEHBAR !

Aufgabe 1:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 2x_i - u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit $x_0 = 1$ und

$$u_i = 1 - \cos^2\left(i\tfrac{\pi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte der Folge (*u*) mit den Elementen u_i durch

$$U(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$.

c) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 + 5u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$ und $u(t) = 3e^{5t}$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die zugehörigen LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

b) Bestimmen Sie im Bildbereich den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$, sofern dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie für die z-Transformierten $F(z)$ und $G(z)$

$$F(z) = \frac{2z + 2}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$
$$G(z) = \frac{1 + z^2 + 2z}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise jeweils den Grenzwert der Originalfunktion

$$\lim_{i\to\infty} f_i \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} g_i,$$

falls dieser existiert.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 4.5.2018

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

GEBEN SIE MATHEMATISCH NACHVOLLZIEHBARE ANTWORTEN !

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$x_{i+2} = x_{i+1} + x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit den Anfangswerten $x_0 = x_1 = 1$. Die Elemente u_i seien bekannt.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte $X(z)$ in Abhängigkeit der z-Transformierten *U(z)*.
b) Betrachten Sie den Fall $u_i = 0$ ($i = 0,1,2,...$) und ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$ und $u(t) = \sin^2(t)$.

1. Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE-Transformierte $X(s)$.
2. Ausgehend von der Laplace-Transformierten *X(s)* ermitteln Sie für den Fall $x(0) = 0$ die zugehörige Lösung *x(t)*.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie für die unten angegebenen Laplace-Transformierten $F(s)$ und $G(s)$ in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise jeweils den Grenzwert der Originalfunktion

$$\lim_{t\to\infty} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} g(t),$$

falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

I. $$F(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 - 2}$$

II. $$G(s) = \frac{1}{-s^2 - 1.5s - 0.5}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 3.7.2018

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -2x + te^{-t}$$

mit dem Anfangswert $x(0) = x_0$.

Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die z-Transformierte $\bar{f}(z)$ einer Folge (f) mit den Elementen f_i:

$$\bar{f}(z) = \frac{z}{[z^2 - a(1+b)z + ab](z-1)}$$

Hierbei sind a und b positive Konstanten.

Ermitteln Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für a und b, damit der Grenzwert $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$ existiert und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die rekursive Relation

$$x_{i+2} + x_{i+1} - 12x_i = u_i \qquad (i = 0,1,2,\dots)$$

mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $u_i = K(1+i)2^i$. Hierbei ist K eine Konstante.

a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $\bar{u}(z)$.
b) Ermitteln Sie die z-Transformierte $\bar{x}(z)$.
c) Ausgehend von $\bar{x}(z)$ ermitteln Sie für $K = 0$ die Lösung x_i.